华章数学译丛

26

Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems

(Second Edition)

偏微分方程教程

（原书第2版）

（美）Nakhlé H. Asmar 著
密苏里大学

陈祖墀 宣本金 译

机械工业出版社
China Machine Press

（原书第2版）

偏微分方程教程

本书通过大量丰富的实例，帮助读者从基本的常微分方程向更多高级概念（偏微分方程、傅里叶级数和边界值问题等）顺利过渡。作者轻松的语言风格使得书中的材料通俗易懂，尤其适合那些渴望了解更多和更深微积分知识的读者。

本书强调理论与实践相结合，介绍了大量偏微分方程在工程和物理学方面的应用，并且提供了相关数学证明和偏微分方程的原理。此外，本书的每一节后都配备了大量的习题，并提供了注释、图标或重要的公式等，突出了书中的重点与难点，方便读者自学。

本书提倡读者利用计算机辅助学习，旨在使读者更直观、更清晰地理解和掌握书中所讲述的题材。读者可以利用从作者网站上下载的Mathematica文件进行上机实践。

作 者 简 介

Nakhlé H. Asmar 1986年于美国华盛顿大学获得博士学位，1988年至今就职于密苏里大学，现为该大学文理学院数学系教授。他的主要研究方向为调和分析。

Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems

(Second Edition)



影印版

ISBN 7-111-15912-8
定价：78.00 元

ISBN 7-111-19746-1
9 787111 197461

投稿热线：(010) 88379604
购书热线：(010) 68995259, 68995264
读者信箱：hzjsj@hzbook.com

ISBN 7-111-19746-1
定价：85.00 元

章 数 学 译 丛

Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems

(Second Edition)

偏微分方程教程

（原书第2版）

（美）Nakhlé H. Asmar 著
密 苏 里 大 学

陈祖墀 宣本金 译

机械工业出版社
China Machine Press

本书系统讲解偏微分方程及其定解问题的求解方法，通过大量实例讨论偏微分方程解的性质，特别强调傅里叶级数在求解边值问题中的作用．书中配有丰富的例题与习题，还采用"专题问题"较为系统地研究某个具体问题，补充和扩展了正文内容．

本书内容丰富、推导严密，包含大量物理背景，为理解和掌握偏微分方程提供了有效途径．本书可作为高等院校数学及相关专业学生的偏微分方程课程教材，同时也可作为工程技术人员、科技工作者的参考书．

本书版权登记号：图字：01-2005-0525

图书在版编目（CIP）数据

偏微分方程教程（原书第2版）/（美）亚斯马（Asmar, N. H.）著；陈祖墀，宣本金译．—北京：机械工业出版社，2006.10

（华章数学译丛）

书名原文：Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems, Second Edition

ISBN 7-111-19746-1

Ⅰ．偏…　Ⅱ．①亚…　②陈…　③宣…　Ⅲ．偏微分方程-教材　Ⅳ．O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 094797 号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码　100037）

责任编辑：耿　娅　迟振春

北京京北制版印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2006年10月第1版第1次印刷

186mm×240mm　·44.5印张

定价：85.00元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线：（010）68326294

译 者 序

偏微分方程这门学科产生于18世纪，是由对弦振动的研究而兴起的，并在19世纪得到迅速发展.

本书通过大量丰富的实例，在各种坐标系中论述了基本的偏微分方程及其定解问题的求解方法，并讨论了解的性质，特别强调了傅里叶级数在求解边值问题中的作用. 为了求解，书中介绍了偏微分方程中常用的特殊函数，例如，勒让德函数、贝塞尔函数等. 另外，还介绍了与求解偏微分方程有关的基本计算方法.

本书内容丰富，物理背景清楚，层次分明，推导严密，图文并茂，并配有丰富的例题与习题，难易适度. 特别是专题问题，它针对某个具体问题进行了较为系统的研究，是正文内容的补充和扩展. 本书可作为高等院校理工科学生和教师的教材，同时也可作为工程技术人员、科技工作者的参考书.

本书由中国科学技术大学数学系陈祖墀教授和宣本金副教授翻译. 陈祖墀翻译第4章、第5章、第9章和索引，其他部分均由宣本金翻译，陈祖墀对译文作了统一校对. 对原著中细小的笔误和印刷错误，在翻译时进行了必要的修改和纠正. 对于书中所涉及的数学术语和外国人名，尽可能参照科学出版社2002年版的《新英汉数学词汇》和广东科技出版社1991年版的《英俄汉数学词汇》.

由于时间仓促，水平有限，译文难免有不妥之处，敬请有关专家、读者指正，以便再版时更正.

译 者

前　　言

自本书第1版出版以来，我很高兴地收到了来自读者的积极回应. 这一版采纳了他们的许多建议，如更多的源自工程和物理的应用、更多的数学证明与理论. 为保持原版的组织结构，这些变化体现在章后面的新增小节里.

本书旨在作为偏微分方程和边值问题(包括傅里叶级数)的现代基础教材，供学完常微分方程基础课程的学生使用.

本书内容与安排

本书是为了读者较好地从常微分方程基础课程过渡到偏微分方程基础课程而设计的. 虽然本书面向那些强调应用的工程、数学和物理等专业的学生，但本版新增内容为教师提供了多种选择：以理论为主的偏微分方程课程，或者强调边值问题和傅里叶级数的偏微分课程. 除了偏微分方程基础课程的核心内容(参见下面的“教学安排”)外，本书还包含许多特别专题，教师可以根据需要讲授，或者作为专题研究的题目. 这些基于核心内容的高级专题基本上是相互独立的.

预修要求

在附录A中，汇总了一些线性常微分方程的基本理论，包括级数法. 教师可以根据需要将这些内容仔细讲授或完全省略，这是为了方便那些已经学过的学生查阅. 特别是，A.4～A.6节包含了对幂级数方法和弗罗贝尼乌斯方法的详细讨论，适合于那些第一次接触这些内容的学生阅读. 有鉴于现在在常微分方程基础课程中省略级数方法这一趋势，我认为有必要对这些内容作较为详细的讨论.

习题和计算机辅助教学

每一节的习题都以一组基础题开始，这些基础题是为了加深读者对该节基本概念的理解而设计的；接着是难度较大的提高题，引导读者对概念进行更深入的理解. 这些提高题通常都给出了详细的提示，以使绝大多数学生都可以完成. 有些节包含了**专题问题**，专题问题是一些较长的习题，其结果有一定价值或涉及相关的应用. 专题问题可以由学生独自完成，或由小组共同完成，或由教师作进一步的讲解.

虽然本书是从传统观点来编写的，无需计算机辅助教学，但还是包含了一些需要利用计算机的例题和习题. 需要用计算机的习题都标上了计算机标记，这些问题都是要求学生利用计算机辅助作图功能研究一些问题(例如，一些特殊函数的傅里叶展开、贝塞尔展开、勒让德展开以及其他展开形式的部分和序列的收敛性)，以及计算那些用手工不易计算出来的数值数据(例如，广义傅里叶级数的系数和超越方程的根).

本版新增内容

本版显著的变动如下：

- 2.2 节增加了一些傅里叶级数的例题和习题，这些例题和习题建立在图形基础上，用于增强学生阅读和理解傅里叶级数图形表示的能力.
- 2.7 节是新的，该节包含了应用傅里叶级数求解机械或电子系统的受迫振动. 我们的讨论超越了该领域的典型步骤，通过对傅里叶级数解的分析，讨论了一种抑制系统高振荡的方法.
- 2.8 节以及 2.9 节的大部分内容是新的. 第 2 章最后三节较完整地讨论了傅里叶级数的逐点收敛以及一致收敛问题，包括分段光滑函数的傅里叶级数表示定理的完整证明. 这些内容的巧妙安排使之更适合于课堂教学.
- 3.4 节做了扩充，包含了特征线、平行图等方法，以及达朗贝尔解的依赖区间.
- 3.10 节是新的，它研究了在矩形区域上具有罗宾边界条件或诺伊曼边界条件的边值问题.
- 4.4 节做了扩充，以包含平面中的圆盘、楔形、片状区域上具有罗宾边界条件或诺伊曼边界条件的边值问题.
- 4.9 节是新的，讨论了贝塞尔函数的一些重要的高级性质，如积分表示和渐近公式. 本节还初步介绍了定常相方法，工程师、物理学家和应用数学家对此非常感兴趣.
- 6.6 节和 6.7 节是新的，这两节介绍了双调和方程和板振动理论. 这两节综合运用了前面几节中的许多重要方法(贝塞尔函数的渐近公式、特征函数展开法和广义傅里叶级数等).
- 7.2 节增加了一些关于卷积的新例子，讨论了卷积在求解边值问题时的作用.
- 7.8 节是新的，讨论了广义函数、分段光滑函数的导数、卷积及其在计算分段光滑函数的傅里叶变换中的应用.
- 7.9 节和 7.10 节是新的，这两节包括杜阿梅尔原理及其在非齐次热传导方程和波动方程中的应用，还引入了偏微分方程的基本解和弱解等概念. 虽然这些内容看起来是纯理论性的，但这两节包含了很多有趣的应用和习题，以激发第一次接触它们的学生的学习兴趣.
- 第 12 章关于格林函数和共形映射的内容是新的，这是一个关于格林函数和共形映射的自封式的处理. 和本书其他部分一样，这一章也是按照便于阅读的方式编写的，该章包含了许多有趣的习题和应用. 12.1 节从线积分的基本性质开始，证明了格林定理，导出格林公式，最后证明了调和函数的基本性质；在 12.2 节和 12.3 节中，证明了调和函数的高斯平均值性质和最大模原理，导出了格林函数，讨论了它们的理论和物理意义. 12.3 节还讨论了求解格林函数的特征函数法；在 12.4 节中，运用镜像法推导出格林函数；12.5 节从多方面介绍解析函数及其在偏微分方程中的应用，该节包含柯西-黎曼方程以及许多有关解析函数在求解狄利克雷问题中的相关应用；12.6 节介绍了共

形映射及其在边值问题中的应用；在 12.7 节和 12.8 节中，运用共形映射推导出格林函数和诺伊曼函数.

- 附录 A.4 是新的，综述了幂级数知识，为其后几节有关幂级数方法的讨论做了铺垫.

教学安排

- **偏微分方程基础课程**. 该课程包含如下核心内容：
  - 第 1 章；
  - 2.1～2.4 节，2.6 节；
  - 第 3 章(3.9～3.11 节为可选内容)；
  - 4.1 节，4.2 节，4.4 节(如需要，可选讲 4.7 节和 4.8 节)；
  - 5.1 节，5.2 节(如需要，可选讲 5.5 节和 5.6 节)；
  - 6.1 节，6.2 节；
  - 7.1～7.7 节；
  - 8.3 节(如需要，可选讲 8.1 节和 8.2 节).
- **强调工程应用的偏微分课程**. 将第 5 章的内容替换为下面任何一节即可：2.7 节，6.3 节，6.5 节，6.6 节和 6.7 节.
- **强调物理应用的偏微分课程**. 将第 7、8 章的小节替换为第 5、11 章的小节.
- **强调数学证明的偏微分课程**. 包含 2.8～2.10 节.

第 12 章关于格林函数的内容以及 4.9 节、6.6 节、6.7 节和 7.8～7.10 节，更适合给低年级研究生或高年级本科生讲授.

相关网站

作者的 Mathematica 文件和一本**学生解题手册**(Student Solutions Manual)，以及其他有关本书的补充材料，可以从作者的网站 http://www.math.missouri.edu/～nakhle 上下载，也可登录华章网站免费下载. 想得到**教师解题手册**(Instructor Solutions Manual)的教师可以直接通过电子邮件 nakhle@math.missouri.edu 与作者联系.

此外，希望扩充 12.5 节中的复变量内容的教师可以参考 N. Asmar 教授的另外一本书《Applied Complex Analysis with Partial Differential Equations》(在 G. Jones 帮助下完成)，由 Prentice Hall 出版社于 2002 年出版. 在教师的要求下，征得该书编辑同意，该书中的材料可以提供给学生.

致谢

Stephen Montgomery-Smith 教授(密苏里大学)向我提出了许多关于本书新版的建议，在此向他表示感谢. 我也非常感谢下面几位审稿人：Grant W. Hart 教授(杨百翰大学物理系)、Robert B. Israel 教授(英国哥伦比亚大学数学系)、David G. Retzloff(密苏里大学化学工程系)、Jun Yu(佛蒙特大学数学与统计系)，他们慷慨地与我分享了关于本书新版的一些思想. 我也很

高兴地感谢 Darryl Yong 教授(Harvey Mudd 学院数学系)和 Mark Lammers 教授(北卡罗来纳大学威尔明顿分校数学系).

对 Ghazi Asmar 教授(圣母玛利亚大学黎巴嫩分校机械工程系)在 2.7 节、6.4 节、6.6 节和 6.7 节中提供的帮助表示衷心的感谢. 同样感谢下面几位数学家：Mark W. Coffey(科罗拉多大学丹佛分校)、Richard Ford(加州州立大学奇科分校)、Stephen J. Greenfield(拉特格大学)、Mark Kon(波士顿大学)、William G. Margulies 和 Saleem Watson(加州州立大学长滩分校)，他们是本书第 1 版的审稿人. 我很荣幸地向 Richard Winkel 在计算机技术上提供的帮助表示感谢.

本书的编辑——Prentice Hall 出版社的 George Lobell 向我提供了许多支持、建议和鼓励，在此向他表示感谢. 同时感谢 Prentice Hall 出版社的制作编辑 Barbara Mack 的帮助和建议.

我特别感谢家人对我的支持. 我很荣幸地将此书献给我的妻子 Gracia、我们的孩子 Julia 和 Thomas，以及我的双亲 Habib 和 Mounira.

Nakhlé H. Asmar

nakhle@math. missouri. edu

有用的公式

三角恒等式

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ $\qquad$ $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$ $\qquad$ $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

$\cos\left(a-\frac{\pi}{2}\right)=\sin \mathrm{a}$ $\qquad$ $\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=\cos a$

$\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$ $\qquad$ $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$

$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$ $\qquad$ $\sin 2a=2\sin a\cos a$

$\cos a+\sin \mathrm{a}=\sqrt{2}\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad$ $\cos a+\sin \mathrm{a}=\sqrt{2}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$

$\alpha\cos a+\beta\sin \mathrm{a}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos(a-b)$，其中 $\cos b=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$，$\sin b=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

复数

$z=x+\mathrm{i}y$ $\qquad$ $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ $\qquad$ $\mathrm{Re}(z)=x$，$\mathrm{Im}(z)=y$

$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)=2x$ $\qquad$ $z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)=2\mathrm{i}y$ $\qquad$ $|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$

$|z|^2=z\cdot\bar{z}=x^2+y^2$ $\qquad$ $z^2=x^2-y^2+2\mathrm{i}xy$ $\qquad$ $\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}=\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}(z\neq 0)$

三角形不等式：如果 z 和 w 是复数，则

$$|z\pm w|\leqslant|z|+|w| \quad 和 \quad ||z|-|w||\leqslant|z\pm w|$$

欧拉恒等式及相关恒等式：如果 x 是任意实数，则

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ $\qquad$ $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}=\cos x-\mathrm{i}\sin x$ $\qquad$ $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}=\overline{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})}$ $\qquad$ $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|=1$

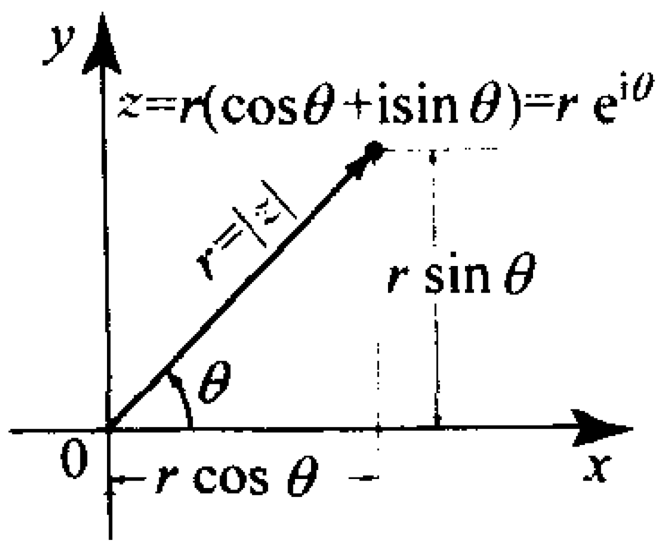
$\cos x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}$ $\qquad$ $\sin x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$ $\qquad$ $(\cos nx+\mathrm{i}\sin nx)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}=\cos nx+\mathrm{i}\sin n$

复数的极坐标表示

$z=x+\mathrm{i}y=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$

$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$



泰勒级数展开：设 z 是实数或复数，则

$$\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \quad （任意 z）$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad （任意 z）$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad （任意 z）$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n}\quad(|z|<1)$$

$$\cosh z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\quad(\text{任意 } z)$$

$$\sinh z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad(\text{任意 } z)$$

有用的积分公式($a\neq0$，b 是实数，m 和 n 是整数)

涉及三角函数的积分

$$\int\cos(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$$

$$\int\sin(ax+b)\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$$

$$\int\cos^{2}(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{x}{2}+\frac{1}{4a}\sin(2(ax+b))+C$$

$$\int\sin^{2}(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{x}{2}-\frac{1}{4a}\sin(2(ax+b))+C$$

$$\int x\cos ax\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a^{2}}\cos ax+\frac{x}{a}\sin ax+C$$

$$\int x\sin ax\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a^{2}}\sin ax-\frac{x}{a}\cos ax+C$$

$$\int x^{2}\cos ax\,\mathrm{d}x=\frac{2x\cos ax}{a^{2}}+\frac{a^{2}x^{2}-2}{a^{3}}\sin ax+C$$

$$\int x^{2}\sin ax\,\mathrm{d}x=\frac{2x}{a^{2}}\sin ax-\frac{a^{2}x^{2}-2}{a^{3}}\cos ax+C$$

$$\int x^{m}\cos ax\,\mathrm{d}x=\frac{x^{m}\sin ax}{a}-\frac{m}{a}\int x^{m-1}\sin ax\,\mathrm{d}x$$

$$\int x^{m}\sin ax\,\mathrm{d}x=-\frac{x^{m}\cos ax}{a}+\frac{m}{a}\int x^{m-1}\cos ax\,\mathrm{d}x$$

$$\int\cos ax\cos bx\,\mathrm{d}x=\frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)}+\frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)}+C\quad(a^{2}\neq b^{2})$$

$$\int\sin ax\sin bx\,\mathrm{d}x=\frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)}-\frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)}+C\quad(a^{2}\neq b^{2})$$

$$\int\cos ax\sin bx\,\mathrm{d}x=\frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)}-\frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}+C\quad(a^{2}\neq b^{2})$$

涉及指数函数的积分

$$\int x\mathrm{e}^{ax+b}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{ax+b}}{a^{2}}(ax-1)+C$$

$$\int x^{m}\mathrm{e}^{ax+b}\mathrm{d}x=\frac{x^{m}\mathrm{e}^{ax+b}}{a}-\frac{m}{a}\int x^{m-1}\mathrm{e}^{ax+b}\mathrm{d}x$$

$$\int\mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^{2}+b^{2}}(a\cos bx+b\sin bx)+C\quad(a^{2}+b^{2}\neq0)$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C \quad (a^2+b^2\neq 0)$$

涉及贝塞尔函数的恒等式($p\geqslant 0$，$a\neq 0$，$n=0$，1，…)

$$\frac{d}{dx}[J_0(x)] = -J_1(x) \qquad \frac{d}{dx}[x^pJ_p(x)] = x^pJ_{p-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-p}J_p(x)] = -x^{-p}J_{p+1}(x) \qquad xJ'_p(x) + pJ_p(x) = xJ_{p-1}(x)$$

$$xJ'_p(x) - pJ_p(x) = -xJ_{p+1}(x) \qquad J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) = 2J'_p(x)$$

$$J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x}J_p(x) \qquad J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta$$

$$\int x^{p+1}J_p(x)\,dx = x^{p+1}J_{p+1}(x) + C \qquad \int x^{-p+1}J_p(x)\,dx = -x^{-p+1}J_{p-1}(x) + C$$

$$\int J_1(x)\,dx = -J_0(x) + C \qquad \int xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x) + C$$

$$\int J_{p+1}(x)\,dx = \int J_{p-1}(x)\,dx - 2J_p(x) \qquad xJ_{p+1}(x) + p\int J_{p+1}(x)\,dx = \int xJ_p(x)\,dx$$

$$\int J_{2n+1}(x)\,dx = -J_0(x) - 2\sum_{k=1}^{n}J_{2k}(x) + C \qquad \int_0^a x^{p+1}J_p\left(\frac{\alpha}{a}x\right)dx = \frac{a^{p+2}}{\alpha}J_{p+1}(\alpha)$$

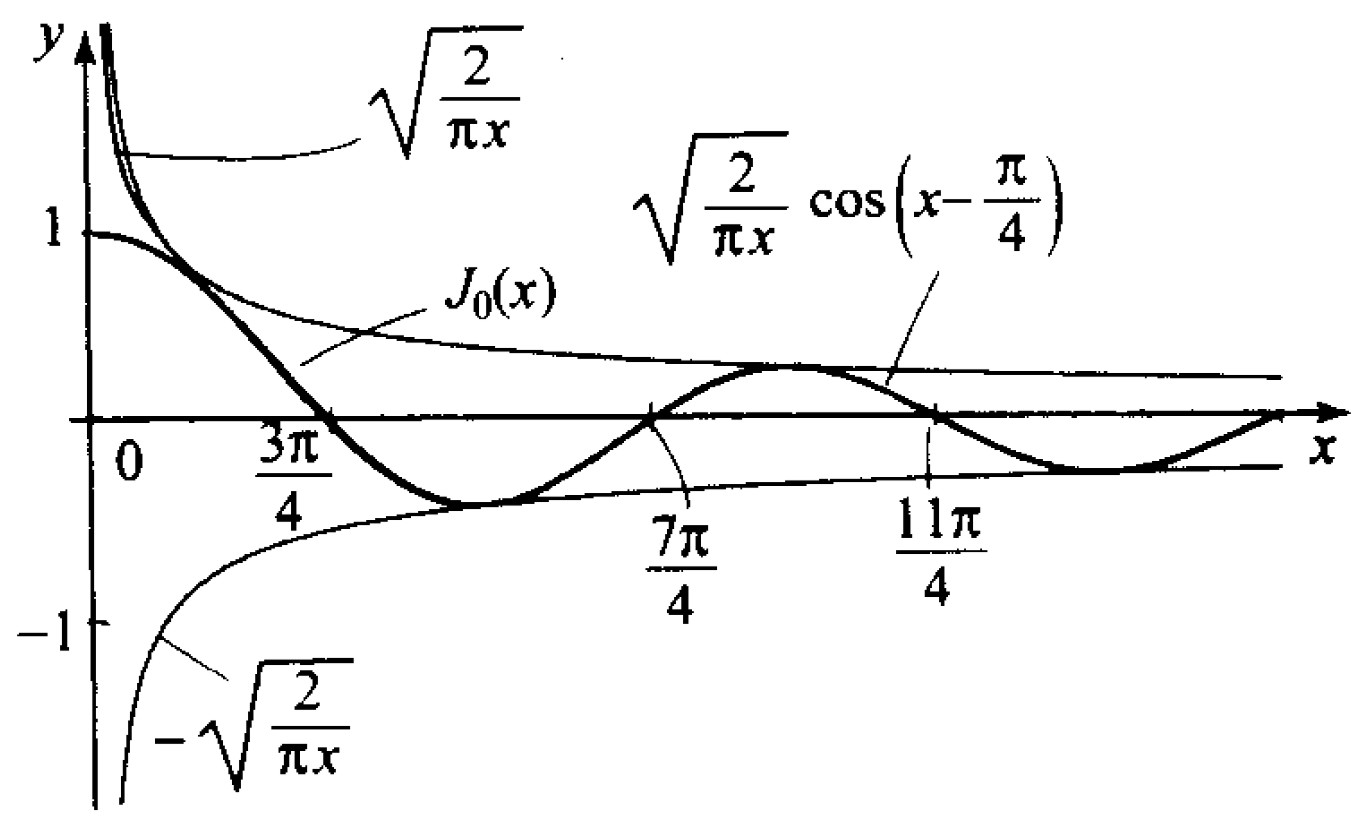
$$\int xJ_{2n}(x)\,dx = xJ_{2n+1}(x) - 2nJ_0(x) - 4n\sum_{k=1}^{n}J_{2k}(x) + C$$

贝塞尔函数的零点和渐近线($n=0$，1，2，…)

$$J_n(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

如果 $\alpha_k=J_n(x)$的第 k 个正零点，则对较大的 k

$$\alpha_k\approx\frac{\pi}{4}+\frac{(n+1)\pi}{2}+k\pi$$



广义积分公式($a\neq 0$)

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{2}，若\ a>0；-\frac{\pi}{2}，若\ a<0.$$

$$\int_0^{\infty}e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$$

$$\int_0^{\infty}e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2|a|}e^{-b^2/(4a^2)}\ (b\neq 0)$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos wx}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2|a|}e^{-|wa|}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(x^2)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\sin(x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

目　录

第1章　应用与方法概述

一切都应该尽可能地简单，但是不要太简单.

——爱因斯坦

综述　本章是自封的，仅需微积分中的一些基本知识，如偏导数. 我们会偶尔引用一些常微分方程基础课程中的一些结论，而这些结论我们汇总在附录 A 中，如需要可以查阅.

导读　本章旨在引入一些在偏微分方程及其边值问题研究中出现的基本记号. 1.1 节引入偏微分方程概念和一些基本而有用的求解技巧；1.2 节着重于偏微分方程发展中的一个简单而重要的例子——弦振动. 我们将带领读者一起纵览该领域的主要里程碑式成果. 本章概述清楚地表明第 2 章对傅里叶级数及其性质的系统研究是必要的.

偏微分方程产生于许多科学和工程技术建模的过程中. 本章我们预览本书中将要学习的思想和方法. 我们的目标是向读者展示偏微分方程及其应用的一些特点，而不是试图给出系统的推导. 特别地，仅以张紧的弦振动为例，我们展示偏微分方程是如何从物理现象建模中产生的，以及对偏微分方程解的解释如何帮助我们理解物理现象. 本章最后专门讲述了傅里叶级数的初步知识，以此显示傅里叶级数在研究偏微分方程应用中的重要性.

1.1　什么是偏微分方程

粗略地说，偏微分方程就是一个含有多个变量的未知函数及其偏导数的方程. 读者可以回忆描述特定类型的常微分方程所涉及的一些概念，如阶、次数、线性性和其他性质. 在偏微分方程分类和学习中还会出现其他概念，如自变量的个数和求解方程的区域等. 本书就是系统学习某些类偏微分方程，特别是强调它们的应用. 本节我们仅仅给出几个初等例子，以向读者展示该课程的特点.

例 1　**一阶偏微分方程**

考虑方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{1}$$

其中 $u=u(x,t)$ 是未知函数. 如果 f 是任意一个单变量可微函数，令

$$u(x,t)=f(x-t),$$

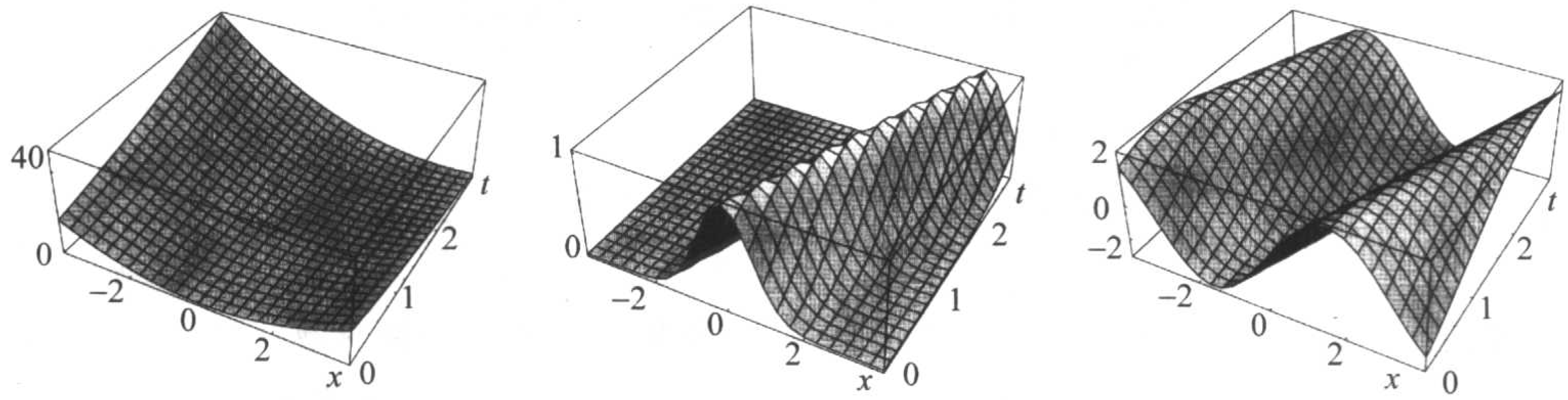
则 u 是方程(1)的解. 事实上，由链式法则，计算得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-f'(x-t) \quad 和 \quad \frac{\partial u}{\partial x}=f'(x-t),$$

所以(1)成立. 方程(1)的一些显式解是

$$(x-t)^2,\quad e^{-(x-t)^2},\quad 3\sin(x-t),\quad 2\cos(x-t),\quad e^{(x-t)},\cdots$$

前面三个函数如图1所示.



a) $u(x,t)=(x-t)^2$　　b) $u(x,t)=\mathrm{e}^{-(x-t)^2}$　　c) $u(x,t)=3\sin(x-t)$

图1　方程(1)的一些显式解. 注意函数 u 在任意直线 $x-t=c$ 上取常值，因为 u 是形如 $u=f(x-t)$ 的解 ■

2

我们所考虑的方程称为平流方程，它来源于流体动力学(有关该方程的一个有趣应用，请参阅1.2节习题27). 这是一个一阶线性齐次偏微分方程. 这里一阶是指方程中所出现的导数的最高阶数，线性齐次是指方程解的任意线性组合仍然是方程的解(在第3章，我们将更详细地讨论这些概念). 由图1可知，方程(1)解的范围可以是很广泛的，方程(1)还是一个比较简单的偏微分方程. 作为比较，你可以回忆一下一阶线性常微分方程，其解族可以比较简单地描述出来. 例如，下面方程

$$y'-y=0 \tag{2}$$

的解族是函数族

$$y=A\mathrm{e}^{x}.$$

如图2所示，其解都是常数乘以解 e^x 的形式. 为选出方程(2)的某个特解，我们需要加上一个初始条件，比如 $y(0)=2$，可以得到解为 $y=2\mathrm{e}^x$.

由图1显然可以看出，为选出偏微分方程(1)的某个特解，我们需要更多信息. 一般地，我们将加上一个确定 u 沿 xt 平面上某条曲线取值的条件，如 u 沿 x 轴取值，这些条件称为**边界条件**或**初始条件**.

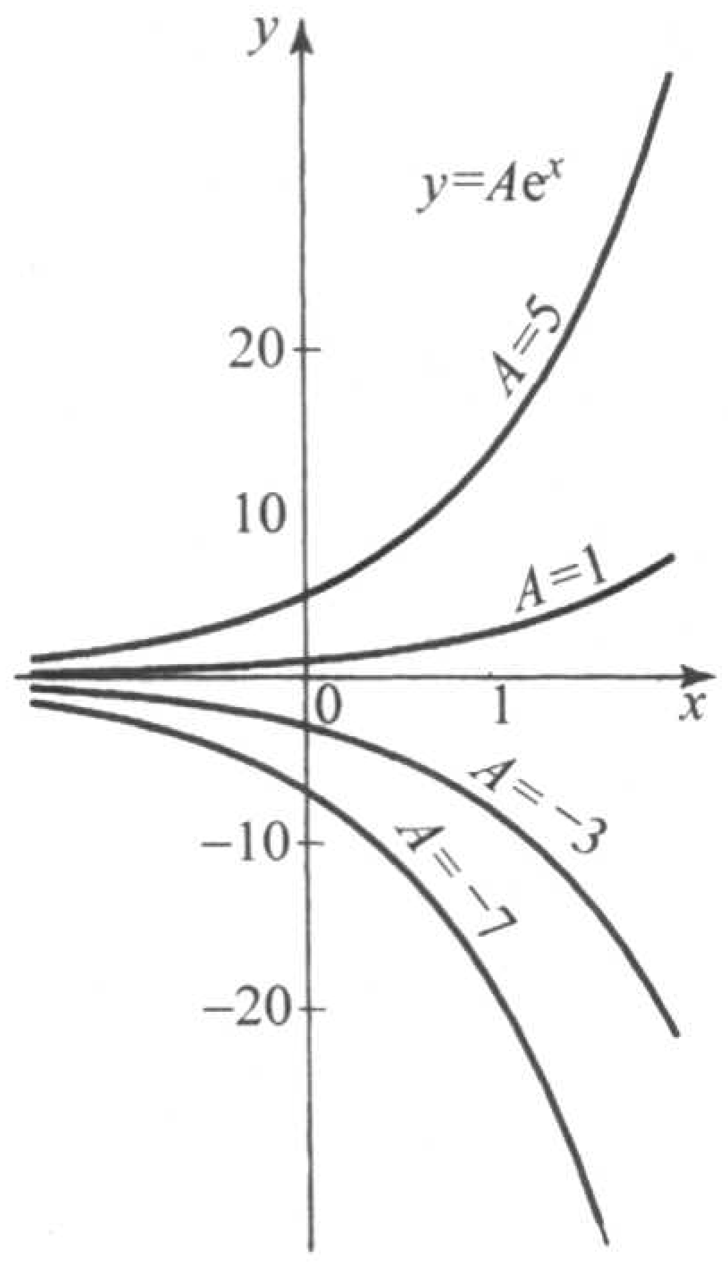


图2　方程(2)的解

例2　边界条件或初始条件

在方程(1)的所有解当中，哪个解满足沿 x 轴 $u=\mathrm{e}^{-x^2}$ 的条件? 这里我们寻求满足 $u(x,0)=\mathrm{e}^{-x^2}$ 的解. 用例1中的解 $u(x,t)=f(x-t)$，我们求出

$$u(x,0)=f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}.$$

所以满足条件的解为 $u(x,t)=\mathrm{e}^{-(x-t)^2}$ (参见图1b). 我们可以将 t 看作时间变量，从而得到一种有趣而形象地解读方程解的方法：对任意固定的时刻 t，$u(x,t)$ 作为 x 的函数，其图像就是一个波的图形(参见图3). 注意到，波形从左向右运动，其形状不改变.

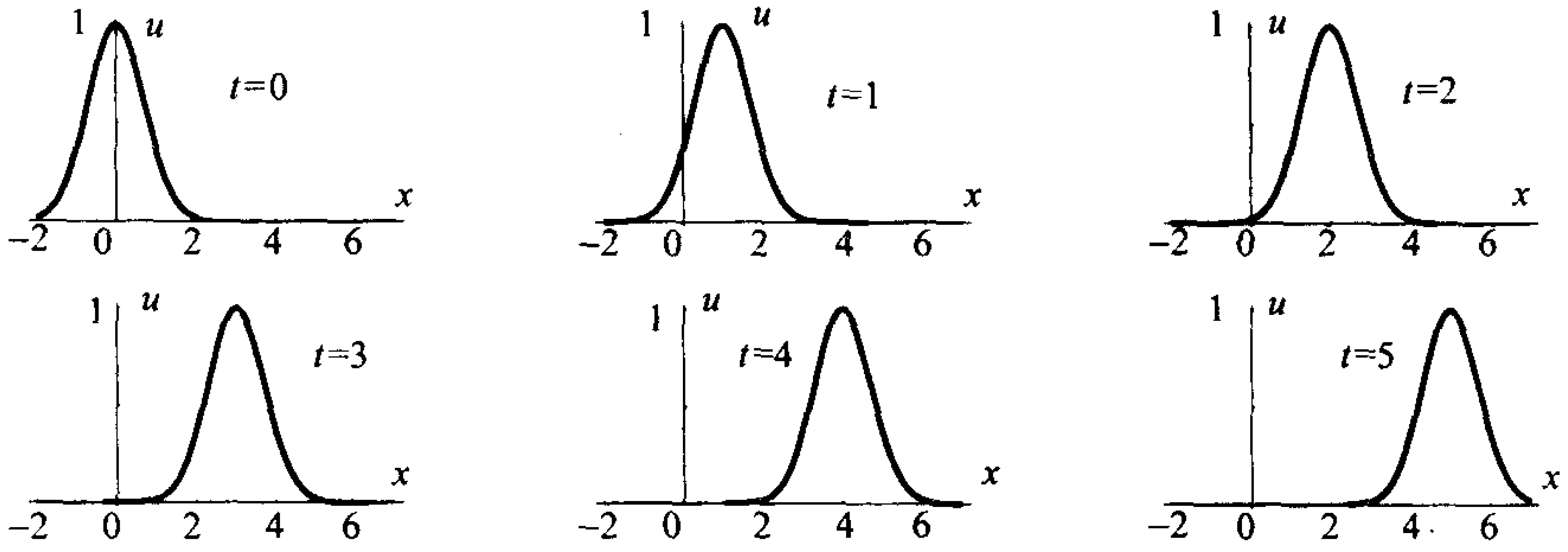


图 3　波形从左向右运动，其形状不改变 ■

3

在例 1 中，我们提到许多解，但是没有讲如何推导出这些解；同时，我们并不清楚是否得到了所有解．下面的推导将告诉我们，事实上我们确实得到了所有解，也将显示出适当的变量代换可以简化所考虑的问题．

例 3　方程(1)的通解

我们的方案是通过作线性变量代换

$$\alpha = ax + bt, \quad \beta = cx + \mathrm{d}t,$$

将偏微分方程(1)化简成一个常微分方程，其中 a，b，c 和 d 将适当选定．由二维链式法则得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} = a\frac{\partial u}{\partial \alpha} + c\frac{\partial u}{\partial \beta}.$$

类似地，

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial t} = b\frac{\partial u}{\partial \alpha} + d\frac{\partial u}{\partial \beta}.$$

代入(1)，并化简得

$$(a+b)\frac{\partial u}{\partial \alpha} + (c+d)\frac{\partial u}{\partial \beta} = 0.$$

现在，我们选取 a，b，c 和 d 以消去某一个偏导数．比如选取

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1, \quad d = -1,$$

则消去 $\partial u/\partial \beta$．这样，原方程变为

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0.$$

这是一个关于 α 的简单常微分方程，其解为 $u=C$，这里 C 是 β 的函数(相对于 α 而言，是常数)．所以原方程的通解为 $u=C(\beta)=C(x-t)$，这与例 1 的答案相符．最后，注意到 a，b，c 和 d 的其他选取方式也可以得到解(参见习题 4)． ■

例 3 表明了偏微分方程是如何产生许多解的，当我们对关于两个自变量的方程求积分时，积分常数必须是一个依赖于另一个自变量的函数．所以在对方程求积分以后，我们得到一个依赖于另一个自变量的任意函数，而不像在常微分方程情形，仅仅得到一个任意常数．

4

例 3 中的变量代换将偏微分方程化为更容易求解的常微分方程，本书中经常用到这种将偏微分方程化简为常微分方程的方法(习题 10 是另一个例证)．

习题 1.1

1. 设 u_1 和 u_2 是(1)的解，试证 $c_1u_1+c_2u_2$ 也是(1)的解，其中 c_1 和 c_2 为常数.（这表明(1)是线性方程.）
2. (a)(1)的哪个解在 x 轴上等于 xe^{-x^2}？
   (b)绘出这个解作为 x 和 t 的函数时的图像，描述 x 轴的像.
3. (a)求(1)的解，使其在 t 轴上等于 t.
   (b)绘出这个解作为 x 和 t 的函数时的图像，描述 t 轴的像.
4. 参考例 3，求(1)的解，取 $a=1$，$b=1$，$c=1$，$d=-1$.

   如例 3 所做，适当选取变量代换，求习题 5～8 的通解.
5. $\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$.
6. $2\dfrac{\partial u}{\partial t}+3\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$.
7. $\dfrac{\partial u}{\partial t}-2\dfrac{\partial u}{\partial x}=2$.
8. $a\dfrac{\partial u}{\partial t}+b\dfrac{\partial u}{\partial x}=u$,　　a，$b\neq 0$.
9. (a)求习题 5 的解，使其在 x 轴上等于 $\dfrac{1}{1+x^2}$.
   (b)绘出这个解作为 x 和 t 的函数时的图像.
   (c)当 t 增加时，波形向哪个方向运动？

特征线法．利用特征线法，我们可以求解形如

$$\frac{\partial u}{\partial x}+p(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{3}$$

的一阶线性变系数偏微分方程，其中 $p(x,y)$ 是 x 和 y 的函数．我们首先回顾多元微积分和常微分方程的两个重要概念.

假设 $v=(v_1,v_2)$ 是单位向量，$u(x,y)$ 是二元函数，函数 u 在点 (x_0,y_0) 处(关于方向 v)的**方向导数**为

$$v_1\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+v_2\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0).$$

方向导数刻画了函数 u 在点 (x_0,y_0) 处沿方向 v 运动时的变化率．从而，如果 (a,b) 是任意一个非零向量，则关系式

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

表明 u 沿方向 (a,b) 的取值不变.

转到常微分方程，考虑方程

5

$$\frac{dy}{dx}=p(x,y), \tag{4}$$

将(4)的解看成 xy 平面上的曲线．方程(4)告诉我们解曲线在点 (x_0,y_0) 处切线的斜率等于 $p(x_0,y_0)$，或者说解曲线在点 (x_0,y_0) 沿向量 $(1,p(x_0,y_0))$ 方向变化．如果我们在很多点处画出向量 $(1,p(x,y))$，就得到微分方程(4)的**方向场**．方向场是一非常重要的概念，因为它能使我们快速地看出方程(4)解的定性特征．特别地，连续不断地沿着方向场 $(1,p(x,y))$ 的方向运动，我们可以画出过点 (x,y) 的解曲线.

现在我们可以叙述特征线法，回到(3)，该方程表明：在任意一点 (x,y) 处，u 关于向量 $(1,p(x,y))$ 的方向导数为 0，所以当我们沿着向量 $(1,p(x,y))$ 的方向运动时，函数 $u(x,y)$ 保持不变．但是，向量

$(1, p(x, y))$决定了方程(4)的方向场，也就是说，$u(x, y)$在(4)的解曲线上是常值．这些解曲线称为方程(3)的**特征线**(参见图4，下面将具体讨论 $p(x, y)=x$ 的情形)．为方便起见，我们将(4)的解(特征线)写成

$$\phi(x,y)=C$$

的形式，其中C是任意常数．因为u在每一条曲线上是常数，所以u的值只依赖于C，即$u(x, y)=f(C)$，其中f是任意函数，或

$$u(x,y)=f(\phi(x,y)),$$

这就得到了方程(3)的解．

作为例子，求解方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

此时我们有 $p(x, y)=x$，解$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x$，我们得到特征线 $y=\frac{1}{2}x^2+C$，或 $y-\frac{1}{2}x^2=C$．从而 $\phi(x, y)=y-\frac{1}{2}x^2$，偏微分方程的通解为 $u(x, y)=f(\phi(x, y))$，其中f是任意函数．把它们代回方程，直接验证，便知是解．

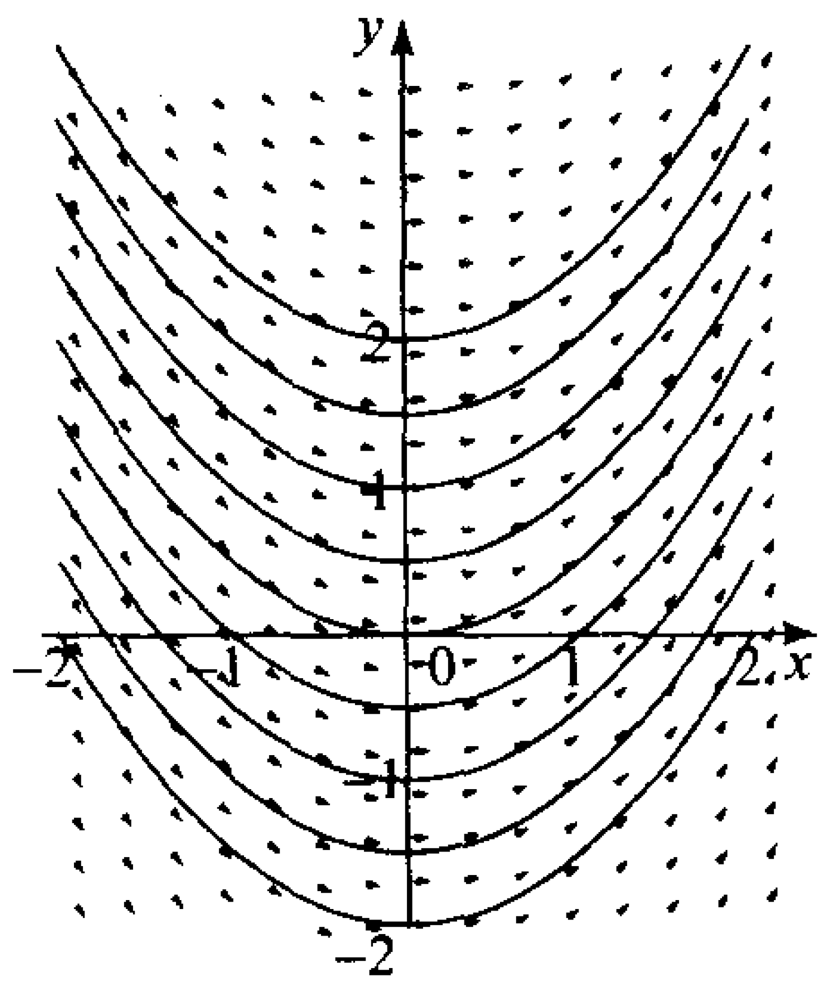


图 4　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x$ 的方向场和特征线 $y-\frac{1}{2}x^2=C$

值得指出的是，运用特征线法求解偏微分方程(3)，我们只需求解常微分方程(4)，所以特征线法是另外一种将偏微分方程化简为常微分方程的方法．

10. 考虑方程 $a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=0$，其中$a$，$b$是非零常数．

　(a)此方程说明u的方向导数是什么？

　(b)试确定特征线．

　(c)运用特征线法求解此方程．

在习题11～14中，(a)运用特征线法求解方程；(b)代入方程验证你的答案．

11. $\frac{\partial u}{\partial x}+x^2\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

12. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

13. $\frac{\partial u}{\partial x}+\sin x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

14. $e^{x^2}\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

6

1.2　求解并解释偏微分方程

17世纪后叶，牛顿力学的发现越来越表明，物理学和工程技术中的许多定律最好运用与变化率有关的关系式来描述．当翻译成数学语言时，这些关系式通常导出微分方程，因为变化率对应于导数．考察牛顿运动第二定律：$F=ma$，这个基本定律告诉我们：如果可以显式地表达外力，则我们就得到一个关于位置的微分方程(注意到，a表示加速度，也就是位置的二阶导数．)

例如，在质点-弹簧系统中，质点受线性弹力作用，即$F=-kx$(虎克定律)．此时，质点的运动由微分方程$mx''+kx=0$决定，其中x表示质点的位置，它是时间t的函数．如果给定

某时刻 t_0 时质点的位置和速度，这个方程使我们可以对质点的特定运动求解．这个数据称为初始数据，通常在时刻 $t_0=0$ 给出．

我们转到需要偏微分方程的情形，考虑一类熟悉的物理现象：弦振动．此时产生的偏微分方程称为一维波动方程．在第 3 章，我们将详细讨论它的解析解，它是以处理更复杂问题所需的同样思想为基础的．本节我们仅仅在相对简单的情形下预览一下这些思想．

弦振动

考虑一根在 $x=0$ 和 $x=L$ 之间沿 x 轴张紧的弦，设弦可以在固定平面内自由振动．我们希望描述弦上每点随时间变化的运动状况，我们用函数 $u(x,t)$ 表示在 t 时刻 x 点处的位移(如图 1 所示)．注意到与质点-弹簧系统不同的是，此时未知函数是一个二元函数．这样，弦在位置 x 处的速度是 $\frac{\partial u}{\partial t}$、加速度是 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$．我们将在 3.2 节推导出弦振动所满足的方程，这里仅将方程写下来，提出一种直观的理解．这个方程称为**一维波动方程**，可写为

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.} \tag{1}$$

[7] 常数 c 依赖于张紧弦的物理参数，特别是它的线密度和张力．从物理的角度理解这个方程关键是运用牛顿第二定律来解释．方程左端表示，弦在以 x 为中心的一小部分的加速度，而右端告诉我们这段弦所受的外力，其中右端的符号依赖于弦在这点的凹性．

如果视图 2 为弦离开静止位置时的初始位移，则在脱离的瞬间，上凹的那段弦向上运动，而下凹的那段弦向下运动(参见图 2 和图 3 中的箭头)．这种观点可以应用到任意瞬间弦位置的分析，只是一般地，弦的每一小段将都有一个非零的速度与之对应，这一点以后必须考虑在内．

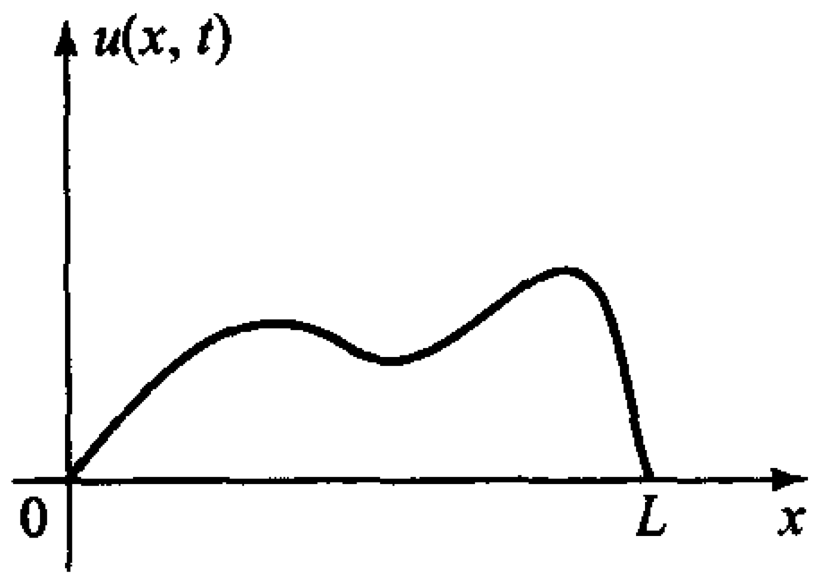


图 1　弦在 t 时刻的位移

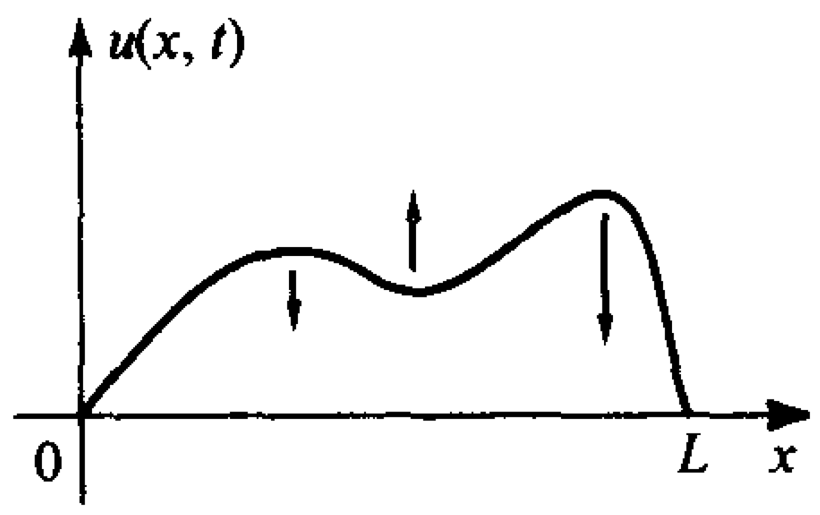


图 2　脱离静止位置的弦是如何开始振动的

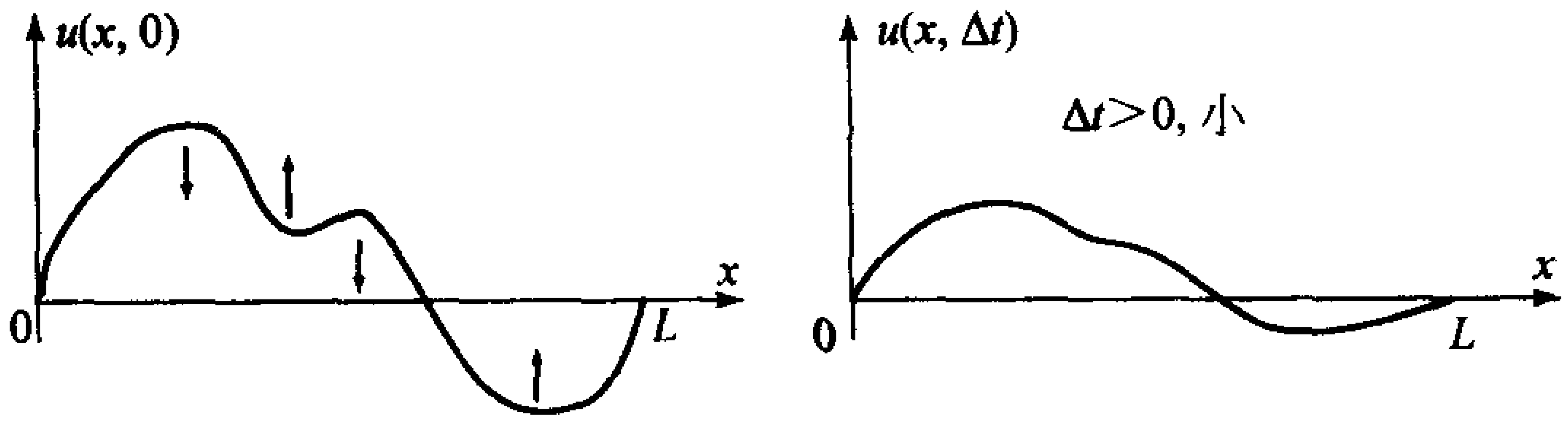


图 3　脱离静止位置的弦的初始位移和瞬间后的位置

分析方法

下面，我们作一些分析研究，波动方程(1)的最简单的解是

$$u(x,t)=\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi ct}{L},\tag{2}$$

直接代入(1)可以验证(2)是解. 注意到，这个解在 $x=0$ 处和 $x=L$ 处(对任意 t)取零值，正如物理模型所期望的那样，因为两端点是固定的. 这就解释了上面出现正弦和余弦函数中的变量形式，事实上，如果没有端点处的限制，任意形如 $\sin kx\cos kct$ 的乘积都是方程的解.

除方程本身外，弦在两端点处位移应为零的条件必须表示出来，这些条件就是**边界条件**

$$u(0,t)=0,\quad 对\ t\geqslant 0\tag{3}$$

和

$$u(L,t)=0,\quad 对\ t\geqslant 0.\tag{4}$$

有时还需要引入初始条件，对波动方程而言，它关于时间是二阶的，初始条件应由在某一初始时刻 t_0 时所指定的初始位移和初始速度组成，此后一律取 $t_0=0$：[8]

$$u(x,0)=f(x),\quad 对\ 0\leqslant x\leqslant L\tag{5}$$

和

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x),\quad 对\ 0\leqslant x\leqslant L.\tag{6}$$

函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别表示弦上各点的初始位移和初始速度. 你可以想象一下在 $t_0=0$ 时刻开始振动的弦，它的初始形状是 $f(x)$，初始速度是 $g(x)$(参见图 4).

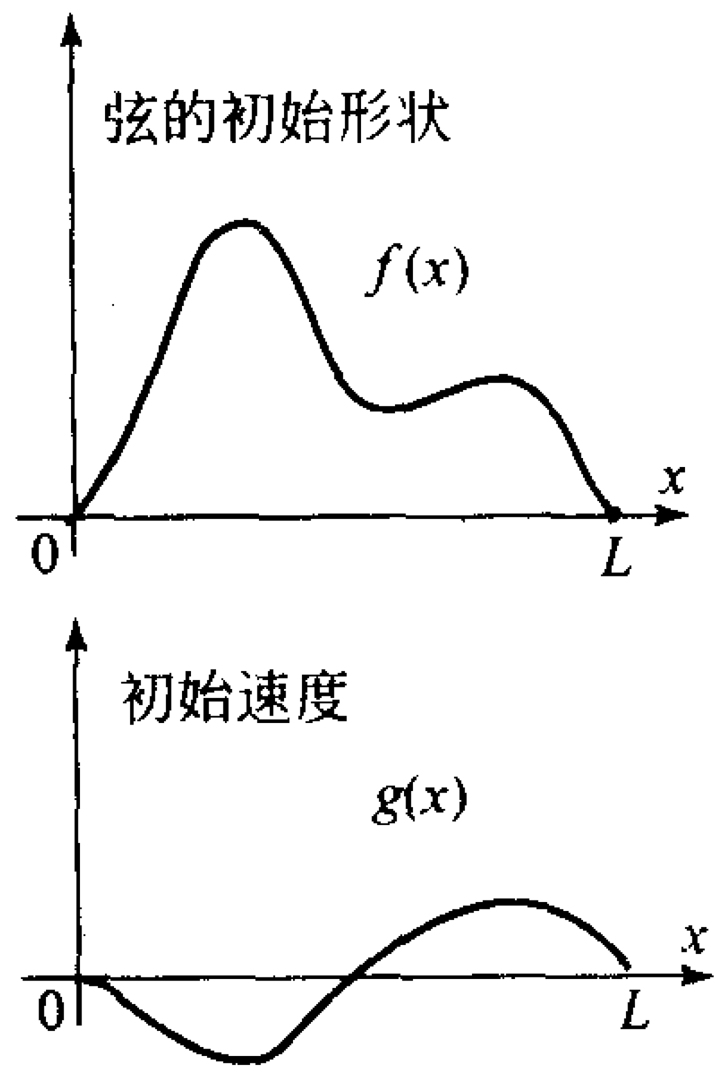


图 4　初始位移和初始速度

我们来看看解(2)的初始位移和初始速度，令 $t=0$，我们得到初始位移为

$$u(x,0)=\sin\frac{\pi x}{L},\quad 对\ 0\leqslant x\leqslant L.$$

类似地，求关于 t 的偏导数，再令 $t=0$，我们得到初始速度为

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\quad 对\ 0\leqslant x\leqslant L.$$

因此(2)是波动方程的这样一个解：弦从静止开始振动，初始位移是正弦函数的一拱. 波动方程有许多其他类似的解，可这个解肯定是最简单的. 例如，可以验证

$$u(x,t)=\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi ct}{L}\tag{7}$$

也是波动方程(1)的解，满足边界条件(3)～(4)，但它的初始位移为零，初始速度正比于正弦函数的一拱. 这对应着一根弦在静止位置受到一下推动，然后开始振动.

低速运动的弦

考虑由解(2)描述的弦振动，如果在不同时刻画出弦的图像，可以得到一列如图 5 所示的图像(其中 $L=1$，$c=1$).[9]

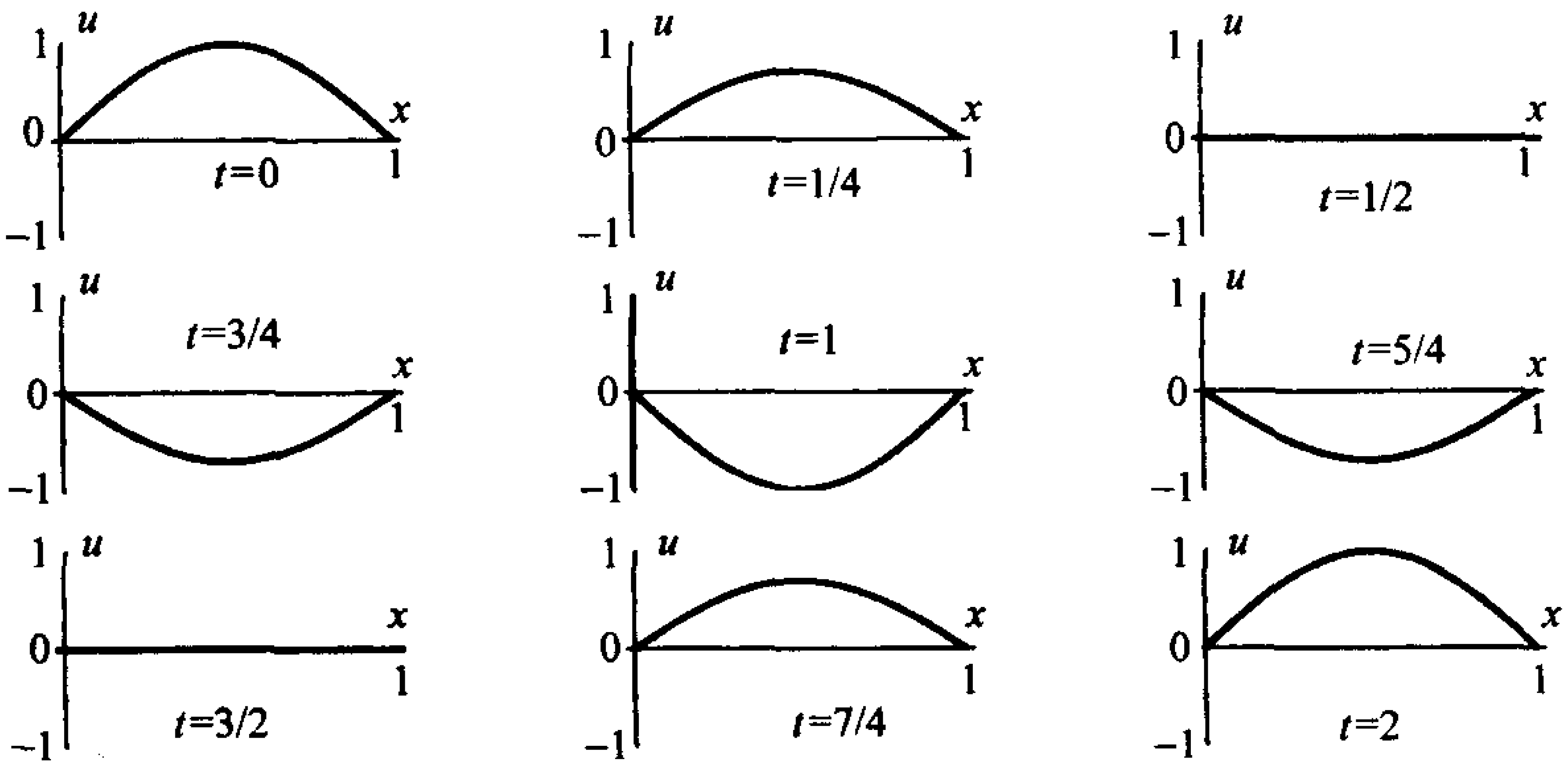


图 5 解(2)在不同时刻的图像

图 5 中的图像可以通过固定 t 画出 $u(x, t)$ 作为 x 的函数时的图形得到. 注意到，弦的形状始终是正弦波的单个拱；只是振幅是按余弦函数 $\cos(\pi ct/L)$ 而变化的. 特别地，经过 $2L/c$ 时间后，弦又回到其初始形状，同时其速度 x 回到初始值，从而弦将以 $2L/c$ 为周期运动下去. 弦在另外一些特定时刻达到有趣的状态：在 $t=L/c$，弦瞬时地静止(瞬时速度为零)，而位移恰好是其初始位移的负值. 在时刻 $t=L/2c$ 和 $t=3L/2c$，弦从其平衡位置经过(瞬时位移为零).

正规波型

解(2)是表示弦的简单运动的第一个解族，这个解族为

$$\boxed{u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L}, \quad \text{对 } n = 1,2,3,\cdots} \tag{8}$$

弦的简单运动的另外一个解族是

$$\boxed{u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi ct}{L}, \quad \text{对 } n = 1,2,3,\cdots} \tag{9}$$

式(8)和(9)中的函数称为弦的**正规波型**，3.3 节将对正规波型作更详细的讨论. 图 6 展示了正规波型族(8)中前几个正规波型的弦振动图像. 对固定的正整数 n，弦有 n 个相同的波瓣，从而将弦分割成 n 个相等的部分.

10

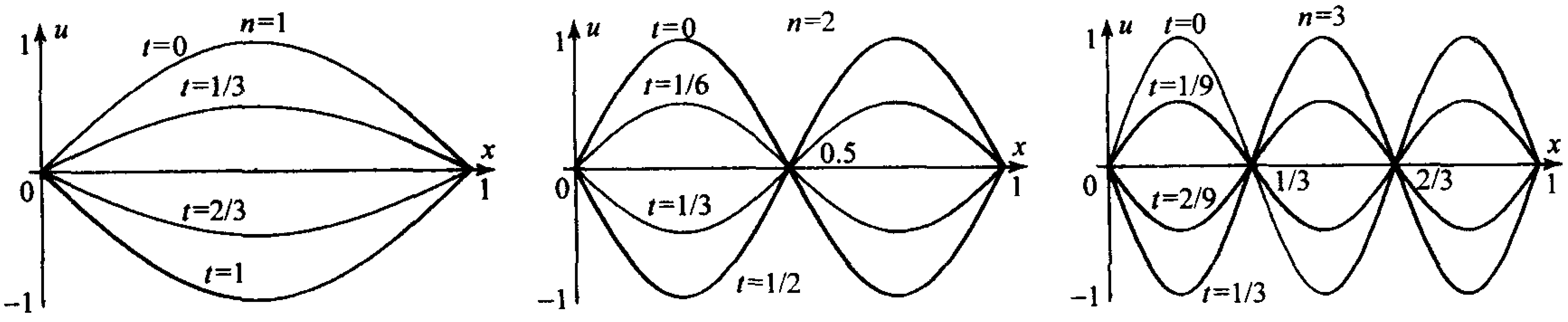


图 6 (8)中的正规波型，$n=1, 2, 3$(其中 $L=1$ 和 $c=1$)，注意到，高阶的正规波型振荡得更快

构造更复杂的运动：叠加原理和傅里叶级数

至今为止，我们仅仅讨论了弦的简单运动，当然弦可以以更加复杂的方式振动．我们能否描述弦的所有可能的运动方式？在回答这个问题之前，让我们来考察一些更复杂的弦振动例子．考虑下面通过(8)中由一些带比例系数的正规波型相加得到的函数：

$$u(x,t)=\sin\pi x\cos\pi t-\frac{1}{2}\sin 2\pi x\cos 2\pi t+\frac{1}{3}\sin 3\pi x\cos 3\pi t.$$

为简单起见，我们取 $L=c=1$，可以验证这是方程(1)在 $c=1$ 时的解．在 $t=0$ 时刻，弦的初始形状由下面的函数给出：

$$u(x,0)=\sin\pi x-\frac{1}{2}\sin 2\pi x+\frac{1}{3}\sin 3\pi x,$$

如图 7 所示，在 t 时刻，速度由下面的函数给出：

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=-\pi\sin\pi x\sin\pi t+\pi\sin 2\pi x\sin 2\pi t-\pi\sin 3\pi x\sin 3\pi t.$$

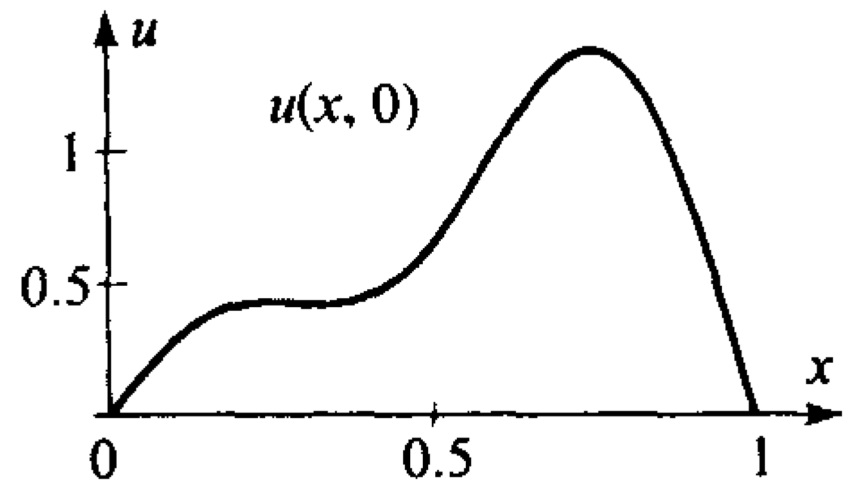


图 7　弦的初始形状

令 $t=0$，可知初始速度是零．为得到弦运动的图像，对固定时刻 t，画出函数 u 作为 x 的函数时的图像，图 8 展示了一些图像．

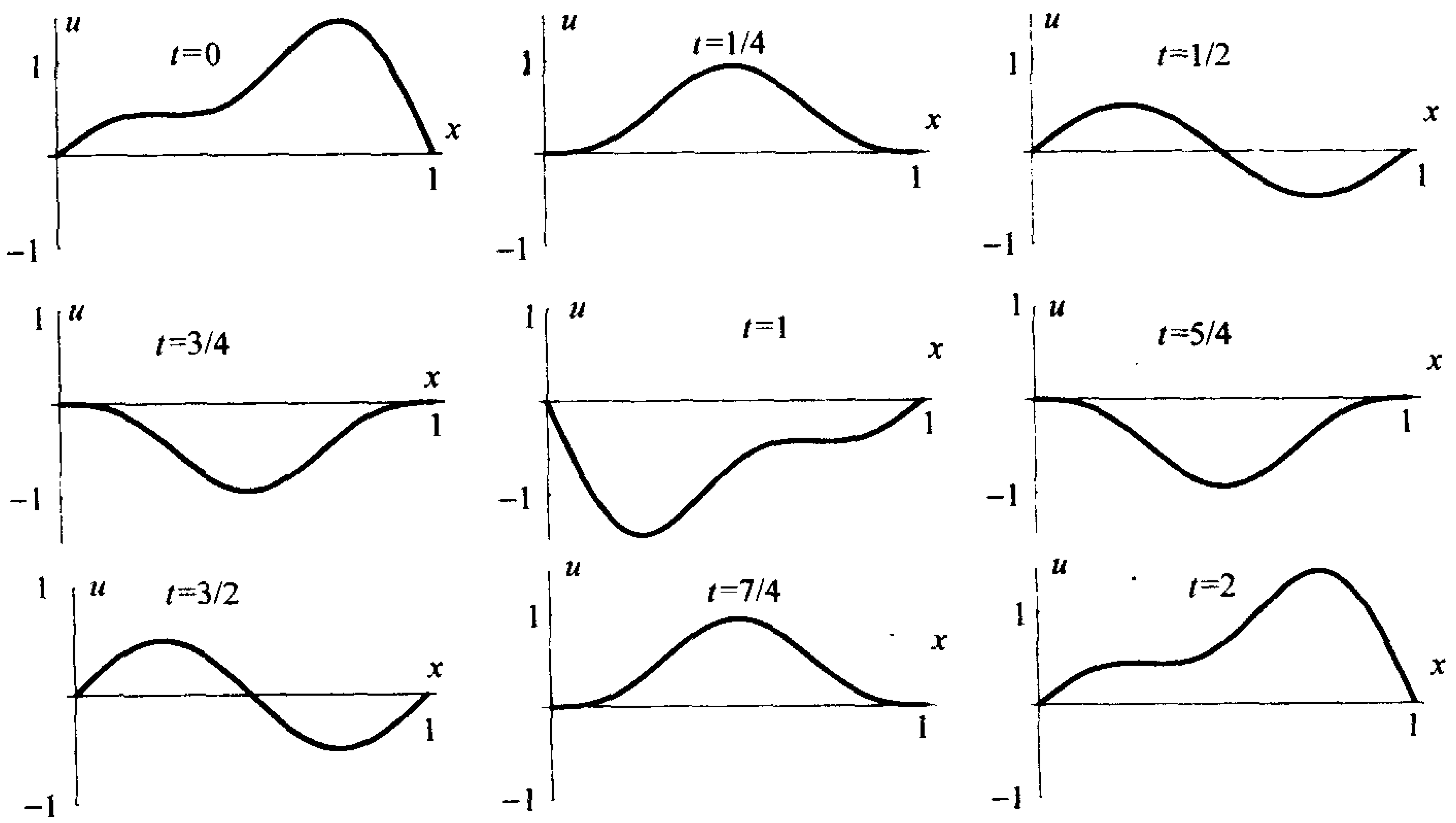


图 8　弦运动的图像，$t=0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \cdots,\ 2$

通过叠加一些简单的解来构造更复杂解的过程是十分重要的，这个过程称为**叠加原理**，将在 3.1 节适当之处阐述它．对线性偏微分方程而言，这是构造解的最重要方法．

让我们来简要重述刚才所做的事，通过叠加一些对应于比较简单运动的正规波型，我们构造了弦的复杂运动．我们能将这个思想推广多远呢？请看如下惊人的事实：

对静止弦给定任意一个初始位移 $f(x)$，其随后的运动都可以通过叠加(8)中的正规波型来得到．

11

换句话说，如果考虑弦从任意初始位移和零初始速度开始运动，则其运动都可以写成正弦波的如下求和形式：

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L}.} \tag{10}$$

如果初始速度非零，则必须添加上(9)中的某些项：

$$b_n^* \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi ct}{L}.$$

如果在(10)中取 $t=0$，我们就得到了初始位移的一个表达式：

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}.} \tag{11}$$

[12] 这个级数称为**傅里叶正弦级数**，它可以应用到更大一类函数上. 因为与应用有着密切的关系，第 2 章将对傅里叶正弦级数或更一般地对傅里叶级数作更深入的研究. 特别地，我们将推导出确定傅里叶正弦级数(11)中的系数 b_n 的公式.

弦振动的一般运动方式可以表达为正弦波的无穷求和形式，如(10)，这个事实首先由瑞士数学家丹尼尔·伯努利(1700—1782)在 1750 年左右所断言. 所以伯努利是第一个在求解偏微分方程中引入傅里叶级数的人(当然那时还没有*傅里叶级数*这个术语). 此断言提出不久就被另外一个瑞士数学家莱奥哈尔德·欧拉(1707—1783)所否定，根据是：如果此断言成立，则所有的函数都可以表示成形如(11)的正弦函数的无穷求和形式，欧拉怀疑这些(傅里叶)正弦级数展开，进而否定伯努利整个方法. 数十年后，法国数学家约瑟夫·傅里叶(1768—1830)的创造性工作将欧拉的怀疑一扫而光. 傅里叶的工作也曾遭到怀疑，在 1807 年傅里叶首次将他的工作提交到法国科学院时被拒绝. 在 1811 年，傅里叶再次将他的理论提交科学院时，科学院意识到它的重要性，并给他颁发了大奖.

应用和方法概述

我们已经看到，从弦振动模型如何得到偏微分方程，即一维波动方程. 弦振动仅是应用的开始. 在本书中，我们将遇到其他一些问题，如弦振动、膜振动、板振动、杆振动、链振荡、热在不同介质中的传导，以及其他更多问题. 就像刚才所看到的一样，弦振动涉及将函数展开成傅里叶正弦级数. 上述许多问题的解不仅涉及正弦函数展开，还自然地导出其他特殊函数的展开式，这些特殊函数及其展开式与所考虑的问题是相适应的. 例如，我们将遇到贝塞尔函数和贝塞尔级数展开、勒让德多项式和勒让德级数展开，以及其他特殊函数和其相应的级数展开.

为更全面地了解本书所用的方法，我们还应提到分离变量法. 粗略地讲，分离变量法可以将求解一个给定的偏微分方程转化为求解几个常微分方程. 这些常微分方程的求解决定了与问题相对应的展开类型. 分离变量法将在第 3 章中引入，而在几乎所有随后章节中用到. [13]

习题 1.2

1. 设 $u=u(x,\ t)$ 和 $v=v(x,\ t)$ 具有满足下式的偏导数：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial v}{\partial x} \quad 和 \quad \frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial u}{\partial x}.$$

试证 u 和 v 是波动方程(1)的解，其中 $c=1$.

2. 考虑习题 1 中的方程，附加初始值

$$u(x,0)=f(x), \quad v(x,0)=h(x).$$

(a)试证关于 u 的波动方程的相应初始值是

$$u(x,0)=f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=-h'(x).$$

(b)求出关于 v 的波动方程的相应初始值.

3. 令 F 和 G 是任意一元可微函数，试证 $u(x,\ t)=F(x+ct)+G(x-ct)$ 是波动方程(1)的解，假如 F 和 G 充分光滑的话(这个解将在下一个习题中推导出来).

4. (a)利用变量代换 $\alpha=x+ct$，$\beta=x-ct$ 将波动方程(1)化成 $\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}=0$ $\left(假设\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}=\frac{\partial^2 u}{\partial\beta\partial\alpha}\right)$.

(b)将(a)中得到的方程关于 α 求积分得到 $\frac{\partial u}{\partial\beta}=g(\beta)$，其中 g 是任意函数.

(c)将(b)中得到的方程关于 β 求积分得到 $u=F(\alpha)+G(\beta)$，其中 F 是任意函数，而 G 是 g 的一个原函数.

(d)推导出习题 3 中的解.

5. (a)利用习题 3 中的解，求解具有初始值

$$u(x,0)=\frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0, \quad -\infty<x<\infty$$

的波动方程.

(b)取 $c=1$，画出解在 $-15<x<15$，$t=0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$ 时的图像，注意一半的波向左运动，另一半波向右运动.

6. 对初始值 $u(x,\ 0)=e^{-x^2}$，$\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)=0$，$-\infty<x<\infty$，重做习题 5(a).

7. 对初始值 $u(x,\ 0)=0$，$\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)=-2xe^{-x^2}$，$-\infty<x<\infty$，重做习题 5(a).

8. 对初始值 $u(x,\ 0)=0$，$\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)=\frac{x}{(1+x^2)^2}$，$-\infty<x<\infty$，重做习题 5(a).

9. 求解具有初始值

$$u(x,0)=\frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=-2xe^{-x^2}, \quad -\infty<x<\infty$$

的波动方程. [提示：运用习题 5 和 7，以及叠加原理.]

10. 运用习题 6 和 8 以及叠加原理，求解具有如下初始值的波动方程.

$$u(x,0)=e^{-x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\frac{x}{(1+x^2)^2}, \quad -\infty<x<\infty.$$

14

11. 考虑沿 x 轴伸展的电缆，因没有很好地与地面绝缘，在它的整个长度上都有漏电. 令 $V(x,\ t)$ 和 $I(x,\ t)$ 分别表示电线中在点 x 处时刻 t 的电压和电流，这些函数因下面的方程组而相互关联：

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-L\frac{\partial I}{\partial t}-RI \quad 和 \quad \frac{\partial I}{\partial x}=-C\frac{\partial V}{\partial t}-GV,$$

其中 L 是电感、R 是电阻、C 是电容、G 是漏电．试证 V 和 I 均满足方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (RC + LG)\frac{\partial u}{\partial t} + RGu,$$

这个方程称为**电报方程**.

12. 在图 5 中第二幅图($t=1/4$)的最大位移看起来大于 1/2．试解释之，如有可能，计算这个最大值.
13. 参考图 8，解释为什么第 2、4、6 和 8 幅图看起来关于 $x=1/2$ 对称.
14. 参考图 8，解释为什么第 2、4、6 和 8 幅图中的位移看起来满足端点条件：

$$u(0,\ t)=0=u(1,\ t)\quad 和\quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t)=\frac{\partial u}{\partial x}(1,\ t)=0.$$

在习题 15～20 中，求解波动方程(1)，具有如下给定边界条件(3)和(4)，以及初始条件(5)和(6)．[提示：运用(10)，及其后面的附注.]

15. $f(x)=\sin\frac{2\pi x}{L},\quad g(x)=0.$
16. $f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{L}+\frac{1}{4}\sin\frac{3\pi x}{L},\quad g(x)=0.$
17. $f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{L}+\frac{1}{4}\sin\frac{3\pi x}{L}+\frac{2}{5}\sin\frac{7\pi x}{L},\ g(x)=0.$
18. $f(x)=0,\quad g(x)=\sin\frac{\pi x}{L}.$
19. $f(x)=0,\quad g(x)=\frac{1}{4}\sin\frac{3\pi x}{L}-\frac{1}{10}\sin\frac{6\pi x}{L}.$
20. $f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{L}\cos\frac{2\pi x}{L},\ g(x)=0.$
21. (a)取 $c=L=1$，画出几幅习题 15 中的弦振动的图像．观察到点 $x=\frac{1}{2}$ 始终保持不动，证明这个发现.

    (b)求一初始条件使得点 $x=\frac{1}{3}$ 始终保持不动，并证明点 $x=\frac{2}{3}$ 也始终保持不动.
22. (a)求解波动方程，其中 $c=1$，具有边界条件(3)和(4)，$L=1$，以及初始条件 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2\pi x+\frac{1}{4}\sin 4\pi x$，$g(x)=0$.

    (b)画出几幅弦振动的图像．在区间 $0<x<1$ 中有几个不动点？验证你的答案.
23. 本题考察振动的弦上某取定点随时间运动情况．考虑习题 15 的解，$c=L=1$，固定 $x=x_0$，画出 $u(x_0,\ t)$ 作为 t 的函数时的图像，$0<t<20$，$x_0=\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$．注意到在每一种情形下，我们得到余弦波，每条曲线除去一个比例因子是相同的.

[15]

24. 对如习题 22 给定的初始条件，重做习题 23，你有什么发现？
25. 试证：解(2)在时刻 $t_0=\frac{3L}{2c}$ 的初始值由下式给出：

$$u(x,t_0) = 0 \quad 和 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t_0) = \frac{\pi c}{L}\sin\frac{\pi x}{L}.$$

26. 设 $u(x,\ t)$ 是由式(2)给出的解．试证 $u\left(x,\ t+\frac{3L}{2c}\right)$ 是由式(7)给出的解．从这个关系式，对由式(2)给出的运动和由式(7)给出的运动，能推出什么结论？

27. **平流方程**. 这个方程是：

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=-\kappa\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)+k(x,t). \tag{12}$$

其中κ是一正常数，k是(x, t)的函数. 这个方程可以用来模拟艾滋病的传染、流体动力学，以及其他有关空气或水中的物质流动问题. 作为具体的应用，考察风的运动，假设风沿着某个方向运动，比如x轴的正方向，其速度为每秒κ米. 设在原点处有一工厂，风从工厂处携带一些污染物. 令$u(x, t)$表示t时刻x处的污染物的(线)密度(每米的颗粒个数). 再设污染颗粒以正比于$u(x, t)$的速度掉下来，比例常数是$r>0$，则u满足方程(12)，$k(x, t)=-ru(x, t)$.（有关推导可参考《Modeling Differential Equations in Biology》，Clifford Henry Taub 著，Prentice Hall 出版，2001.）

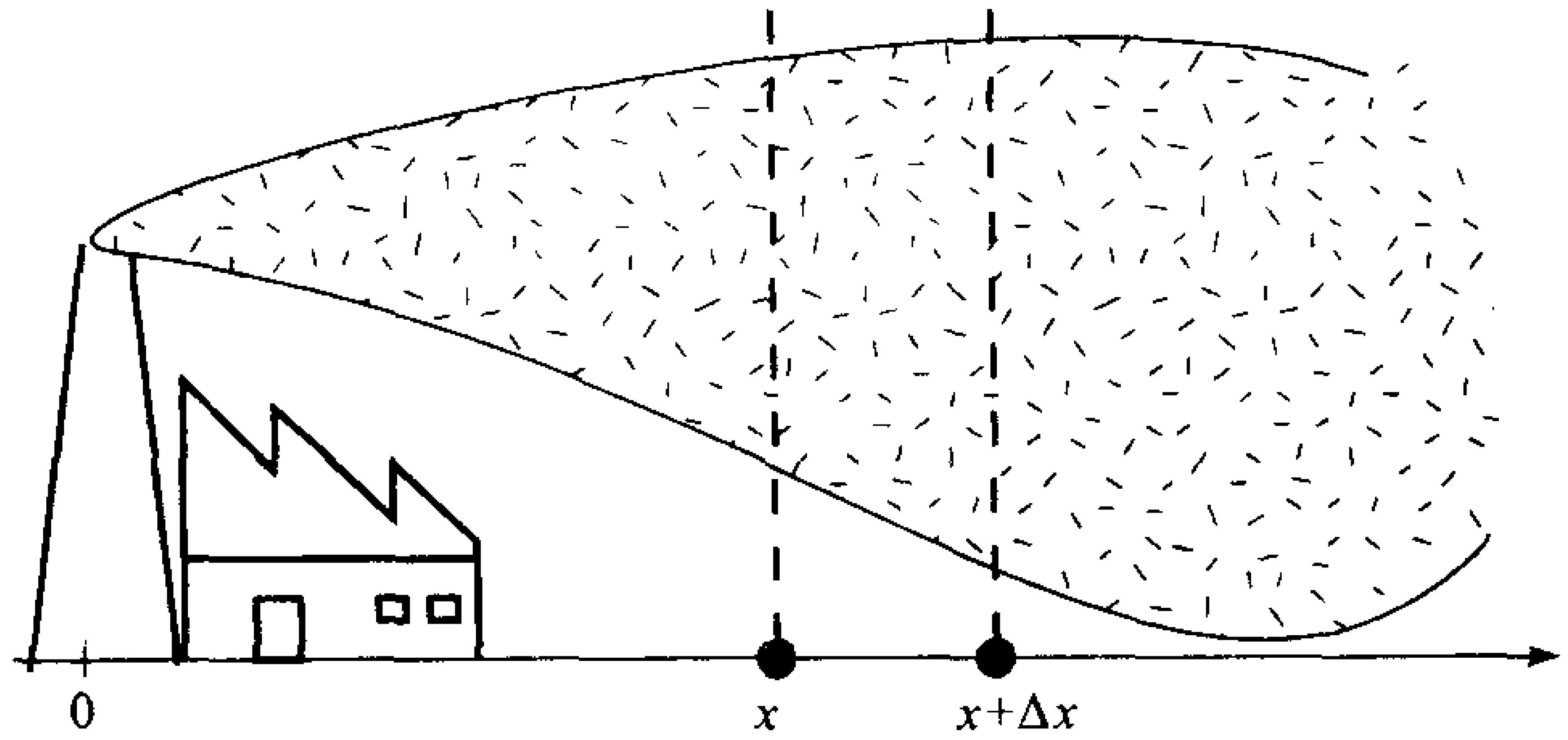


图 9　t时刻介于x和$x+\Delta x$之间的颗粒数是$u(x, t)\Delta x$

(a)试证方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=-\kappa\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)-ru(x,t)$$

的所有解都具有形式$u(x, t)=e^{-rt}f(x-\kappa t)$.［提示：运用1.1节例题3中的变量代换.］

(b)令M是初始时刻空气中的总颗粒数. 试证：在时刻$t>0$空气中的总颗粒数是$e^{-rt}M$.［提示：总颗粒数是颗粒密度函数在区间$-\infty<x<\infty$上的积分.］

16

第2章 傅里叶级数

数学比较形形色色的自然界现象并发现它们的内在联系.

——约瑟夫·傅里叶

综述 本章独立于前一章，其核心内容(2.1～2.4节)仅需要微积分的基础知识；2.6节需要一些复数的基础知识；2.5、2.8、2.9和2.10节是相对自封的高级专题；2.7节的应用需要常系数常微分方程的知识，这一节的背景材料可以在附录A.2中找到.

导读 2.1～2.4节的傅里叶级数对后面的学习是十分重要的，不可省略. 2.5、2.8～2.10节包含傅里叶级数的理论性质，省略这些内容不影响全书的连续性. 但是在强调傅里叶级数的课程里，强烈推荐讲授这些内容，特别是，2.8节中傅里叶级数表示定理的证明揭示出了傅里叶分析中的一些有趣思想.

2.6节可作为第7章引入傅里叶变换的动机；在2.7节中，我们研究机械或电子系统的受迫振动，所得到的方程虽然是常微分方程，但是其求解需要方程的线性性和叠加原理等性质，这些方法在后面的章节非常有用.

就像通常的泰勒级数一样，傅里叶级数是函数展开的特殊类型. 对于泰勒级数，我们对函数关于特定函数族：1，x，x^2，x^3，…展开感兴趣；而对于傅里叶级数，我们对函数关于特定函数族：1，$\cos x$，$\cos 2x$，$\cos 3x$，…，$\sin x$，$\sin 2x$，$\sin 3x$，…展开感兴趣. 因此，函数 f 的傅里叶级数展开式就是如下形式的表达式：

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

当我们考虑一根受到拨动的弦的振动时(参见1.2节)，傅里叶级数就会很自然地出现. 在后面的章节中，我们将发现：事实上，傅里叶级数是一类最适合于求解应用数学里某些经典问题的展开形式. 它们是描述来自不同领域的许多重要物理现象的一种基本方法，这些领域包括机械振动、热传导、行星运动、光学和符号处理等.

傅里叶级数的重要性源自法国数学家约瑟夫·傅里叶的工作，傅里叶断言：任何在有限区间上定义的函数都有傅里叶级数展开. 本章的目标就是研究傅里叶断言的正确性，并且推导出傅里叶级数的基本性质，为后面章节的应用铺平道路.

2.1 周期函数

就像我们在1.2节所看到的，傅里叶级数在求解偏微分方程时十分重要，本节我们首先引入一些基本概念，在研究傅里叶级数一般理论时，这些概念非常有用.

考察函数 $\sin x$，其图像如图1所示，由于 $\sin x$ 的取值每间隔 2π 单位后就重复一次，所以不断重复它在长度为 2π 的任何区间上的那部分，就可以得到它的图像. 这种周期性由下面恒

等式来表示

$$\sin x=\sin(x+2\pi)\quad 对所有\ x.$$

一般地，如果函数 f 满足恒等式

$$f(x)=f(x+T)\quad 对所有\ x,\tag{1}$$

其中 $T>0$，则 f 称为**周期的**，或更具体地，**T-周期的**(参见图 2)，数 T 称为 f 的一个**周期**. 如果 f 是非常值的，我们定义 f 的**基本周期**，或简单地，**周期**，就是使(1)成立的最小正数 T. 例如，函数 3，$\sin x$，$\sin 2x$ 都是 2π-周期的，$\sin x$ 的周期是 2π，而 $\sin 2x$ 的周期是 π.

重复应用(1)，我们可以得到

$$f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=\cdots=f(x+nT).$$

因此，如果 T 是周期，则对任意正整数 n，nT 也是周期. 对于正弦函数，数 2π，4π，6π，… 都是 $\sin x$ 的周期，但是只有 2π 是基本周期. 因为 T-周期函数取值每间隔 T 单位后就重复一次，所以不断重复它在长度为 T 的任何区间上的部分，就可以得到它的图像(参见图 2). 由此可得，为定义一个 T-周期函数，只需在长度为 T 的区间上定义它即可. 显然，这种区间可以有许多种不同的选取方式，下面的例题就说明了这个想法.

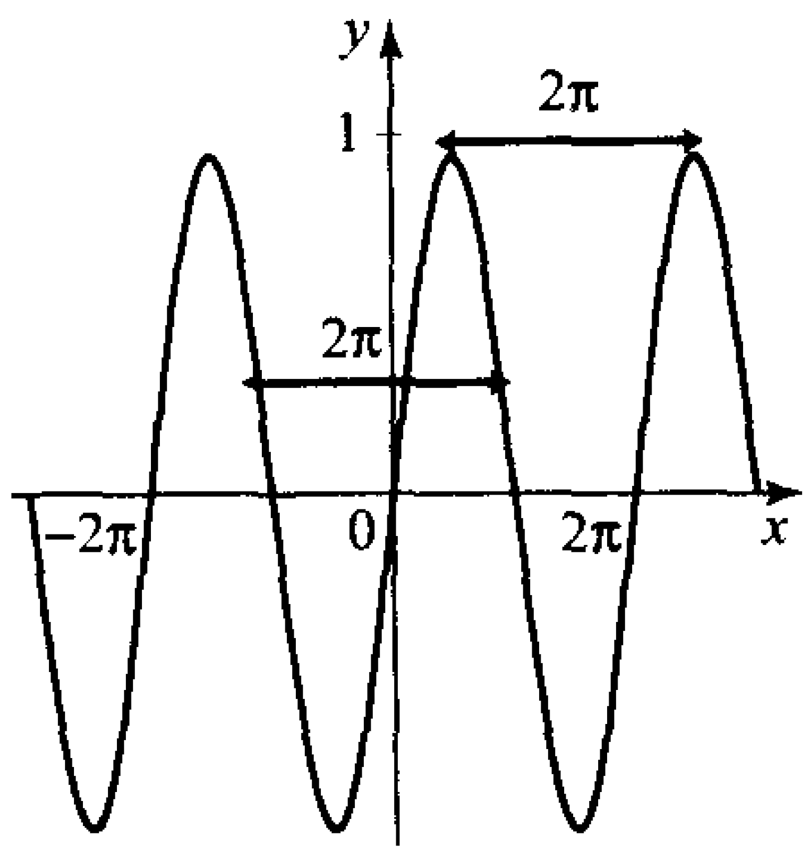


图 1 $\sin x$ 的图像

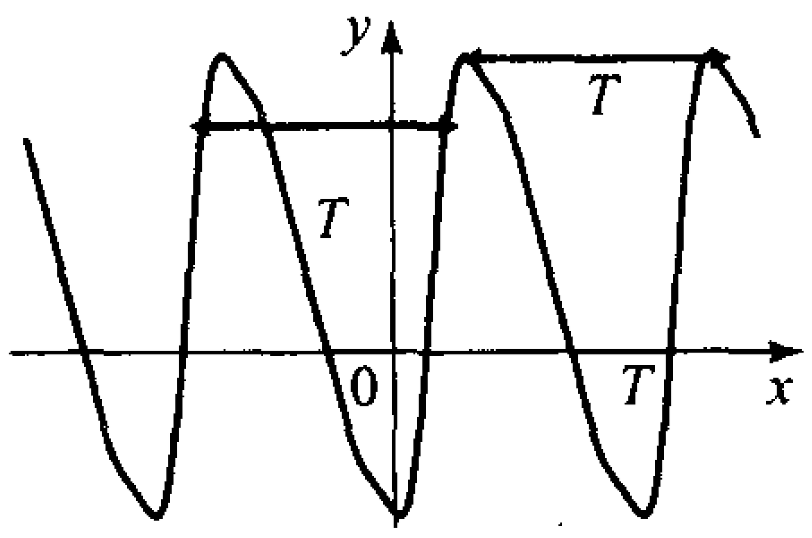


图 2 T-周期的函数

例 1 描述周期函数

用两种不同的方式描述图 3 中的周期函数：

(a)考察它在区间 $0\leqslant x<2$ 上的取值.

(b)考察它在区间 $-1\leqslant x<1$ 上的取值.

解 (a)在区间 $0\leqslant x<2$ 上，函数图像是直线 $y=-x+1$ 的一部分，因此

$$f(x)=-x+1\quad 如果\ 0\leqslant x<2.$$

然后运用关系式 $f(x+2)=f(x)$ 来描述 f 在其他点 x 的取值.

(b)在区间 $-1\leqslant x<1$ 上，函数图像由两条直线段组成(参见图 3)，我们有

$$f(x)=\begin{cases}-x-1 & 如果\ -1\leqslant x<0,\\ -x+1 & 如果\ 0\leqslant x<1.\end{cases}$$

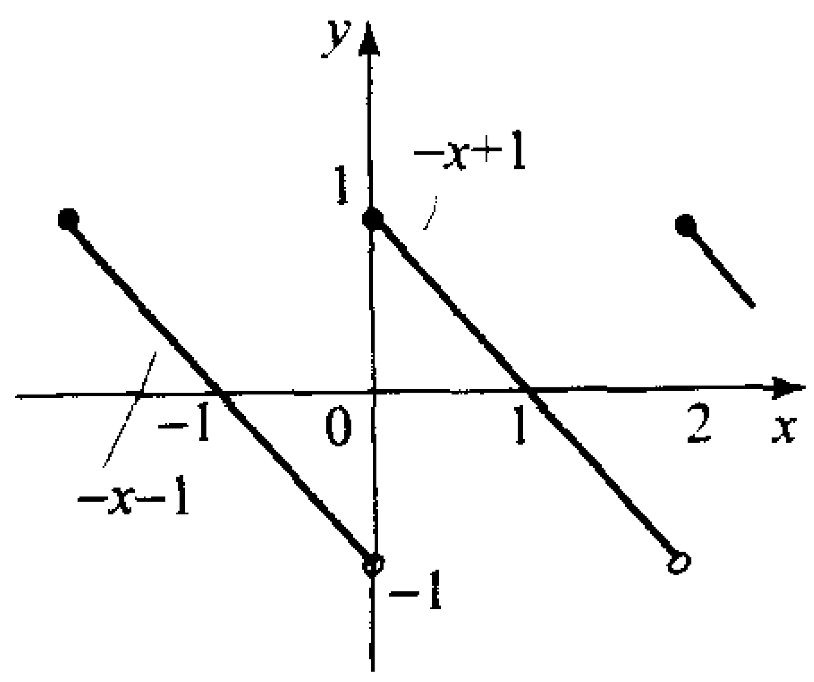


图 3 2-周期函数

就像情形(a)，运用关系式 $f(x+2)=f(x)$ 来描述 f 在区间 $-1\leqslant x<1$

以外的点 x 处的取值. ■

虽然例 1(a)和(b)所得到的公式不同，但是它们描述的是同一个周期函数. 对于一个给定函数，我们运用常识去选取最方便的公式(参见本节例题 2).

分段连续和分段光滑函数

现在，来讨论我们很感兴趣的一类函数，我们即将引入一些重要术语，它们在整本书中都会用到.

考虑图 3 中的函数 $f(x)$，这个函数在 $x=0$，± 2，± 4，…处间断. 对于某个间断点，比如 $x=0$，函数的左极限是 -1，而右极限是 1，用数学式子来表示就是

$$f(0-)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=-1 \quad 和 \quad f(0+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=1.$$

一般地，我们用

$$f(c-)=\lim_{x\to c^-}f(x)$$

来表示当 x 从左边趋近于 c 时函数 f 趋近于数 $f(c-)$ 这一事实；类似地，如果当 x 从右边趋近于 c 时，函数 f 的极限存在，记这个极限为 $f(c+)$，表示为

$$f(c+)=\lim_{x\to c^+}f(x)$$

(参见图 4). 回忆起函数 f 在 c 处连续，如果

$$f(c)=\lim_{x\to c}f(x).$$

特别地，函数 f 在 c 处连续，当且仅当

$$f(c-)=f(c+)=f(c).$$

分段连续函数 *函数 f 称为区间 $[a, b]$ 上的分段连续函数，如果 $f(a+)$ 和 $f(b-)$ 存在，f 在除去有限个点后在区间 $[a, b]$ 上有定义，并且连续；而在那些被除去的点处，f 的左、右极限都存在.*

19

周期函数称为**分段连续函数**，如果它在任意形如 $[a, b]$ 的区间上是分段连续的；周期函数称为**连续的**，如果它在整个实轴上连续. 注意到，连续性对周期函数在长度为其周期的任何区间端点处的取值有一定的限制，比如，如果 f 是 T-周期的，并且连续，则必须有 $f(0+)=f(T-)$(参见图 5).

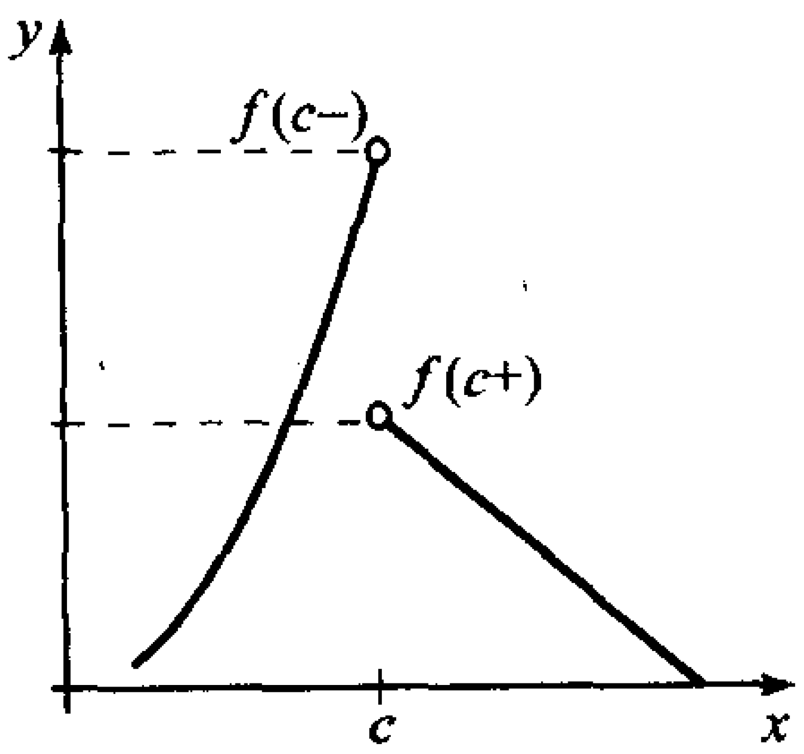


图 4 左、右极限

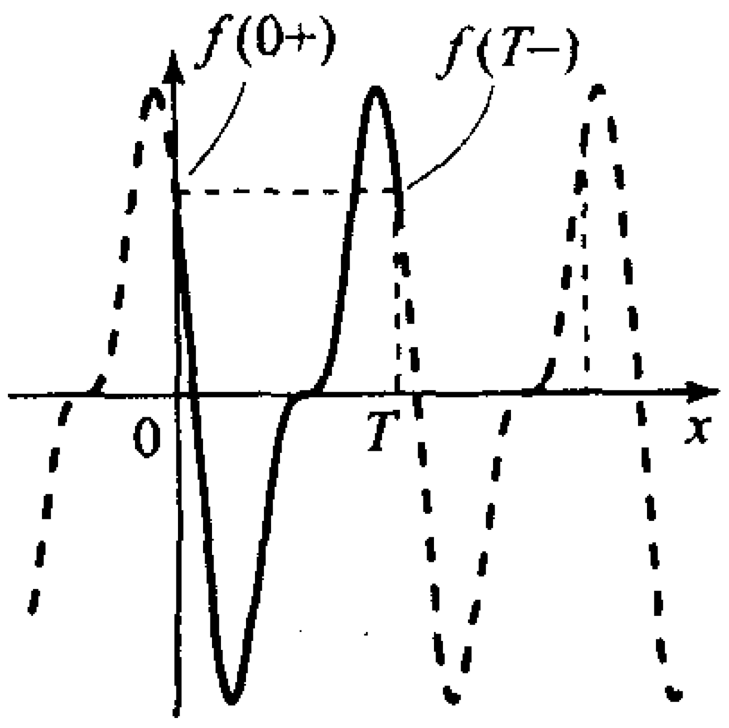


图 5 T-周期连续函数

例 1 中的函数，除了分段连续性以外，还具有另外一个有趣性质．因为 f 图像中直线段的斜率都为 -1，所以对所有 $x\neq 0$，± 2，± 4，…，都有 $f'(x)=-1$，也就是，对 $x\neq 0$，± 2，± 4，…，$f'(x)$ 都存在，并且连续；而在那些去掉的点处，$f'(x)$ 不存在，但是 $f'(x)$ 的左、右极限都存在(事实上，它们都等于 -1)．换句话说，$f'(x)$ 是分段连续的．由这个例子，我们进而引进如下常用的性质．

分段光滑函数 函数 f 称为区间 $[a, b]$ 上的分段光滑函数，如果 f 和 f' 在区间 $[a, b]$ 上是分段连续的．因此，f 是分段光滑的，如果 f 在区间 $[a, b]$ 上是分段连续的，并且 f' 在除去有限个点后在区间 $[a, b]$ 上有定义，并且连续，而在那些被除去的点处，f' 的左、右极限都存在．进一步地，极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-} f'(x)$ 都存在．

周期函数是**分段光滑的**，如果它在任意 $[a, b]$ 区间上是分段光滑的；周期函数 f 称为**光滑的**，如果 f 和 f' 是连续的．

函数 $\sin x$ 是光滑的，例 1 中的函数是分段光滑的，但不是光滑的；函数 $x^{1/3}$ 对 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 不是分段光滑的，因为在 $x=0$ 处，函数的导数、以及导数的左、右极限都不存在．习题中将会讨论更多的例子．

下面这个定理看起来很直观，但是很有用，它说明 T-周期函数在长度为 T 的任何区间上的积分相等(参见图 6)．

定理 1(一个周期上的积分) 假设函数 f 是 T-周期分段连续函数，则对任意实数 a，我们有

$$\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

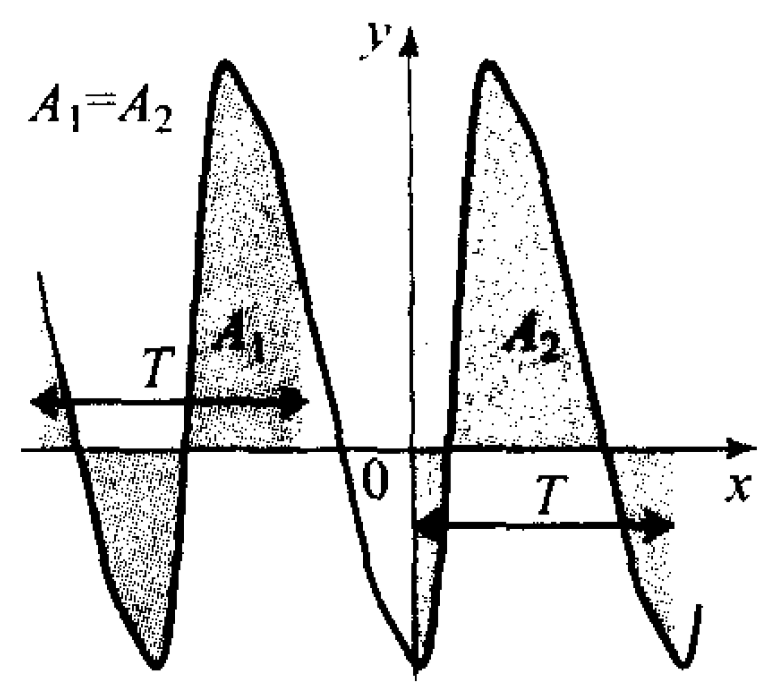


图 6 一个周期上的面积

证明 为简单起见，假设 f 是连续的，对于一般情形，参见习题 26．定义

$$F(a) = \int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

20

因为 f 是以 T 为周期的周期函数，由微积分基本定理，有 $F'(a)=f(a+T)-f(a)=0$．因此，对任意 a，$F(a)$ 是常值的，这就证明了定理． ■

定理 1 的另外一个证明在习题 18 中给出．

例 2 周期函数的积分

令 f 是例 1 中的 2-周期函数，运用定理 1，计算积分：

(a) $\int_{-1}^{1} f^2(x)\,\mathrm{d}x$． (b) $\int_{-N}^{N} f^2(x)\,\mathrm{d}x$，$N$ 是正整数．

解 (a)注意到 $f^2(x)$ 也是 2-周期的，由定理 1，我们可以选择在长度为 2 的任何区间上求积分．由于在区间 $(0, 2)$ 上，$f(x)$ 由单个独立公式给出，所以我们在这个区间上积分，由例 1(a)，我们有

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (-x+1)^2\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}(-x+1)^3\Big|_0^2 = \frac{2}{3}.$$

(b)我们将积分 $\int_{-N}^{N}$ 分成 N 个长度为 2 的区间上的积分之和，如 $\int_n^{n+2}$，$n=-N, -N+2, \cdots$，

$N-2$，即

$$\int_{-N}^{N} f^2(x)\mathrm{d}x = \int_{-N}^{-N+2} f^2(x)\mathrm{d}x + \int_{-N+2}^{-N+4} f^2(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{N-2}^{N} f^2(x)\mathrm{d}x.$$

由于 $f^2(x)$是 2-周期的，由定理 1 和步骤(a)，上式右端的每个积分都等于 $\int_{-1}^{1} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$，所以原积分等于$\frac{2N}{3}$. ■

三角系和正交性

最重要的周期函数是那些(2π-周期的)**三角系**中的函数

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cdots, \cos mx, \cdots, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \cdots, \sin nx, \cdots.$$

易证这些函数都是以 2π 为周期的. 三角系所具有的另外一个有用性质是正交性. 我们称两个函数 f 和 g 在区间$[a, b]$上是**正交的**，如果 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$. 正交性是非常重要的概念，将在第 6 章作详细的讨论. 为了下面行文的方便，在此引入这个术语.

21

在下面的行文中，下标 m 和 n 都是非负整数，三角系的正交性可以表示为：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{如果 } m \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{对所有 } m \text{ 和 } n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{如果 } m \neq n.$$

我们还有如下有用的恒等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\,\mathrm{d}x = \pi \quad \text{对所有 } m \neq 0.$$

有很多方法可以证明这些恒等式，比如为证明第一个恒等式，可以利用三角恒等式，我们有

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x).$$

由于 $m \pm n \neq 0$，我们得

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x + \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

我们以几个有趣的周期函数例题来结束本节，这些周期函数与**最大整数函数**有关，最大整数函数又称**取整函数**，

$$[x] = \text{不超过 } x \text{ 的最大整数}.$$

从图 7 可以看到，函数$[x]$是分段光滑的，在整数点处间断.

例 3 由取整函数构成的周期函数

x 的**小数部分**是函数 $f(x)=x-[x]$，对于 $0<x<1$，我们有$[x]=0$，从而 $f(x)=x$，同时由于$[x+1]=1+[x]$，所以我们有

$$f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-1-[x]=x-[x]=f(x).$$

因此，f 是以 1 为周期的，它的图像(图 8)可以通过不断重复 x 在区间 $0<x<1$ 上那部分的图像得到．函数 f 还是分段光滑的，在整数点处间断．

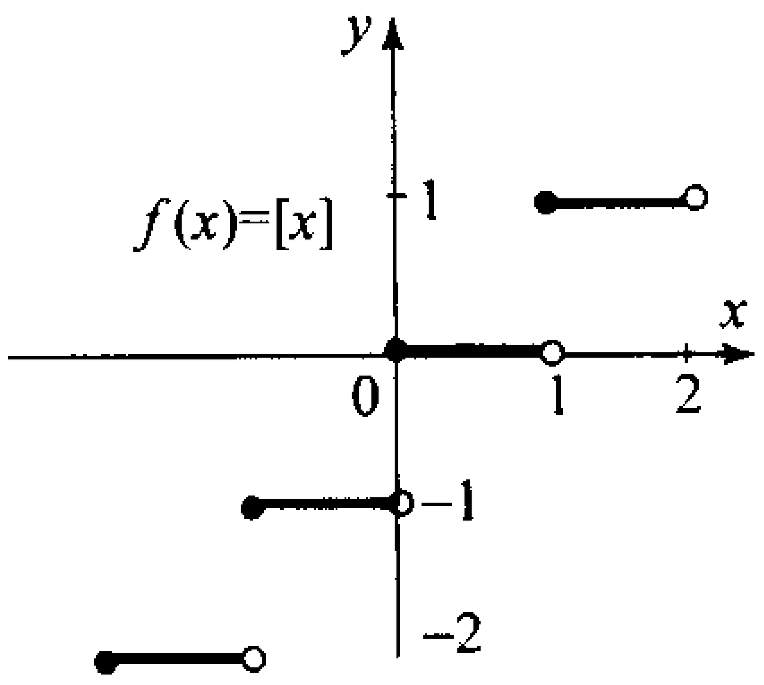


图 7 最大整数函数

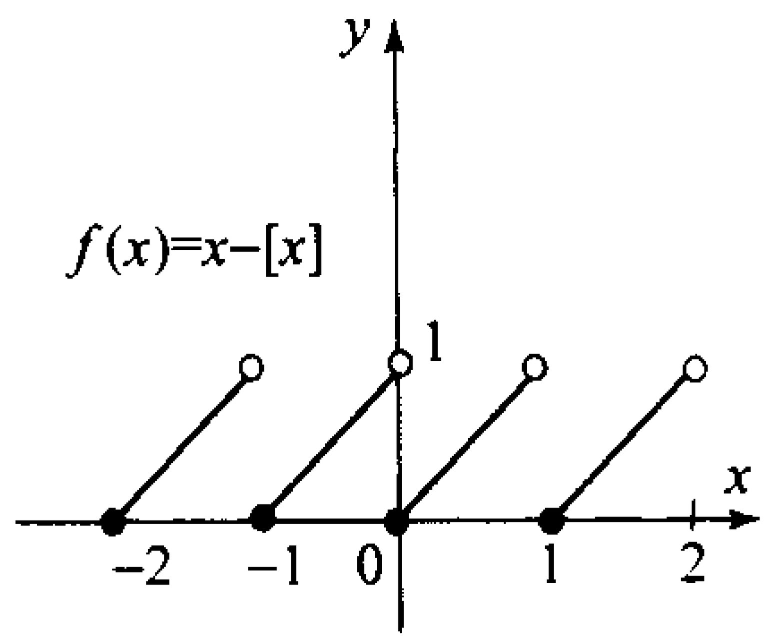


图 8 1-周期函数 $x-[x]$ 的图像 ■

习题 19～23 给出了更多与最大整数函数有关的周期函数． 22

习题 2.1

求出习题 1～2 中函数的周期，并画出草图．

1. (a)$\cos x$．　(b)$\cos\pi x$．　(c)$\cos\frac{2}{3}x$．　(d)$\cos x+\cos 2x$．
2. (a)$\sin 7\pi x$．　(b)$\sin n\pi x$(n 是整数)．　(c)$\cos mx$(m 是整数)．　(d)$\sin x+\cos x$．　(e)$\sin^2 2x$．
3. (a)找出描述图 9 中函数的表达式．

   (b)描述 f 的连续点所构成的集合；在 f 的间断点 x 处，计算 $f(x+)$ 和 $f(x-)$；函数 f 是不是分段连续的？

   (c)在 f 的导数存在的点处，计算 $f'(x)$；在 f 的导数不存在的点处，计算 $f'(x+)$ 和 $f'(x-)$；函数 f 是不是分段光滑的？

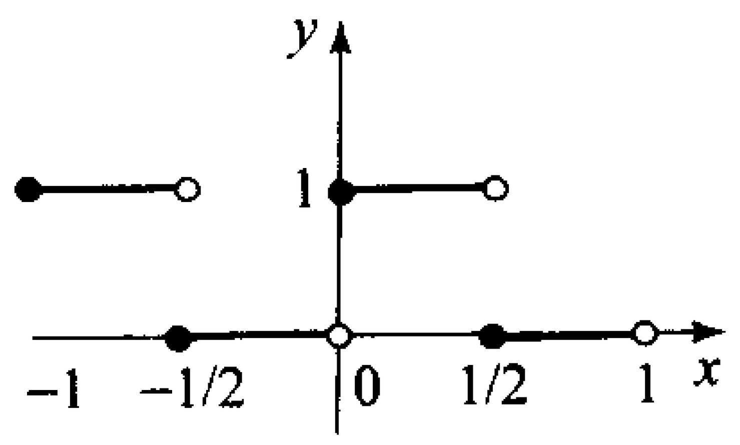


图 9 习题 3 的函数

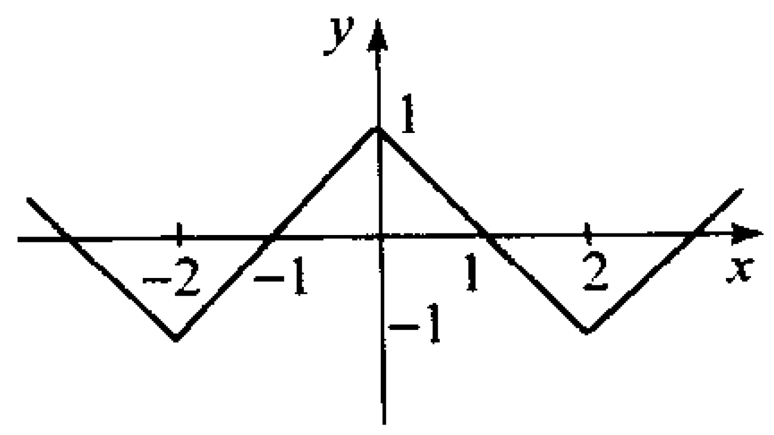


图 10 习题 4 的函数

4. 利用图 10 中的函数，重做习题 3．
5. 建立三角系在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的正交性．
6. **以任意数为周期的三角系．** 令 $p>0$，考虑三角系

$$1,\cos\frac{\pi}{p}x,\cos 2\frac{\pi}{p}x,\cos 3\frac{\pi}{p}x,\cdots,\cos m\frac{\pi}{p}x,\cdots,$$

$$\sin\frac{\pi}{p}x,\sin 2\frac{\pi}{p}x,\sin 3\frac{\pi}{p}x,\cdots,\sin m\frac{\pi}{p}x,\cdots.$$

   (a)这个函数系的共同周期是多少？

   (b)叙述并证明这个函数系在区间 $[-p,p]$ 上的正交性．

7. **周期函数的求和．** 试证：如果 f_1，f_2，…，f_n 是 T-周期函数，则 $a_1f_1+a_2f_2+\cdots+a_nf_n$ 也是 T-周期的；

更一般地，如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ 在区间 $0 < x \leqslant T$ 上逐点收敛，则其极限也是 T- 周期函数.

8. **周期函数的和未必就是周期的.** 令 $f(x)=\cos x+\cos \pi x$.

   (a)试证：方程 $f(x)=2$ 有唯一解.

   (b)由(a)可得 f 不是周期的；这与习题 7 有没有矛盾？这个函数 f 称为是**几乎周期的**，这些函数不仅有趣，而且还有许多有用的应用.

9. **周期函数的运算.**

   (a)令 f 和 g 是 T-周期函数，试证：乘积 $f(x)g(x)$ 和商 $f(x)/g(x)(g(x)\neq 0)$ 也是 T-周期的.

   (b)试证：如果 f 具有周期 T，$a>0$，则 $f\left(\frac{x}{a}\right)$ 具有周期 aT，而 $f(ax)$ 具有周期 $\frac{T}{a}$.

   (c)试证：如果 f 具有周期 T，而 g 是任意函数(未必是周期的)，则复合函数 $g\circ f(x)=g(f(x))$ 也具有周期 T.

10. 利用习题 7 和 9，确定下列函数的周期：

23

(a) $\sin 2x$，(b) $\cos \frac{1}{2}x+3\sin 2x$，(c) $\frac{1}{2+\sin x}$，(d) $e^{\cos x}$.

习题 11～14 给出了 π-周期函数在长度为 π 的区间上的取值，试画出函数图像，并计算积分

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,dx.$$

11. $f(x)=\sin x$，$0\leqslant x<\pi$.

12. $f(x)=\cos x$，$0\leqslant x<\pi$.

13. $f(x)=\begin{cases}1 & \text{如果 } 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2},\\ 0 & \text{如果} -\frac{\pi}{2}<x<0.\end{cases}$

14. $f(x)=x^2$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{\pi}{2}$.

15. **周期函数的原函数.** 假设 f 是 2π-周期的，令 a 是固定实数，定义

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt, \quad \text{对所有 } x.$$

   试证：F 是 2π-周期的，当且仅当 $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt=0$.[提示:定理 1.]

16. 假设 f 是 T-周期的，令 F 是 f 的原函数，如习题 15 所定义，试证：F 是 T-周期的，当且仅当 f 在长度为 T 的任何区间上的积分等于 0.

17. (a)令 f 是例 1 中的函数，描述函数

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt.$$

   [提示：由习题 16，只需考虑 x 在[0，2]中即可.]

   (b)画出 F 在区间[−4，4]上的图像.

18. 利用下列步骤证明定理 1：

   (a)对任意非零整数 n，我们有

$$\int_0^T f(x)\,dx=\int_{nT}^{(n+1)T} f(x)\,dx.$$

   [提示：在第二个积分中作变量代换 $s=x-nT$.]

   (b)令 a 为任意实数，n 是(唯一的)整数，使得 $nT\leqslant a<(n+1)T\leqslant a+T$，试作一个变量代换以证明

$$\int_{nT}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{(n+1)T}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x.$$

(c)利用步骤(a)和(b)，完成定理 1 的证明.

最大整数函数

19. (a)画出函数 $f(x)=x-p\left[\dfrac{x}{p}\right]$的图像，其中 $p=1$，2，π.

(b)试证：f 是 p-周期的；在区间 $0<x<p$ 上，函数取值多少？

20. (a)画出函数 $f(x)=x-2p\left[\dfrac{x+p}{2p}\right]$的图像，其中 $p=1$，2，π.

(b)试证：f 是 $2p$-周期的；并且对$(-p, p)$上的所有 x，有 $f(x)=x$. 正如下面习题所示，在定义间断周期函数时，函数 f 非常有用.

24

21. 在习题 20 中取 $p=1$，考虑函数 $g(x)=f(x)^2=\left(x-2\left[\dfrac{x+1}{2}\right]\right)^2$.

(a)试证：g 是以 2 为周期的周期函数. [提示：利用习题 9(c)和 20.]

(b)试证：对 $-1<x<1$，$g(x)=x^2$.

(c)画出函数 $g(x)$的图像.

22. **三角波**. 在习题 20 中取 $p=1$，考虑函数 $h(x)=|f(x)|=\left|x-2\left[\dfrac{x+1}{2}\right]\right|$.

(a)试证：h 是 2-周期的.

(b)画出函数 $h(x)$的图像.

(c)推广(a)，寻求描述一般的 $2p$-周期三角波的函数的闭公式 $g(x)$，使得对 $-p<x<p$，有 $g(x)=x$；在其他点处，$g(x+2p)=g(x)$.

23. **任意形状**.

(a)假设一个 $2p$-周期函数在区间$(-p, p)$上的限制由函数 $g(x)$给出，试证：这个 $2p$-周期函数在整个实轴上可以用 $g(f(x))$来表达，其中 f 是习题 20 中的函数.

(b)描述并画出函数 $e^{f(x)}$ 的图像，其中 f 是习题 20 中的函数，$p=1$.

分段连续函数和分段光滑函数

在下面的习题中，我们将复习微积分中的一些重要性质，并将它们推广到分段连续函数情形. 图 11 描述了一个分段连续、T-周期函数 f，它在区间$(0, T)$上有两个间断点 x_1，x_2. 在区间$[0, x_1]$上定义函数 $f_1(x)$：$f_1(0)=f(0+)$；对 $0<x<x_1$，$f_1(x)=f(x)$；而 $f_1(x_1)=f(x_1-)$. 这样，$f_1(x)$在闭区间$[0, x_1]$上连续. 类似地，在区间$[x_1, x_2]$上，定义函数 $f_2(x)$；在区间$[x_2, x_3]$上，定义函数 $f_3(x)$. 我们称 f_1，f_2，f_3 为 f 的连续分支. 一般地，如果 f 在区间$(0, T)$上有 n 个间断点，则 f 有 $n+1$ 个连续分支.

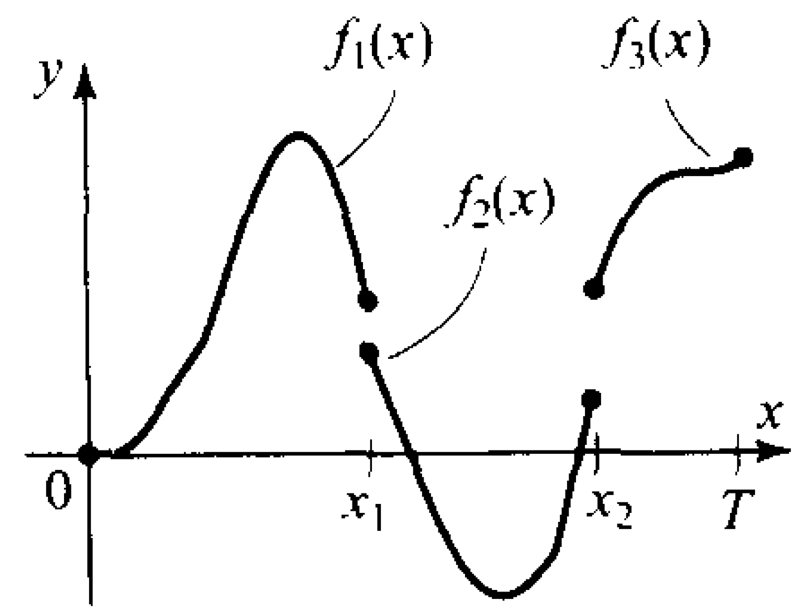


图 11　分段连续函数及其分支

24. 试证：如果 f 是分段连续的，并且是 T-周期的，则 f 是有界的. [提示：只需在区间$[0, T]$上考虑，f 的每一分支在一个有界闭区间上连续；而由微积分知识可知，有界闭区间上的连续函数一定有界.]

25. 假设 f 是 T-周期的分段连续函数，令

$$F(a)=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

(a)试证：F 是连续的. [提示：利用习题 24，$|f(x)|\leqslant M$ 对所有 x 成立，则$|F(a+h)-F(a)|\leqslant M\cdot h$；由此可得当 $h\to 0$ 时，$F(a+h)\to F(a)$.]

(b)试证：$F'(a)=f(a)$在 f 的所有连续点处成立. [提示：如果 f 在所有 a 点处连续，这就是微积分基本定理；而对一般情形，考虑 f 的连续分支. 为简单起见，可假设 f 在区间$(0, T)$只有两个间断点.]

26. (a)如果 f 是分段连续的，令 $F(a)=\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$. 试证：$F$ 在所有 a 点处连续；而在 f 的所有连续点处，F 是可微的.

(b)试证 $F'(a)=0$ 在 f 的所有连续点 a 处成立；由此可得，F 是分段常值的.

(c)试证：F 是常值的.

27. 确定下列函数是否是分段连续或分段光滑的，其中 x 在区间[-1，1]上，且 $f(0)=0$：

25

(a) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$. (b) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$. (c) $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$. (d) $f(x)=x^3\sin\frac{1}{x}$.

2.2 傅里叶级数

傅里叶级数是对 2π-周期函数作如下形式

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

的特殊展开. 在 1.2 节，当讨论受到拨动的弦的振动时，我们曾遇到过这些展开形式；而在下面的章节中，将发现傅里叶级数在许多重要应用中起着本质性的作用. 为应用傅里叶级数，我们必须解决如下问题：

哪些函数具有傅里叶级数展开？如果一个函数具有傅里叶级数，如何计算系数 a_0，a_1，a_2，…，b_1，b_2，…？

我们将在本节中回答第二个问题；而对于第一个问题，它的一般性处理超出了本书的范围. 我们将给出函数具有傅里叶级数表示的充分条件，这些条件虽然简单，但是包含了我们所感兴趣的所有情况. 我们先只考虑应用，而将傅里叶级数收敛性的证明放在 2.8～2.10 节中.

傅里叶系数的欧拉公式

为推导式(1)中的系数公式，我们采取傅里叶自己所用的方法. 对式(1)的两边在区间[$-\pi$，π]上积分，假设逐项积分的条件满足，我们得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi} a_0\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\mathrm{d}x.$$

但是因为 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=0$ 对 $n=1,2,\cdots$ 成立，所以我们得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi} a_0\mathrm{d}x=2\pi a_0,$$

或者

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

(注意到 a_0 是 f 在区间[$-\pi$，π]上的平均值，关于将积分解释成平均值，请参看 2.5 节习题 6.)类似地，将式(1)两边同乘以 $\cos mx(m\geqslant 1)$，再逐项积分，利用三角系的正交性(参看 2.1 节)可得

26

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} a_0\cos mx\,dx}^{=0} + \sum_{n=1}^{\infty}\overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} a_n\cos nx\cos mx\,dx}^{=0\text{对}m\neq n} + \sum_{n=1}^{\infty}\overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} b_n\sin nx\cos mx\,dx}^{=0}$$

$$= a_m\overbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\,dx}^{=\pi} = \pi a_m.$$

因此

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx \quad (m = 1,2,\cdots).$$

由类似过程可得

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx \quad (m = 1,2,\cdots).$$

下面定理总结了以上讨论的结果.

傅里叶系数的欧拉公式 假设 f 具有傅里叶级数表示：

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx).$$

则系数 a_0，a_n 和 b_n 称为 f 的傅里叶系数，由下面的欧拉公式给出：

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \tag{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 1,2,\cdots), \tag{3}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1,2,\cdots). \tag{4}$$

因为(2)～(4)中的被积函数都是 2π-周期的，我们可以运用 2.1 节的定理 1，将上面公式中的积分换成在区间$[0, 2\pi]$(或者长度为 2π 的任何区间)上的积分，这些变化有时是很有用的. 27

另一种形式的欧拉公式

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\,dx, \tag{5}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad 和 \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx, n \geqslant 1. \tag{6}$$

傅里叶系数在傅里叶之前就为欧拉所知，由于这个原因，这些公式都以欧拉的名字来命名. 欧拉曾利用这些公式推导出一些特殊的傅里叶级数，如下面例 1 所给出的. 但正是傅里叶第一个断言这些系数和级数具有更广泛的应用，特别是，可以用来展开任意周期函数. 傅里叶的断言及为验证这个断言所付出的努力推动了傅里叶级数理论的发展，为此该级数命名为傅里叶级数.

对任意正整数 N，我们记 f 的傅里叶级数第 N 项部分和为$s_N(x)$，则

$$\boxed{s_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx + b_n\sin nx).}$$

我们的第一个例题表明傅里叶级数还具有许多特别的性质.

例 1 **锯齿函数的傅里叶级数**

如图 1 所示，锯齿函数由下式确定：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\pi-x) & 若\ 0<x\leqslant 2\pi,\\ f(x+2\pi) & 其他.\end{cases}$$

(a)求出它的傅里叶级数.

(b)利用计算机，画出部分和 $s_1(x)$，$s_7(x)$ 和 $s_{20}(x)$ 的图像，并且确定傅里叶级数的图像.

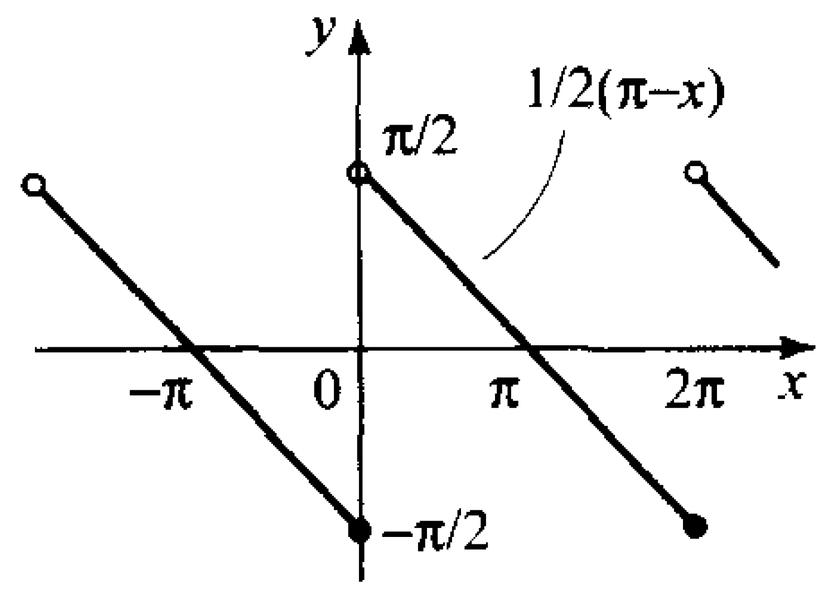


图 1 锯齿函数

解 (a)利用式(5)和(6)，我们有

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)\mathrm{d}x=0;$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\pi\cos nx\,\mathrm{d}x-\int_0^{2\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x\right\}=0;\end{aligned}$$

28

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)\sin nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\pi\sin nx\,\mathrm{d}x-\int_0^{2\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x\right\}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{-1}{n^2}\sin nx+\frac{x}{n}\cos nx\right\}\Bigg|_0^{2\pi}\quad（分部积分）\\&=\frac{1}{2\pi}\frac{2\pi}{n}=\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

在求解 a_n 时，我们利用了公式 $\int x\cos nx\,,\mathrm{d}x=\frac{1}{n^2}\cos nx+\frac{x}{n}\sin nx$，这可以由分部积分得到. 将 a_n 和 b_n 的值代入(1)，我们得到 f 的傅里叶级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

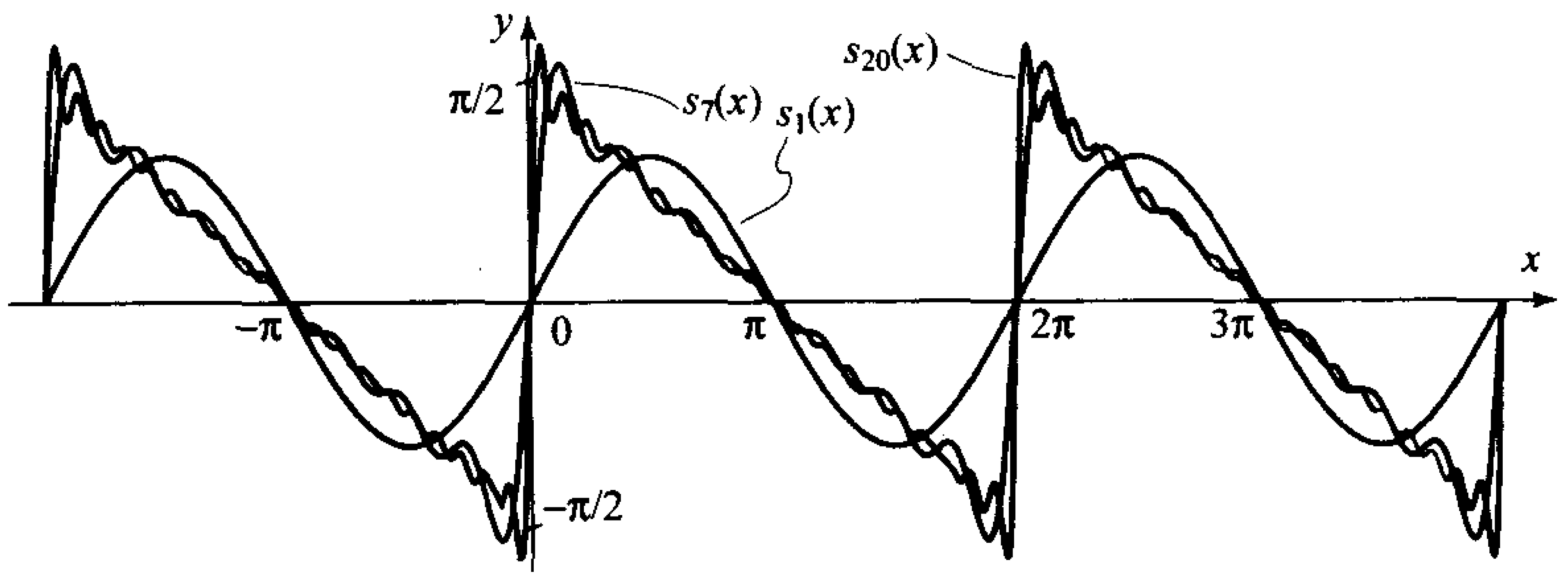


图 2 这个傅里叶级数的第 n 项部分和为 $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}$. 要区分这些图像，注意到，当 n 增加时，正弦函数的频率也增加，这导致更高阶部分和的图像抖动得更厉害. 部分和图像的极限就是整个傅里叶级数的图像，如图 3 所示，除了那些间断点，它与函数图像完全吻合

(b)图 2 描述了傅里叶级数的第 1、7、20 项部分和，我们可以清楚地看到 f 的傅里叶级数在 f 的连续点 x 处收敛到 $f(x)$. 特别地，对 $0<x<2\pi$，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{1}{2}(\pi-x).$$

在那些间断点($x=2k\pi$, $k=0$, ±1, ±2, …)处，级数收敛到 0. 傅里叶级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 的图像如图 3 所示，除了那些间断点，它与函数的图像一致. ■

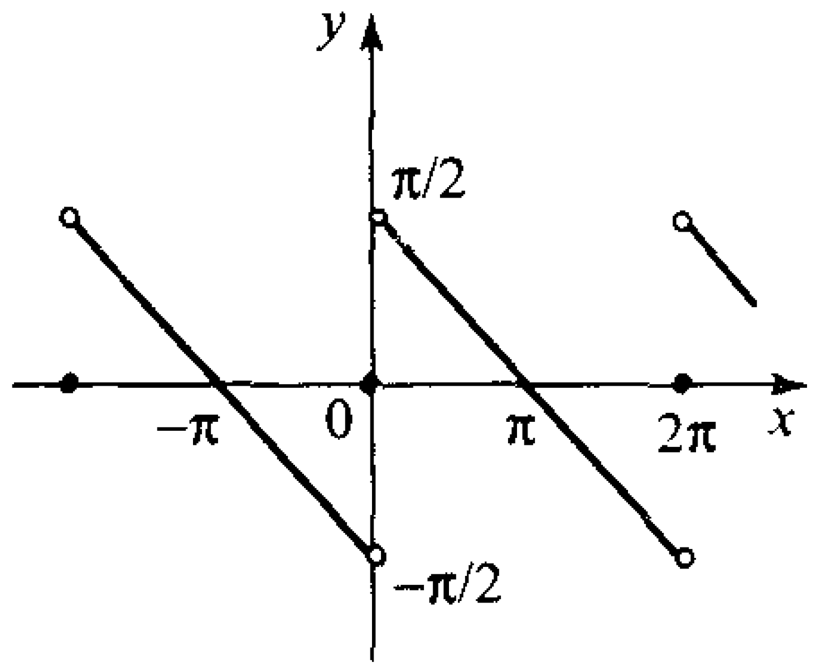


图 3 除了那些间断点，傅里叶级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 的图像与函数图像完全吻合

关于傅里叶级数在间断点附近的行为，有以下两个事实值得注意：

注 1 例 1 中，在间断点 $x=2k\pi$ 处，傅里叶级数收敛到 0，这正是函数在这些点的左、右极限的平均值.

注 2 在间断点附近，傅里叶级数超出它的极限值，这一点在图 2 中看得很清楚：部分和的图像在间断点附近形成一个驼峰. 这一有趣现象称为**吉布斯(或维尔布拉汉姆-吉布斯)现象**，我们将在习题中研究它. 这一现象首先由维尔布拉汉姆在 1848 年研究特殊傅里叶级数时观察到；1899 年，吉布斯又重新发现这一现象，并开始利用锯齿函数作为例子研究它. 虽然，吉布斯没有给出其断言的完整证明，但是他确实强调了这一现象的重要性，故以他的名字来命名它. 关于这部分的有趣记录，可参见 E. Hewitt 和 R. Hewitt 所撰写的文章“The Gibbs-Wilbraham phenomenon: an episode in Fourier analysis”，发表于杂志“Archive for the History of Exact Sciences”，第 21 卷，1979 年，129～160 页.

29

我们即将看到，这些观察对很一般的情形都成立，回忆起，f 是分段光滑的，如果 f 和 f' 是分段连续的；如果 f 是分段连续的，则 f 在 c 处的**平均值**(或**算术平均值**)是

$$\frac{f(c-)+f(c+)}{2},$$

其中 $f(c+)=\lim_{x\to c^+}f(x)$ 和 $f(c-)=\lim_{x\to c^-}f(x)$. 如果 f 在 c 处是连续的，则 $f(c+)=f(c-)=f(c)$，从而 f 在 c 处的平均值就是 $f(c)$. 因此，平均值这一术语仅在间断点处才有意义.

图 4 中的函数在 $x=1$ 处间断，它在这里的平均值是

$$\frac{1+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}.$$

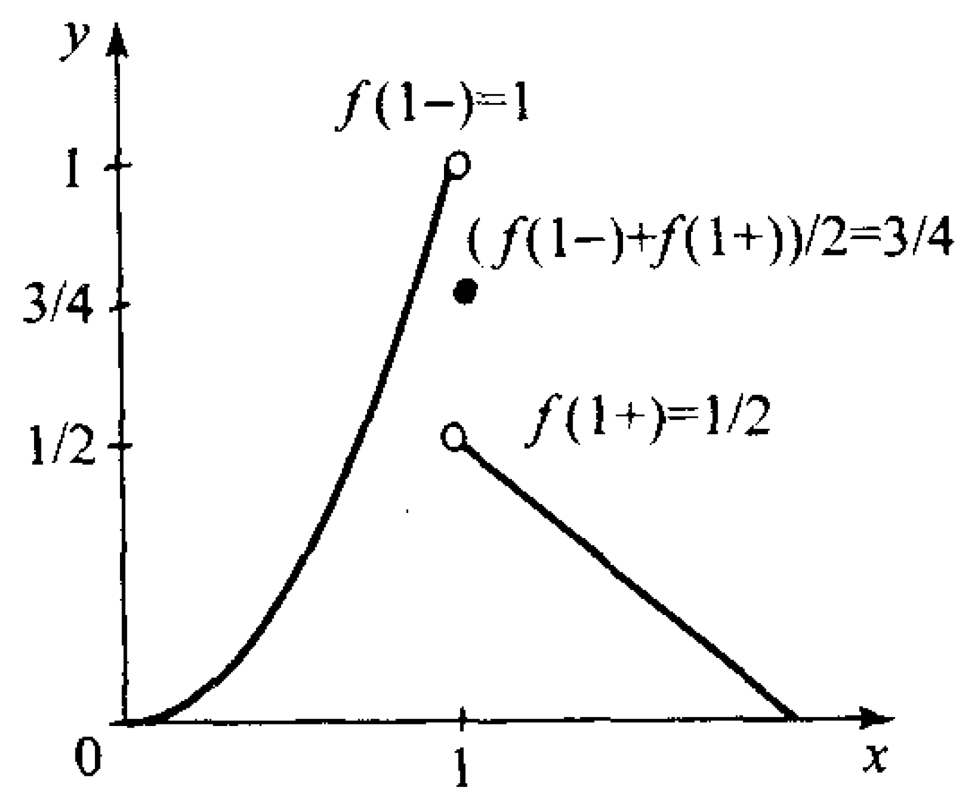


图 4 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 的平均值

为进一步说明问题，可以验证锯齿函数(图 1)在所有间断点处的平均值是 0.

现在，我们可以叙述傅里叶级数理论中的一个基本结果了.

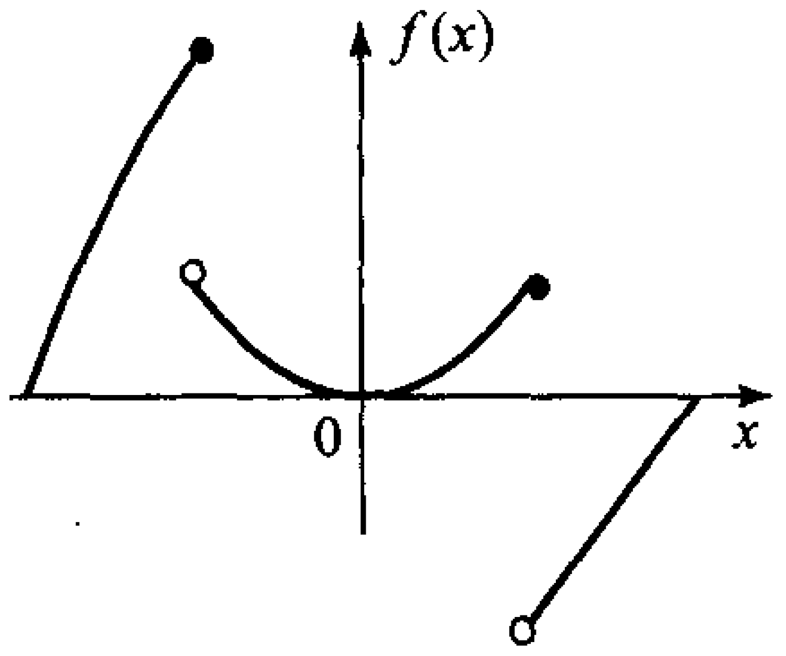
定理 1(傅里叶级数表示) 假设 f 是 2π-周期的分段光滑函数，则对所有的 x，我们有

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\tag{7}$$

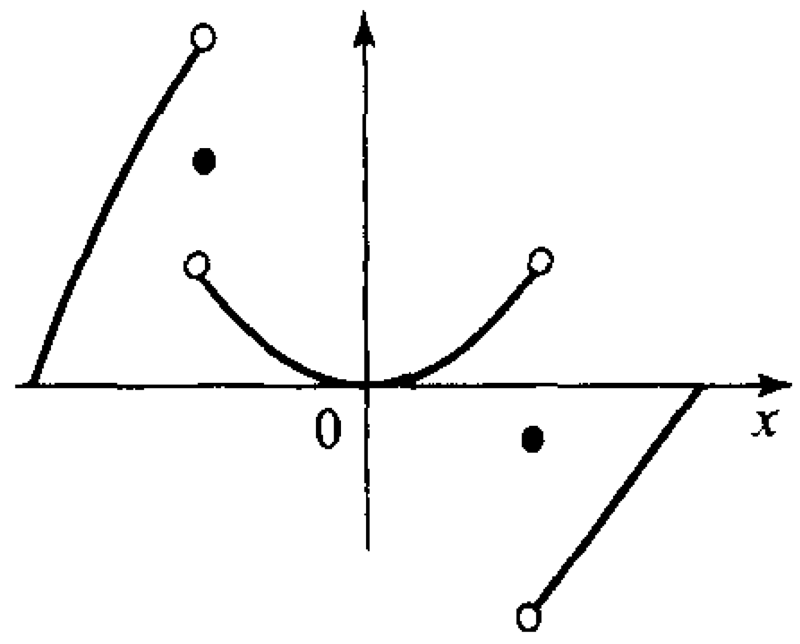
其中傅里叶系数 a_0，a_n，b_n 由式(2)～(4)给出．特别地，如果 f 是分段光滑的，且在 x 处连续，则

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).\tag{8}$$

因此，在分段光滑函数的连续点处，傅里叶级数收敛到函数在该点的取值；在间断点处，傅里叶级数也收敛，但是它不会偏向任何一方，而是收敛到左、右极限的平均值(参见图 5).



a) 分段光滑函数



b) 它的傅里叶级数

图 5

30

注意到，在(7)式中，f 的傅里叶级数在给定点 x 处的取值并不依赖于 $f(x)$，而是依赖于 f 在 x 点处的左、右极限．由此，在某些孤立点处，我们可以定义(或重新定义)f，而不影响它的傅里叶级数．这点可以考察例 1 中傅里叶级数的行为来说明，在那些间断点处，我们可以令函数取任何值，而不影响傅里叶级数的行为．如果在间断点处我们重新定义函数为 $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$，则我们得到等式

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

在所有 x 处成立．我们以后将经常假定在间断点处作了如此修改，不再担心那更精确但也难记的公式(7).

我们将在 2.8 节中给出定理 1 的完整证明，这个证明是傅里叶级数思想和微积分基本工具的完美结合．有关傅里叶级数收敛性的论题将在 2.9 和 2.10 节中给出.

我们必须记住，仅仅有 f 的连续性不足以保证傅里叶级数的收敛性．虽然我们不会碰到使傅里叶级数不收敛的连续函数，但是确实存在这样的连续函数，它的傅里叶级数在区间[0，2π]的无穷多个点处发散．我们下面这个例题表明：如果 f 是连续的，且分段光滑，则它的傅里叶级数事实上是一致收敛到 f 的．关于这个事实的证明，请参阅 2.9 节，那里我们将详细学习一致收敛性.

例 2 三角波

2π-周期的三角波在区间[−π，π]上由下式给出：

$$g(x)=\begin{cases}\pi+x & \text{如果}-\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ \pi-x & \text{如果 }0\leqslant x\leqslant \pi.\end{cases}$$

(a)求出它的傅里叶级数.

(b)画出部分和以及傅里叶级数的图像.

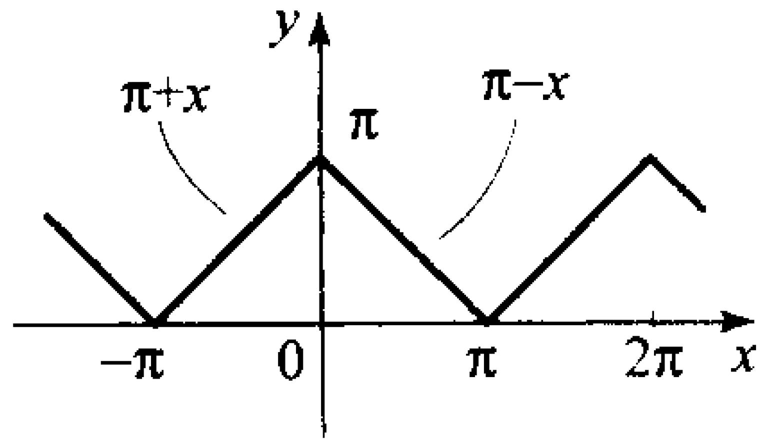


图 6 三角波

解 由图 6 可知，$g(x)$是分段光滑的，且在所有 x 处连续($g'(x)$在 $x=k\pi$ 处不存在)，所以，由定理 1 的第二部分，我们期望傅里叶级数在所有 x 处收敛到 $g(x)$. 利用(2)，我们有

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\pi^2=\frac{1}{2}\pi.$$

31

(这是图 6 中以$[-\pi,\ \pi]$为底三角形的面积除以 2π.)利用(3)，我们有

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi+x)\cos nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-x)\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-x)\cos nx\,\mathrm{d}x\quad(\text{第一次积分时,将 }x\text{ 换成 }-x)\\&=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{n^2}-\frac{\cos n\pi}{n^2}\right\}\qquad(\text{分部积分}).\end{aligned}$$

由于 $\cos n\pi=(-1)^n$，所以我们知道：当 n 是偶数时，$a_n=0$；而当 n 是奇数时，$a_n=\frac{4}{\pi n^2}$. 最后，利用(4)，我们有

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overbrace{g(x)\sin nx}^{\text{奇函数}}\mathrm{d}x=0,$$

因为我们是对一个奇函数在对称区间上求积分. 现在，定理 1 蕴涵

$$g(x)=\frac{1}{2}\pi+\sum_{n\text{奇数}}\frac{4}{\pi n^2}\cos nx=\frac{1}{2}\pi+\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x \tag{9}$$

对所有 x 成立. 由于函数本身及其傅里叶级数在所有点处相等，所以它们的图像重合(比较图 6 和图 8).

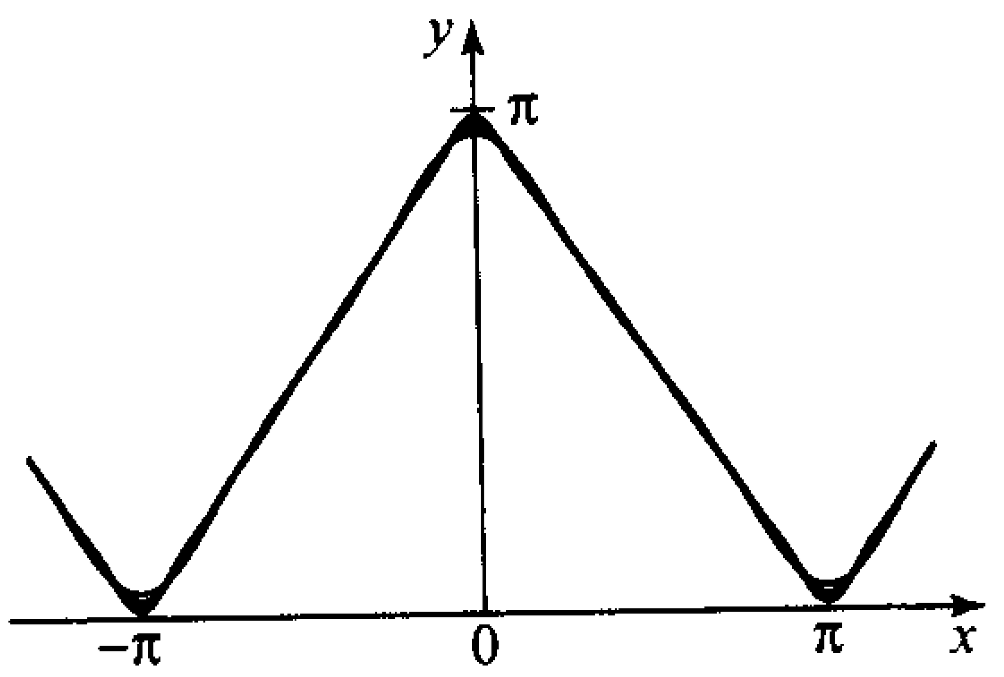


图 7 傅里叶级数的部分和

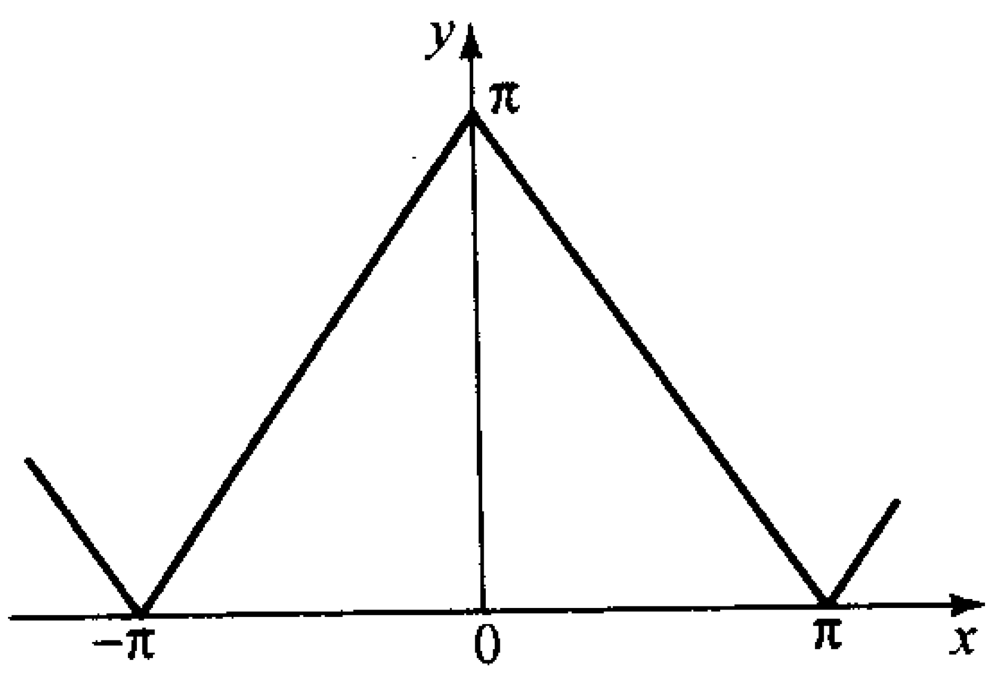


图 8 傅里叶级数

在(9)中，令 k 从 0 分别取到 1、2 和 5，我们得到傅里叶级数的第 3、5 和 11 项部分和. 图 7 是这些部分和的图像. 比较图 7 和图 2，我们可以发现一个主要区别：虽然在这两种情形中，部分和都收敛到极限函数，但是图 7 中的部分和在所有 x 处以相同的速度趋近于$g(x)$，

这就是所谓的一致收敛性，这是由 $g(x)$既连续又分段光滑这个事实所保证的；而图 2 中的部分和则不具备这个性质.

如图 7 所示，这个傅里叶级数的部分和收敛得很快，比例 1 中的部分和收敛得快，这是由傅里叶系数的大小决定的，例 1 中的傅里叶系数是$\frac{1}{n}$阶的；而例 2 中的系数是$\frac{1}{n^2}$阶的. ■

32 为了说明定理 1 的强大，我们给出一个简单应用，它得到了一个著名的恒等式.

例 3　由傅里叶级数到和级数

如果在(9)式的两端取 $x=0$，我们得到

$$\pi = g(0) = \frac{1}{2}\pi + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

两边同时减去$\frac{1}{2}\pi$，再同乘以$\frac{\pi}{4}$，我们得到一个有趣的恒等式

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots,$$

这可以用来逼近 π^2(因此也可以用来逼近 π). ■

傅里叶级数的运算

例 1 和 2 中的傅里叶级数都是特殊形式：一个是奇函数的，只含有正弦项；另一个是偶函数的，只含有余弦项. 这种类型的傅里叶级数将在后面两节中详细讨论. 下例中的傅里叶级数既有正弦项也有余弦项，在推导傅里叶级数时，我们并不计算傅里叶系数；而是应用一些运算，比如常数乘以一个傅里叶级数、将两个傅里叶级数相加、变量代换(将 x 换成 $-x$)和平移等. 在由已知傅里叶级数导出新的傅里叶级数时，这些简单运用非常有用.

例 4　傅里叶级数的线性组合

2π-周期函数

$$h(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{如果 } 0 < x \leqslant \pi, \\ 0 & \text{如果 } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

通过式 $h(x)=f(x)+\frac{1}{2}g(x)$与例 1 和例 2 中的函数相联系. 这可以通过利用 f 和 g 的表达式、或将图 1 和图 6 中的图像相加并与图 9 比较加以验证. 为计算 h 的傅里叶级数，我们可以运用欧拉公式，或更好地，我们可以对例 1 和例 2 中的傅里叶级数作适当而简单的线性组合，比如：

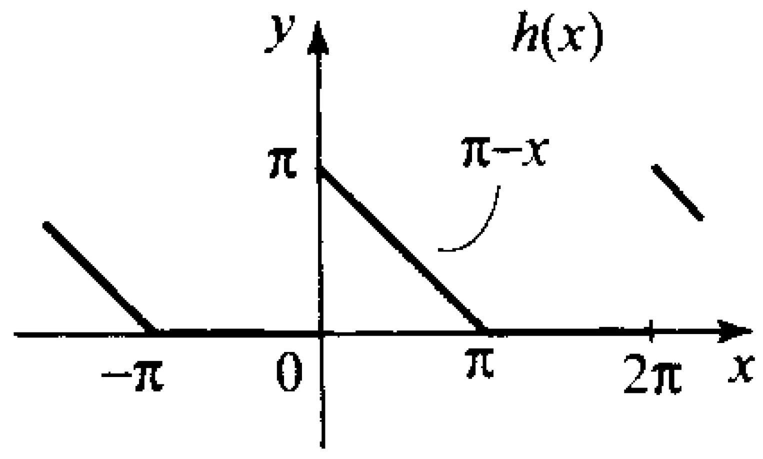


图 9　例 4 中的函数

$$h(x) = f(x) + \frac{1}{2}g(x)$$

$$= \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}}^{f(x)} + \overbrace{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^n}{n^2}\right)\cos nx}^{\frac{1}{2}g(x)}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^n}{n^2} \right) \cos nx + \frac{\sin nx}{n} \right\}.$$

图 10 说明，傅里叶级数的部分和收敛到 $h(x)$. 观察在间断点 $x=2k\pi$(k 是整数)处的吉布斯现象，在这些点处，傅里叶级数收敛到平均值 $\frac{\pi}{2}$，而在其他点处，傅里叶级数收敛到 $h(x)$. 33

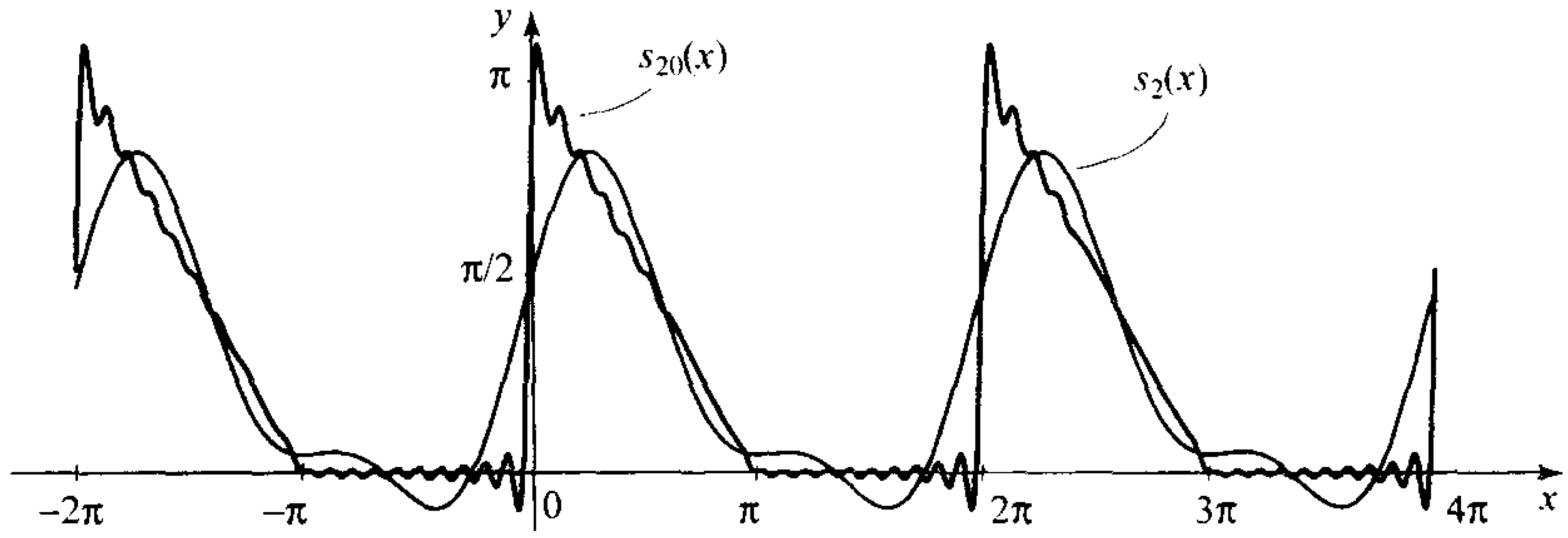


图 10 观察在间断点($x=2k\pi$)处的吉布斯现象. 这是由傅里叶级数是收敛得很快的余弦部分(图 7)以及在间断点处超出的正弦部分组成这个事实所导致的 ■

上面的例题说明了傅里叶级数的线性性(参见习题 23)，下面的例题将说明傅里叶级数的变量代换和平移(参见习题 24).

例 5 变量代换和平移

(a)图 11 中的函数 $k(x)$图像是将图 9 中的图像作关于 y 轴反射、再向左或者右平移 π 单位来得到，因此 $k(x)=h(-x-\pi)$，$k(x)$的傅里叶级数表示是

$$k(x) = h(-x-\pi) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^n}{n^2} \right) \cos n(-x-\pi) + \frac{\sin n(-x-\pi)}{n} \right\}.$$

但是 $\cos n(-x-\pi)=(-1)^n \cos nx$，而 $\sin n(-x-\pi)=(-1)^{n+1}\sin nx$，从而有

$$k(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right) \cos nx + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \right\}.$$

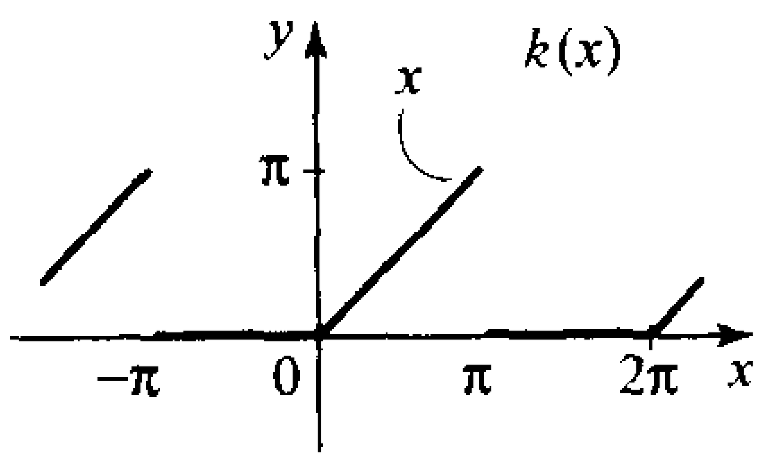


图 11 例 5(a)中的函数

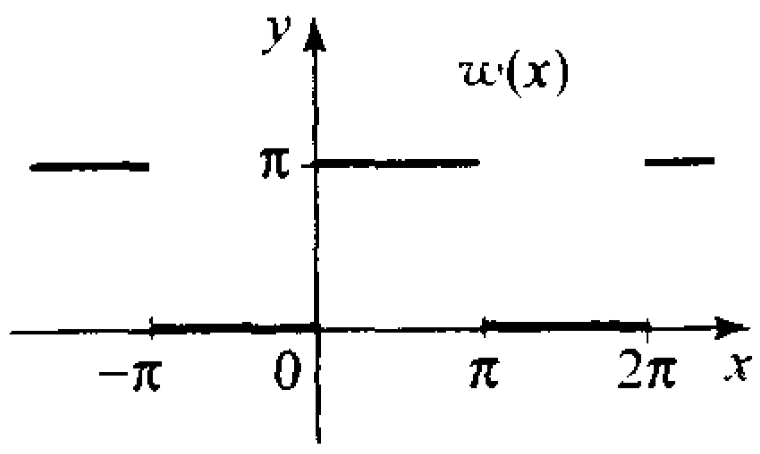


图 12 例 5(b)中的方波

(b)图 12 中的方波 $w(x)$是函数 $h(x)$和 $k(x)$之和，将图 9 和图 11 中的图像相加可以直接验证. 利用 h 和 k 的傅里叶级数，以及关系式 $w(x)=h(x)+k(x)$，我们得到方波的傅里叶级数表示：

$$w(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (1+(-1)^{n+1}) \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

当然，也可以利用欧拉公式以及显式表达式：

$$w(x)=\begin{cases}\pi & \text{如果 } 0<x<\pi,\\ 0 & \text{如果 } \pi<x<2\pi.\end{cases}$$

来推导傅里叶级数．上面我们所采用的方法显示了不同傅里叶级数之间的关系，从而为你提供了一种比较它们收敛速度的方法． ■

34

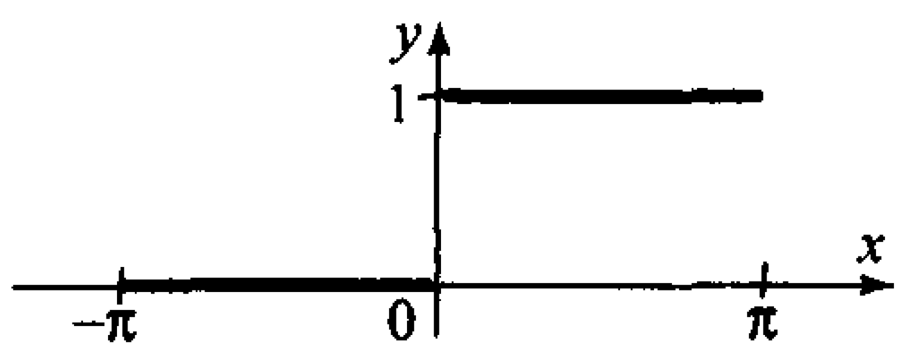
习题 2.2

在习题 1～4 中，2π-周期函数在区间$[-\pi,\ \pi]$上已经给定．

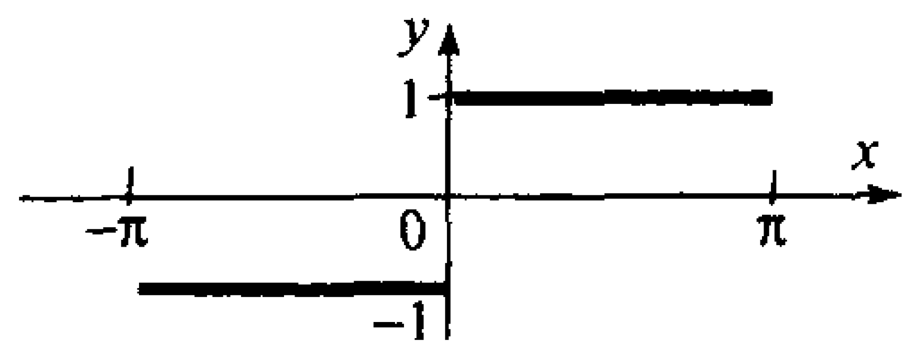
(a)画出函数在区间$[-3\pi,\ 3\pi]$上的图像．

(b)画出傅里叶级数(不计算)在区间$[-3\pi,\ 3\pi]$上的图像．

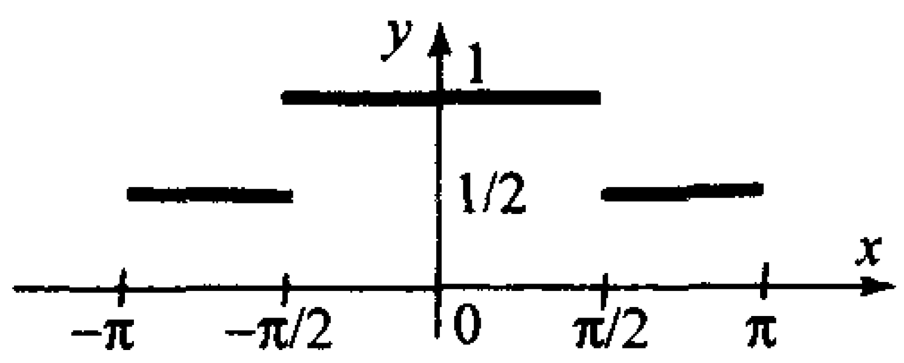
1.



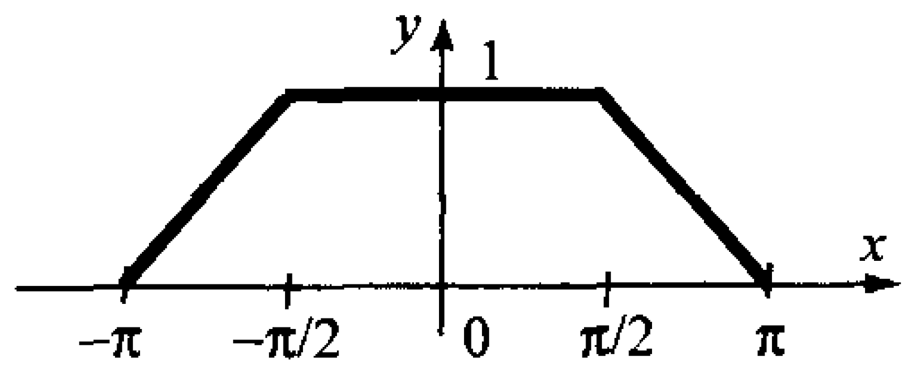
2.



3.



4.



习题 1～4 中的函数的傅里叶级数请参见习题 19、21 和 22.

在习题 5～16 中，2π-周期函数的方程在长度为 2π 的区间上已经给定，傅里叶级数也已经给出．

(a)推导出所给定的傅里叶级数．

(b)画出函数以及傅里叶级数第 N 项部分和的图像，$N=1,\ 2,\ \cdots,\ 20$.

(c)通过图像，讨论部分和的收敛性，在间断点处要详尽些．

5. 当 $-\pi\leqslant x<\pi$ 时，$f(x)=|x|$；傅里叶级数：$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x$.

6. $f(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } 0<x<\pi/2,\\ -1 & \text{当 } -\pi/2<x<0,\\ 0 & \text{当 } \pi/2<|x|<\pi.\end{cases}$ 傅里叶级数：$\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(1-\cos\dfrac{n\pi}{2}\right)\sin nx$.

7. 当 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$f(x)=|\sin x|$；傅里叶级数：$\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k)^2-1}\cos 2kx$.

8. 当 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$f(x)=|\cos x|$；傅里叶级数：$\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k)^2-1}\cos 2kx$.

[提示：你可以直接计算，或如果你已经做了习题 7，以 $x-\pi/2$ 代替 x 即可.]

9. 当 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$f(x)=x^2$；傅里叶级数：$\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$.

10. $f(x)=1-\sin x+3\cos 2x$；傅里叶级数：与 $f(x)$ 一样.

11. $f(x)=\sin^2 x$；$f(x)=\cos^2 x$；

傅里叶级数：$\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}$；$\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{2}$.

35

12. 当$-\pi<x<\pi$时，$f(x)=\pi^2x-x^3$；傅里叶级数：$12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\sin nx$.

13. 当$-\pi<x<\pi$时，$f(x)=x$；傅里叶级数：$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$.

[提示：在例1中令$x=\pi-t$.]

14. 对于(a)和(b)部分，取c，$d>0$，且$d<\pi$；对于(c)部分，取$c=d=\pi/2$.

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{如果 } -\pi\leqslant x\leqslant -d,\\ \frac{c}{d}(x+d) & \text{如果 } -d\leqslant x\leqslant 0,\\ -\frac{c}{d}(x-d) & \text{如果 } 0\leqslant x\leqslant d,\\ 0 & \text{如果 } d\leqslant x\leqslant \pi.\end{cases}$$

傅里叶级数：$\frac{cd}{2\pi}+\frac{4c}{d\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{dn}{2}\right)}{n^2}\cos nx$.

15. 当$-\pi<x\leqslant\pi$时，$f(x)=e^{-|x|}$；

傅里叶级数：$\frac{e^{\pi}-1}{\pi e^{\pi}}+\frac{2}{\pi e^{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}(e^{\pi}-(-1)^n)\cos nx$.

16. $f(x)=\begin{cases}1/(2c) & \text{如果 } |x-d|<c,\\ 0 & \text{如果 } c<|x-d|<\pi,\end{cases}$

其中$0<c<\pi$，d是任意数；

傅里叶级数：$\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{c\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(nc)\cos(nd)}{n}\cos nx+\frac{\sin(nc)\sin(nd)}{n}\sin nx\right)$；对于(c)部分，取$c=d=\pi/4$.

17. 利用习题9的傅里叶级数，推导

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots.$$

18. 利用习题13的傅里叶级数，推导

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

19. 不计算傅里叶系数，推导出以下给定函数的傅里叶级数：

(a)习题1中的函数，利用例5中方波的傅里叶级数.

36

(b)习题2中的函数，利用前面(a)部分.

(c)图13中的函数，利用(a)的傅里叶级数.

(d)习题3中的函数，利用前面(c)部分.

20. (a)利用习题7的傅里叶级数，推导图14中函数的傅里叶级数.[提示：考察函数$\sin x$.]

(b)推导图15中函数的傅里叶级数.

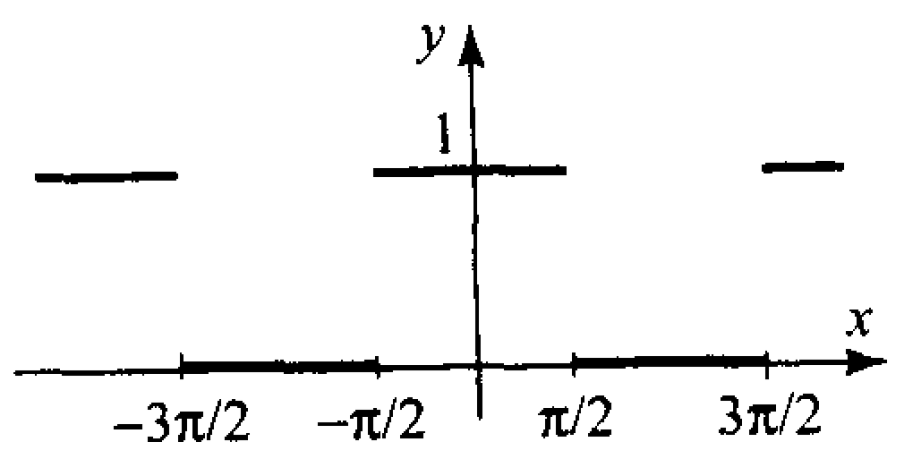


图 13

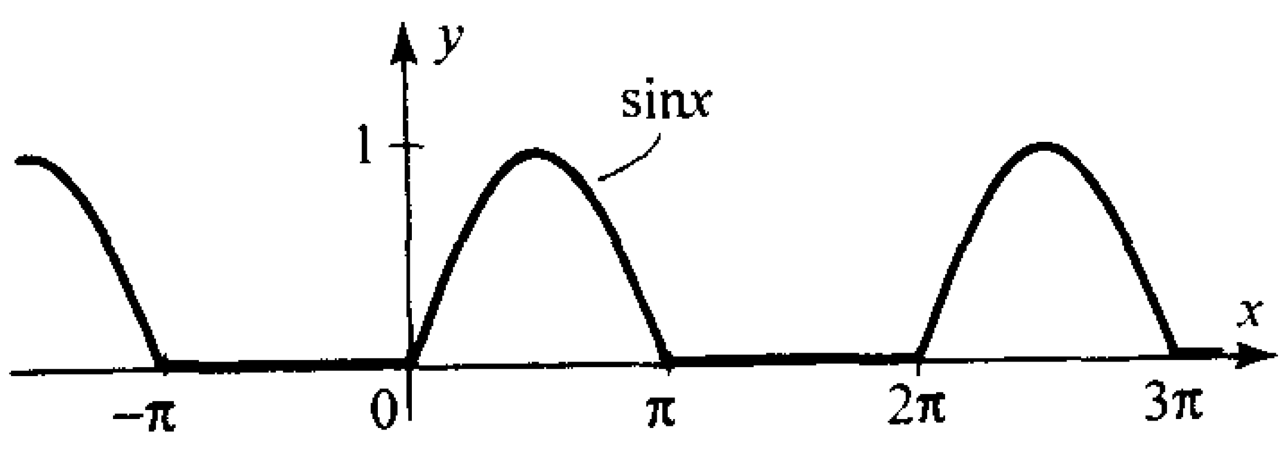


图 14

21. (a)令 $f(x)$是一个 2π-周期函数，其在区间$[-\pi,\pi]$上的取值如图 16 所示. 利用欧拉公式计算它的傅里叶级数.

(b)画出函数 $g(x)=f(-x)$的图像，并求出它的傅里叶级数.

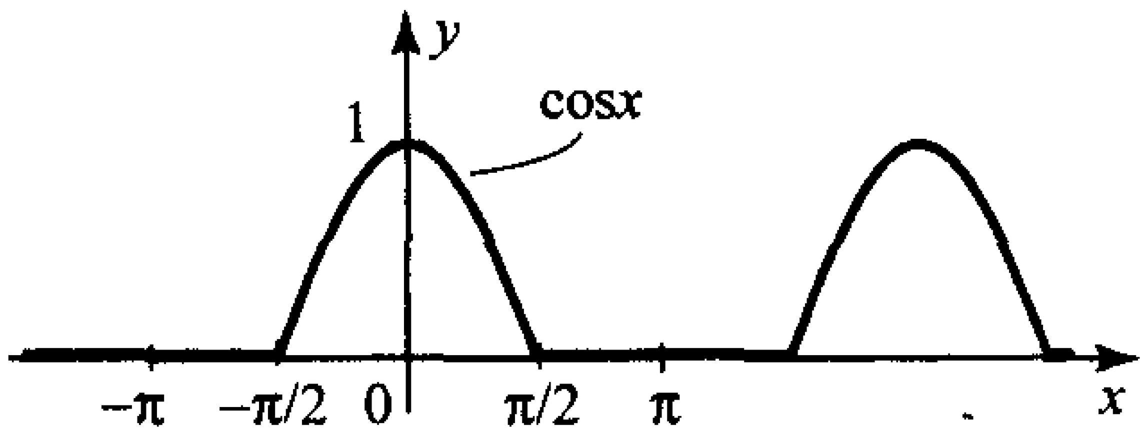


图 15

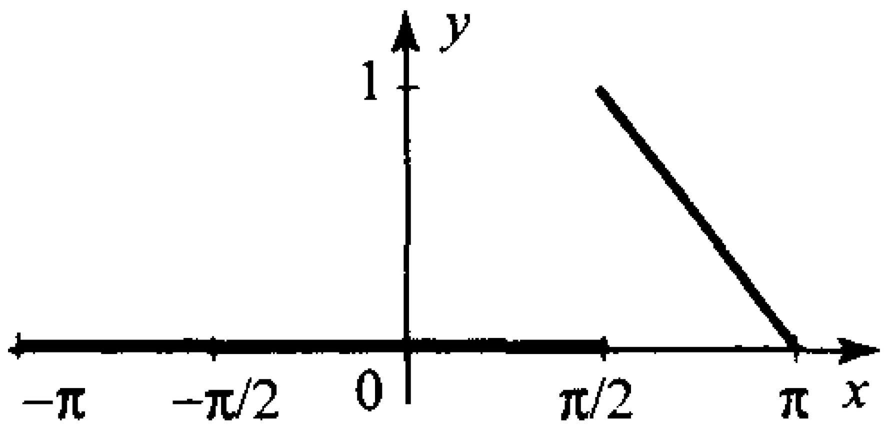


图 16 习题 21

22. 结合习题 19(c)和习题 21 的结果，求出习题 4 中函数的傅里叶级数.

23. **傅里叶系数及傅里叶级数的线性性**. 令 α 和 β 是任意实数，试证：如果 f 和 g 分别具有傅里叶系数 a_0，a_1，a_2，…，b_1，b_2，…和 a_0^*，a_1^*，a_2^*，…，b_1^*，b_2^*，…，则函数 $\alpha f+\beta g$ 具有傅里叶系数 $\alpha a_0+\beta a_0^*$，$\alpha a_1+\beta a_1^*$，$\alpha a_2+\beta a_2^*$，…，$\alpha b_1+\beta b_1^*$，$\alpha b_2+\beta b_2^*$，….

24. **反射和平移傅里叶级数**. 假设 $f(x)$是 2π-周期的，且令 $g(x)=f(-x)$，以及 $h(x)=f(x-\alpha)$，其中 α 是一个固定实数. 为区分傅里叶系数，我们以 $a(f,n)$和 $b(f,n)$代替 a_n 和 b_n 来表示 f 的傅里叶系数.

(a)试证：$a(f,0)=a(g,0)$，$a(f,n)=a(g,n)$和 $b(f,n)=-b(g,n)$，对所有 $n\geqslant 1$ 成立；

(b)试证：$a(f,0)=a(h,0)$，$a(h,n)=a(f,n)\cos n\alpha-b(f,n)\sin n\alpha$ 和 $b(h,n)=a(f,n)\sin n\alpha+b(f,n)\cos n\alpha$，对所有 $n\geqslant 1$ 成立.

吉布斯现象

专题问题. 完成习题 25～27，以研究锯齿函数的吉布斯现象.

25. 考虑例 1 中的 2π-周期函数.

(a)在区间$-\pi<x<3\pi$ 上，画出 f 及其第 N 项部分和 $s_N(x)$的图像，$N=5$，10，15.

(b)为考察部分和对 f 的逼近程度，画出$|f-s_N|$的图像，$N=5$，10，15.

(c)注意到在 $x=0$ 和 $x=2\pi$(f 的间断点)附近，部分和以某个正常量超出函数值 $f(x)$. 通过分析$|f-s_N|$的图像，$N=5$，10，15，…，试证：这个常量接近于 0.28.

26. 考虑锯齿函数傅里叶级数的部分和：

$$s_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin nx}{n}.$$

(a) 取 $x=\frac{\pi}{N}$，试证：$s_N\left(\frac{\pi}{N}\right)=\sum_{n=1}^{N}\frac{\pi}{N}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{N}\right)}{\frac{n\pi}{N}}$.

[37]

(b) 判定当 $N\to\infty$ 时，$s_N\left(\frac{\pi}{N}\right)\to\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$；[提示：用形如(a) 中的黎曼和逼近积分.]

(c)求得泰勒级数展开

$$\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\quad(-\infty<x<\infty).$$

(d)将(c)中的级数逐项积分，利用交错级数判别法可得到不等式

$$1.85<\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx<1.86.$$

(e)判定 $\lim\limits_{N\to\infty}\left|f\left(\frac{\pi}{N}\right)-s_N\left(\frac{\pi}{N}\right)\right|$存在，并且接近于 0.27.

(f)画出 $f(x)$ 和 $s_N(x)(N=1, 2, \cdots, 7)$ 的图像，并注意到对任意 N，图像在 $x=\frac{\pi}{N+1}$ 处都有一个驼峰. 当 $N\to\infty$ 时，这个驼峰向左运动，这与定理 1 有无矛盾？试解释之.

27. 参看例 1 中的函数，不重复习题 26 的证明，描述在 $x=2\pi$ 处的吉布斯现象，即估计它的大小，确定 $s_N(x)$ 在何处超出.

28. **专题问题**. 考虑 2π-周期函数：$f(x)=x$，当 $-\pi<x<\pi$. 由习题 13，我们有傅里叶级数

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}, \quad -\pi < x < \pi.$$

本题考察在点 $x=\pi$ 处的吉布斯现象，我们将按照习题 26 的步骤，并作适当的修改.

(a)取 $x=\pi-\frac{\pi}{N}$，试证：$s_N\left(\pi-\frac{\pi}{N}\right)=2\sum_{n=1}^{N}\frac{\pi}{N}\left(\frac{N}{n\pi}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{N}\right)$.

(b) 判定当 $N\to\infty$ 时，$s_N\left(\pi-\frac{\pi}{N}\right)\to 2\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

(c)试证 $\lim\limits_{N\to\infty}\left|f\left(\pi-\frac{\pi}{N}\right)-s_N\left(\pi-\frac{\pi}{N}\right)\right|$ 存在，并且接近于 0.56.

(d)通过比较 $s_N(x)$ 和 f 的图像说明吉布斯现象；特别是，从图像上说明：对任意 N，图像中的驼峰都出现在 $x=\pi-\frac{\pi}{N}$ 处，从而当 $N\to\infty$ 时驼峰向右运动.

2.3 以任意数为周期的函数的傅里叶级数

在上一节中我们研究了以 2π-为周期的函数，选择这个周期仅仅是为了方便. 在本节中，我们说明：如何通过简单的变量代换，可以将我们的结果推广到以任意数为周期的函数(参见图 1)上.

假设 f 是周期为 $T=2p>0$ 的函数，令

$$g(x) = f\left(\frac{p}{\pi}x\right). \tag{1}$$

由于 f 是 $2p$-周期的，我们有

$$g(x+2\pi) = f\left(\frac{p}{\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{p}{\pi}x+2p\right) = f\left(\frac{p}{\pi}x\right) = g(x).$$

因此，g 是 2π-周期的. 这个化简可以使我们能够将 2.2 节的主要结果推广到以任意数为周期的函数上.

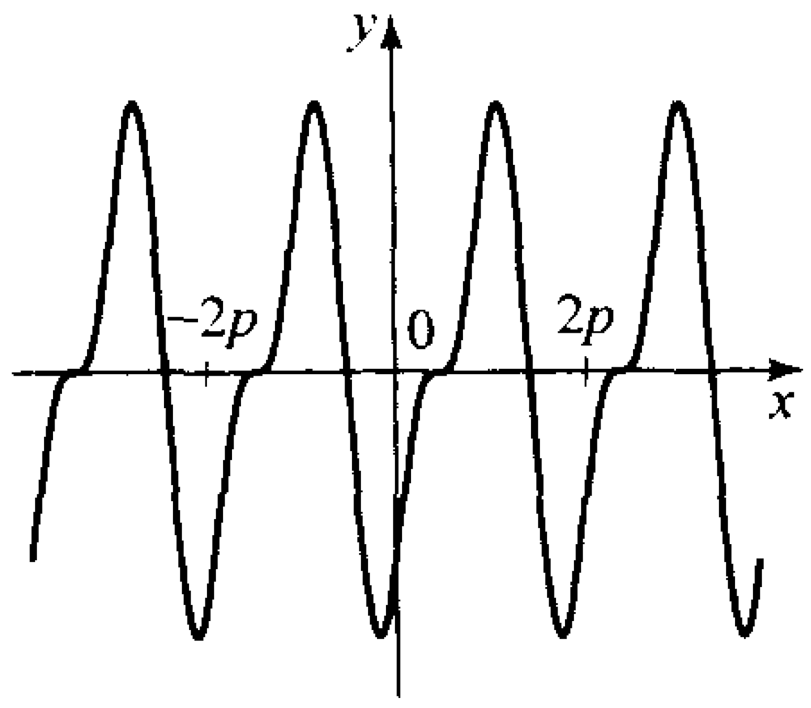


图 1　$2p$-周期函数

38

定理 1(傅里叶级数表示：以任意数为周期)　假设 f 是 $2p$-周期的分段光滑函数，则 f 的傅里叶级数由下式给出：

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x + b_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right), \tag{2}$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}f(x)\mathrm{d}x, \tag{3}$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots), \tag{4}$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\,dx \quad (n = 1,2,\cdots). \tag{5}$$

如果 f 在 x 处连续，则傅里叶级数收敛到 $f(x)$，否则收敛到$\frac{f(x-)+f(x+)}{2}$.

证明 由于 f 是分段光滑的，则由(1)定义的 2π-周期函数 g 也是分段光滑的. 由 2.2 节的定理 1，我们有

$$\frac{g(x-)+g(x+)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \quad (\text{对所有 } x), \tag{6}$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\,dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\,dx. \tag{7}$$

在(6)中，将 x 替代为$\frac{\pi}{p}x$，并运用(1)，得

$$\frac{f(x-)+f(x+)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x + b_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right), \tag{8}$$

其中系数由(7)式给出. 为将系数用形如(3)～(5)式含 f 项表示出来，我们再次运用(1)式，作变量代换 $t=\frac{p}{\pi}x$，得到

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{p}{\pi}x\right)dx = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)dt.$$

类似可得式(4)和(5)，其细节留作习题. ■

由 2.1 节定理 1 可知，上面所有形如$\int_{-p}^{p}$的积分都可以改为形如$\int_{0}^{2p}$的积分，而不改变系数的值.

39

例 1 **以任意数为周期的函数的傅里叶级数**

求出如下定义 $2p$-周期函数的傅里叶级数：$f(x)=|x|$，$-p\leqslant x\leqslant p$(图 2).

解 我们利用定理 1 来计算傅里叶系数，由图 2 中在 f 图像之下的面积可得

$$a_0 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)dx = \frac{p}{2}.$$

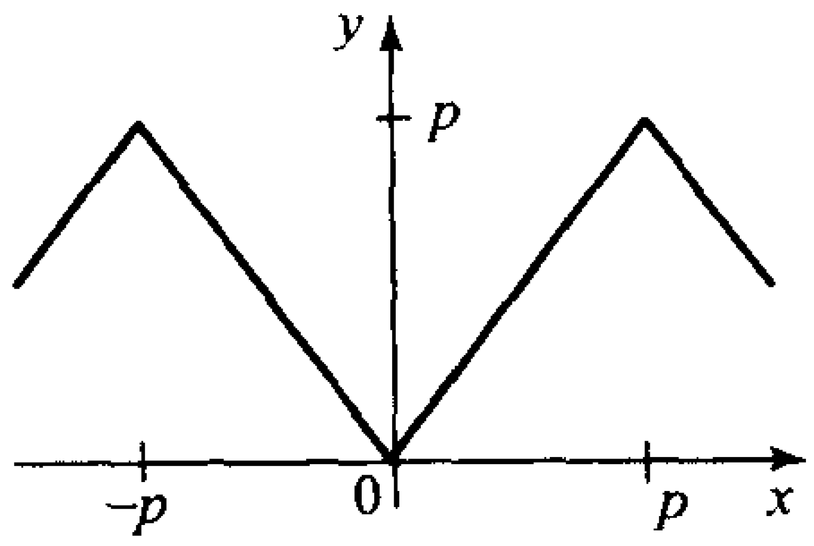


图 2　周期为 $2p$ 的三角波

为计算 a_n，利用 $f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x$ 是偶函数这个事实，我们有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx \\ &= \frac{2}{p}\int_{0}^{p} x\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx = \frac{-2p}{\pi^2 n^2}(1-\cos n\pi), \end{aligned}$$

其中最后一个积分是由分部积分得出的. 由于 $\cos n\pi=(-1)^n$，所以当 n 是偶数时，$a_n=0$；而当 n 是奇数时，$a_n=\frac{-4p}{\pi^2 n^2}$. 类似计算表明对所有 n 都有 $b_n=0$(因为 f 是偶的). 由此，我们得到傅里叶级数

$$f(x)=\frac{p}{2}-\frac{4p}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi}{p}x+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi}{p}x+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi}{p}x+\cdots\right).$$

因为 f 是连续且分段光滑的，定理 1 蕴涵：对所有 x，傅里叶级数收敛到 $f(x)$.（参见图 3.）

■

在下面两个例题中，由已知的傅里叶级数，没有作太多的附加运算，我们将得到新的傅里叶级数.

例 2　周期、振幅为任意数的三角波

求出如下定义的 $2p$-周期函数的傅里叶级数：

$$g(x)=\begin{cases}a\left(1+\frac{1}{p}x\right) & \text{如果 } -p\leqslant x\leqslant 0,\\ a\left(1-\frac{1}{p}x\right) & \text{如果 } 0\leqslant x\leqslant p.\end{cases}$$

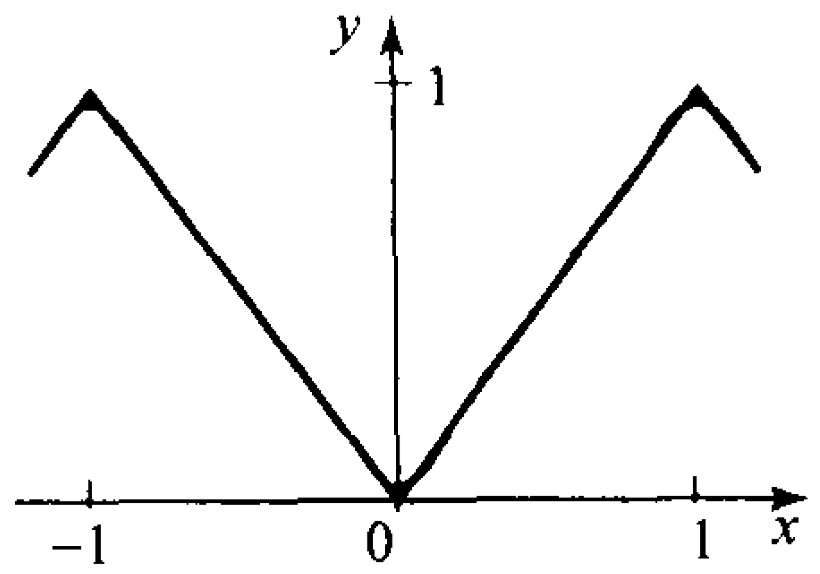


图 3　例 1 中傅里叶级数的部分和($p=1$)

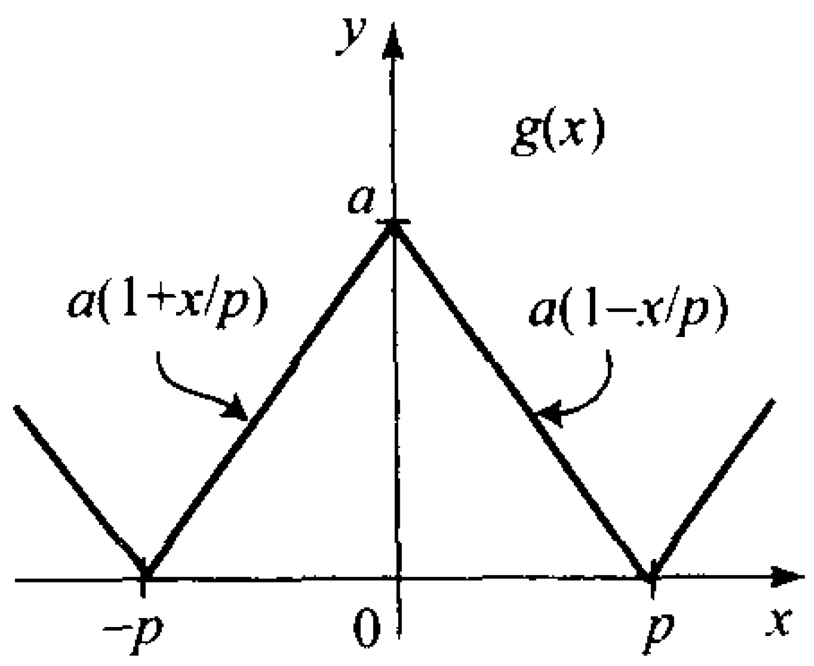


图 4　$2p$-周期的三角波

解　比较图 4 和图 2 可知，我们可以如下得到 g 的图像：将 f 的图像关于 x 轴作反射，再向上平移 p 个单位，最后伸缩 $\frac{a}{p}$ 倍. 这可以通过下式表达：

$$g(x)=\frac{a}{p}(-f(x)+p)=a-\frac{a}{p}f(x).$$

现在，为得到 g 的傅里叶级数，我们对例 1 中 f 的傅里叶级数作上述变换，得

$$\begin{aligned}g(x)&=a-a\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi}{p}x+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi}{p}x+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi}{p}x+\cdots\right)\right)\\&=\frac{a}{2}+\frac{4a}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi}{p}x+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi}{p}x+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi}{p}x+\cdots\right).\end{aligned}$$

40

写成更紧凑的形式，我们有

$$g(x)=\frac{a}{2}+\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{p}x.$$

（你可以验证当 $p=a=\pi$ 时的特殊形式，得到上节例 2 的傅里叶级数.）■

在从已知傅里叶级数推导新的傅里叶级数时，像本节所做的变量代换非常有用.

例 3　在傅里叶级数中改变周期

求出图 5 中函数的傅里叶级数.

解 首先我们来定义图 5 中的函数，在区间 $0<x<2p$ 上，我们有 $f(x)=c\left(1-\frac{x}{p}\right)$. 由 2.2 节例 1，我们有傅里叶级数展开式：

$$\frac{1}{2}(\pi-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\quad 对于 0<x<2\pi.$$

将上式及区间中的 x 换成$\frac{\pi}{p}x$，我们得

$$\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{p}x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{p}x}{n},\quad 对于 0<\frac{\pi}{p}x<2\pi.$$

化简后，两边同乘以 $2c/\pi$ 以凑成 f 的表达式，我们得

$$c\left(1-\frac{x}{p}\right)=\frac{2c}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{p}x}{n},\quad 对于 0<x<2p,$$

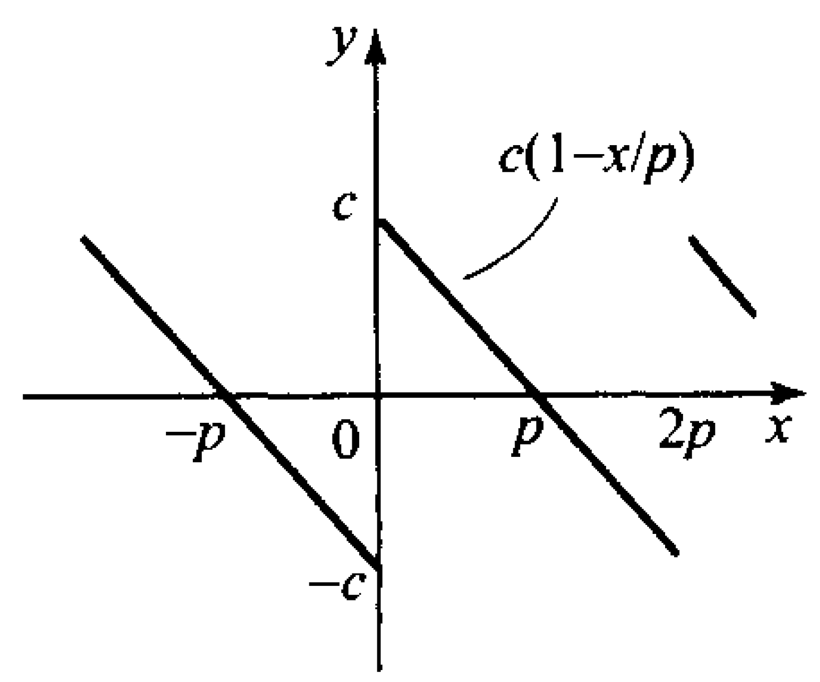


图 5 2p-周期的锯齿函数

这就是 f 的傅里叶级数. ■

例 2 和例 3 继续着上节所开始的对傅里叶级数作变换这个思想，这是基于如下事实：傅里叶级数就是一个实实在在的函数；可以像对函数一样，对傅里叶级数进行运算. 但是，当你对一个含有傅里叶级数的公式进行运算时，要特别注意公式所成立的区间. 特别地，当你对傅里叶级数作变量代换时，这可能会影响到最终的傅里叶级数的定义区间. 我们在例 3 中就遇到这种情形.

41

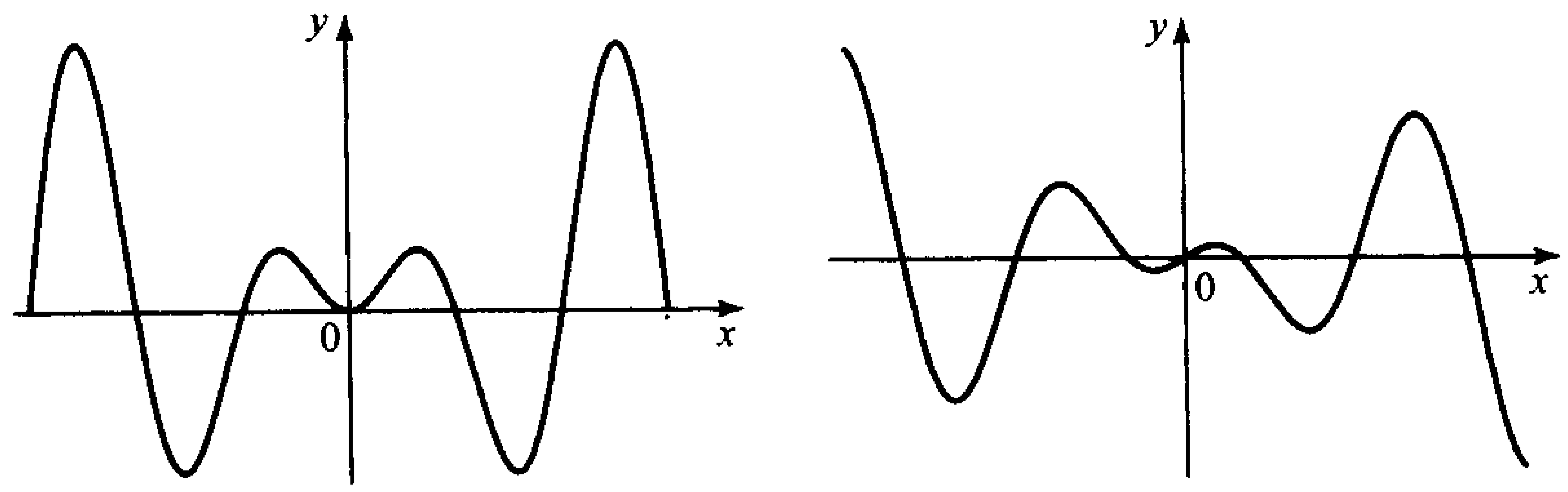
奇函数和偶函数

就像我们注意到的，在计算傅里叶系数时，几何考虑是有帮助的，特别是当我们处理偶函数和奇函数时.

函数 f 是**偶的**，如果对所有 x，有 $f(-x)=f(x)$；
函数 f 是**奇的**，如果对所有 x，有 $f(-x)=-f(x)$.

由图 6a(或作简单的变量代换)可以清楚看到，如果 f 是偶的，则

$$\int_{-p}^{p}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{p}f(x)\mathrm{d}x;\tag{9}$$



a) 偶函数 b) 奇函数

图 6 a)偶函数：图像关于 y 轴对称；b)奇函数：图像关于原点对称

而如果 f 是奇的(图 6b)，则

$$\int_{-p}^{p} f(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{10}$$

关于奇偶函数的乘积，有如下容易验证而有用的性质：

(偶)·(偶) = (偶)；
(偶)·(奇) = (奇)；
(奇)·(奇) = (偶).

这些乘积性质可以用来简化求解奇偶函数的傅里叶系数，如下面所做.

42

定理 2(奇偶函数的傅里叶级数) 假设 f 是 $2p$-周期的分段光滑函数，且具有傅里叶级数展开式(2)，则：(i) f 是偶的，当且仅当对所有 n，有 $b_n=0$，这时

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{p}x,$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)\mathrm{d}x \quad 和 \quad a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots).$$

(ii) f 是奇的，当且仅当对所有 n，有 $a_n=0$，这时

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{p}x,$$

其中

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots).$$

证明 (i)如果 $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{p}x$，则对所有 x，有

$$f(-x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(-\frac{n\pi}{p}x\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{p}x = f(x),$$

所以 f 是偶的；反过来，如果 f 是偶的，利用(10)及 $f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x$ 是奇的这个事实，得到 $b_n=0$. 利用(3)、(4)、(9)及 $f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x$ 是偶的这个事实，得到(i)中的系数公式. (ii)的证明是类似的，留作习题. ■

例 4 偶函数的傅里叶级数

求解 2-周期函数 $f(x)=1-x^2(-1<x<1)$ 的傅里叶级数.

解 这个函数是偶的(参见图 7)，因此，对所有 n，有 $b_n=0$；为计算 a_n，利用定理 2($p=1$)，我们得

$$a_0 = \int_0^1 (1-x^2)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

及

$$a_n = 2\int_0^1 (1-x^2)\cos n\pi x \mathrm{d}x = -2\int_0^1 x^2\cos n\pi x\mathrm{d}x = \frac{-4(-1)^n}{\pi^2 n^2}.$$

在计算最后一个积分时，我们利用了公式

43

$$\int x^2\cos n\pi x\mathrm{d}x = \frac{2x\cos n\pi x}{\pi^2 n^2} - \frac{2\sin n\pi x}{\pi^3 n^3} + \frac{x^2\sin n\pi x}{\pi n} + C,$$

这可以通过作两次分部积分推出. 由于 f 是连续的，且分段光滑，我们得

$$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$$

对所有 x 成立. 图 8 表明傅里叶级数收敛到 f.

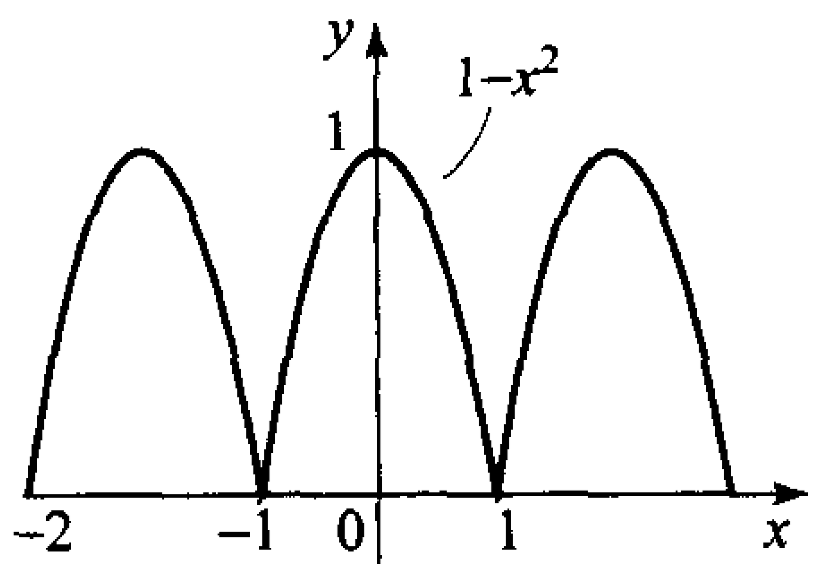


图 7 偶函数

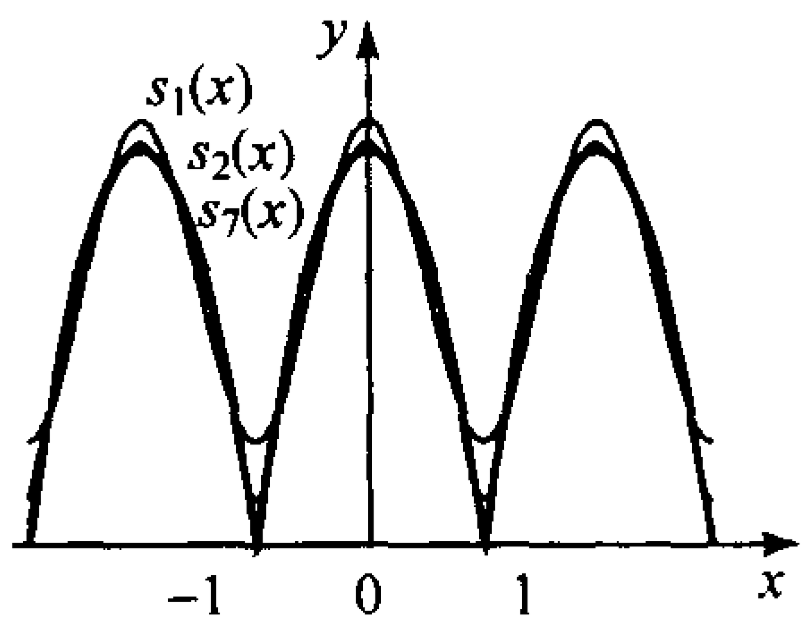


图 8 例 4 中傅里叶级数的部分和 ■

例 5 奇函数的傅里叶级数

如图 9 所示，当 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 时，函数 $f(x)=x\cos x$；否则，$f(x+\pi)=f(x)$. 这是 π-周期的奇函数，由定理 2，它的傅里叶级数由下式给出：

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2nx,$$

其中

$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cos x\sin 2nx\,\mathrm{d}x.$$

在计算这个积分时，我们需要加法公式

$$\cos a\sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

以及积分公式

$$\int u\sin u\mathrm{d}u = \sin u - u\cos u + C.$$

利用这些公式，计算得

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x(\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi(2n+1)^2}(\sin(2n+1)x - (2n+1)x\cos(2n+1)x)\Big|_0^{\pi/2} \\ &\quad + \frac{2}{\pi(2n-1)^2}(\sin(2n-1)x - (2n-1)x\cos(2n-1)x)\Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{\pi(2n+1)^2}\sin(2n+1)\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi(2n-1)^2}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi}(-1)^n\left[\frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(2n-1)^2}\right]$$

（由于 $\sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^n$ 和 $\sin(2n-1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{n+1}$）

$$= \frac{16}{\pi}(-1)^{n+1}\frac{n}{(2n+1)^2(2n-1)^2}.$$

因此

$$f(x) = \frac{16}{\pi}\left[\frac{1}{9}\sin 2x - \frac{2}{225}\sin 4x + \cdots\right].$$

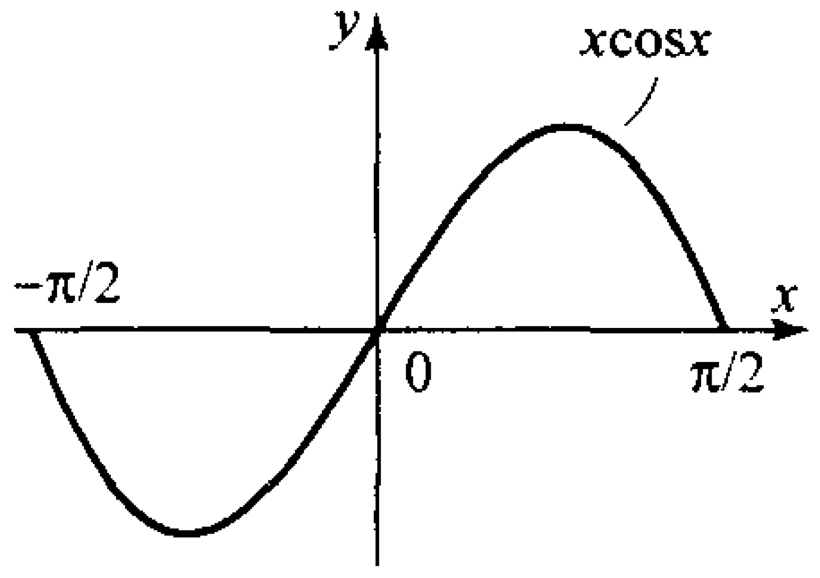


图 9　例 5 中的奇函数

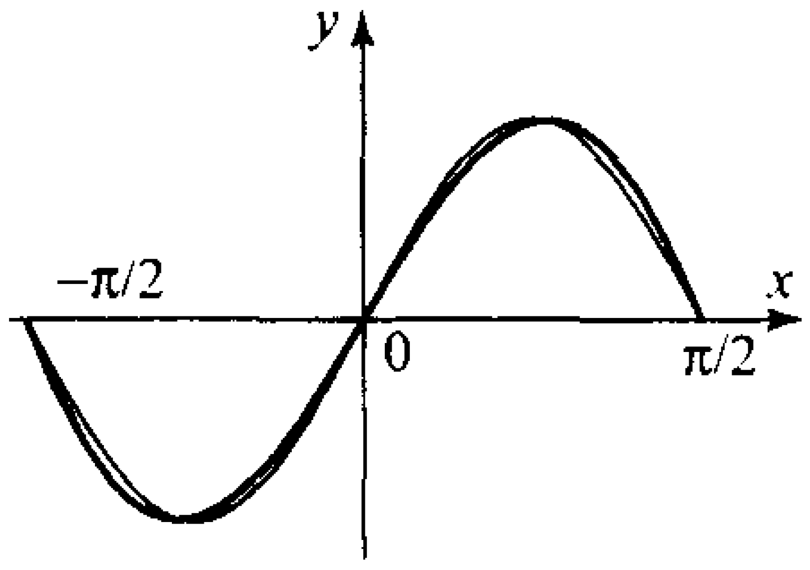


图 10　例 4 中 $f(x)$、$s_2(x)$和 $s_4(x)$的图像

44

图 10 表明傅里叶级数收敛到 $f(x)$，沿着 $f(x)$的图像，我们画出部分和 $s_2(x)$和 $s_4(x)$的图像. $s_4(x)$的图像和 $f(x)$的图像已经很难区分了，这暗示着傅里叶级数快速收敛到 $f(x)$. ■

下一节，我们将奇偶函数的傅里叶级数应用到定义在有界区间上而被周期延拓的函数上. 就像我们将在第 3 章看到的那样，当运用傅里叶级数求解偏微分方程时，需要这个过程.

习题 2.3

在习题 1～10 中，$2p$-周期函数在长度为 $2p$ 的区间上已经给定.

(a)判定函数是偶函数、奇函数，或两者都不是.

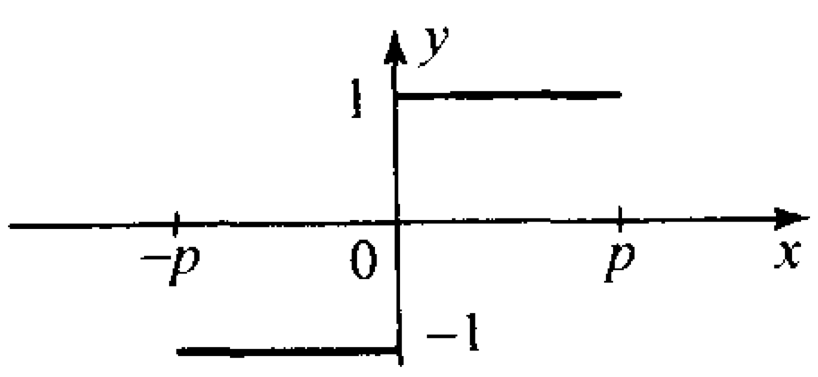
(b)推导出傅里叶级数，并确定其在间断点处的值.（大部分傅里叶级数都可以由前面的例题和习题推出，就像例 2 和例 3.）

1. $f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0<x<p \text{ 时},\\ -1, & \text{当 } -p<x<0 \text{ 时}.\end{cases}$

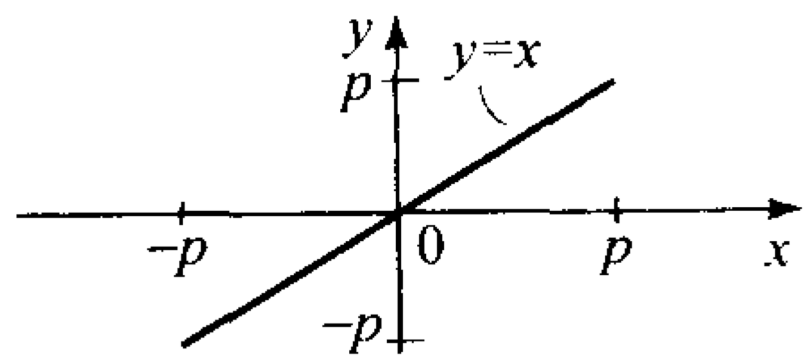
   傅里叶级数：$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\sin\frac{(2k+1)\pi}{p}x.$

2. 当 $-p<x<p$ 时，$f(x)=x$.［提示：2.2 节习题 13.］

   傅里叶级数：$\frac{2p}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right).$



习题 1 的图



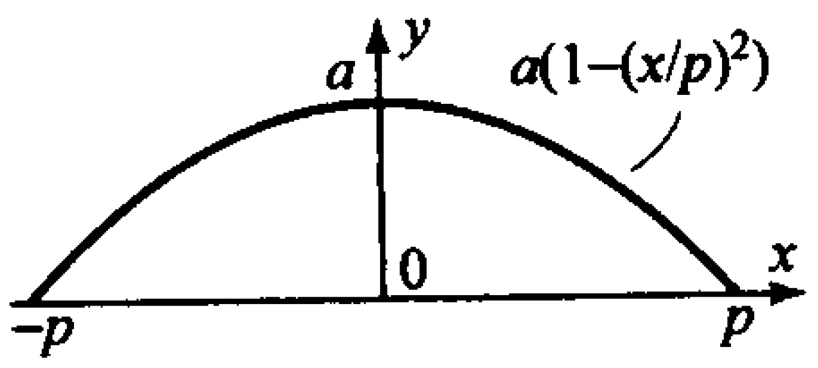
习题 2 的图

3. 当 $-p\leqslant x\leqslant p$ 时，$f(x)=a\left(1-\left(\frac{x}{p}\right)^2\right)$，$(a\neq 0)$.

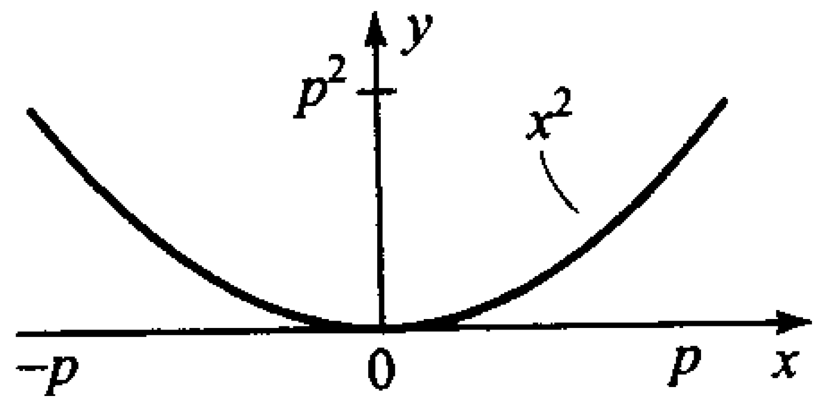
傅里叶级数：$\frac{2}{3}a+4a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2}\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)$.

4. 当 $-p\leqslant x\leqslant p$ 时，$f(x)=x^2$. [提示：利用习题 3.]

45 傅里叶级数：$\frac{p^2}{3}-\frac{4p^2}{\pi^2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{p}x\right)-\frac{1}{2^2}\cos\left(\frac{2\pi}{p}x\right)+\frac{1}{3^2}\cos\left(\frac{3\pi}{p}x\right)-\cdots\right]$.



习题 3 的图



习题 4 的图

5. $f(x)=\begin{cases}-\frac{2c}{p}(x-p/2), & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant p \text{ 时},\\ \frac{2c}{p}(x+p/2), & \text{当 } -p\leqslant x\leqslant 0 \text{ 时},\end{cases}$

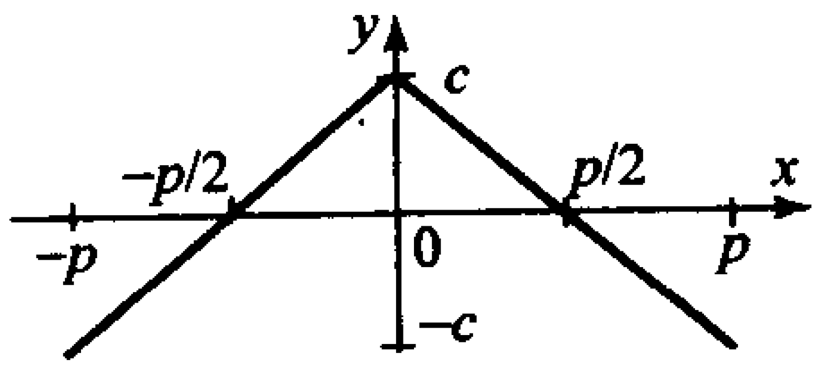
其中 $c\neq 0$(图中 $c>0$).

傅里叶级数：$\frac{8c}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{p}x\right)$.

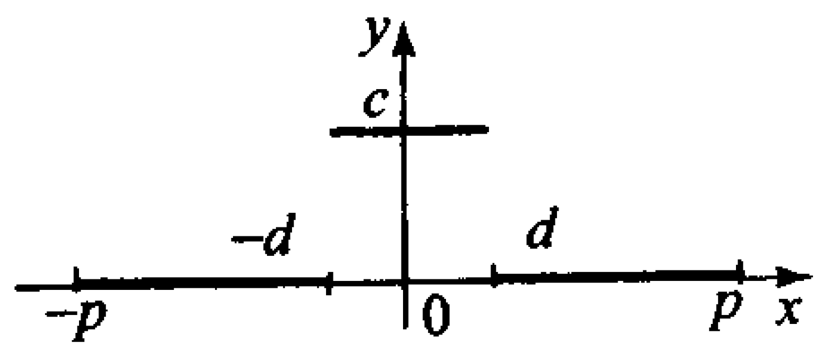
6. $f(x)=\begin{cases}c, & \text{当 } |x|<d \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } d<|x|<p \text{ 时},\end{cases}$

其中 $0<d<p$.

傅里叶级数：$\frac{cd}{p}+\frac{2c}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{dn\pi}{p}\right)}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)$.



习题 5 的图



习题 6 的图

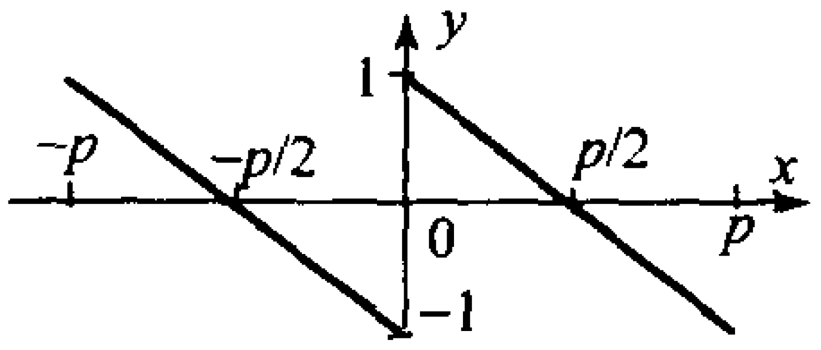
7. $f(x)=\begin{cases}-\frac{2}{p}(x-p/2), & \text{当 } 0<x<p \text{ 时},\\ -\frac{2}{p}(x+p/2), & \text{当 } -p<x<0 \text{ 时}.\end{cases}$

傅里叶级数：$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{2n\pi}{p}x\right)$.

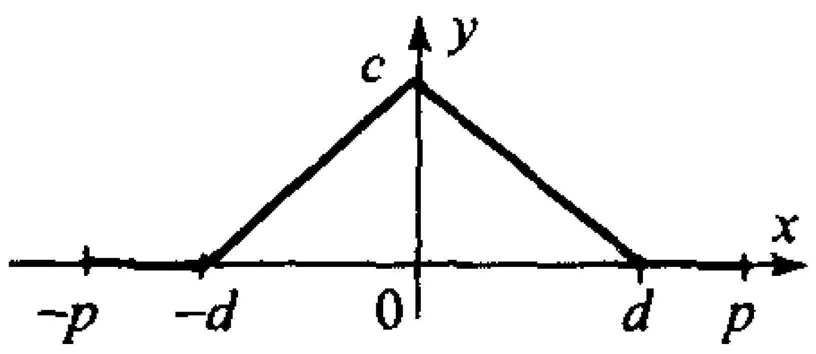
8. $f(x)=\begin{cases}-\frac{c}{d}(x-d), & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant d \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } d\leqslant |x|\leqslant p \text{ 时},\\ \frac{c}{d}(x+d), & \text{当 } -d\leqslant x\leqslant 0 \text{ 时},\end{cases}$

其中 $0\leqslant d\leqslant p$.

傅里叶级数：$\frac{cd}{2p}+\frac{2cp}{d\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1-\cos\left(\frac{dn\pi}{p}\right)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)$.



习题 7 的图



习题 8 的图

9. 当 $|x|\leqslant p$ 时，$f(x)=e^{-c|x|}\ (c\neq 0)$.

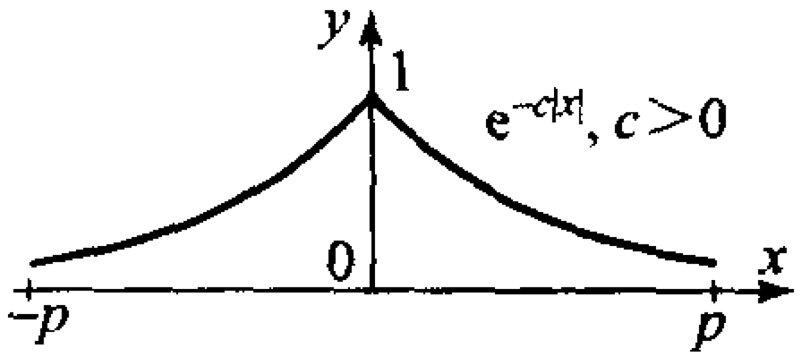
傅里叶级数：$\frac{1}{pc}(1-e^{-cp})+2cp\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c^2p^2+(n\pi)^2}(1-e^{-cp}(-1)^n)\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)$.

10. $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{p-c}(x-p), & \text{当 } c<x<p \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } |x|<c \text{ 时},\\ \frac{1}{p-c}(x+p), & \text{当 } -p<x<-c \text{ 时}\end{cases}$

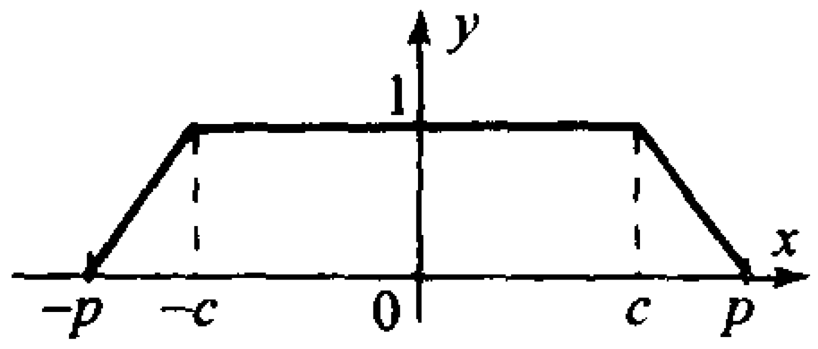
其中 $0<c<p$.

傅里叶级数：$\frac{p+c}{2p}+\frac{2p}{(c-p)\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left((-1)^n-\cos\left(\frac{cn\pi}{p}\right)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)$.

46



习题 9 的图



习题 10 的图

11. (a)求出 2π-周期函数 $f(x)=x\sin x(-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数.

(b)画出几个部分和的图像，以说明傅里叶级数的收敛性.

12. (a)求出 2π-周期函数 $f(x)=(\pi-x)\sin x(-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数. [提示：习题 11.]

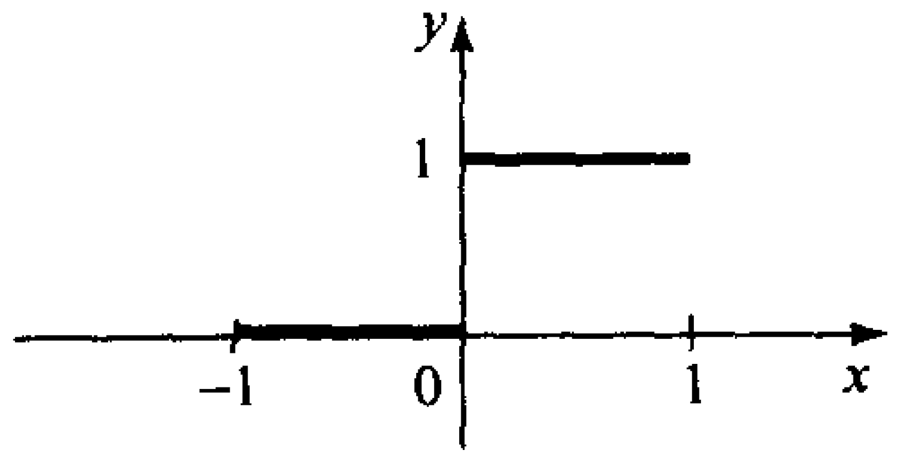
(b)画出几个部分和的图像，以说明傅里叶级数的收敛性.

在习题 13～14 中，函数在一个周期上已经给定.

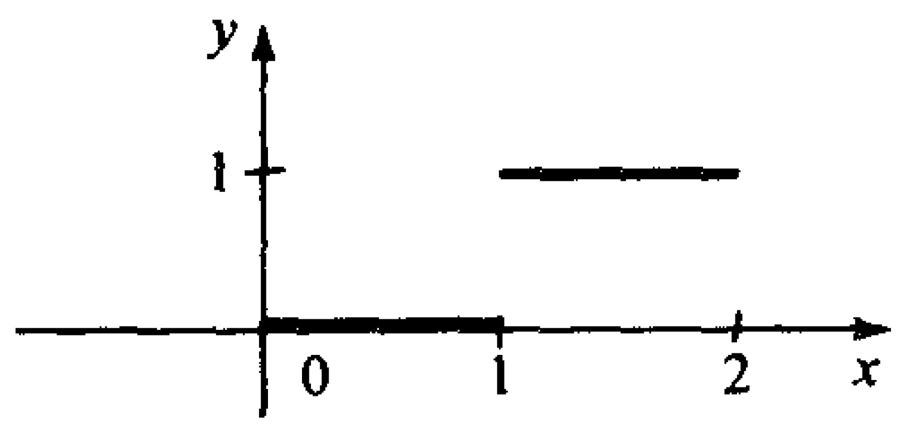
(a)求出它的傅里叶级数. [提示：利用习题 1.]

(b)画出几个部分和的图像，以说明傅里叶级数的收敛性.

13.



14.



15. 利用本节例 2，求出 2.2 节例 2 的傅里叶级数.

16. (a)考察习题 6 中的函数及其傅里叶级数，当 d 趋近于 p 时，傅里叶系数有何渐近性态？证明你的结论.

(b)写出当 $c=p/d$ 时的傅里叶级数；当 d 趋近于 0 时(p 固定)，傅里叶系数有何渐近性态？

17. 利用习题 4 的结果，推导公式.

(a)$\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$;

(b)$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$. [提示：也要用(a).]

18. 推导定理 1 的(4)和(5). [提示：研究定理 1 的证明.]

19. 证明定理 2 的(ii)部分.

专题问题：分解成奇、偶部分. 完成习题 20 以及习题 21～24 中的任何一个，你将会发现如何将一个任意函数分解成奇、偶函数之和的形式.

20. 设 f 是对所有实数都有定义的任意函数，考察函数

$$f_e(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad 和 \quad f_o(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

(a)试证：f_e 是偶的，而 f_o 是奇的.

(b)试证：$f=f_e+f_o$. 因此任意函数都是一个偶函数和一个奇函数之和. 更进一步，这种分解是唯一的.

(c)在本节后面习题中，我们假设 f 是 $2p$-周期的，试证：f_e 和 f_o 也是 $2p$-周期的.

(d)令 a_0，a_1，a_2，…，b_1，b_2，…表示 f 的傅里叶系数，试证：f_e 的傅里叶级数是 $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{p}x$；而 f_o 的傅里叶级数是 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{p}x$.

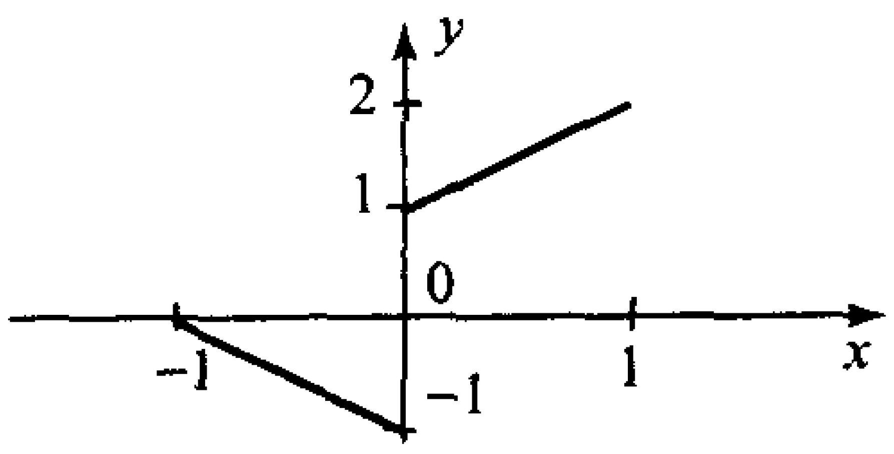
[47]

在习题 21～24 中，2-周期函数由其在区间[−1，1]上的图像给定.

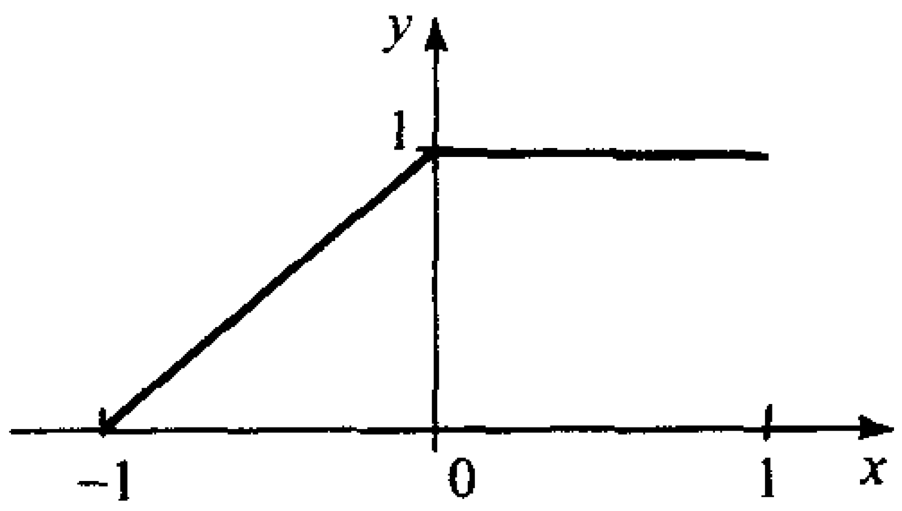
(a)确定并画出 f_e 和 f_o(参见习题 20).

(b)求出 f_e 和 f_o 的傅里叶级数，再导出 f 的傅里叶级数.

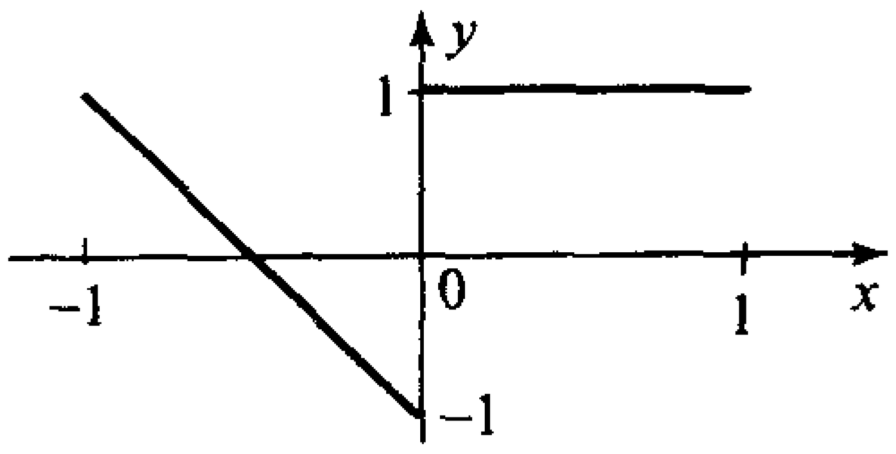
21.



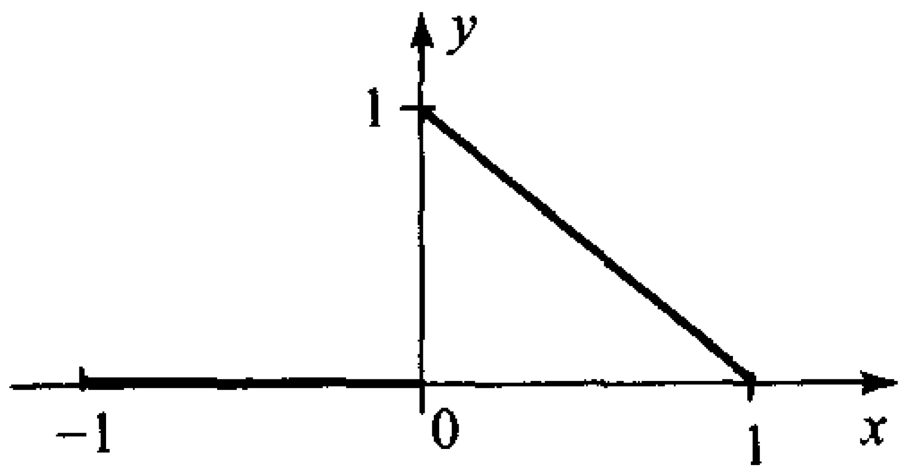
22.



23.



24.



专题问题：傅里叶级数的微分. 傅里叶级数可以逐项微分吗？一般而言，答案是：不可以！完成习题 25、26 以及 27～30 中的任意一个，你将知道何时可以安全地作这个过程.

25. **傅里叶级数及其微分**. 假设 f 是 $2p$-周期的分段光滑连续函数，并且 f' 也是分段光滑的，令 a_n，b_n 表示 f 的傅里叶系数，而 a_n'，b_n' 表示 f' 的傅里叶系数. 试证：

$$a'_0=0, a'_n=b_n\frac{n\pi}{p}, 以及\ b'_n=-a_n\frac{n\pi}{p}.$$

[提示：为计算 f' 的傅里叶系数，用分部积分法和 $f(p)=f(-p)$ 来求积分值.]

26. **傅里叶级数的逐项微分**. 假设 f 是 $2p$-周期的分段光滑连续函数，并且 f' 也是分段光滑的，试证：f' 的傅里叶级数是由 f 的傅里叶级数通过逐项微分得到的，即在前述条件下，如果

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x+b_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right),$$

则

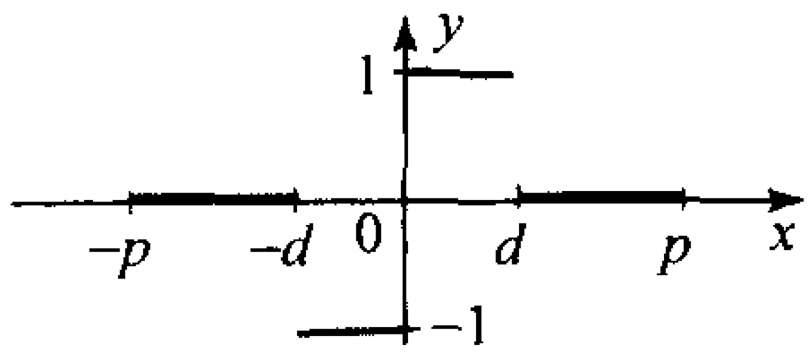
$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-na_n\frac{\pi}{p}\sin\frac{n\pi}{p}x+nb_n\frac{\pi}{p}\cos\frac{n\pi}{p}x\right).$$

[提示：由于 f' 满足定理 1 的假设，所以它具有傅里叶级数展开. 利用习题 25 计算傅里叶系数，与 f 的傅里叶级数的逐项微分比较.]

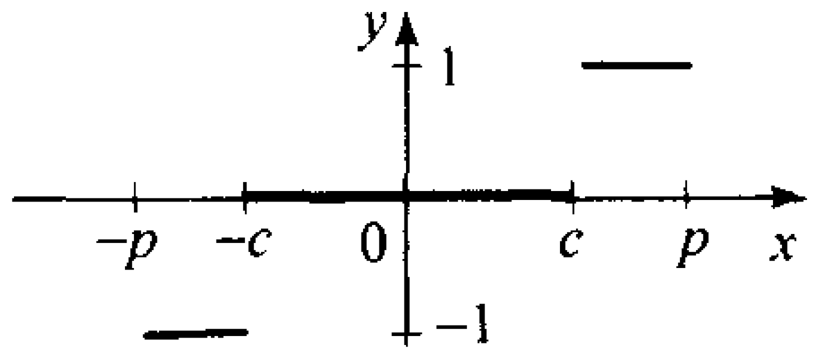
在本书绝大多数情形中，f 和 f' 都是分段光滑的，所以按照习题 26，此时可以对傅里叶级数逐项微分，这足以验证 f 是连续的. 但是值得注意的是，如果 f 不满足习题 26 的假设，则一般不能对傅里叶级数逐项微分. 参见习题 31～32.

48

27. 通过对习题 5 中的傅里叶级数逐项微分，推导习题 1 中的傅里叶级数；验证你的答案.
28. 通过对习题 4 中的傅里叶级数逐项微分，推导习题 2 中的傅里叶级数；验证你的答案.
29. 利用习题 8 中的傅里叶级数，求出图中 $2p$-周期函数的傅里叶级数.
30. 利用习题 10 中的傅里叶级数，求出图中 $2p$-周期函数的傅里叶级数.



习题 29 的图



习题 30 的图

专题问题：逐项微分的失效. 完成习题 31～32，以说明锯齿函数(一个分段光滑函数)的傅里叶级数不能逐项微分.

31. (a)试证：对所有 x，有

$$\lim_{n\to\infty}\cos nx\neq 0.$$

[提示：用反证法，假设对某个 x，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos nx=0$，则得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^2 nx=0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(2nx)=0$；利用恒等式 $\cos^2 nx=\dfrac{1+\cos(2nx)}{2}$，得到矛盾.]

(b)利用级数的通项判别法和步骤(a)，得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx$ 对所有 x 是发散的.

32. **逐项微分的失效**. 考虑锯齿函数的傅里叶级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$.

(a)试证：这个傅里叶级数所表达的函数，除了不是连续的以外，满足习题 26 的其他所有假设.

(b)利用习题 31 的结论说明(a)中的级数不能逐项微分.

33. **专题问题：傅里叶级数的逐项积分**. 令 f 如定理 1 所要求，定义 f 的原函数为

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

由 2.1 节习题 15～16 知，F 是 $2p$-周期的，当且仅当 $\int_0^{2p} f(t)\,\mathrm{d}t=0$. 试证：在这种情形下，$F$ 的傅里叶级数是

$$F(x)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{p}{n\pi}b_n\cos\frac{n\pi}{p}x+\frac{p}{n\pi}a_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right),$$

其中 $A_0=\dfrac{p}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{n}$. 因此，只要 F 是周期的，对 f 无需加上比分段光滑更强的条件，通过对 f 的傅里叶级数

49

逐项积分,我们就可以得到 F 的傅里叶级数.[提示:将习题25的结论应用到 $F(x)$ 上,并利用 $F'(x)=f(x)$. 为计算 A_0,利用 $F(0)=0$.(为什么?)]

34. 利用习题 33，从习题 2 的傅里叶级数推导出习题 4 的傅里叶级数.

2.4 半幅展开：余弦级数和正弦级数

在许多应用中，我们对用傅里叶级数来表示仅定义在有限区间(如 $0<x<p$)上的函数 f 感兴趣. 显然，f 不是周期的，所以前面几节的结果不能立刻应用. 本节的目标就是研究当我们将 f 延拓成一个周期函数后，如何把它展成傅里叶级数.

定理 1(半幅展开) 假设 f 是定义在区间 $0<x<p$ 上的分段光滑函数，则 f 具有**余弦级数展开式**

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{p}x \quad (0<x<p), \tag{1}$$

其中

$$a_0=\frac{1}{p}\int_0^p f(t)\,\mathrm{d}x;\quad a_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x \quad (n\geqslant 1). \tag{2}$$

同样，f 具有**正弦级数展开式**

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{p}x \quad (0<x<p), \tag{3}$$

其中

$$b_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x \quad (n\geqslant 1). \tag{4}$$

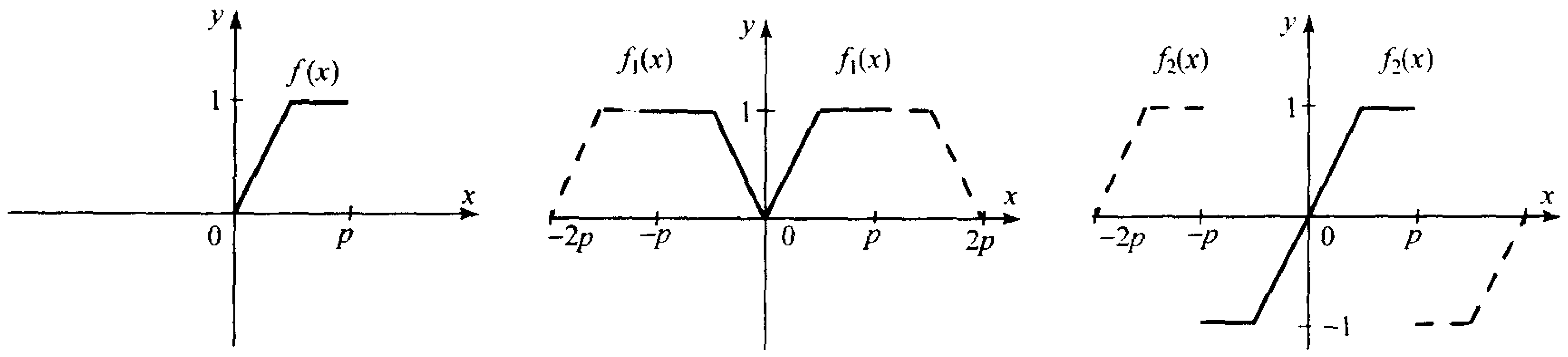
在区间 $0<x<p$ 上，级数(1)和(3)收敛到 $f(x)$，如果 f 在 x 处连续；否则收敛到 $\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

级数(1)和(3)通常称为 f 的**半幅展开**. 它们是描述区间 $0<x<p$ 上同一函数的两种不同级数表达式. 我们将运用奇偶函数的傅里叶级数表达式(2.3 节定理 2)来推导定理 1. 为此，我们引进如下重要概念.

f 的**偶周期延拓**定义为：当 $0<x<p$ 时，$f_1(x)=f(x)$；而当 $-p<x<0$ 时，$f_1(x)=f(-x)$；其他点处，$f_1(x)=f_1(x+2p)$. f 的**奇周期延拓**定义为：当 $0<x<p$ 时，$f_2(x)=f(x)$；而当 $-p<x<0$ 时，$f_2(x)=-f(-x)$；其他点处，$f_2(x)=f_2(x+2p)$. (由 2.2 节定理 1 后面的附注，我们不必关心延拓函数在点 0，$\pm p$，$\pm 2p$，…处的定义.)

50

由它们的构造方法可知，f_1 是偶的、$2p$-周期的；而 f_2 是奇的、$2p$-周期的. 这两个函数在区间 $0<x<p$ 上都与 f 是相同的，所以都称为 f 的延拓(图 1). 由于 f 是分段光滑的，f_1 和 f_2 也是分段光滑的. 应用 2.3 节定理 2，f_1 具有系数为(2)的余弦级数展开式(1). 又由于在区间 $0<x<p$ 上，$f(x)=f_1(x)$，所以在区间 $0<x<p$ 上，这个余弦级数(1)也表示了 f. 同理，利用 f_2，可得 f 的正弦级数展开式.



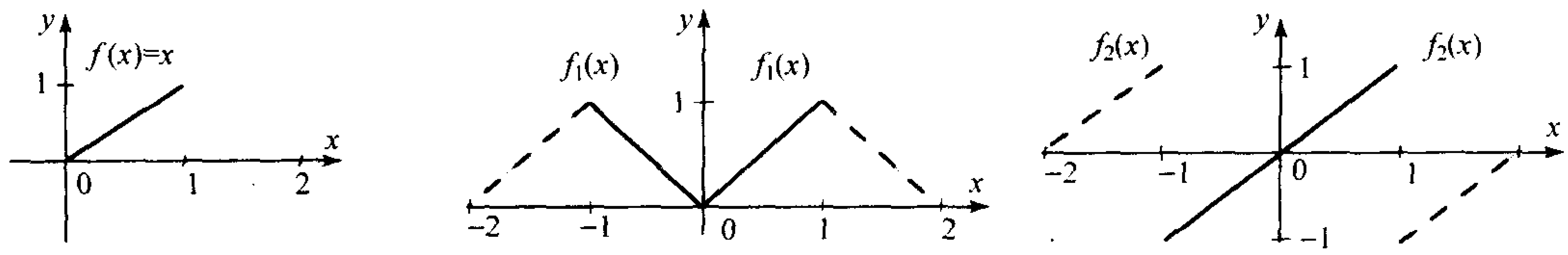
a) $f(x)$, $0<x<p$　　b) $2p$-周期的偶延拓, f_1　　c) $2p$-周期的奇延拓, f_2

图 1

例 1　半幅展开式

求出函数 $f(x)=x(0<x<1)$ 的半幅展开式.

解　函数 f 及其奇偶展开的图像如图 2 所示.



a) $f(x)=x$, $0<x<1$　　b) f 的偶延拓，周期为2　　c) f 的奇延拓，周期为2

图 2

这个偶延拓就是 2.3 节例题 1 在 $p=1$ 时的特殊情形，我们有

$$x=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)\pi x,\quad \text{对所有 } 0\leqslant x\leqslant 1.$$

而这个奇延拓就是 2.3 节习题 2 在 $p=1$ 时的特殊情形. 但是为说明定理 1 中公式的应用，我们将利用(4)来计算正弦系数，得

$$b_n=\frac{2}{1}\int_0^1 x\sin n\pi x\mathrm{d}x=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

因此，

$$x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x,\quad 0\leqslant x<1.$$

51

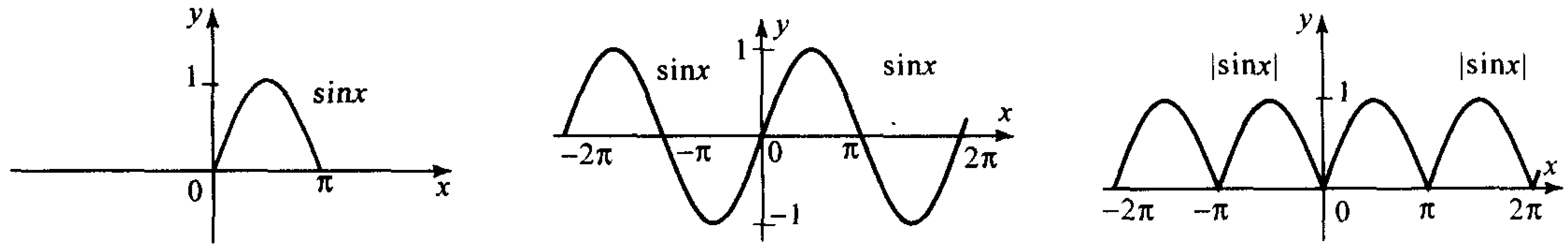
值得注意的是这个余弦级数和正弦级数在区间(0，1)，(2，3)，(−2，−1)，…上取值相同. ■

例 2　半幅展开式

考虑函数 $f(x)=\sin x$，$0\leqslant x\leqslant\pi$. 如果作奇延拓，我们就得到通常的正弦函数，对所有 x，有 $f_2(x)=\sin x$，因此其正弦级数展开式就是 $\sin x$(见图 3).

如果作 f 的偶延拓，我们得到函数 $|\sin x|$. 这个偶函数的傅里叶级数可以由 2.2 节习题 7 得到，所以($\sin x$ 的)余弦级数是

$$\sin x=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2-1}\cos 2kx,\quad 0\leqslant x\leqslant\pi. \qquad \blacksquare$$



a) $f(x)=\sin x,\ 0\leqslant x\leqslant\pi$　b) f 的奇延拓, $\sin x$　c) f 的偶延拓, $|\sin x|$

图 3

习题 2.4

在习题 1～8 中：

(a)求出给定函数的半幅展开式.（尽量运用前面已遇到的级数.）

(b)为说明余弦级数和正弦级数的收敛性，画出每个级数的几个部分和图像并对图像作注释.

1. $f(x)=1,\ 0<x<1.$
2. $f(x)=\pi-x,\ 0\leqslant x\leqslant\pi.$
3. $f(x)=x^2,\ 0<x<1.$
4. $f(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x<1\\ x-1 & 1\leqslant x<2.\end{cases}$
5. $f(x)=\begin{cases}1 & 若\ a<x<b,\\ 0 & 若\ 0<x<a,\\ & 或\ b<x<p,\end{cases}$

   其中 $0<a<b<p<\infty$. 对于(b)，取 $p=1,\ a=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{2}$.
6. $f(x)=\cos x,\ 0<x<\pi.$
7. $f(x)=\cos x,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}.$
8. $f(x)=x\sin x,\ 0<x<\pi.$ [52]

在习题 9～16 中，求出在区间 $0<x<1$ 上给定函数的正弦级数展开式.

9. $x(1-x).$
10. $1-x^2.$
11. $\sin\pi x.$
12. $\sin\frac{\pi}{2}x.$
13. $\sin\pi x\cos\pi x.$
14. $(1+\cos\pi x)\sin\pi x.$
15. $e^x.$
16. $1-e^x.$

17. **三角函数**. 令 $f(x)$表示一根长度为 p、两端固定在 $x=0$ 和 $x=p$ 处、受拨动弦的形状，如图 4 所示.

(a)利用图像，推导出表达式

$$f(x)=\begin{cases}\frac{h}{a}x & 若\ 0\leqslant x\leqslant a,\\ \frac{h}{a-p}(x-p) & 若\ a\leqslant x\leqslant p.\end{cases}$$

(b)求得 f 的正弦级数展开式

$$f(x)=\frac{2hp^2}{a(-a+p)\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{an\pi}{p}}{n^2}\sin\frac{n\pi}{p}x.$$

(c)取 $a=1/3$，$p=1$，$h=1/10$，验证这个展开式；画出函数 f 及其傅里叶级数的几个部分和的图像.

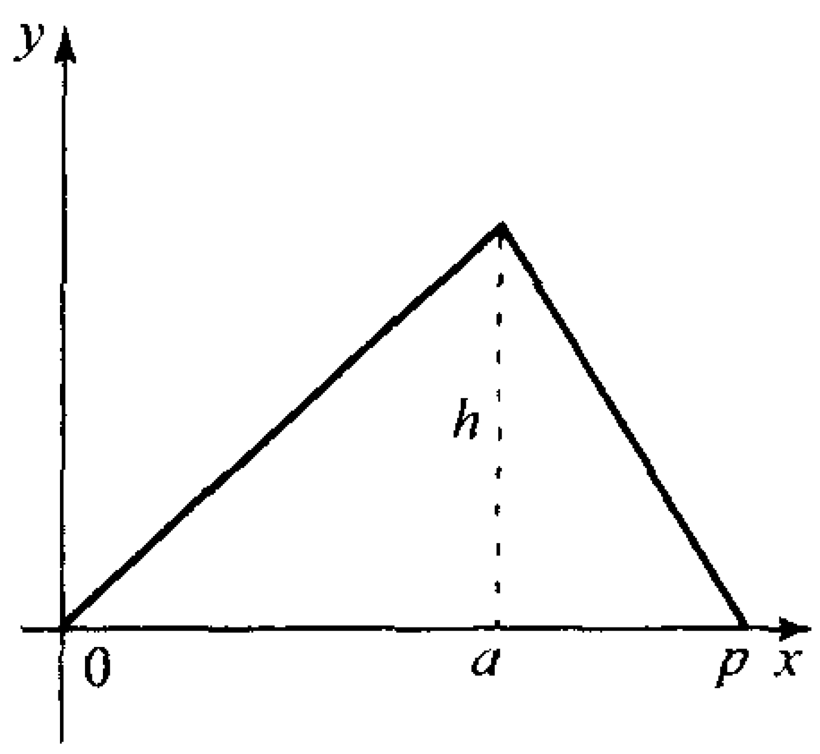


图 4　习题 17

2.5　均方逼近和帕塞瓦尔恒等式

回顾当研究给定函数的泰勒级数时，一个重要问题是泰勒级数的部分和(或泰勒多项式)对函数的逼近程度如何. 对傅里叶级数，也有类似问题出现. 当一个 $2p$-周期函数由它的傅里叶级数

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x+b_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right)$$

来表示时，我们需要知道的是其第 N 项部分和

$$s_N(x)=a_0+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x+b_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right)\tag{1}$$

对函数的逼近程度如何. 为解决这个问题，我们研究积分

$$\boxed{E_N=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}(f(x)-s_N(x))^2\mathrm{d}x,}\tag{2}$$

这被称为部分和 s_N 相对于 f 的**均(或全)方误差**. 我们也称 s_N **以误差 E_N 平均逼近** f. 数 E_N 是函数$(f(x)-s_N(x))^2$ 在区间$[-p, p]$上的平均值(通过完成习题 6，你可以理解 E_N 是什么意义下的平均值)，我们将看到 E_N 可以通过傅里叶系数来表示，这个事实十分有用，它让我们能用傅里叶系数来计算 E_N. 在定理 1 中，我们将说明当 N 趋近于无穷时，E_N 趋近于零. 这个重要结果保证可以用傅里叶级数来平均逼近函数. [53]

你可能会提出疑问，在研究傅里叶级数部分和逼近函数的误差时，我们为什么不简单地用$|f(x)-s_N(x)|$在 x 取遍 $-p\leqslant x\leqslant p$ 时的最大值来度量? 这个方法虽然能给出一些信息，但是有时是不确定的，特别是当 f 不连续时. 你可能会回想起，这时我们有吉布斯现象，这现象说明无论 N 有多大，差值$|f(x)-s_N(x)|$在区间上某些点处始终较大.

例 1　傅里叶级数的平均逼近

对于 2π-周期的锯齿函数 $f(x)=\frac{1}{2}(\pi-x)$，$0<x<2\pi$，计算 E_N，$N=1, 2, \cdots, 10$.

解　傅里叶级数已经在 2.2 节例 1 中计算过了，我们有 $s_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin nx}{n}$，所以由(2)，有

$$E_N = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}(\pi - x) - \sum_{n=1}^{N}\frac{\sin nx}{n}\right)^2 dx.$$

当 N 较小时，计算机得到的 E_N 近似值如下表所示：

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E_N	0.322	0.197	0.142	0.111	0.091	0.077	0.067	0.059	0.053	0.048

上表似乎显示当 N 增加时 E_N 递减到零，即

$$\lim_{N\to\infty} E_N = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(x) - s_N(x))^2 dx = 0.$$

对所有 N，由于 $s_N(0)=s_N(2\pi)=0$ 以及 $f(0+)=f(2\pi-)=\frac{\pi}{2}$，函数$\frac{1}{2\pi}(f(x)-s_N(x))^2$ 在区间$[0, 2\pi]$上在 0 到$\frac{\pi}{8}$之间取值；但是当 $N\to\infty$时，图像在区间$[0, 2\pi]$上所包含的面积趋于 0（图 1）. 所以，虽然在区间$[0, 2\pi]$上，差值$\frac{1}{2\pi}(f(x)-s_N(x))^2$ 保持较大，但当 $N\to\infty$时，其均方误差递减到零. ■

为继续均方误差的研究，我们引进在区间$[a, b]$上的**平方可积**函数类，它包含所有定义在区间$[a, b]$上使得 $\int_a^b f(x)^2 dx < \infty$ 的函数 f. 简单的平方可积函数如在区间$[a, b]$上的分段连续函数，以及更一般地，在区间$[a, b]$上的有界函数. 但是一个函数是平方可积的，未必是有界的. 你能否想出一个$[-1, 1]$上平方可积但无界的函数？

54

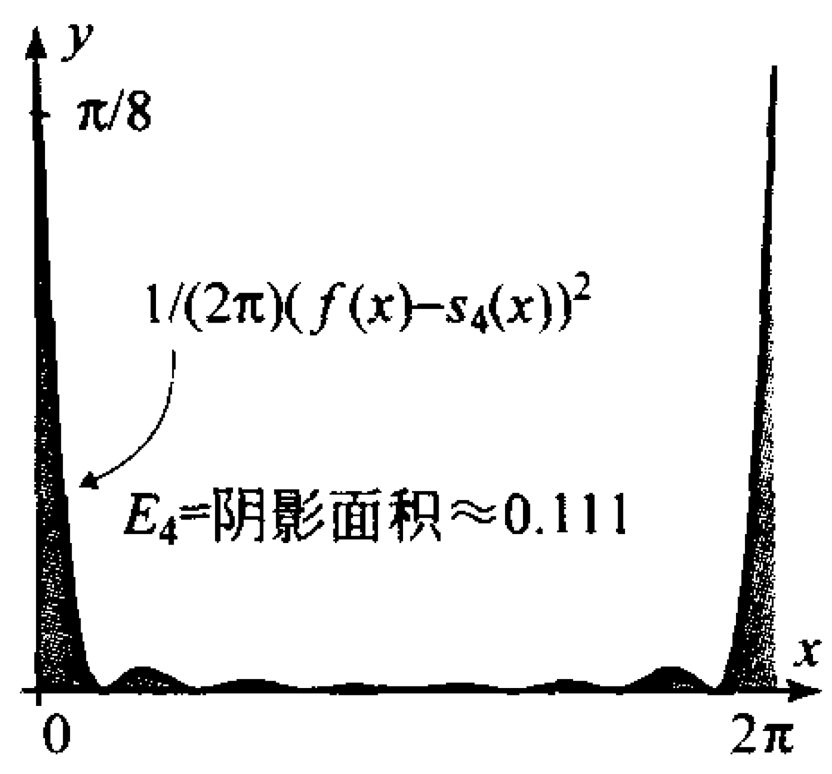


图 1 均方误差 E_4 可以用$\frac{1}{2\pi}(f(x)-s_4(x))^2$ 图像下的阴影部分面积来表示，由表知此时面积为 0.111

定理 1（傅里叶级数的平均逼近） *假设 f 在区间$[-p, p]$上是平方可积的，则 f 的傅里叶级数的第 N 项部分和 s_N 以误差 E_N 平均逼近于（或收敛到）f，且当 $N\to\infty$时，E_N 趋近于零. 用符号来描述就是*

$$\lim_{N\to\infty} E_N = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}(f(x) - s_N(x))^2 dx = 0. \tag{3}$$

为引出定理 1，假设 f 是连续的，且分段光滑，2.3 节定理 1 导出，当 $N\to\infty$时，有$(s_N(x)-f(x))\to 0$，而这个蕴涵着当 $N\to\infty$时，有$(s_N(x)-f(x))^2\to 0$. 如果我们计算积分，并假设可以交换积分和极限的顺序，得到

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}(f(x) - s_N(x))^2 dx &= \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\lim_{N\to\infty}(f(x) - s_N(x))^2 dx \\ &= \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} 0 dx = 0,\end{aligned} \tag{4}$$

这就是定理所断言的. 这里，我们必须指出这并不是定理 1 的证明，因为我们没有验证积分和

极限的顺序是可以交换的；同时，定理 1 也仅仅假设 f 是平方可积的，而不是分段光滑的. 定理 1 的证明可以严格地给出，但是它所需要的知识超出了本书的范围.

我们下一步目标是用傅里叶系数来表达均方误差.

定理 2(均方误差) 假设 f 在区间$[-p, p]$上是平方可积的，则

$$E_N = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)^2 dx - a_0^2 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2). \tag{5}$$

定理 2 使我们可以用函数平方的积分以及下标不超过 N 的傅里叶系数来计算均方误差 E_N.

证明 将(2)右端展开，可得

$$E_N = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)^2 dx - \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)s_N(x)dx + \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} s_N(x)^2 dx.$$

55

由部分和 s_N 及傅里叶系数(2.3 节(3)～(5))的定义，可得

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)s_N(x)dx \\
&= -\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\Big(a_0 + a_1\cos\frac{\pi}{p}x + \cdots + a_N\cos\frac{N\pi}{p}x \\
&\quad + b_1\sin\frac{\pi}{p}x + \cdots + b_N\sin\frac{N\pi}{p}x\Big)dx \\
&= -(2a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_N^2 + b_1^2 + \cdots + b_N^2).
\end{aligned}$$

将 $s_N(x)^2$ 展开，再利用三角系的正交性，逐项积分可得

$$\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} s_N(x)^2 dx = a_0^2 + \frac{1}{2}a_1^2 + \cdots + \frac{1}{2}a_N^2 + \frac{1}{2}b_1^2 + \cdots + \frac{1}{2}b_N^2.$$

将这两个积分值代入 E_N 的表达式，我们得到(5). ■

(5)的一个有用推论是如下不等式：

$$\boxed{a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)^2 dx}$$

这称为**贝塞尔不等式**. 为证明它，注意到，由(2)，有 $E_N \geqslant 0$；因此(5)蕴涵着 $a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)^2 dx$. 令 $N \to \infty$,即得所证不等式.

利用定理 1，可得到一个更强的结果. 事实上，运用这个定理以及(5)，有

$$0 = \lim_{N\to\infty} E_N = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)^2 dx - a_0^2 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2),$$

或等价地，

$$\boxed{\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)^2 dx = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).} \tag{6}$$

这个十分重要的公式称为**帕塞瓦尔恒等式**. 它对所有$[-p, p]$上的平方可积函数都成立，有着许多有趣的应用.

[56] 帕塞瓦尔恒等式或贝塞尔不等式，蕴涵着一个平方可积函数的傅里叶系数是**平方可和**的，即有

$$a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)<\infty.$$

必须注意到，一般地，我们并没有 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$，或者 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n<\infty$. 例如，考虑傅里叶级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$. 我们有 $b_n=\frac{1}{n}$，因此，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\infty$. 但是，傅里叶系数是平方可和的，因为 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$，这就是贝塞尔不等式所保证的事实.

下面，我们将帕塞瓦尔恒等式应用到锯齿函数上，得到一个非常优美的结果.

例 2 用帕塞瓦尔恒等式计算级数

计算级数 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$ 的值.

解 就像上面提到的，数列 1，1/2，1/3，…是例 1 中锯齿函数的傅里叶系数，这里 $a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$ 以及 $b_n=\frac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$，将这些代入帕塞瓦尔恒等式，得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}(\pi-x)\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

由于

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}(\pi-x)\right)^2\mathrm{d}x=\frac{-1}{24\pi}(\pi-x)^3\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi^2}{12},$$

我们得到

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$ ■

类似方法可以用来计算 n 的偶数次方倒数的和(参见习题). 我们现在仍然还不知道 n 的奇数次方倒数和的值，如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$，….

习题 2.5

在习题 1～4 中，利用(5)，计算 E_N，$N=1,2,3$.

1. 2.3 节习题 1 的 f，$p=1$.
2. 2.3 节习题 2 的 f，$p=\pi$.
3. 2.3 节习题 3 的 f，$p=\pi$，$a=1$.
4. 2.3 节习题 4 的 f，$p=1$.
5. 在习题 1 中确定 N 使得 $E_N<10^{-2}$.
6. **作为平均值的定积分**. 试解释为什么数

[57]

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

表示 f 在区间 $[a,b]$ 上的平均值. [提示：用黎曼和来逼近定积分，利用 n 个数 y_1，y_2，…，y_n 的平均值是 $\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$ 这个事实，将黎曼和解释成平均值.]

对 $s>1$，**黎曼 ζ 函数**定义为

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

这个函数在数论及其他数学分支中非常重要．在例 2 中我们有 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$．利用帕塞瓦尔恒等式以及各种傅里叶级数展开式，对任意正整数 k，可以计算 $\zeta(2k)$．下表包含了习题 7～11 中所要推导的 ζ 函数值：

s	2	4	6	8	10
$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^4}{90}$	$\frac{\pi^6}{945}$	$\frac{\pi^8}{9\,450}$	$\frac{\pi^{10}}{93\,555}$

7. (a)利用帕塞瓦尔恒等式以及傅里叶级数展开式：

$$\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\quad -\pi<x<\pi$$

求出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

(b)由(a)可得 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{24}$.

(c)结合(a)和(b)，得到恒等式

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

8. 利用傅里叶级数展开式

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad -\pi<x<\pi$$

(2.3 节习题 4)和帕塞瓦尔恒等式，计算 $\zeta(4)$.

9. 利用 2.2 节习题 12 的傅里叶级数以及帕塞瓦尔恒等式，计算 $\zeta(6)$.

10. **伯努利数** B_n 出现在许多数学领域中．它们由幂级数展开式

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n x^n}{n!}$$

生成． 58

(a)推导幂级数展开式：

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6\cdot 3!}-\frac{x^4}{30\cdot 4!}+\frac{x^6}{42\cdot 6!}-\frac{x^8}{30\cdot 8!}+\frac{5}{66}\frac{x^{10}}{10!}-\frac{691}{2\,730}\frac{x^{12}}{12!}+\frac{7}{6}\frac{x^{14}}{14!}+\cdots.$$

(b)推导出下列伯努利数：

$$B_0=1,B_1=-\frac{1}{2},B_2=\frac{1}{6},B_3=0,B_4=-\frac{1}{30},$$

$$B_5=0,B_6=\frac{1}{42},B_7=0,B_8=-\frac{1}{30},B_9=0,$$

$$B_{10}=\frac{5}{66},B_{11}=0,B_{12}=-\frac{691}{2\,730},B_{13}=0,B_{14}=\frac{7}{9}.$$

(c)试证：一般地，有

$$B_n=\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)_{x=0}.$$

11. **伯努利数和 ζ 函数**. 可以证明 ζ 函数在偶数点的值通过恒等式

$$\zeta(2s)=\frac{2^{2s-1}\mid B_{2s}\mid}{(2s)!}\pi^{2s}$$

与伯努利数相联系.（这个公式可以利用复分析基本知识来推出，参阅[1]，第 501～502 页.）利用习题 10 中的伯努利数的值计算下列级数的值：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{10}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{12}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{14}}.$$

12. 试证：用 s_{N+1} 代替 s_N 来平均逼近 f 时，均方误差减少 $\frac{1}{2}(a_{N+1}^2+b_{N+1}^2)$.［提示：定理 2.］

在习题 13～17 中，利用帕塞瓦尔恒等式计算 $\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$.［提示：利用几何级数以及 ζ 函数值的表.］

13. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.

14. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$.

15. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n}$.

16. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n}\sin nx$.

17. $f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{3^n}+\frac{\sin nx}{n}\right)$.

18. **专题问题：最优化问题**. $2p$-周期的 N 阶三角多项式是如下形式的展开式：

59

$$g_N(x)=A_0+\sum_{n=1}^{N}\left(A_n\cos\frac{n\pi}{p}x+B_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right).$$

其中 A_0，A_n 和 B_n 是实数，不必是傅里叶系数. 在一些数值应用中，我们想用 N 阶三角多项式来平均逼近一个给定函数 f. 这个问题就是选取系数 A_0，A_n 和 B_n，使得均方误差

$$E_N^*=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}(f(x)-g_N(x))^2\mathrm{d}x.$$

最小. 这个最优化问题有个圆满解答，这就是本题要解决的：

在所有的 N 阶三角多项式 $g_N(x)$ 中，使得均方误差最小的是 f 的傅里叶级数第 N 项部分和.

即，系数 A_0，A_n 和 B_n 的最佳选择是取为 f 的傅里叶系数.

(a)研究定理 2 的证明，试证：

$$E_N^*=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}f^2(x)\mathrm{d}x+A_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(A_n^2+B_n^2)-\left[2a_0A_0+\sum_{n=1}^{N}(a_nA_n+b_nB_n)\right],$$

其中 a_0，a_n 和 b_n 是 f 的傅里叶系数，由 2.3 节(3)～(5)给出.

(b)利用帕塞瓦尔恒等式，推出关系式：

$$E_N^*=(a_0-A_0)^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}((a_n-A_n)^2+(b_n-B_n)^2)+\frac{1}{2}\sum_{n=N+1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

(c)完成最优化问题的证明.［提示：$E_N{}^*$ 是非负项求和；通过选取尽可能多的等于 0 的项，使得和最小.］

2.6 傅里叶级数的复数形式

我们从下面两个恒等式开始：

$$\cos u=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}}{2}\quad 和\quad \sin u=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}}{2i},\tag{1}$$

这将复指数函数和余弦函数、正弦函数联系起来．有关复值函数，包括指数函数，请见习题16～26．我们将运用这些恒等式来求出 $2p$-周期函数

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x+b_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right) \tag{2}$$

的傅里叶级数的复数形式．本节的主要结果就是 2.3 节的傅里叶级数表示定理的另一种叙述： 60

定理 1（傅里叶级数的复数形式） 假设 f 是 $2p$-周期的分段光滑函数，则 f **傅里叶级数的复数形式**是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{n\pi}{p}x}, \tag{3}$$

其中**傅里叶系数** c_n 由下式给出：

$$c_n=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}f(t)e^{-i\frac{n\pi}{p}t}\,dt \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots). \tag{4}$$

对所有 x，傅里叶级数收敛到 $f(x)$，如果 f 在 x 处连续；否则收敛到$\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

(3)的第 N 项部分和是如下定义的**对称和**：

$$S_N(x)=\sum_{n=-N}^{N}c_n e^{i\frac{n\pi}{p}x}.$$

我们即将看到 $S_N(x)$与通常定义的傅里叶级数部分和

$$s_N(x)=a_0+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x+b_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right)$$

完全一样．在推导之前，我们来说明取复值的实变量函数的不定积分或定积分的意义，如(4)所出现的积分．如果 $h(t)$是复值的，记为 $h(t)=u(t)+iv(t)$，其中 u 和 v 分别是 h 的实部和虚部．我们定义

$$\int h(t)\,dt=\int(u(t)+iv(t))\,dt\equiv\int u(t)\,dt+i\int v(t)\,dt.$$

因此，复值函数的积分是两个实值函数积分的复线性组合．例如，如果 $h(t)=f(t)e^{ict}$，其中 $f(t)$是实值的，c 是实数，则 $h(t)=f(t)e^{ict}=f(t)(\cos ct+i\sin ct)$，从而

$$\int f(t)e^{ict}\,dt=\int f(t)\cos ct\,dt+i\int f(t)\sin ct\,dt,$$

其中右端两个积分是实值函数的积分或不定积分．

由这个定义，可以直接验证这积分是线性的：如果 h 和 g 是复值的，α 和 β 是复数，则 61

$$\int(\alpha h(t)+\beta g(t))\,dt=\alpha\int h(t)+\beta\int g(t)\,dt.$$

定理 1 的证明 只需证明 $S_N=s_N$，然后由 2.3 节定理 1 就可以证明本定理．显然有 $c_0=a_0$，当 $n>0$ 时，利用(1)，我们有

$$\begin{aligned}a_n\cos\frac{n\pi}{p}x+b_n\sin\frac{n\pi}{p}x&=a_n\frac{e^{i\frac{n\pi}{p}x}+e^{-i\frac{n\pi}{p}x}}{2}+b_n\frac{e^{i\frac{n\pi}{p}x}-e^{-i\frac{n\pi}{p}x}}{2i}\\&=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{i}b_n\right)e^{i\frac{n\pi}{p}x}+\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{i}b_n\right)e^{-i\frac{n\pi}{p}x}.\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i}b_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{p}x} + \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{i}b_n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{p}x}.$$

利用(2.3 节定理 1 中的)a_n 和 b_n 公式，以及(4)，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i}b_n) &= \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos\frac{n\pi}{p}t\,\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{i}}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\sin\frac{n\pi}{p}t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\left(\cos\frac{n\pi}{p}t - \mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{p}t\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{p}t}\,\mathrm{d}t = c_n.\end{aligned}$$

为简化中间的积分式，我们利用了欧拉恒等式：$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta$. 类似方法可得 $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{i}b_n)$，所以，对 $n \geqslant 1$，有

$$a_n\cos\frac{n\pi}{p}x + b_n\sin\frac{n\pi}{p}x = c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{p}x} + c_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{p}x},$$

并且

$$s_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x + b_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right) = c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{p}x} + \sum_{n=1}^{N} c_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{p}x}.$$

将右端在第二个级数中的 n 换成 $-n$，合并同类项，我们得到 $s_N(x) = S_N(x)$，从而定理得证. ■

现在，我们列出几个揭示复傅里叶系数与傅里叶余弦、正弦系数之间关系的有趣恒等式：

$$c_0 = a_0; \tag{5}$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i}b_n),\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{i}b_n) \quad (n > 0); \tag{6}$$

$$a_n = c_n + c_{-n},\ b_n = \mathrm{i}(c_n - c_{-n}) \quad (n > 0); \tag{7}$$

$$S_N(x) = s_N(x). \tag{8}$$

62

恒等式(5)、(6)和(8)由定理 1 得出，而恒等式(7)由(6)可得. 如果 f 是实值的，则 a_n 和 b_n 都是实的，则(6)说明 c_{-n} 是 c_n 的复共轭，即

$$c_{-n} = \overline{c}_n. \tag{9}$$

一般而言，如果 f 不是实值的，这个恒等式是不成立的. 考虑 $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$，由下面(11)的正交性，有 $c_1 = 1$，以及对所有 $n \neq 1$，$c_n = 0$，特别地，$c_{-1} = 0$，从而 $c_{-1} \neq \overline{c}_1$.

当研究指数函数时，下例显示，傅里叶级数的复数形式特别有用. 我们将利用公式

$$\int \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha t} + C \quad (\alpha \neq 0)$$

对复数 α 成立. 虽然对 α 是实数，这个公式是显然的，但是对复数 α，我们必须验证(习题 19).

例 1 复傅里叶级数

求出如下 2π-周期函数(见图 1)傅里叶级数的复数形式：$f(x) = \mathrm{e}^{ax}$，$-\pi < x < \pi$，其中 $a \neq 0$，$\pm\mathrm{i}$，$\pm 2\mathrm{i}$，$\pm 3\mathrm{i}$，…；确定傅里叶级数在 $x = \pm\pi$ 处的值.

解 由(4)，我们有

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(a-in)x}}{a-in}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n}{a-in}\frac{\sinh \pi a}{\pi}, \tag{10}$$

其中我们利用了 $e^{\pm in\pi}=(-1)^n$，以及 $\sinh \pi a=\frac{e^{\pi a}-e^{-\pi a}}{2}$. 将这些系数代入(3)，并化简之，我们得到 f 的傅里叶级数的复数形式：

$$\frac{\sinh \pi a}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a-in}e^{inx} = \frac{\sinh \pi a}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a+in)e^{inx}.$$

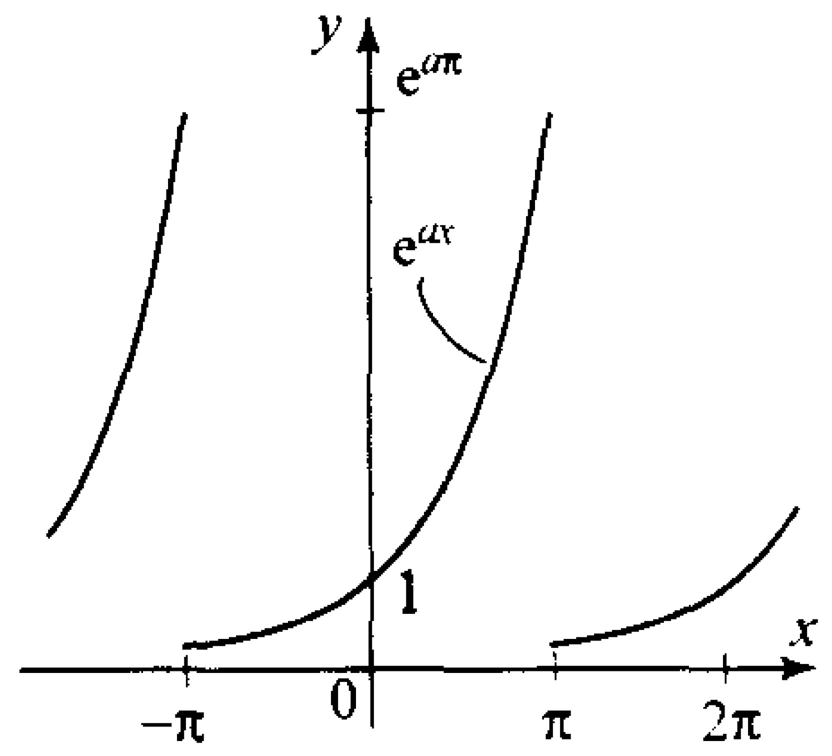


图 1 2π-周期函数 $f(x)=e^{ax}$，$-\pi<x<\pi$，$a>0$

(我们提请您注意，这里以及整个这节中，双重无穷傅里叶级数表示对称部分和 $\sum_{n=-N}^{N}$ 的极限. 如果我们允许 n 可以在从 $-\infty$到∞中以任何方式取值，则这个级数可能发散.)将定理1应用到 $f(x)$上，我们得到傅里叶表达式

$$e^{ax} = \frac{\sinh \pi a}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a+in)e^{inx} \quad (-\pi<x<\pi).$$

由定理 1，在间断点 $x=\pm\pi$ 处，傅里叶级数的值由函数在这些点处值的平均值给出. 由图 1，我们看出平均值是

$$\frac{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}{2} = \cosh a\pi.$$

63

作为特例，在傅里叶级数中取 $x=\pi$，可以得到一个有趣的恒等式：

$$\cosh a\pi = \frac{\sinh \pi a}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a+in}{a^2+n^2}, \quad a\neq 0, \pm i, \pm 2i, \pm 3i, \cdots$$

为化简级数，我们利用了 $e^{in\pi}=(-1)^n$ 和$(-1)^n(-1)^n=1$. (参见习题 12 和 13 的相关结果.)最后，注意到如果 $a=\pm in$，则 $f(x)=e^{\pm inx}$，因此 f 就是它自己的傅里叶级数. ■

例 2 由复数形式导出(通常的)傅里叶级数

由例 1 的复数形式导出通常的傅里叶级数，取 a 为非零实数.

解 本题的要点是不利用 2.2 节的公式来计算傅里叶级数，而利用例 1，以及傅里叶系数 a_n 和 b_n 与复傅里叶系数 c_n 之间关系的适当公式. 由(5)和(10)，我们得到

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{a}\frac{\sinh \pi a}{\pi}.$$

由(7)和(10)，我们有

$$a_n = (-1)^n\frac{\sinh \pi a}{\pi}\left(\frac{1}{a-in}+\frac{1}{a+in}\right) = (-1)^n\frac{\sinh \pi a}{\pi}\frac{2a}{a^2+n^2}$$

和

$$b_n = i(-1)^n\frac{\sinh \pi a}{\pi}\left(\frac{1}{a-in}-\frac{1}{a+in}\right) = -(-1)^n\frac{\sinh \pi a}{\pi}\frac{2n}{a^2+n^2}.$$

因此，f 的傅里叶级数为

$$\frac{1}{a}\frac{\sinh\pi a}{\pi}+\frac{\sinh\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(2a\cos nx-2n\sin nx).$$

特别地，当 $-\pi<x<\pi$ 和 $a\neq 0$ 时，我们有

$$e^{ax}=\frac{1}{a}\frac{\sinh\pi a}{\pi}+\frac{\sinh\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(2a\cos nx-2n\sin nx).$$

我们取 $a=1$，图 2 显示了傅里叶级数的收敛性. 注意到，由于正弦系数是 $1/n$ 阶，所以级数就像锯齿函数的傅里叶级数一样收敛的速度很慢. ■

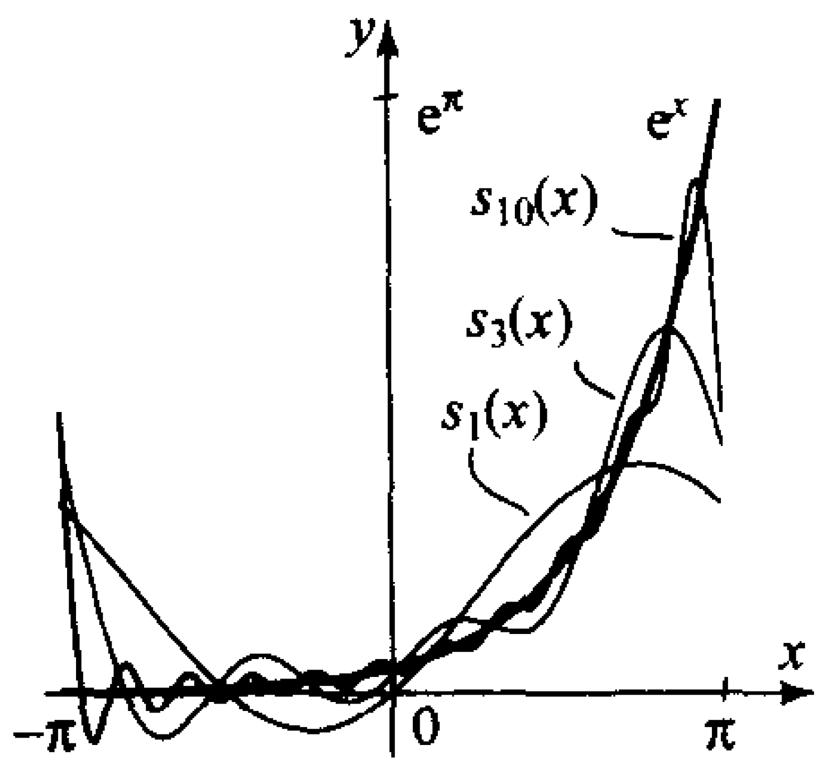


图 2 2π-周期函数 $f(x)=e^x(-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数部分和

正交性和帕塞瓦尔恒等式

在 2.2 节中，我们利用三角系的正交性推导了傅里叶级数的系数. 类似地，傅里叶系数的复数形式可以通过如下**复指数函数系**的正交性来得到：

[64]

$$1,e^{i\frac{\pi}{p}x},e^{-i\frac{\pi}{p}x},e^{i\frac{2\pi}{p}x},e^{-i\frac{2\pi}{p}x},\cdots,e^{i\frac{n\pi}{p}x},e^{-i\frac{n\pi}{p}x},\cdots.$$

这个函数系的正交性可表达为

$$\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}e^{i\frac{m\pi}{p}x}e^{-i\frac{n\pi}{p}x}dx=\begin{cases}0\text{、}&\text{若 } m\neq n,\\1&\text{若 } m=n.\end{cases}\tag{11}$$

此式的验证留作作业，我们以导出如下帕塞瓦尔恒等式的复数形式来结束本节.

定理 2(帕塞瓦尔恒等式的复数形式) 假设 f 是在区间$[-p,p]$上平方可积的实值函数，其傅里叶级数 c_n 由(4)给出，则

$$\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}f(x)^2dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2.$$

证明 由(5)，我们有 $a_0^2=c_0^2$，而由(6)和(9)，我们得

$$|c_n|^2=c_n\bar{c}_n=\frac{1}{4}(a_n-ib_n)(a_n+ib_n)=\frac{1}{4}(a_n^2+b_n^2),$$

类似地，

$$|c_{-n}|^2=c_{-n}\bar{c}_{-n}=\frac{1}{4}(a_n+ib_n)(a_n-ib_n)=\frac{1}{4}(a_n^2+b_n^2).$$

因而

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2=|c_0|^2+\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2+\sum_{n=1}^{\infty}|c_{-n}|^2$$

$$=a_0^2+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

$$= \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)^2 \mathrm{d}x,$$

其中最后一个等式是由 2.5 节的帕塞瓦尔恒等式(6)得到的. ■ 65

复值函数的帕塞瓦尔恒等式可以类似证明，只是在表述上，将积分中的函数平方换成它的绝对值的平方($|f|^2 = f\bar{f}$).

复值函数的帕塞瓦尔恒等式

$$\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

习题 2.6

在习题 1～6 中，求出给定 2π-周期函数傅里叶级数的复数形式.

1. $f(x)=\cosh ax$，$-\pi<x<\pi(a\neq 0, \pm i, \pm 2i, \pm 3i, \cdots)$. [提示：例 1.]
2. $f(x)=\sinh ax$，$-\pi<x<\pi(a\neq 0, \pm i, \pm 2i, \pm 3i, \cdots)$. [提示：例 1.]
3. $f(x)=\cos ax$，$-\pi<x<\pi$(a 不是整数). [提示：(1)和例 1.]
4. $f(x)=\sin ax$，$-\pi<x<\pi$(a 不是整数). [提示：(1)和例 1.]
5. $f(x)=\cos 2x+2\sin 3x$. [提示：利用(1).]
6. $f(x)=\sin 3x$. [提示：利用(1).]

在习题 7～8 中，利用(5)和(7)，或傅里叶级数的复数形式，求出给定函数的傅里叶级数.

7. 习题 3 的 $f(x)$.
8. 习题 4 的 $f(x)$.
9. 证明正交关系式(11).
10. 由(6)推导出(7).
11. 对任意实数 $a\neq 0$，推导展开式

$$\frac{\pi}{a\sinh \pi a} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2+n^2}.$$

[提示：在例 1 中取 $x=0$.]

12. 对任意实数 $a\neq 0$ 和所有 $-\pi<x<\pi$，推导展开式

$$e^{ax} = \frac{\sinh \pi a}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a\cos nx - n\sin nx).$$

13. (a)对 $a\neq 0, \pm i, \pm 2i, \pm 3i, \cdots$，推导展开式

$$\coth a\pi = \frac{a}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+n^2}.$$

[提示：在例 1 的傅里叶级数中取 $x=\pi$，或习题 12.]

(b)对 $t\neq 0, \pm i\pi, \pm 2i\pi, \pm 3i\pi, \cdots$，推导恒等式

$$\coth t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2+(n\pi)^2}.$$

[提示：在(a)中令 $a\pi=t$.] 66

14. 验证下面的等式，从而得到余切的展开式：对任意 $x\neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$，我们有

$$\cot x = i\coth(ix) = i\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{ix}{(ix)^2+(n\pi)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2-(n\pi)^2}.$$

15. (a)令 $a\neq 0$ 是一实数，利用帕塞瓦尔恒等式和习题 1，推导恒等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a^2+n^2)^2}=\frac{\pi}{2a^2\sinh^2(\pi a)}\left[\pi+\frac{\sinh(2\pi a)}{2a}\right].$$

(b)推导恒等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n^2}{(a^2+n^2)^2}=\frac{\pi}{2\sinh^2(\pi a)}\left[\frac{\sinh(2\pi a)}{2a}-\pi\right].$$

[提示：习题 2.]

16. **专题问题：复指数函数**．为将指数函数 e^x 的定义推广到所有复数 z，利用我们所熟悉的 e^x 泰勒级数展开式，令

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\quad 对所有\ z.$$

(级数对所有 z 都收敛是 e^x 的泰勒级数对所有 x 都绝对收敛以及具有复数项的绝对收敛级数收敛的直接推论.)这就(对所有复数 z)定义了一个函数，它继续保持许多类似于通常指数函数 e^x 所具有的性质，例如，利用复分析的工具，可以证明

$$\int e^z\,dz=e^z+C\quad 和\quad \frac{d}{dz}e^u=e^u\frac{du}{dz}.$$

下面，你将推导与 e^z 有关的一些有趣结果.（有关指数函数的细节请参阅 12.5 节.）

(a)试证：$e^{(z_1+z_2)}=e^{z_1}e^{z_2}$．[提示：证明 $\frac{d}{dz}\frac{e^{(z+w)}}{e^z}=0$，从而对所有 z，w，得出结论 $\frac{e^{(z+w)}}{e^z}=C$，令 $z=0$，而得到 C 的值.]

(b)推导**欧拉恒等式** $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$(见图 3)．[提示：回顾余弦、正弦函数的幂级数展开式.]

(c)由(b)，试证：$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta=\overline{e^{i\theta}}$.

(d)对所有实数 θ，得出结论 $|e^{i\theta}|=1$；从而所有形如 $e^{i\theta}$ 的复数都在单位圆周上(为什么?)．[提示：$|z|=\sqrt{z\bar{z}}$.]

(e)利用(b)来证明(1).

(f)计算复数：$e^{i\pi/2}$，$e^{i3\pi/4}$，$e^{i\pi}$，$e^{2\pi i}$，$e^{16\pi i}$.

(g)(**周期性**)对所有复数 z，试证：$e^z=e^{z+2\pi i}$；从而复指数函数是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数(与通常的指数函数 e^x 的一个鲜明区别，正如你所知，e^x 是一对一的.)

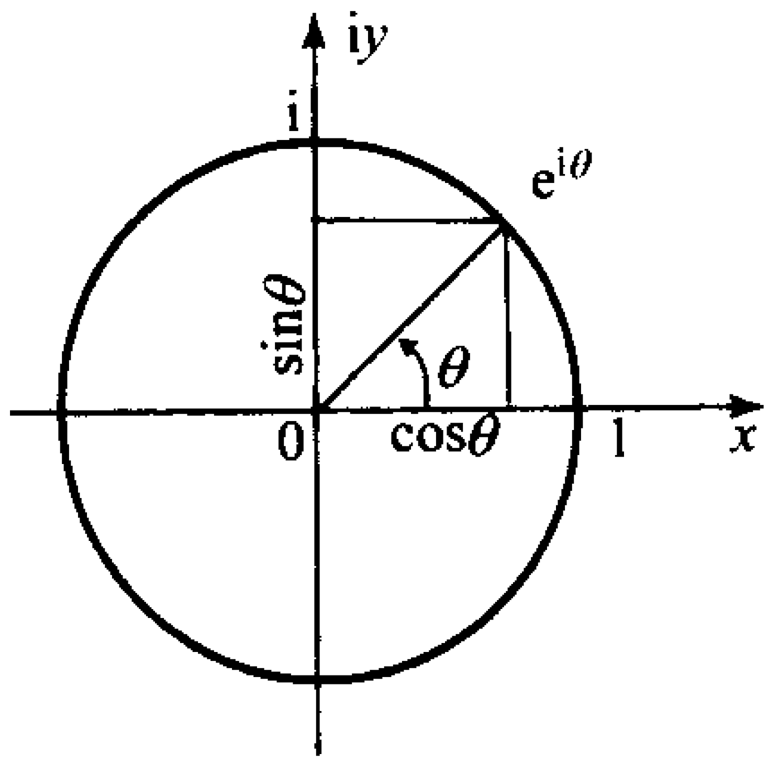


图 3　在复平面内单位圆上，$\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 与 $e^{i\theta}$ 是如何联系的，这里 θ 是以弧度度量的角度

[67]

17. **含有三角函数和指数函数之积的积分**．利用复指数函数，经常可以简化某些积分值的计算．恒等式

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C$$

和

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(-b\cos bx+a\sin bx)+C$$

为这个方法提供了优美的注解．你可能会回忆起，在微积分课程中，为计算每一个这样的积分值，要用两次分部积分法．现在，利用复指数函数，你可以一次求得上面两个积分值.

(a)令 I_1 表示第一个积分，而 I_2 表示第二个积分，试证：

$$I_1+iI_2=\int e^{(a+ib)x}\,dx=\frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x}+C.$$

(b)得出结论

$$I_1+\mathrm{i}I_2=\frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}(\cos bx+\mathrm{i}\sin bx)+C.$$

(c)通过令(b)两边的实部和虚部分别相等就可以得到所求的 I_1 和 I_2 的公式.

18. (a)证明**棣莫弗恒等式**：

$$\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n.$$

[提示：利用欧拉恒等式以及指数函数的一些基本性质.]

(b)利用 $n=2$ 时的棣莫弗恒等式，证明：

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta \quad 和 \quad \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta.$$

(c)推出恒等式：$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ 和 $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$.

习题 19～26 是为了让你熟悉复值函数的积分.

19. 利用复值函数积分的定义，证明：对任意复数 $\alpha\neq 0$，有

$$\int \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha t}+C.$$

20. 如果 h 和 g 是复值函数，α 和 β 是复数，证明：

$$\int_a^b(\alpha h(t)+\beta g(t))\,\mathrm{d}t=\alpha\int_a^b h(t)+\beta\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

求出下列积分的值，n 为整数.

21. $\int_0^{2\pi}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t.$

22. $\int_0^{\pi}t\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t.$

23. $\int\frac{1}{\cos t-\mathrm{i}\sin t}\,\mathrm{d}t.$

24. $\int_0^{2\pi}(3t-2\cos t+2\mathrm{i}\sin t)\,\mathrm{d}t.$

25. $\int\frac{1+\mathrm{i}t}{1-\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t.$

26. $\int_{-\pi}^{\pi}(1-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t.$

68

2.7 受迫振动

在本节中，我们将利用傅里叶级数来求解非齐次微分方程：

$$\mu\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+ky=F(t), \qquad (1)$$

其中 $\mu>0$，$c\geqslant 0$，以及 $k>0$ 是任意常数，$F(t)$是一给定的 t 的 $2p$-周期函数. 这类方程出现在具有周期驱动力的弹簧-质点系统振动模型中(图 1)，以及与此类似的具有周期电动势的 RLC-电路模型中. 我们研究 $c>0$ 情形，这对应于弹簧-质点系统具有阻尼情形；而 $c=0$ 情形较为简单，将在习题中讨论.

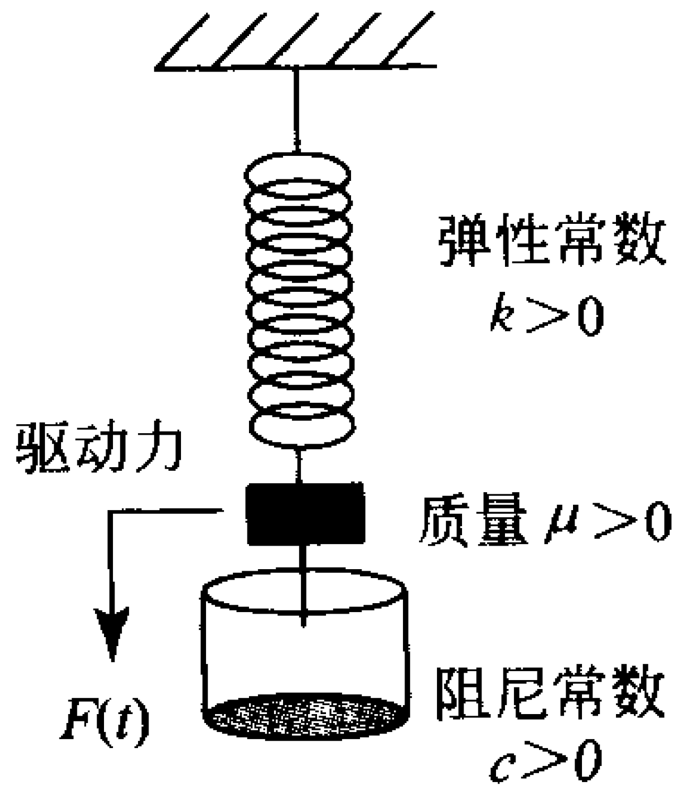


图 1　弹簧-质点系统

回顾，(1)的通解形如

$$y=y_h+y_p, \qquad (2)$$

其中 y_h 是相应的齐次方程

$$\mu \frac{d^2 y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = 0 \tag{3}$$

的通解；而 y_p 是非齐次方程(1)的任一特解(参见附录 A.1，定理 5)．求解 y_h 是一直接计算过程，这涉及求特征方程 $\mu\lambda^2+c\lambda+k=0$ 的根 λ_1 和 λ_2．令 y_s 表示当 $t\to\infty$ 时(1)的极限解或**稳态解**．在 $c>0$ 情形中，当 $t\to\infty$ 时，y_h 按指数衰减到零(参见附录 A.2 和下面的例 1)，从而由(2)得到 $y_s(t)=\lim\limits_{t\to\infty} y_p(t)$．

现在，我们给出利用傅里叶级数法求出 y_p 的要点，假设 $F(t)$ 是 $2p$-周期的，并且其傅里叶级数为

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{p}t + b_n \sin\frac{n\pi}{p}t\right), \tag{4}$$

其中傅里叶系数 a_n 和 b_n 由 2.3 节定理 1 给出．傅里叶级数的第 n 项

$$f_n(t) = a_n\cos\frac{n\pi}{p}t + b_n\sin\frac{n\pi}{p}t \quad (n=1,2,\cdots) \tag{5}$$

是输入函数 $F(t)$ 的一个简谐分量，它具有周期 $2p$、频率(以弧度单位时间计)

69

$$w_n = \frac{n\pi}{p} \quad (n=1,2,\cdots).$$

为求出当驱动力恰好等于某个 f_n 时系统的稳态反馈，我们必须求出(1)的左端等于 $f_n(t)$ 时的特解．这时，待定系数法(附录 A.2)告诉我们，一个特解具有形式：

$$y_n(t) = \alpha_n\cos\frac{n\pi}{p}t + \beta_n\sin\frac{n\pi}{p}t \quad (n=1,2,\cdots). \tag{6}$$

函数 $y_n(t)$ 称为振动的第 n 个**正规波型**，它表示系统对 $f_n(t)$ 的纯调和稳态反馈，具有与 $f_n(t)$ 一样的频率．对于任意一个 $2p$-周期的驱动函数 $F(t)$，我们将 $F(t)$ 想成无穷多个简谐分量 $f_n(t)$ 的叠加，由于微分方程是线性的，所以我们用(无穷多个)正规波型 $y_n(t)$ 的线性组合，也即运用傅里叶级数，来描述(1)的稳态解．

定理 1(受迫振动)　(1)的一个特解(c，μ，$k>0$)由傅里叶级数

$$y_p(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos\frac{n\pi}{p}t + \beta_n\sin\frac{n\pi}{p}t\right) \tag{7}$$

给出，其中傅里叶系数，α_n 和 β_n，由下式给出：

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{k}, \quad \alpha_n = \frac{A_n a_n - B_n b_n}{A_n^2 + B_n^2}, \quad \beta_n = \frac{A_n b_n + B_n a_n}{A_n^2+B_n^2}; \tag{8}$$

$$A_n = k - \mu\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 \quad 和 \quad B_n = c\frac{n\pi}{p}, \quad n=1,2,\cdots. \tag{9}$$

解 y_p 也等于(1)的稳态解 y_s.

由于 c 和 k 是非零的，所以(8)的分母是非零的．

证明　对傅里叶级数(7)逐项微分，我们得

$$y_p' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{p}\beta_n\cos\frac{n\pi}{p}t - \frac{n\pi}{p}\alpha_n\sin\frac{n\pi}{p}t\right),$$

$$y''_p = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 \alpha_n \cos\frac{n\pi}{p}t - \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 \beta_n \sin\frac{n\pi}{p}t\right).$$

代入(1)式，并利用(4)化简得

$$k\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\left[k-\mu\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2\right]\alpha_n + c\frac{n\pi}{p}\beta_n\right)\cos\frac{n\pi}{p}t + \left(-c\frac{n\pi}{p}\alpha_n + \left[k-\mu\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2\right]\beta_n\right)\sin\frac{n\pi}{p}t\right]$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}t + b_n\sin\frac{n\pi}{p}t\right).$$

70

由傅里叶系数的唯一性，我们必须取 $k\alpha_0 = a_0$，且对 $n \geqslant 1$，有

$$\begin{cases}\left[k-\mu\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2\right]\alpha_n + c\frac{n\pi}{p}\beta_n = a_n,\\ -c\frac{n\pi}{p}\alpha_n + \left[k-\mu\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2\right]\beta_n = b_n.\end{cases}$$

利用(9)式将记号化简，我们得到

$$\begin{cases}A_n\alpha_n + B_n\beta_n = a_n,\\ -B_n\alpha_n + A_n\beta_n = b_n.\end{cases}$$

可以直接验证解 α_n 和 β_n 由(8)给出. ■

现在，利用定理 1，我们来分析受外力作用的弹簧-质点系统的稳态解.

例 1　稳态解

弹簧-质点系统的振动用微分方程

$$2y'' + 0.05y' + 50y = F(t)$$

来描述，其中 2π-周期的驱动函数 $F(t)$ 如图 2 所示，求出稳态解 $y_s(t)$.

解　微分方程的通解是 $y = y_h + y_p$，其中 y_p 是一个特解，而 y_h 是齐次微分方程

$$2y'' + 0.05y' + 50y = 0$$

的通解. 特征方程 $2\lambda^2 + 0.05\lambda + 50 = 0$ 具有根

$$\lambda = -0.0125 \pm \frac{i\sqrt{399.9975}}{4} = -0.0125 \pm iw,$$

其中 $w = \dfrac{\sqrt{399.9975}}{4}$.

因此，齐次方程的通解为

$$y_h(t) = e^{-0.0125t}(c_1\cos wt + c_2\sin wt),$$

其中 c_1 和 c_2 是常数(参见附录 A.2). 显然，当 $t\to\infty$ 时，y_h 按指数衰减到零. 所以，系统的稳态解 y_s 是由 y_p 给出. 我们将利用定理 1 来求解 y_p.

如图 2 所示，驱动力 $F(t)$ 可以延拓成周期为 2π 的周期函数，它的傅里叶级数由 2.3 节习题 5 得到：对 $t>0$，有

$$F(t) = 10\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)t.$$

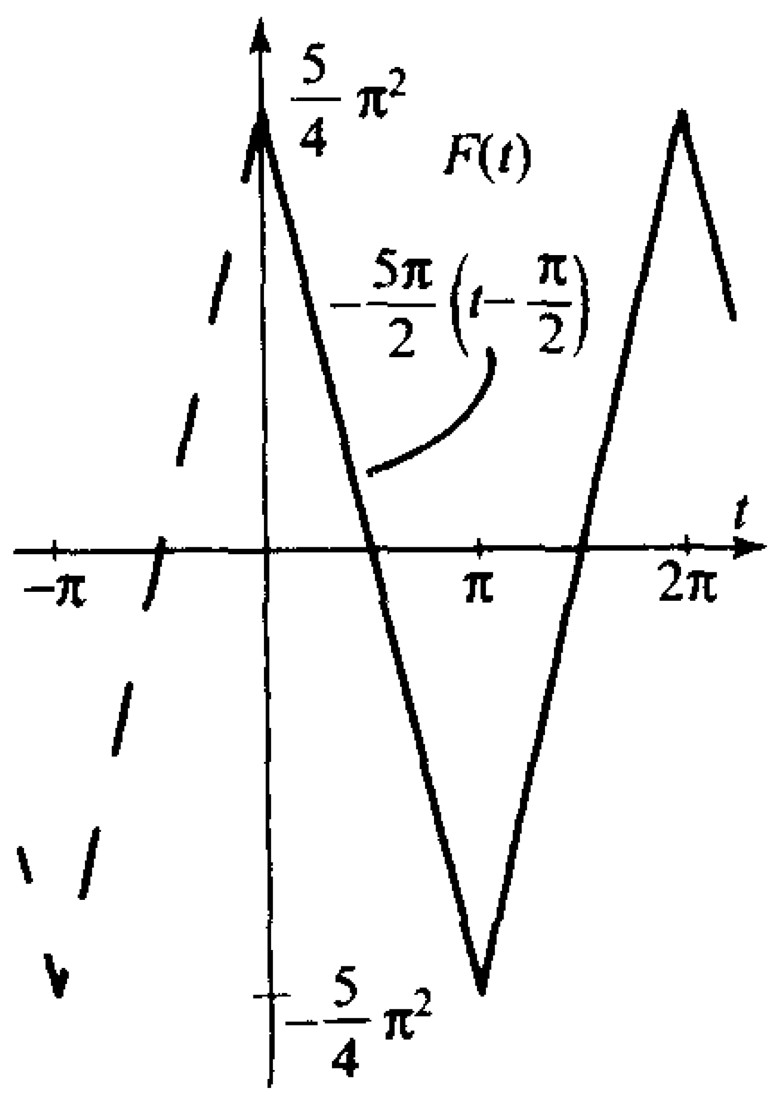


图 2　例 1 中的驱动力及其周期延拓

因此，$F(t)$的傅里叶系数是

71

$$a_0=0,\quad a_{2m+1}=\frac{10}{(2m+1)^2},\quad a_{2m}=0,\quad b_n=0 \text{ 对所有 } n.$$

利用定理 1 来推导稳态解的傅里叶级数，得到

$$A_n=50-2n^2,\quad B_n=0.05n \quad \text{和} \quad A_n^2+B_n^2=4n^4-199.997\,5n^2+2\,500.$$

所以 $\alpha_0=0$，$\alpha_{2m}=0$，$\beta_{2m}=0$，且

$$\begin{aligned}\alpha_{2m+1}&=\frac{A_{2m+1}a_{2m+1}}{A_{2m+1}^2+B_{2m+1}^2}\\&=\frac{10(50-2(2m+1)^2)}{(2m+1)^2(4(2m+1)^4-199.997\,5(2m+1)^2+2\,500)},\\\beta_{2m+1}&=\frac{B_{2m+1}a_{2m+1}}{A_{2m+1}^2+B_{2m+1}^2}\\&=\frac{0.5}{(2m+1)(4(2m+1)^4-199.997\,5(2m+1)^2+2\,500)}.\end{aligned}$$

表 1 列出了这些系数精确到十万分位的近似值.

表 1 例 1 中的稳态解的傅里叶系数

k	0	1	2	3	4
α_{2k+1}	0.020 83	0.003 47	0	−0.000 43	−0.000 11
β_{2k+1}	−0.000 02	−0.000 02	−0.16	0	0

由(7)式，$y_s(t)\approx 0.020\,83\cos t-0.000\,02\sin t+0.003\,47\cos 3t-0.000\,02\sin 3t-0.16\sin 5t$. 值得注意的是，与其他的正规波型相比而言，第五个正规波型 $y_5(t)\approx -0.16\sin 5t$ 的振幅比较大，因此第五个正规波型决定了这个解，从而稳态解的振动就几乎等于第五个正规波型 $y_5(t)$ 的简谐振动，它的频率(几乎)等于 $y_5(t)$的频率，它是驱动力的频率的五倍(图 3). ■

稳态解的主导项

为解释例 1 中傅里叶级数的主导项这个奇特事实，我们考虑弹簧的自由运动，这出现在无阻尼($c=0$)及无外力($F(t)=0$)情形. 这时，微分方程变为 $\mu y''+ky=0$. 描述弹簧自由运动的解为 $y=c_1\cos\sqrt{\frac{k}{\mu}}t+c_2\sin\sqrt{\frac{k}{\mu}}t$. 自由运动的频率或称为弹簧的**固有频率**，是

$$w_0=\sqrt{\frac{k}{\mu}}.$$

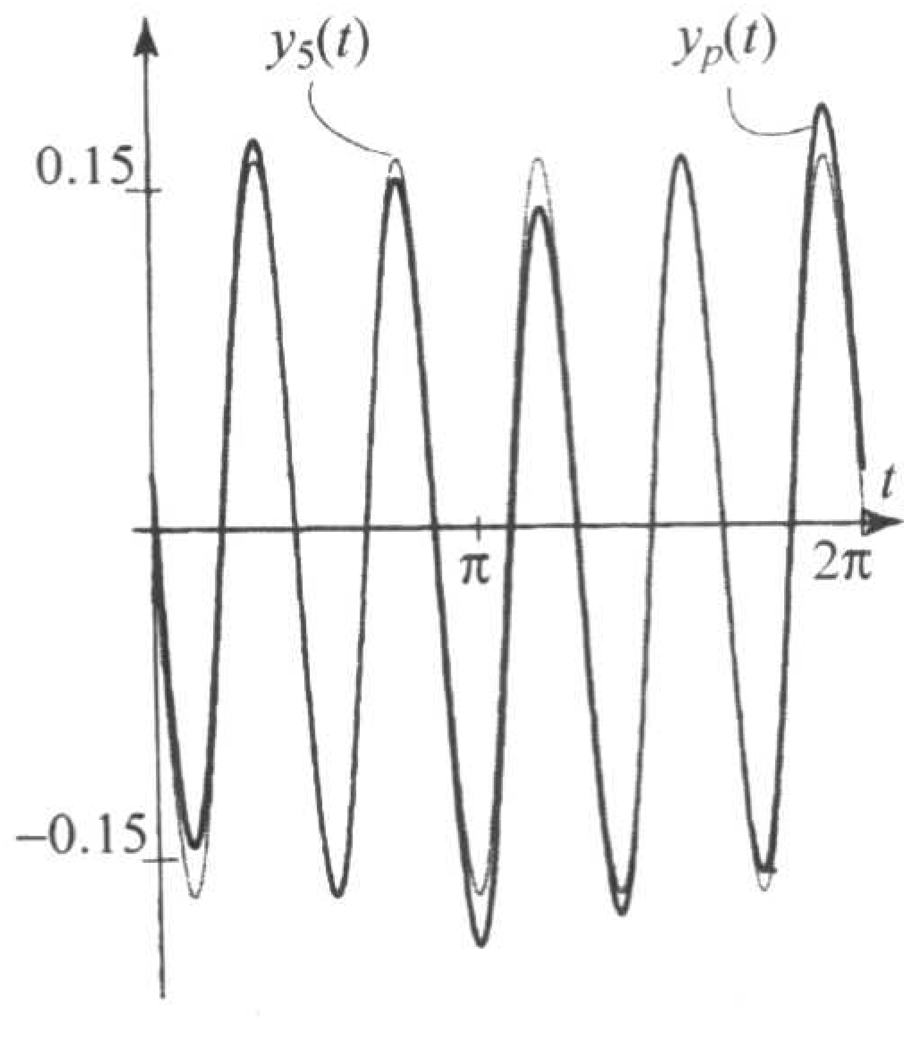


图 3 例 1 中的稳态解及其主导正规波型 y_5

众所周知，当一个频率等于 w_0 的简谐驱动力作用于无阻尼系统时，将会发生共振，弹簧振动的幅度愈来愈大，最终将会毁坏这个系统(习题 19～20).

72

当受任意周期驱动力 $F(t)$ 作用时，稳态解由傅里叶级数(7)给出．我们将计算每个正规波型 y_n 的振幅 C_n，以确定是否存在主导项．令 $-\pi<\phi_n\leqslant\pi$，满足

$$\cos\phi_n=\frac{\alpha_n}{\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}},\quad \sin\phi_n=\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}}.$$

则

$$\begin{aligned}y_n(t)&=\alpha_n\cos\frac{n\pi}{p}t+\beta_n\sin\frac{n\pi}{p}t\\&=\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}\left(\frac{\alpha_n}{\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}}\cos\frac{n\pi}{p}t+\frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}}\sin\frac{n\pi}{p}t\right)\\&=\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}\left(\cos\phi_n\cos\frac{n\pi}{p}t+\sin\phi_n\sin\frac{n\pi}{p}t\right)\\&=\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}\cos\left(\frac{n\pi}{p}t-\phi_n\right).\end{aligned}$$

由于余弦函数在 -1 到 1 之间取值，所以有

$$C_n=\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}. \tag{10}$$

角度 ϕ_n 称为**相角**或**相位滞后**.

为找出解(7)中的主导正规波型，我们可以利用直接但繁琐的计算，求出使 C_n 取最大值的 n．但是我们通常运用基于共振的拇指法则，来避免这些计算．拇指法则指出主导正规波型就是频率最接近于弹簧固有频率的正规波型．虽然 $F(t)$ 的频率与弹簧的固有频率不相同，但是某个 f_n 的频率可能非常接近于或等于弹簧的固有频率，从而导致这个正规波型具有很大的振幅.

在例 1 中，弹簧的固有频率是 $w_0=5$，$f_n(t)$ 的频率是 $w_n=n$．因此，$f_5(t)$ 的频率实际上就等于弹簧的固有频率．表 2 列出了正规波型振幅的近似值.

表 2　例 1 中正规波型的振幅

k	0	1	2	3	4
C_{2k+1}	0.020 83	0.003 47	[illegible]	0.000 43	0.000 11

不出所料，与其他的正规波型相比而言，第五个正规波型 $y_5(t)$ 具有非常大的振幅；因此，$y_5(t)$ 主导了弹簧的振动.

73

在下例中，我们给出前面关于稳态解的傅里叶级数分析的一个重要应用．我们将说明如何改变驱动力，以抑制稳态反馈的大振幅.

例 2　**稳态解的主导项**

考虑由微分方程

$$2y''+0.01y'+18.01y=F(t)$$

所描述的机械(或电子)系统，其中 $F(t)$ 是一个 2π-周期函数，满足：当 $0<t<\pi$ 时，$F(t)=1$；

当 $\pi<t<2\pi$ 时，$F(t)=-1$. 如图 4 所示，这个方程稳态解的振幅很大，足以毁坏这个系统. 通过加入一个正弦波来修改输入函数 $F(t)$，以抑制稳态反馈的大振幅.

解 令 $y_s(t)$表示对应于 $F(t)$的稳态解，则 $y_s=y_p$，其中 y_p 由(7)给出. 弹簧的固有频率为

$$w_0=\sqrt{\frac{k}{\mu}}=\sqrt{\frac{18.01}{2}}\approx 3.000\,83.$$

利用 2.3 节习题 1，我们可以得到 $F(t)$的傅里叶级数为

$$F(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)t}{2m+1}.$$

记 w_{2m+1}为 $f_{2m+1}(t)=\frac{4}{\pi}\frac{\sin(2m+1)t}{2m+1}$的频率，则 $w_{2m+1}=2m+1$，从而 $f_3(t)$的频率最接近弹簧的固有频率. 由上面的讨论知，稳态解 $y_s(t)$最有可能被第三个正规波型 $y_3(t)$所主导.

利用(10)，我们来计算 $y_3(t)$的振幅，得到

$$a_3=0, b_3=\frac{4}{3\pi},\quad A_3=0.01,\quad B_3=0.03,$$

$$\alpha_3\approx -12.732\,4,\quad \beta_3\approx 4.244\,13,\quad C_3=\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2}\approx 13.421\,1.$$

因此，$y_3(t)\approx -12.732\,4\cos 3t+4.244\,13\sin 3t$(图 5)，它的振幅显然很大. 事实上，比较图 4 和图 5，我们发现稳态解 y_s 几乎就等于 y_3，这验证了我们的猜想：y_3 主导着系统的振动. 为从 y_s 中去掉 y_3，我们必须从 $F(t)$的傅里叶级数中去掉 $f_3(t)$，因为就是这项引起了反馈 y_3，因此要从 $F(t)$中减去正弦外力 $f_3(t)=\frac{4}{3\pi}\sin 3t$. 现在，修改后的输入函数为 $F(t)-\frac{4}{3\pi}\sin 3t$ (图 6)，修改后的反馈是 $y_s(t)$减去对应于 $f_3(t)=\frac{4}{3\pi}\sin 3t$ 的反馈，即减去 $y_3(t)$，从而修改后的反馈是 $y_s(t)-y_3(t)$.

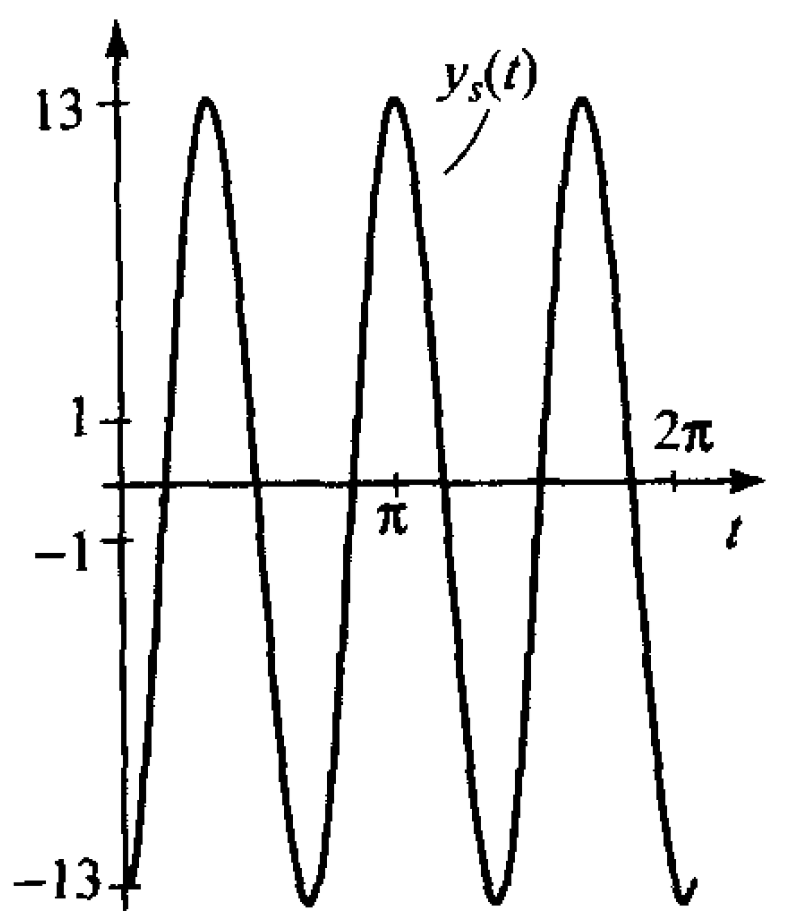


图 4 初始输出稳态解 $y_s(t)$

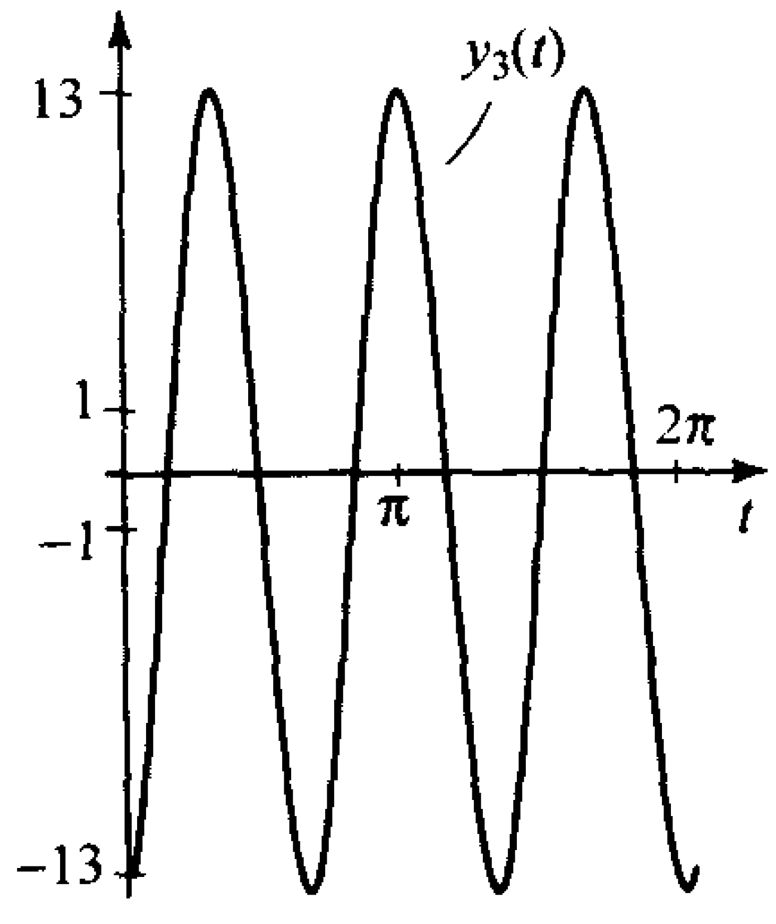


图 5 第三个正规波型 $y_3(t)$

利用定理 1，我们计算出 y_s 的前五个非零傅里叶系数，并利用这些画出 y_s 的一个近似图像，见图 7. 在 y_s 的傅里叶级数中去掉 y_3，我们得到修改后的反馈 y_s-y_3，它的近似图像也画在图 7 中. 正如你看到的，输出函数 y_s 非常接近于图 5 中的 y_3；特别地，它的频率是输入函数 $F(t)$频率的三倍. 修改后的输出 $y_s(t)-y_3(t)$的振幅大约是 0.06，这远小于 y_s 的振幅.

74

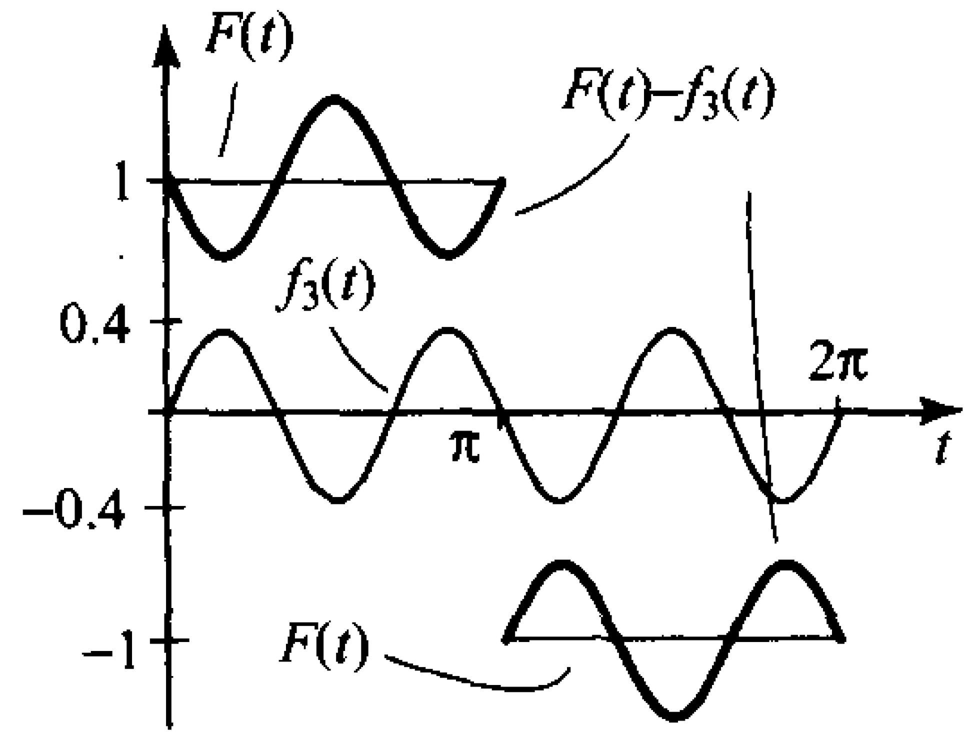


图 6　初始输入 F；第三个正规波型分量 f_3；修改后的输入 $F-f_3$

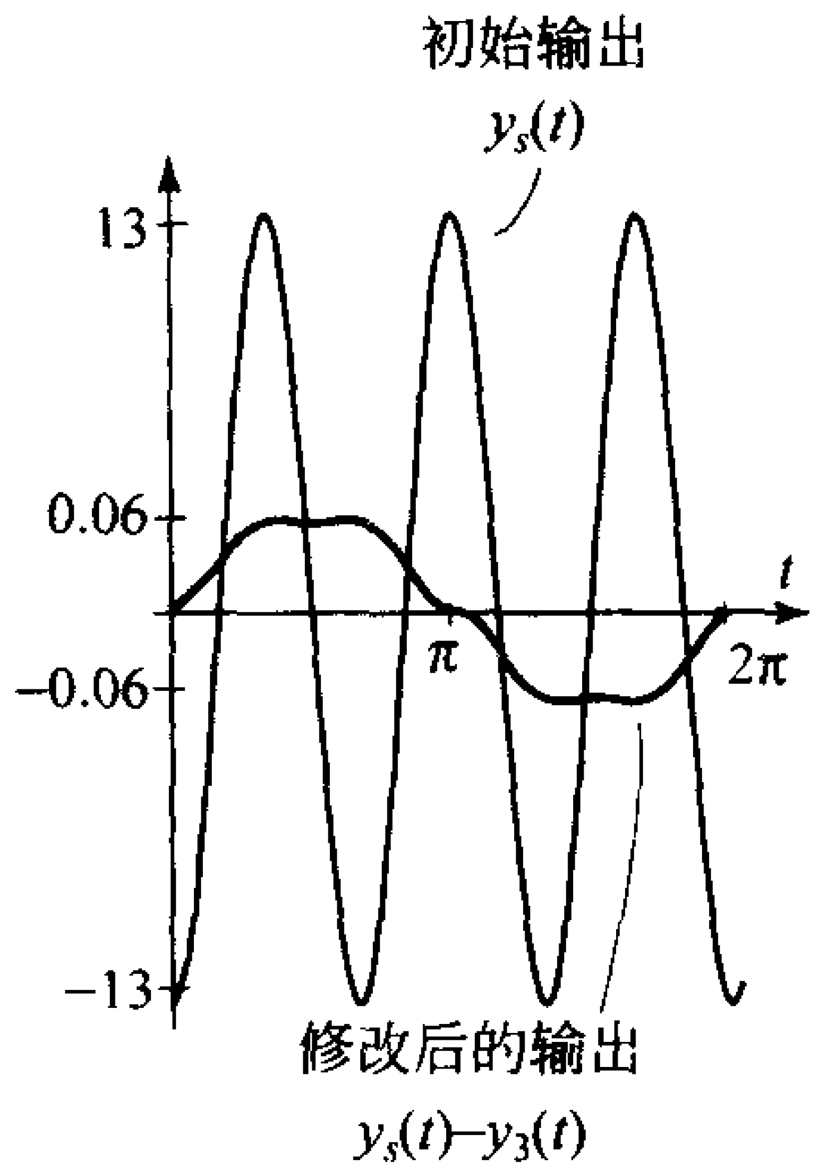


图 7　初始稳态输出及修改后的稳态输出

因此，在 $F(t)$ 中去掉频率接近于系统的固有频率的那一项后，我们成功地抑制了系统的大振幅. ■

习题 2.7

在习题 1～4 中，(a)求出微分方程的通解；(b)确定稳态解.

1. $y''+2y'+y=25\cos 2t$.
2. $y''+2y'+5y=10\cos t$.
3. $4y''+4y'+17y=1$.
4. $9y''+6y'+10y=\sin t$.

在习题 5～8 中，(a)利用定理 1，求出给定方程的稳态解；(b)代入原方程验证你的答案.

5. $y''+4y'+5y=\sin t-\dfrac{1}{2}\sin 2t$.
6. $y''+2y'+5y=\cos t-\sin t$.
7. $y''+2y'+2y=\cos t+\cos 2t$.
8. $y''+2y'+2y=\sin t+2\cos 2t$.

在习题 9～12 中，已经给出描述弹簧-质点系统振动的微分方程，(a)计算弹簧的固有频率；(b)求出前六个非零正规波型频率的近似值，并确定稳态解的主导正规波型.

9. $y''+0.05y'+10.01y=F(t)$，其中 $F(t)$ 如例 2 中的函数.
10. $8y''+0.01y'+15.01y=F(t)$，其中 $F(t)$ 如例 1 中的函数.
11. $4y''+0.01y'+16\pi^2y=F(t)$，其中 $F(t)$ 如图 8 所示.
12. $4y''+y'+4\pi^2y=F(t)$，其中 $F(t)$ 如图 8 所示.
13. 求出习题 9 中的主导正规波型，并计算其振幅.
14. 求出习题 10 中的主导正规波型，并计算其振幅.
15. 求出习题 9 中前三个非零正规波型，并计算它们的振幅.
16. 求出习题 10 中前三个非零正规波型，并计算它们的振幅.

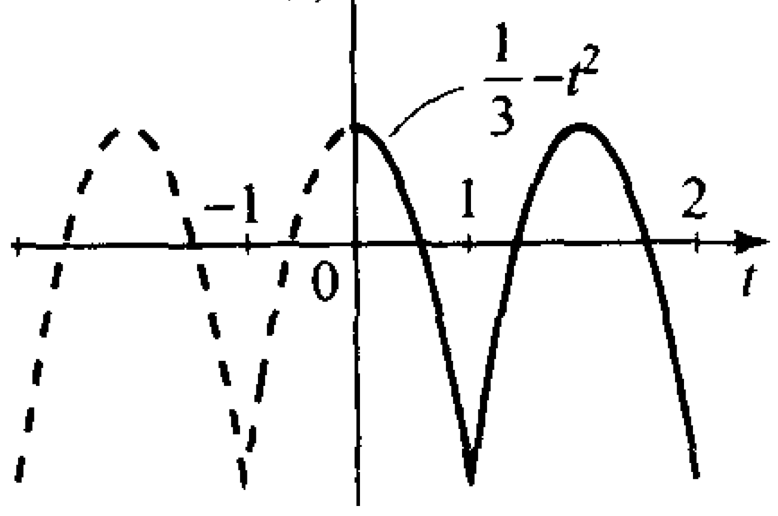


图 8　习题 11 和习题 12 的驱动函数

17. (a)如何修改习题 9 中的输入函数 $F(t)$，以控制稳态解的振动幅度？修改后的输入函数是什么？

(b)描述修改后的稳态解的傅里叶级数，并计算其前两个非零正规波型.

(c)画出稳态解及修改后的稳态解的图像.

18. 用习题 10 中的微分方程，重做习题 17.

19. **无阻尼系统.** 考虑微分方程

[75]

$$\mu y'' + ky = F_0 \cos wt \quad (\mu, k > 0).$$

(a)记 w_0 为弹簧的固有频率，试证：如果 $w \neq w_0$，则微分方程的通解是

$$y = c_1 \cos w_0 t + c_2 \sin w_0 t + \frac{F_0}{\mu(w_0^2 - w^2)} \cos wt.$$

注意到，特解的系数在分母上有因子 $w_0^2 - w^2$，因此，即使对驱动力的小振幅 F_0，当 $w_0^2 - w^2$ 很小时，反馈 y 都可能非常大. 事实上，令 $w_0^2 - w^2$ 趋近于 0，即使驱动力的振幅没有增大，我们也将得到任意大的反馈，这导致我们讨论下面的情形.

(b)(**共振**)试证：当驱动力的频率等于弹簧的固有频率时，则通解为

$$y = c_1 \cos w_0 t + c_2 \sin w_0 t + \frac{F_0}{2\mu w_0} t \sin w_0 t.$$

由于有 $t\sin w_0 t$ 这项，解是无界的. 这个现象称为共振，是由于系统无阻尼、且驱动力的频率恰好等于弹簧的固有频率而产生的.

20. **无阻尼系统.** 考虑微分方程 $\mu y'' + ky = F(t)$，其中 μ，$k>0$，而 $F(t)$是由傅里叶级数(4)表示的 $2p$-周期函数，令 w_0 为弹簧的固有频率.

(a)试证：如果 $w_0 \neq \frac{n\pi}{p}$($n=1$, 2, …)，则通解具有如下形式：

$$y = c_1 \cos w_0 t + c_2 \sin w_0 t + \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{A_n} \cos \frac{n\pi}{p} t + \frac{b_n}{A_n} \sin \frac{n\pi}{p} t,$$

其中 a_n 和 b_n 是 $F(t)$的傅里叶系数，而 A_n 如定理 1 取值.

(b)(**共振**)试证：如果对某个正整数 n_0，有 $w_0 = \frac{n_0\pi}{p}$，则通解具有如下形式：

$$y = c_1 \cos w_0 t + c_2 \sin w_0 t + \frac{a_0}{k} + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq n_0}}^{\infty} \left[\frac{a_n}{A_n} \cos \frac{n\pi}{p} t + \frac{b_n}{A_n} \sin \frac{n\pi}{p} t\right] + R(t),$$

其中

$$R(t) = \frac{p}{2\mu n_0 \pi} t \left(a_{n_0} \sin \frac{n_0\pi}{p} t - b_{n_0} \cos \frac{n_0\pi}{p} t\right).$$

因此，如果弹簧的频率等于驱动力的傅里叶级数某个高阶非零项的频率，则可能产生共振.

(c)假设对某个正整数 n_0，有 $w_0 = \frac{n_0\pi}{p}$，对 $F(t)$的傅里叶系数加上什么必要条件使得 $R(t)$为零?

在习题 21～24 中，2π-周期的输入函数 $F(t)$由其傅里叶级数给定.

(a)求出微分方程 $y'' + 9y = F(t)$的通解，确定方程所描述的系统是否产生共振.

(b)如果产生共振，修改 $F(t)$以从系统中消除共振.

21. $F(t) = 2\cos 2t + \sin 3t$.

[76]

22. $F(t) = \sum_{n=1}^{10} \sin nt$.

23. $F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n^2}$.

24. $F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cos nt}{n^2} + (-1)^n \frac{\sin nt}{n}\right]$.

25. 求解方程 $y''+9y=F(t)$，其中 $F(t)$如习题 21 定义，附加初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=0$.

26. 求解方程 $y''+9y=F(t)$，其中 $F(t)$如习题 23 定义，附加初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=0$.

2.8 傅里叶级数表示定理的证明

本节我们证明 2.2 节的定理 1，给定一个分段光滑、2π-周期函数 f，令 $s_N(x)=a_0+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 表示 $f(x)$ 傅里叶级数的第 N 项部分和，我们将证明：当 $N\to\infty$ 时，$s_N(x)$ 收敛到 $\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

证明由两个部分组成：第一部分，我们考虑 $f'(x)$存在的点 x(特别地，f 在 x 处连续)，证明当 $N\to\infty$时，$s_N(x)\to f(x)$在这些点处成立，这部分包含了傅里叶分析中所有重要的思想；证明的第二部分由一些技巧组成，这些技巧用来讨论 $f'(x)$不存在的那些点.

我们的第一个结果是傅里叶级数部分和的积分表示，对傅里叶系数应用欧拉公式，得到

$$
\begin{aligned}
s_N(x)&=\overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{d}t}^{a_0}+\sum_{n=1}^{N}\Bigg(\cos nx\overbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t}^{a_n}+\sin nx\overbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t}^{b_n}\Bigg)\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big\{f(t)\sum_{n=1}^{N}(\cos nx\cos nt+\sin nx\sin nt)\Big\}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\Big(1+2\sum_{n=1}^{N}\cos n(x-t)\Big)\mathrm{d}t,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中我们合并了积分，并运用了三角恒等式 $\cos nx\cos nt+\sin nx\sin nt=\cos n(x-t)$. 大括号中的求和可以通过下面这个有意思的恒等式写成闭公式.

狄利克雷核 对任意实数 $x\neq 2k\pi$(k 为整数)，我们有

$$
1+2\cos x+2\cos 2x+\cdots+2\cos Nx=\frac{\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\frac{x}{2}}.\tag{2}
$$

对 $x=2k\pi$，(2)式左边等于 $2N+1$，因为每个余弦值为 1；在 $x=2k\pi$ 处，(2)式右边没有定义，因为分母在这些点处为零；但是，由洛必达法则，有

77

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2k\pi}\frac{\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\frac{x}{2}}&=\lim_{x\to 2k\pi}2\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{\cos\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right]}{\cos\frac{x}{2}}\\
&=(2N+1)\,\frac{\cos(k\pi+2kN\pi)}{\cos k\pi}\\
&=2N+1.
\end{aligned}
$$

因此，如果在这些点处我们将右端理解为一个极限，(2)式在 $x=2k\pi$ 处还成立. 为证明(2)，考虑等价的公式

$$\sin\frac{x}{2}+\sum_{j=1}^{N}2\sin\frac{x}{2}\cos jx=\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right],$$

这可以通过对(2)式两边同时乘以 $\sin\frac{x}{2}$ 得到. 利用三角恒等式 $2\sin a\cos b=\sin(b+a)-\sin(b-a)$，我们得到

$$\begin{aligned}\sin\frac{x}{2}+\sum_{j=1}^{N}2\sin\frac{x}{2}\cos jx&=\sin\frac{x}{2}+\overbrace{\sum_{j=1}^{N}\left(\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(j-\frac{1}{2}\right)x\right)}^{\text{嵌套求和}}\\&=\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}+\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x\\&=\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x,\end{aligned}$$

这就证明了所要的公式.

对 $N=1，2，\cdots$，定义**狄利克雷核**为

$$D_N(x)=1+2\cos x+2\cos 2x+\cdots+2\cos Nx$$

$$=\frac{\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{3}$$

狄利克雷核是一个在傅里叶级数研究中起着重要作用的函数(图 1)，因为傅里叶级数的部分和可以用这个核来表示.

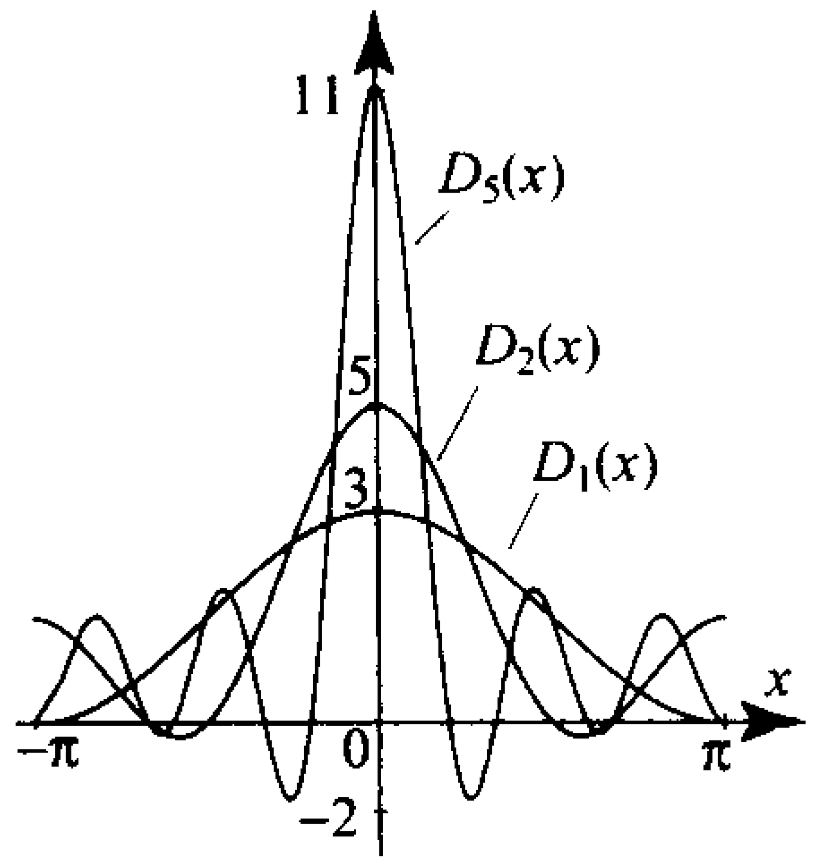


图 1 第 N 项狄利克雷核，$D_N(x)$，$N=1，2，5$，我们有 $D_N(0)=2N+1$

引理 1(狄利克雷核与傅里叶级数) *如果 f 是 2π-周期的分段连续函数，$N\geqslant 1$，则*

$$s_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_N(x-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)D_N(t)\mathrm{d}t,$$

其中 D_N 是第 N 项狄利克雷核(3).

78

证明 第一个等式是(1)和(3)的直接推论，因为(1)式大括号中的那项就是狄利克雷核 D_N 在点 $x-t$ 处的取值. 为证明第二个等式，我们从第一个等式出发，作变量代换 $T=x-t$，$\mathrm{d}T=-\mathrm{d}t$，则

$$\begin{aligned}s_N(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_N(x-t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi}f(x-T)D_N(t)\mathrm{d}T\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}f(x-T)D_N(T)\mathrm{d}T\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-T)D_N(T)\mathrm{d}T,\end{aligned}$$

其中最后一个等式是因为我们对一个 2π-周期函数在长度为 2π 的区间上求积分(2.1 节定理 1). ■

我们在后面的证明中将会用到以下的狄利克雷核的基本性质：

• 狄利克雷核是 2π-周期的，且是偶的：对所有 x，有 $D_N(x)=D_N(-x)$.

• 对所有 $N=1, 2, \cdots$，我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\mathrm{d}x = 1. \tag{4}$$

由(3)可以得到这些性质，作为示例，我们来证明(4)式. 记

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\mathrm{d}x = \overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x}^{=1} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos Nx)\mathrm{d}x,$$

则由$\int_{-\pi}^{\pi}\cos jx\,\mathrm{d}x = 0$ 对所有 $j\neq 0$ 都成立这个事实,得到(4) 式.

恒等式(4)在证明傅里叶级数部分和的收敛性时非常关键，因为由(4)式可得以下公式.

引理 2 *如果 f 是 2π-周期的分段连续函数，$N\geqslant 1$，则*

$$\begin{aligned} s_N(x)-f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))D_N(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x-t)-f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right]\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

证明 利用引理 1 和(4)，我们有

$$\begin{aligned} s_N(x)-f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)\mathrm{d}t - f(x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)\mathrm{d}t - f(x)\overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(t)\mathrm{d}t}^{=1}, \end{aligned}$$

从而第一个所要证的等式可由合并积分项得到；第二个等式由第一个等式以及(3)可得. ■ 79

下面的引理是傅里叶系数的一个重要性质. 它是如此基本，以至于我们用两个伟大的数学家的名字来命名它.（这个引理不仅对分段连续函数成立，它对更大一类函数都成立.）

引理 3(黎曼-勒贝格引理) *假设 f 是 2π-周期的分段连续函数，则*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0 \quad 和 \quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0. \tag{5}$$

更一般地，如果 α 是任意固定实数，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos[(n+\alpha)x]\mathrm{d}x = 0 \quad 和 \quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin[(n+\alpha)x]\mathrm{d}x = 0. \tag{6}$$

证明 我们将只建立(5)中的第一个极限，第二个类似可得. 不失一般性，我们假设 f 在区间$[-\pi, \pi]$上连续，而对于分段连续函数情形所需的详细技巧在本节末给出.

高等微积分课中一个众所周知的结果是，如果 f 在一个有界闭区间如$[-\pi, \pi]$上连续，则它在$[-\pi, \pi]$上一致连续. 一致连续性是比连续性强的性质(相关的性质及例子请参见习题). 这说明当 $\delta\to 0$ 时，$|f(x)-f(x-\delta)|\to 0$ 对所有$[-\pi, \pi]$上的 x 成立.

由恒等式 $\cos a=-\cos(a+\pi)$，我们得 $\cos nx=-\cos\left(n\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right)$. 作代换 $X=x+\frac{\pi}{n}$，我

们有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = -\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\left(n\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right)\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{-\pi+\frac{\pi}{n}}^{\pi+\frac{\pi}{n}} f\left(x-\frac{\pi}{n}\right)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x-\frac{\pi}{n}\right)\cos nx\,\mathrm{d}x,$$

其中最后一个等式由 2.1 节定理 1 可得，因为被积函数是 2π-周期的. 因此，

$$2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-f\left(x-\frac{\pi}{n}\right)\right)\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

但是对任意函数，有 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$，并且 $|\cos nx| \leqslant 1$，从而有

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-f\left(x-\frac{\pi}{n}\right)\right)\cos nx\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\left(f(x)-f\left(x-\frac{\pi}{n}\right)\right)\cos nx\right|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-f\left(x-\frac{\pi}{n}\right)\right|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}(2\pi)M_n,$$

80

其中 $M_n = \max_{x\in[-\pi,\pi]}\left|f(x)-f\left(x-\frac{\pi}{n}\right)\right|$. 由于 f 是一致连续的，所以当 $\frac{\pi}{n}\to 0$ 时，差值 $\left|f(x)-f\left(x-\frac{\pi}{n}\right)\right|$ 一致趋近于 0，在 $[-\pi, \pi]$ 上对所有 x 成立. 因此，当 $n\to 0$ 时，$M_n\to 0$，这蕴涵着 $\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right| \to 0$，从而完成 f 连续情形的证明.

为证(6)式，利用正弦余弦的加法公式以及(5)，例如，利用 $\cos[(n+\alpha)x] = \cos(nx)\cos(\alpha x) - \sin(nx)\sin(\alpha x)$，我们得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos[(n+\alpha)x]\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)\cos(\alpha x)]\cos nx\,\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)\sin(\alpha x)]\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

对函数 $f(x)\cos(\alpha x)$ 和 $f(x)\sin(\alpha x)$ 应用(5)式，则当 $n\to\infty$ 时，上式右端的两项都趋近于 0. ∎

现在，我们可以来证明：在 $f'(x)$ 存在的那些点处，当 $N\to\infty$ 时，有 $s_N(x)\to f(x)$. 由引理 2，等价地，我们必须证明：当 $N\to\infty$ 时，有

$$s_N(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x-t)-f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right]\mathrm{d}t \to 0.$$

我们将用一个巧妙的技巧，对固定 x，定义

$$g(t) = \begin{cases}\dfrac{f(x-t)-f(x)}{2\sin\frac{t}{2}} & \text{如果 } 0<|t|\leqslant\pi, \\ f'(x) & \text{如果 } t=0.\end{cases}$$

由于 f 是分段连续的，则 g 对所有 $t\neq 0$ 是分段连续的；在 $t=0$ 时，我们有

$$\lim_{t\to 0} g(t)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x-t)-f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(x-t)-f(x)}{t}\lim_{t\to 0}\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

$$=f'(x)=g(0),$$

我们用了 $f'(x)$存在这个事实以及$\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}=1$. 从而 $g(t)$在 $t=0$ 处连续，因此它在整个区间 $[-\pi,\pi]$上分段连续. 注意到，

$$s_N(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right]dt.$$

应用(6)式，我们有

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right]dt=0,$$

由此可得 $\lim\limits_{N\to\infty}s_N(x)-f(x)=0$，从而结束证明. [81]

例外点

这个部分我们给出详细技巧，以对分段连续函数证明引理 3，然后在 $f'(x)$不存在的那些例外点处证明傅里叶级数部分和的收敛性.

为将分段连续函数情形的证明化为连续函数情形，我们需要加上一个分段线性修正项，而这个项可以分开来处理. 这个有用过程将在证明之中加以明确，现在，我们来描述我们的线性修正项.

引理 4(线性修正) 假设 f 是 2π-周期的分段连续函数，则存在一个在$[-\pi,\pi]$上具有有限个间断点的分段线性函数 $h(x)$，使得函数 $g(x)=f(x)-h(x)$是 2π-周期的，且对所有 x，是连续的.

证明 h 的构造最好通过图像来说明(见图 2)，只需在区间$[-\pi,\pi]$上定义 h. 由于 f 是分段连续的，所以它在$[-\pi,\pi]$上至多有有限个间断点，比如说，$-\pi=x_0<x_1<\cdots<x_n=\pi$. 在每一个子区间 (x_j,x_{j+1})上，定义 $h(x)$是线性函数，使得 $h(x_j+)=f(x_j+)$以及 $h(x_{j+1}-)=f(x_{j+1}-)$. 则在所有 $x\neq x_j$ 处，$g(x)=f(x)-h(x)$连续，因为是两个连续函数的差；而对 $x=x_j$，我们有 $g(x_j+)=f(x_j+)-h(x_j+)=0$ 以及 $g(x_j-)=f(x_j-)-h(x_j-)=0$，因此，$g(x)$

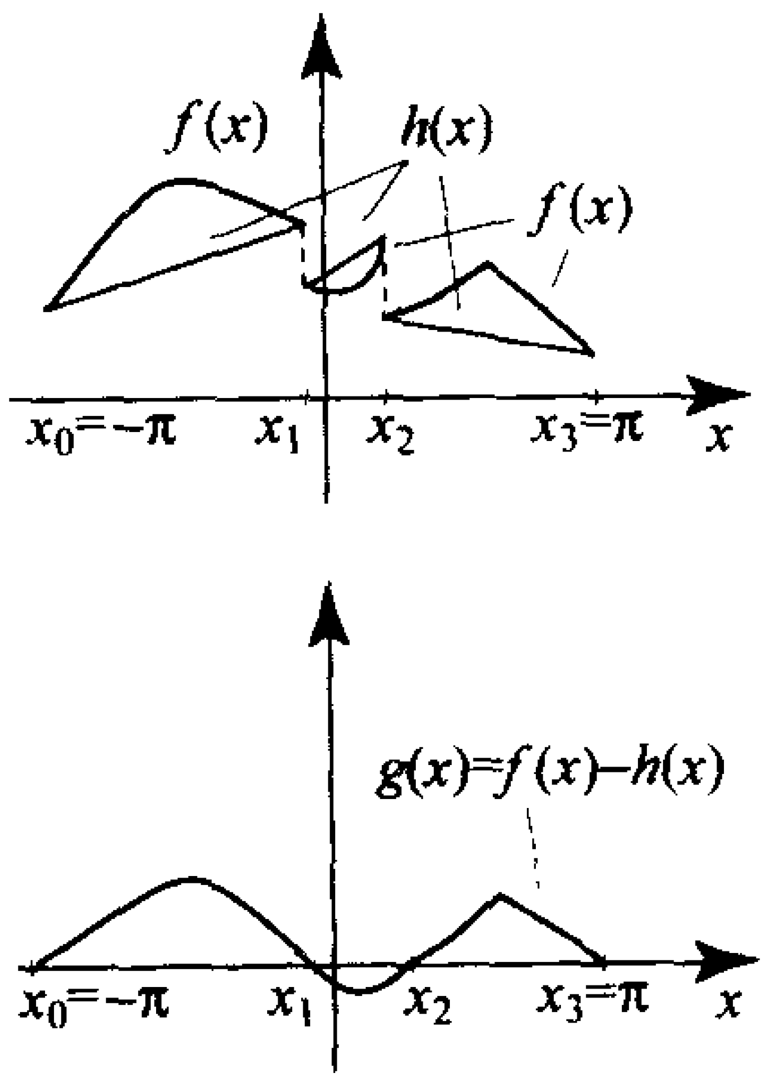


图 2 函数 $h(x)$是分段线性的，它的间断点与 $f(x)$的一样，通过加上 $-h(x)$来去掉 $f(x)$的间断

在 $x=x_j$ 处也连续，故 $g(x)$ 在所有 x 处连续. ■

引理 3 的补充证明 像前面证明一样，我们只建立(5)中的极限. 利用分部积分，我们得

$$\int_a^b (cx+d)\cos nx\,dx = (cx+d)\frac{\sin nx}{n}\Big|_a^b - c\int_a^b \frac{\sin nx}{n}dx$$
$$= \frac{(cb+d)\sin nb-(ca+d)\sin na}{n} + c\frac{\cos nb-\cos na}{n^2} \to 0$$

对 $n\to\infty$ 成立. 如果 f 是分段线性的,(5) 式中的第一个积分是有限个形如 $\int_a^b (cx+d)\cos nx\,dx$ 积分的和,而当 $n\to\infty$ 时,每一个积分都趋近于 0,从而那个积分本身也趋近于 0. 这说明(5) 中的第一个极限在 f 是分段线性时成立. 如果 f 是分段连续的,运用引理 4 以及记 $f(x)=g(x)+h(x)$,其中 $g(x)$ 是连续的,h 是分段线性的. 则当 $n\to\infty$ 时,由前面两种情形,有 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} h(x)\cos nx\,dx \to 0$. ■

2.2 节定理 1 的补充证明 为证明

$$\lim_{N\to\infty} s_N(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2},$$

我们将对 $f'(x)$ 存在情形的证明作一定的修改，我们只给出步骤框架，细节留作习题.

利用 D_N 是偶的这个事实以及引理 1，证明

82

$$s_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x-t)+f(x+t)}{2} D_N(t)\,dt$$

(习题 6). 由于 $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_N(t)\,dt = 1$(习题 1),我们有

$$\begin{aligned} s_N(x) - \frac{f(x+)+f(x-)}{2} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x+)}{2} D_N(t)\,dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x-t)-f(x-)}{2} D_N(t)\,dt \\ &= R_1 + R_2. \end{aligned}$$

为证明当 $N\to\infty$ 时，$R_1\to 0$，定义

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{f(x+t)-f(x+)}{2\sin\frac{t}{2}} & \text{如果 } 0<t\leqslant\pi, \\ f'(x+) & \text{如果 } t=0, \\ 0 & \text{如果 } t<0. \end{cases}$$

由于 f' 在 0 点分段连续,所以 $g(t)$ 在整个区间 $[-\pi,\pi]$ 上分段连续(习题 8). 应用(6) 式,我们得到 $\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right]dt = 0$,因此,$N\to\infty$ 时,$R_1\to 0$. $N\to\infty$ 时,$R_2\to 0$ 的证明类似可得,略去(习题 9),从而完成证明. ■

习题 2.8

1. **狄利克雷核的性质. 证明下列性质:**

(a) $D_N(x)$ 是偶函数，且 $D_N(0)=2N+1$.

(b) $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_N(x)\mathrm{d}x=1$.

(c) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N{}^2(x)\mathrm{d}x=2N+1$. [提示：帕塞瓦尔恒等式.]

(d) $D_N(\pm\pi)=0$ 当且仅当 N 是奇数；D_N 在区间$[-\pi,\ \pi]$上有多少零点？[提示：观察图 1.]

2. **(2)式的复数推导.**

(a)试证：

$$-1+2\sum_{j=0}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}=-1+2\,\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(N+1)x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}.$$

[提示：令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$，再求几何级数的部分和.]

(b)对上面的分式同乘以、除以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}$，利用 2.6 节(1)式中的恒等式化简得

$$-1+2\sum_{j=0}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}=\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}+\mathrm{i}\,\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

(c)导出(2)式，以及下面这个正弦求和公式：

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin Nx=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

83

3. **狄利克雷核的复形式.**

(a)试证：$D_N(x)=\sum_{j=-N}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}$.

(b)令 n 是一整数，$\widehat{D_N}\ (n)$为 $D_N(x)$的第 n 项复傅里叶系数，则

$$\widehat{D_N}\ (n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x.$$

由(a)可得当$|n|\leqslant N$时，有 $\widehat{D_N}\ (n)=1$；否则为零.

4. 试证：$f(x)=x^2$ 在实轴上不是一致连续的.

5. 试证：$f(x)=\frac{1}{x}$在$(0,\ 1]$上不是一致连续的.

6. **引理 2 的变形.** 假设 f 是 2π-周期的分段连续函数，记 $s_N(x)$为其傅里叶级数的第 N 项部分和，试证：

$$s_N(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}D_N(t)\mathrm{d}t.$$

7. **引理 3 的变形.** 试证：如果将积分区间$[-\pi,\ \pi]$换成任意一个有界区间$[a,\ b]$，引理 3 仍然成立. [提示：考虑以下两种情形. 情形 1：$[a,\ b]$包含于$[-\pi,\ \pi]$内，将函数在$[a,\ b]$以外设为 0，延拓到$[-\pi,\ \pi]$上，再运用引理 3；情形 2：$[a,\ b]$为任意的，化为情形 1.]

8. 假设 f 是 2π-周期的分段光滑函数，对$[-\pi,\ \pi]$中的固定 x，定义

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{f(x+t)-f(x+)}{2\sin\frac{t}{2}} & \text{如果 } 0<t\leqslant\pi,\\ f'(x+) & \text{如果 } t=0,\\ 0 & \text{如果 } -\pi\leqslant t<0.\end{cases}$$

(a)试证：$g(0-)=0$，$g(0+)=f'(x+)$，从而推出 g 在$[-\pi,\ \pi]$上是分段连续的；[提示：为证明第二部分，必须验证

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(x+t)-f(x+)}{t}=f'(x+).$$

为此，在$(x, x+t)$上运用中值定理，再令$t\to 0+$.]

(b)当$N\to\infty$时，试证：

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)-f(x+)}{2}D_N(t)\mathrm{d}t\to 0.$$

9. 修改习题 8 的证明框架，证明：当$N\to\infty$时，

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x-t)-f(x-)}{2}D_N(t)\mathrm{d}t\to 0.$$

10. 结合习题 8 和 9 的结果，证明：当$N\to\infty$时，

84

$$s_N(x)-\frac{f(x+)+f(x-)}{2}\to 0.$$

2.9 一致收敛性和傅里叶级数

本节研究一致收敛性中的重要论题，并给出分段光滑函数的傅里叶级数部分和一致收敛的充分必要条件.

让我们回到本章中最开始遇到傅里叶级数的两个例子——2.2 节例 1 和例 2：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\quad 和\quad g(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

如图 1 和图 2 所示，这两个级数的部分和表现出明显不同的性态. 图 2 中的部分和在区间$[-\pi, \pi]$上“精细地”收敛(你几乎无法分辨出函数与其傅里叶级数的第五项部分和之间的区别). 相反地，图 1 中的部分和在区间$[-\pi, \pi]$上并不是如此的“精细”收敛. 在图 1 中，我们只有*逐点收敛*，而在图 2 中，我们有在区间$[-\pi, \pi]$上的*一致收敛*. 这些观念构成了本章最后两节的内容. 我们将作一般的讨论，不仅可以应用于傅里叶级数，还可以运用于其他重要类型的无穷级数.

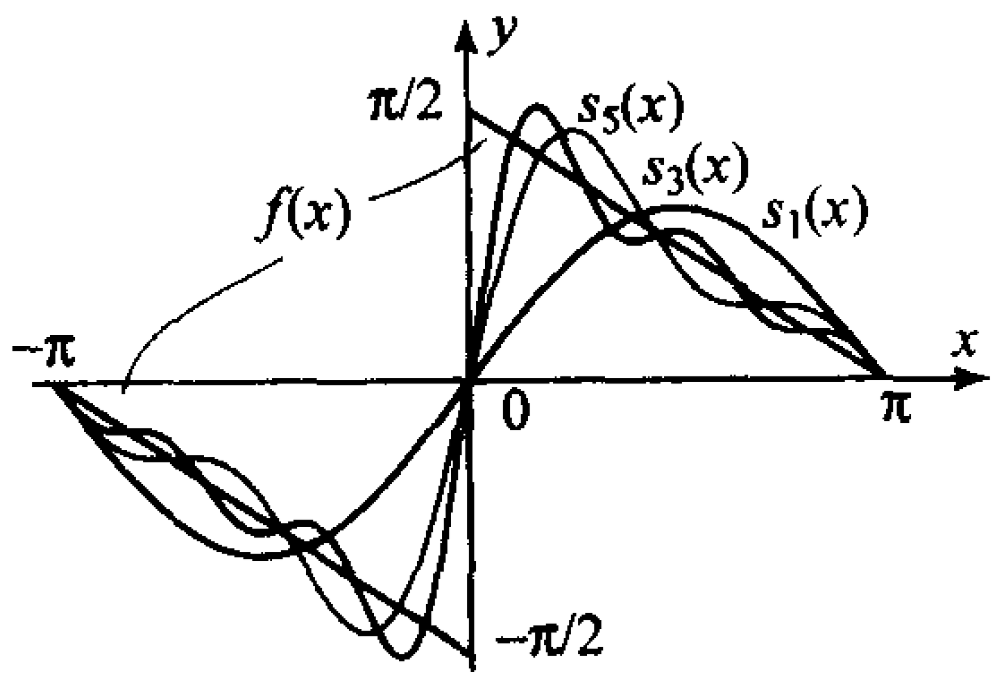


图 1 逐点收敛

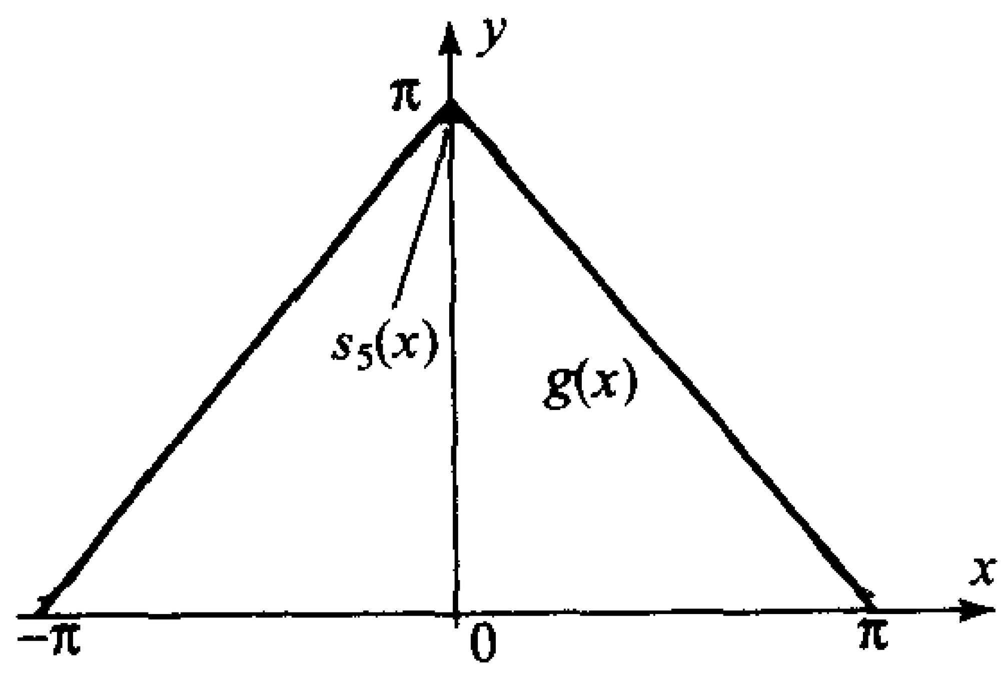


图 2 一致收敛

一致收敛与逐点收敛

在研究级数时，我们关心部分和序列的收敛性，所以，我们的分析自然以函数序列的研究开始.

函数序列(f_n)称为在集合 E 上**逐点收敛**到函数 f，如果对 E 中每一点 x，数列$(f_n(x))$都收敛到 $f(x)$. 注意这个定义中根本没有提及在 E 中不同点处的相对收敛速度问题.

考虑在区间 $E=[0, \pi]$ 上定义的函数 $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$ 以及 $g_n(x)=nxe^{-nx+1}$ $(n=1, 2, \cdots)$.

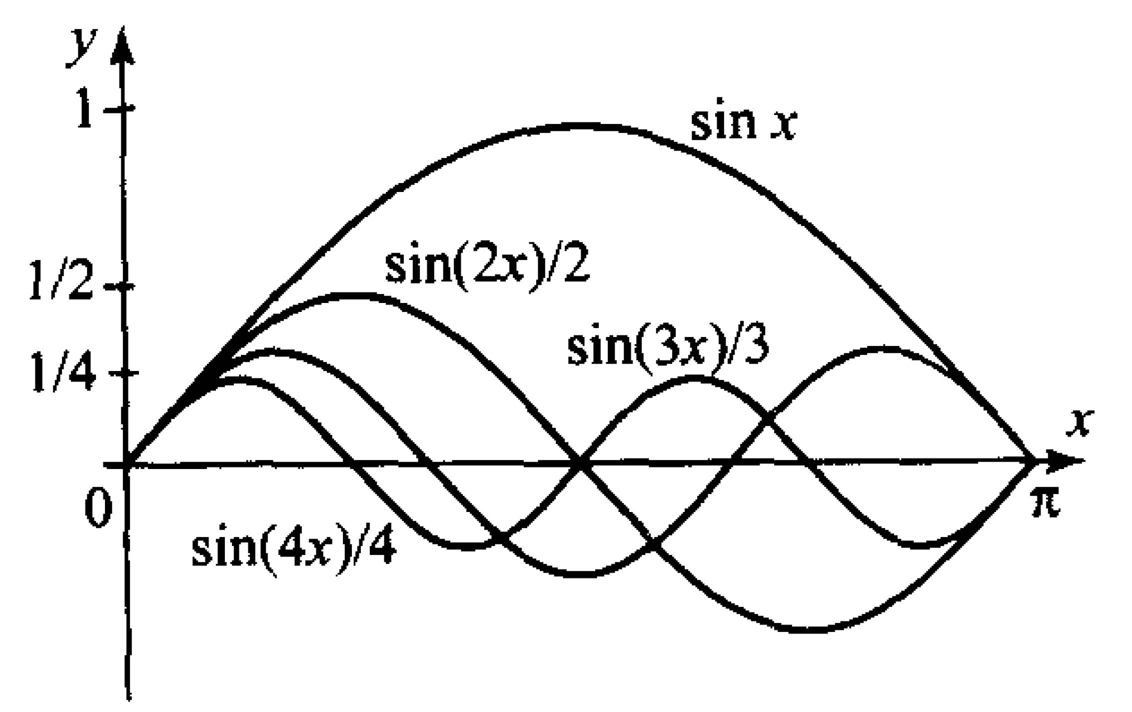
由不等式 $\left|\frac{\sin nx}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}$，可得当 $n\to\infty$ 时，$f_n(x)\to 0$. 因此，序列 (f_n) 在区间 $E=[0, \pi]$ 上逐点收敛到 0.

对 $[0, \pi]$ 上任意 x，我们断言：当 $n\to\infty$ 时，$g_n(x)\to 0$. 注意到，对所有 n，$g_n(0)=0$，所以当 $n\to\infty$ 时，$g_n(0)\to 0$ 是平凡的. 对(固定) $x>0$，由洛必达法则，我们得到 [85]

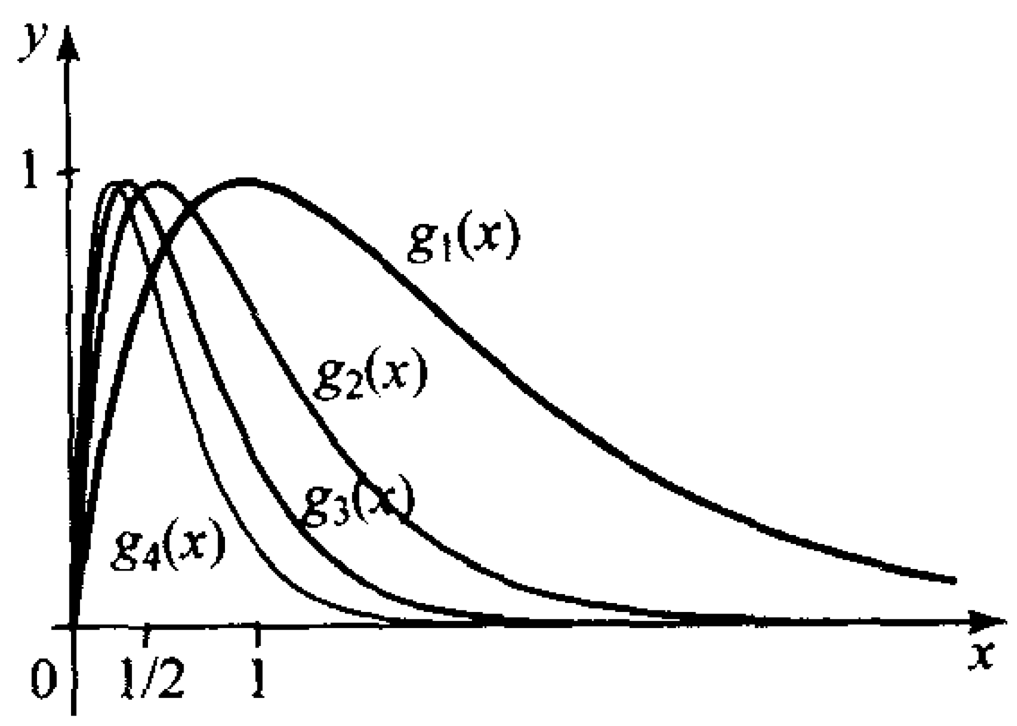
$$\lim_{n\to\infty} nx e^{-nx+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{e^{nx-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{xe^{nx-1}}=0,$$

这就证明了我们的断言.

图 3a 和 b 显示出了两个序列 (f_n) 和 (g_n) 在区间 $[0, \pi]$ 上收敛方式的明显不同. 在图 3a 中，f_n 的图像在所有点处一致地趋近于 0；在图 3b 中，g_n 的图像趋近于 0，但是不是以同样的方式趋近于 0. 事实上，对任意 n，我们有 $g_n\left(\frac{1}{n}\right)=1$，所以 g_n 的图像不是以一致的方式趋近于 0.



a) 一致收敛



b) 逐点收敛

图 3 一致收敛与逐点收敛

函数 f_n 是一致收敛序列的一个例子. 从几何上看，这个概念在图像上是显然的：给定任意小的正数(通常记为 $\varepsilon>0$)，如果我们在序列 (f_n) 中取充分大的项，函数 f_n 的图像在整个区间上与极限函数相差都在 ε 以内. 注意这个性质对序列 (g_n) 是不成立的. 下面是一致收敛的一个严格定义.

*称 f_n 在集合 E 上**一致收敛**到 f，记为 $f_n\to f$ 在 E 上一致成立，如果对给定 $\varepsilon>0$，我们可以找到一个正整数 N，使得对所有 $n\geqslant N$，有*

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对 E 中所有点 x 成立.

这个定义中关键的词语是“对 E 中所有点 x 成立”，这要求 f_n 的整个图像与 f 的图像相差都在 ε 以内.

在图 3a 和 b 中，我们有 $f(x)=0$ 及 $g(x)=0$(它们分别是 (f_n) 和 (g_n) 的极限)，图 3a 中的收敛在整个区间上是一致的，而图 3b 中的收敛则不是.

必须记住，收敛的类型与所在区间关系重大，回到图 3b，可以发现，虽然序列 (g_n) 在整 [86]

个区间[0，π]上不是一致收敛，但是它在区间[1，π]上确实是一致收敛的. 事实上，如果画出足够多的图像，可以发现只要 $a>0$，(g_n)在任意一个形如[a，π]的区间上都是一致收敛的.

在转到级数内容之前，我们申明我们刚刚给出的一致收敛性的定义可以推广到复平面或更高维的欧几里得空间中的子集 E 上，或实轴上的其他子集上.

称函数项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ 在集合 E 上**一致收敛**到函数 $u(x)$，如果部分和序列 $U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ 在集合 E 上**一致收敛**到函数 $u(x)$.

换句话说，

级数 $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ 在集合 E 上一致收敛到函数 $u(x)$，如果对给定 $\varepsilon>0$，存在一个正整数 N，使得对所有 $n \geqslant N$，我们有 $\left|\sum_{k=0}^{n} u_k(x) - u(x)\right| < \varepsilon$ 对 E 中所有点 x 都成立.

下面是一致收敛的最重要的判别法，本节中，E 始终表示一个实数或复数的集合，典型地，E 表示一个形如$[a,b]$的闭区间.

定理 1（**魏尔斯特拉斯 M-判别法**） 令 $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ 为 E 上的一个实值或复值函数列，假设存在一个非负实数列 $(M_k)_{k=0}^{\infty}$，使得下面两个条件成立：

$$|u_k(x)| \leqslant M_k \tag{1}$$

对 E 中所有点 x 成立，以及

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty. \tag{2}$$

则 $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ 在 E 上一致收敛.

证明 对 E 的(固定)x，由比较法则以及(2)，可得级数 $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ 是(绝对)收敛的，所以在 E 上可以定义函数 u 为 $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$. 现在，对 E 上的所有 x，有

$$\begin{aligned}\left|u(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x)\right| &= |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots| \\ &\leqslant |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \cdots \quad (\text{三角不等式}) \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k. \quad (\text{由(1)})\end{aligned}$$

87

当 $n\to\infty$时，最后的和式，收敛级数的余项，收敛到零. 从而，对给定 $\varepsilon>0$，我们选取一个正整数 N，使得对所有 $n\geqslant N$，有 $\left|u(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x)\right| < \varepsilon$，即得级数的一致收敛性. ■

例 1 魏尔斯特拉斯 M-判别法

(a)2.2 节例 2 中函数 $g(x)$的傅里叶级数(图 1)

$$\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

在整个实轴上是一致收敛的. 为证明这一点，取 E 等于实轴，$M_k=\frac{1}{(2k+1)^2}$，应用魏尔斯特拉斯 M-判别法. 由于对 E 中所有点 x，

$$\left|\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}\right|\leqslant\frac{1}{(2k+1)^2},$$

且 $\sum M_k=\sum\frac{1}{(2k+1)^2}<\infty$，则由魏尔斯特拉斯 M-判别法得级数在 E 上一致收敛. 傅里叶级数表示定理告诉我们，级数的极限是函数 $g(x)$. 因此，级数 $\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$ 在整个实轴上一致收敛到 $g(x)$.

(b)令 $E=[1,\infty)$，考虑级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-kx}\sin kx.$$

对 E 上的所有 x，我们有 $|\mathrm{e}^{-kx}\sin kx|\leqslant\mathrm{e}^{-k}=M_k$. 由于

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-k}=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}<\infty\quad(\text{几何级数}),$$

由魏尔斯特拉斯 M-判别法($M_k=\mathrm{e}^{-k}$)，得到给定级数在 $E=[1,\infty)$上的一致收敛性(见图 4). ■

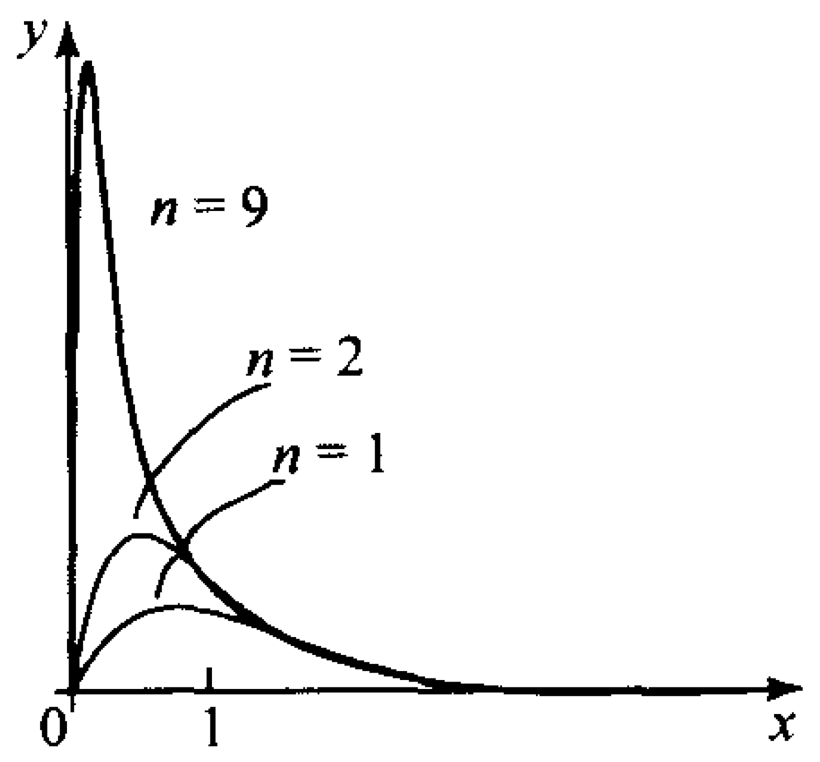


图 4 $\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{-kx}\sin kx$ 在$[1,\infty)$上的一致收敛

与例 1 有关的几个简单附注如下：

附注 1 当可以应用魏尔斯特拉斯 M-判别法时，它仅告诉我们级数是一致收敛的，但是它并不能告诉我们级数的极限. 在例 1(a)中，我们应用傅里叶表示定理(2.2 节定理 1)，来找出这个极限.

附注 2 在将魏尔斯特拉斯 M-判别法应用到傅里叶级数时，M_k 的一个显然可能性是$M_k=|a_k|+|b_k|$，因为对所有 x，我们总有$|a_k\cos kx+b_k\sin kx|\leqslant|a_k|+|b_k|$. 在例 1(a)中，我们就是取 $M_k=a_k=\frac{1}{(2k+1)^2}$.

88

附注 3 一致收敛性依赖于级数以及集合 E. 在例 1(b)中，级数在$[1,\infty)$上一致收敛，但是正如图 4 所暗示，它在$[0,\infty)$上并不是一致收敛的.

附注 4 显然，我们不能将例 1(a)中的推理应用到锯齿函数的傅里叶级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 上，因为调和级数 $\sum\frac{1}{n}$发散. 这是否是这个级数在实轴上不一致收敛的证明？答案是：否！但是利用下面这个结果，我们可以建立一致收敛性在整个实轴上的失效.

定理 2(连续性与一致收敛性) *假设 f_n 和 u_k 是 E 上的连续函数.*

(a)如果 $f_n\to f$ 在 E 上一致成立，则 f 在 E 上连续.

(b)如果 $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ 在 E 上一致收敛到 u,则 u 在 E 上连续.

证明 (a)在 E 中固定 x_0，给定 $\varepsilon>0$，由一致收敛性，我们可知函数 f_N 满足

$$|f_N(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

对 E 中所有 x 成立. 由于 f_N 在 x_0 点连续，存在 δ，使得

$$|f_N(x_0)-f_N(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

对满足 $|x-x_0|<\delta$ 的 $x\in E$ 成立. 结合这两个不等式，并应用三角不等式，对 $|x-x_0|<\delta$，我们有

$$\begin{aligned}|f(x_0)-f(x)| &\leqslant |f(x_0)-f_N(x_0)|+|f_N(x_0)-f_N(x)|+|f_N(x)-f(x)|\\ &<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\end{aligned}$$

这就确立了 f 在 x_0 点的连续性. 在(a)中，取 $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n} u_k(x)$,并注意到 f_n,(连续函数的有限和)是连续的,则(a)蕴涵着(b). ■

定理 2 在傅里叶级数上有一个有趣的应用.

推论 1(傅里叶级数的连续性) 考虑 $2p$-周期函数 f，具有傅里叶级数

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x+b_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right).$$

(i)如果傅里叶级数在 E 上一致收敛，则 f 在 E 上一定连续，因此 f 的连续性对一致收敛性是必要的.

(ii)如果傅里叶级数在一个长度为 $2p$ 的闭区间上一致收敛，则它在所有 x 处一致收敛；进一步地，f 在所有 x 处连续.

89

证明 (i)由于级数的每一项在 E 上连续(它是余弦和正弦的和)，由定理 2 得，极限函数 f 在 E 上也连续. (ii)如果傅里叶级数在一个长度为 $2p$ 的闭区间上一致收敛，则由周期性，它在所有 x 处一致收敛. 再由(i)，f 在所有 x 处连续. ■

由于我们可以事先确定一个给定函数是否连续，所以推论 1 经常用来判断其傅里叶级数一致收敛性的失效.

推论 2(一致收敛的失效) 令 f 是 $2p$-周期分段光滑函数，如果 f 在某点 x 处不连续，则其傅里叶级数在包含 x 的任意区间上都不一致收敛.

例 2 对锯齿函数一致收敛性的失效

由于锯齿函数(2.1 节例 1)在点 $x=2k\pi(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$处不连续，所以它的傅里叶级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在包含这些点中任何一点的区间上都不一致收敛. 特别地，傅里叶级数在区间 $[0, 2\pi]$上不一致收敛. (但是，我们指出傅里叶级数在不包含任何一点 $x=2k\pi$ 的闭区间上都一致收敛，这个结果比较难证明，见 2.10 节.) ■

现在，我们给出傅里叶级数一致收敛的充分必要条件，从而得到一个完整的结论.

定理 3(傅里叶级数的一致收敛性) 假设 f 是分段光滑的，且是 $2p$-周期的，则 f 的傅里叶级数在整个实轴上一致收敛到 f，当且仅当 f 是连续的.

证明 我们已经证明了 f 的连续性对一致收敛性是必要的，我们现在只需证明它是充分的. 我们将证明傅里叶级数是一致收敛的，这就完成了证明，因为由傅里叶级数表示定理，我们已经知道 f 的傅里叶级数逐点收敛到 f. 将傅里叶级数写成如推论 1 中的形式，只需证明 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|<\infty$，这样我们可以选取 $M_n=|a_n|+|b_n|$，并运用魏尔斯特拉斯 M- 判别法，因为 $\sum M_n<\infty$，且对所有 x，有

$$\left|a_n\cos\frac{n\pi}{p}x+b_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right|\leqslant|a_n|+|b_n|=M_n.$$

我们只证明 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$，而将另一个关于 b_n 的不等式留作习题. 令 f' 表示 f 的导数，a'_n 和 b'_n 表示 f' 的傅里叶系数. 由于 f' 是分段连续的，所以它是有界的，因而是平方可积的. 由贝塞尔不等式(2.5 节)，可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a'_n|^2\leqslant\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f'(x)^2\mathrm{d}x<\infty\quad\text{且类似地，}\sum_{n=1}^{\infty}|b'_n|^2<\infty.$$

现在，我们将 f 的傅里叶系数与 f' 的傅里叶系数联系起来. 由分部积分，我们得 [90]

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\Big|_{-p}^{p}-\frac{1}{n\pi}\int_{-p}^{p}f'(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{n\pi}\int_{-p}^{p}f'(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x=-\frac{p}{n\pi}b'_n,\end{aligned}$$

因为 $\sin n\pi=\sin(-n\pi)=0$. 类似地，由分部积分，以及 $f(p)=f(-p)$ 这个事实(记住，f 是连续的)，我们得到

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-p}^{p}f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}\int_{-p}^{p}f'(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,\mathrm{d}x=\frac{p}{n\pi}a'_n.$$

对任意给定的两个实数 a 和 b，将不等式 $0\leqslant(a-b)^2$ 右端展开，移项得 $ab\leqslant\frac{1}{2}(a^2+b^2)$，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|-\frac{p}{n\pi}b'_n\right|=\frac{p}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|b'_n|\leqslant\frac{p}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+|b'_n|^2\right)<\infty,$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}|b'_n|^2<\infty$. 这就得到所需的不等式，从而完成证明. ■

我们以一致收敛的两个推论来结束本节. 第一个推论说明一致收敛的序列或级数可以逐项积分.

定理 4(逐项积分) 令 $E=[a,b]$，且假设 f_n 和 u_k 在 E 上连续.

(a)假设 $f_n\to f$ 在 E 上一致成立，则

$$\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\to\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(b)假设 $\sum_{k=0}^{\infty}u_k$ 在 E 上一致收敛到 u，则

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\mathrm{d}x.$$

证明 我们证明(a)部分，而将(b)部分留作习题. 我们只需证明：当 $n\to\infty$ 时，有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\mathrm{d}x\right| \to 0.$$

令 M_n 为 $|f_n(x)-f(x)|$ 在区间 $[a, b]$ 的最大值. 因为 $f_n\to f$ 在 $[a, b]$ 上一致成立，所以当 $n\to\infty$ 时，我们有 $M_n\to 0$(习题 28). 由于上式右端小于 $\int_a^b M_n\mathrm{d}x = (b-a)M_n$，从而当 $n\to\infty$ 时，

91

它趋近于 0，这就得到所需结论. ■

为对函数项序列或级数逐项微分，我们需要比一致收敛更强的条件，如下例所示.

例 3 逐项微分的失效

利用本节的知识，我们知道序列

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, \quad n = 1,2,\cdots$$

对 $[0, \pi]$ 中的 x 一致收敛到 $f(x)=0$. 事实上，易证它在整个实轴上一致收敛. 如果我们对这个序列逐项微分，得到序列

$$f_n'(x) = \cos nx \quad n = 1,2,\cdots.$$

当 $n\to\infty$ 时，我们有 $f_n'(x)\to 0(=f'(x))$ 吗？答案是：否！因为

$$\lim_{n\to\infty}\cos nx \neq 0,$$

如 2.3 节习题 31 所示. ■

下面这个定理给出了逐项微分的充分条件.

定理 5(逐项微分) 令 $E=[a, b]$，且假设 f_n，f_n' 以及 u_k，u_k' 在 E 上连续.

(a)假设 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 和 $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ 在 E 上一致收敛，令 f 为 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 的极限，则 f 是可微的，且 $f_n'\to f'$ 在 E 上一致成立.

(b)假设级数 $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}u_k(x)$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty}u_k'(x)$ 在 E 上一致收敛，则 u 是可微的，且 $u'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}u_k'(x)$.

(因此，为对级数逐项微分，只要求原级数以及微分后的级数都一致收敛.)

证明 我们证明(b)部分，而将(a)部分留作习题. 由于微分后的级数一致收敛，且每一项都是连续的，所以由定理 2 得 $\sum_{k=0}^{\infty}u_k'(x)$ 连续. 应用定理 4，我们可以对这个级数逐项积分，从而对 E 中的所有 t，有

$$\int_a^t\left(\sum_{k=0}^{\infty}u_k'(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\int_a^t u_k'(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}[u_k(t) - u_k(a)] = u(t) - u(a).$$

对上式两边求导数，由微积分基本定理，得到 $\sum_{k=0}^{\infty}u_k'(t) = u'(t)$. ■

例 4 **逐项微分**

由魏尔斯特拉斯 M-判别法$\left(取 M_k=\frac{1}{k^3}\right)$，级数 $u(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^3}$ 在整个实轴上一致收敛. 如果我们对这个级数逐项微分，得到$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}$. 由魏尔斯特拉斯 M- 判别法$\left(取 M_k=\frac{1}{k^2}\right)$，这个级数也一致收敛. 从而由定理 5，得到 $u'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}$. 因此，这个级数可以逐项微分. ■

92

下节我们将推导出一个一致收敛的有力判别法则，称为狄利克雷判别法则. 同时，给出几个例题，包括一些不能逐项微分的一致收敛级数.

习题 2.9

在习题 1～8 中：

(a)确定给定序列的极限.

(b)画出几个图像，并确定序列在给定区间上是否是一致收敛的.

1. $f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$；$0\leqslant x\leqslant 2\pi$.
2. $f_n(x)=\frac{x}{1+nx^2}$；$-1\leqslant x\leqslant 1$.
3. $f_n(x)=\frac{n^2 x}{1+n^3 x^2}$；$-1\leqslant x\leqslant 1$.
4. $f_n(x)=e^{-nx}$；$0\leqslant x\leqslant 1$.
5. $f_n(x)=nxe^{-nx}$；$0\leqslant x\leqslant 1$.
6. $f_n(x)=e^{-n^2x^2}-e^{-2nx}$；$0\leqslant x\leqslant 1$.
7. $f_n(x)=\frac{nx}{n^2x^2+1}$；$0\leqslant x$.
8. $f_n(x)=\cos\left(\frac{x}{n}\right)$；$0\leqslant x\leqslant\pi$.

在习题 9～18 中，应用魏尔斯特拉斯 M-判别法，建立给定级数在给定区间上的一致收敛性.

9. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}$；对所有 x.
10. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos kx}{k^2}+\frac{\sin kx}{k^3}\right)$；对所有 x.
11. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$；$|x|\leqslant 10$.
12. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^k}{k!}$；$|z|\leqslant 700$.
13. $\sum_{k=0}^{\infty}(10x)^k$；$|x|\leqslant\frac{1}{11}$.
14. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x}{10}\right)^k$；$|x|\leqslant 9$.
15. $\sum_{k=0}^{\infty}x^k$；$|x|\leqslant 0.99$.
16. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+k^2}$；对所有 x.

17. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{|x|+k^2}$；对所有 x.

18. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(x/k)}{k^2}$；对所有 x.

19. 在 2.2 节习题 1～4 的函数中，哪些具有一致收敛的傅里叶级数？在不参看傅里叶级数的情形下，验证你的答案.

20. 2π-周期函数的傅里叶系数为：$a_0=0$，$a_n=\frac{(-1)^n}{n^2}$，$b_n=\frac{1}{n}$，$n\geqslant 1$，这个函数连续吗？验证你的答案.

21. 2π-周期函数的傅里叶系数为：$a_0=1$，$a_n=\frac{1}{1+n^2}$，$b_n=\frac{1}{n^3}$，$n\geqslant 1$，这个函数连续吗？验证你的答案.

22. 给出一个 2π-周期函数 $f(x)$，使得 $f(x)$对所有 x 都不连续，但是 $f^2(x)$对所有 x 都连续.

23. 给出一个 2π-周期函数 $f(x)$，使得 $f(x)$的傅里叶级数对所有 x 都不一致收敛，但是 $f^2(x)$的傅里叶级数对所有 x 都一致收敛.

93

24. (a)试证：级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}e^{-kx}$ 对所有 $x\geqslant 0$ 都收敛.

(b)试证：(a)中的级数对 $x>0$ 是可微的；它的导数是什么？[提示：取 δ，使得 $0<\delta<x$，在区间[δ, ∞)上考虑.]

25. 习题 24 中的级数在区间 $x>0$ 上可以逐项微分多少次？验证你的答案.

26. 考虑在 $-\pi<x<\pi$ 上定义的 2π-周期函数 f：$f(x)=x$. 不计算出它的傅里叶级数，判断该函数是否在区间 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 上一致收敛. 验证你的答案.

27. 令 $f_n(x)=\sin\frac{n^2x}{n}$，且 f 记为当 $n\to\infty$时序列的极限，则 f 和 f'分别是什么？$f'(x)=\lim_{n\to\infty}f'_n(x)$是否成立？

28. 假设 f 和 f_n 是有界闭区间[a, b]上的连续函数，令 M_n 为$|f-f_n|$在[a, b]上的最大值，试证：$f_n\to f$ 在[a, b]上一致成立，当且仅当 $M_n\to 0$.

29. 直接代入方程，可以验证微分方程

$$y''+4y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\sin n\pi t\quad(t>0)$$

有解

$$y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2(4-n^2\pi^2)}\sin n\pi t.$$

验证其中微分可以逐项微分.

30. **处处不可微的连续函数**. 试证：函数

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2^kx)}{2^k}$$

对所有 x 连续.（可以证明 $u(x)$在任意 x 处没有导数. 这个处处不可微的连续函数特例由魏尔斯特拉斯发现.）

31. 证明定理 5 的(a)部分. [提示：研究(b)部分的证明.]

2.10 狄利克雷判别法和傅里叶级数收敛性

我们已经详细地讨论过锯齿函数的傅里叶级数，$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$，证明它逐点收敛到锯齿函数(2.2 节定理 1，傅里叶级数表示定理)，同时，也证明它在区间[0,2π]上不一致收敛(2.9 节例 2).

但是,在不包含 0 或 2π 的子区间$[a,b]$上其收敛性如何?在试图回答这个问题之前,让我们来看看图 1.

94

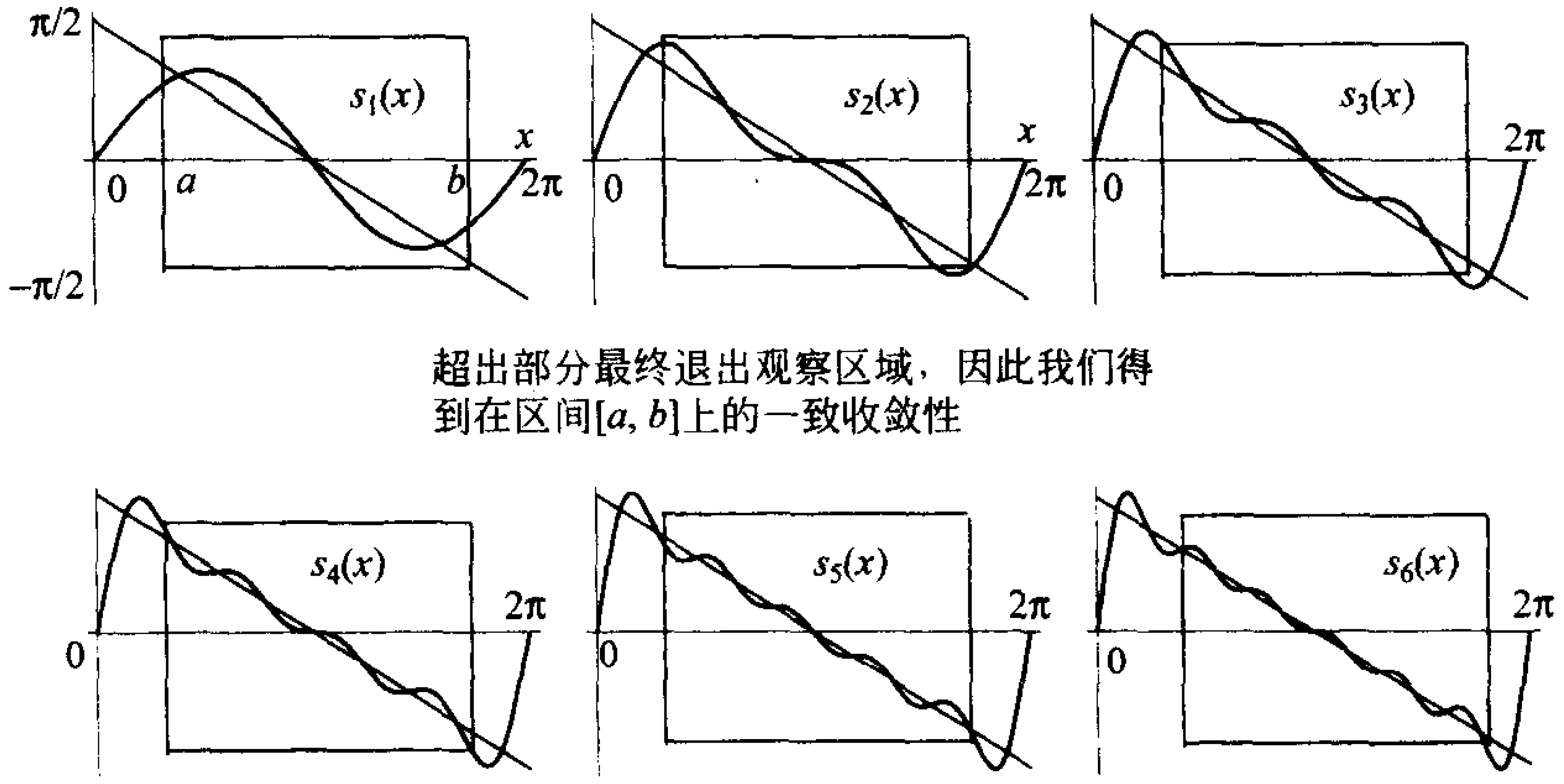


图 1　吉布斯现象与一致收敛性

在图 1 中，我们将观察区域限制在区间$[a,b]$上，得到傅里叶级数如下有趣的行为：部分和图像上的驼峰向区间$[0,2\pi]$的两个端点移动，最终超出部分退出观察区域，从而吉布斯现象在区间$[a,b]$以外发生. 因此，在区间$[a,b]$上，部分和似乎一致收敛.

上面的观察是正确的，且可以由以下收敛性的重要判别法则得出(也请参看定理 2). 这个判别法则归功于阿贝尔和狄利克雷. 在判别法则的叙述中，我们令 E 为实数或复数的一个集合，典型地，E 将为实轴上的一个区间.

定理 1(一致收敛的狄利克雷判别法)　令 E 为实数(或复数)的一个子集，$(u_k(x))_{k=1}^{\infty}$是定义在 E 上的实值或复值函数列，$(d_k)_{k=1}^{\infty}$是一实数列，则级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k u_k(x)$$

在 E 上一致收敛,如果下面两个条件满足:

(1) 系数 d_k 是正的,且递减到零.

(2) 存在数 M,使得

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k(x)\right| \leqslant M$$

对 E 中所有的 x 和所有 n 成立.

狄利克雷判别法的证明非常复杂,将在本节的附录中给出.

95

定理 1 中有两个条件,第一个条件通常可以直接验证;第二个条件说明 u_k 的所有部分和在 E 上必须被同一个常数界定(或一致有界),要更困难一些,有时需要细致的分析. 例如,对级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$ 应用狄利克雷判别法时,我们取 $d_k=\frac{1}{k}$,以及 $u_k(x)=\sin kx$. 条件(1) 显然满足,因为 d_k 是正的,且递减到零. 为建立条件(2),我们需要知道 $\sum_{k=1}^{n}\sin kx$ 的大小. 我们在 2.8 节遇到这个

和式的余弦情形 $\sum_{k=0}^{n}\cos kx$. 对任意实数 $x\neq 2m\pi$,我们有

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} \tag{3}$$

和

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}. \tag{4}$$

对于 $x=2m\pi$，第一个和式是 0；第二个和式是 $n+\frac{1}{2}$. ((3)和(4)的证明见 2.8 节(2)和习题 2.)

观察 $\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ 和 $\sum_{k=1}^{n}\sin kx$ 在不同 n 的取值时的图像对我们或许有所启发. 由图 2b,我们发现在区间 $0<x<2\pi$ 上,$\sin\frac{x}{2}>0$, $\sum_{k=1}^{n}\sin kx$ 的图像夹在 $\frac{\pm 1}{\sin\frac{x}{2}}$ 的图像之间,因此

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{x}{2}},\quad 0<x<2\pi. \tag{5}$$

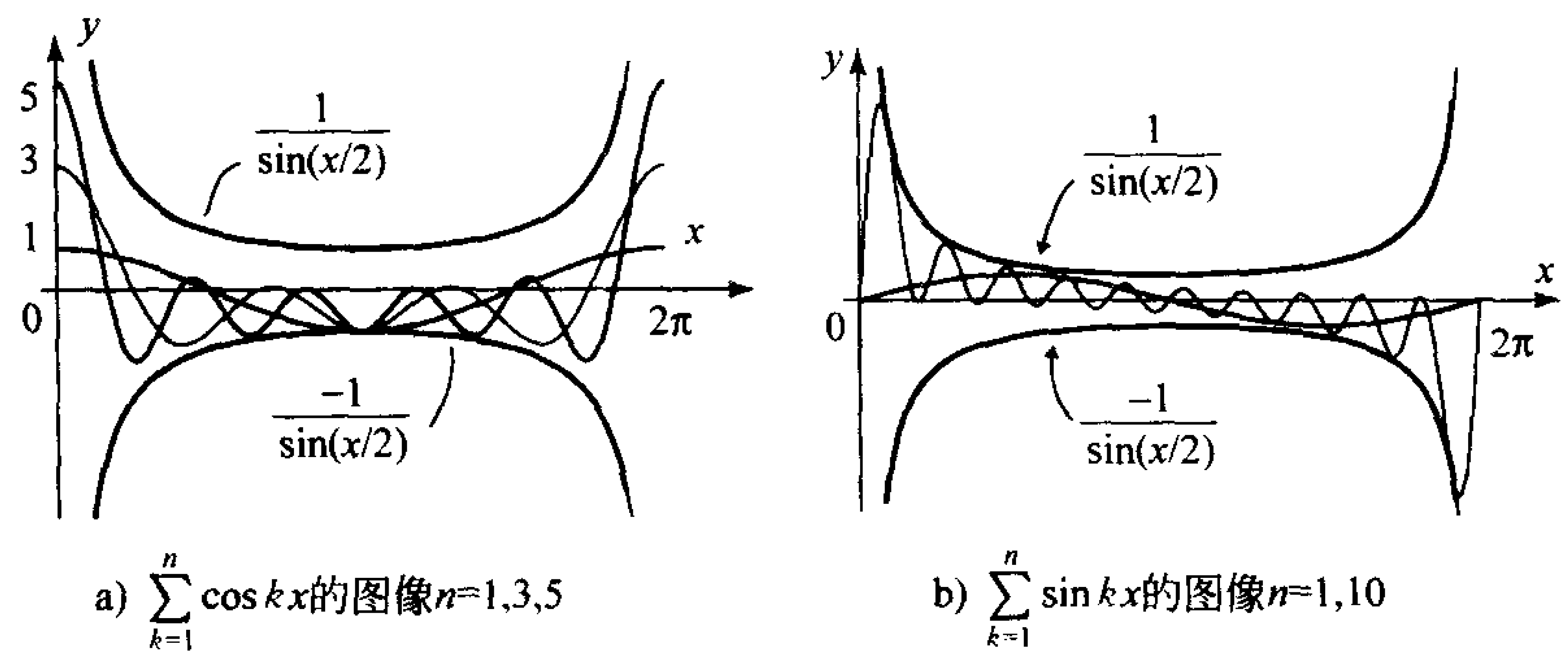


图 2　余弦和正弦的和，以及包络 $\frac{\pm 1}{\sin\frac{x}{2}}$

利用(3)式，可以得到这个有用不等式的如下证明：

$$|\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx|=\left|\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|$$

$$\leqslant\frac{1+1}{\left|2\sin\frac{x}{2}\right|}=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}.$$

类似地，由(4)式开始，对 $0<x<2\pi$，我们有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| = \left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}, \tag{6}$$

正如图 2a 所示.

当对三角级数应用定理 1 时，不等式(5)和(6)为我们提供了验证条件(2)的方法. **三角级数**是指

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

其中 a_k 和 b_k 是任意常数. 三角级数包含了傅里叶级数，此时 a_k 和 b_k 是傅里叶系数.

定理 2(具有递减系数的三角级数)　假设 $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ 和 $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ 是递减到零的正数列.

(a)**(一致收敛性)**　令 $E=[a,\ b]$，其中 $0<a<b<2\pi$，则级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx$ 在 E 上一致收敛.

(b)**(逐点收敛性)**　级数 $\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx$ 对所有的 x 逐点收敛.

(c)**(逐点收敛性)**　级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx$ 在除去 $x=2n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 外逐点收敛，在这些点处级数可能收敛或发散.

如果我们取 $E=[0,2\pi]$，在不对 (a_k) 和 (b_k) 加以进一步的限制下，(a) 部分一般不成立. 区间 $[a,b]$ 必须严格包含于 $(0,2\pi)$. 同时，注意到，由周期性，(a) 部分仍然成立，如果将 $(0,2\pi)$ 换成任意形如 $(2m\pi,(2m+2)\pi)$ 的区间，且 $[a,b]$ 严格包含于 $(2m\pi,(2m+2)\pi)$.

证明　(a) 我们证明正弦级数部分，其余部分类似可得，留作习题. 我们想对级数 $\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx$ 应用狄利克雷判别法. 由于 (b_k) 是递减到零，所以(1) 式得证；为验证(2) 式，令 M 为数 $\frac{1}{\sin\frac{a}{2}}$ 和 $\frac{1}{\sin\frac{b}{2}}$ 两者中较大的一个(见图 3). 对所有 n，由于 $\sum_{k=1}^{n}\sin kx$ 的图像夹在 $\frac{\pm1}{\sin\frac{x}{2}}$ 的图像之间(或由(5) 式)，对所有 $a\leqslant x\leqslant b$，我们有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1}{2}x} \leqslant M,$$

这就建立了(2)，从而完成这部分的证明.

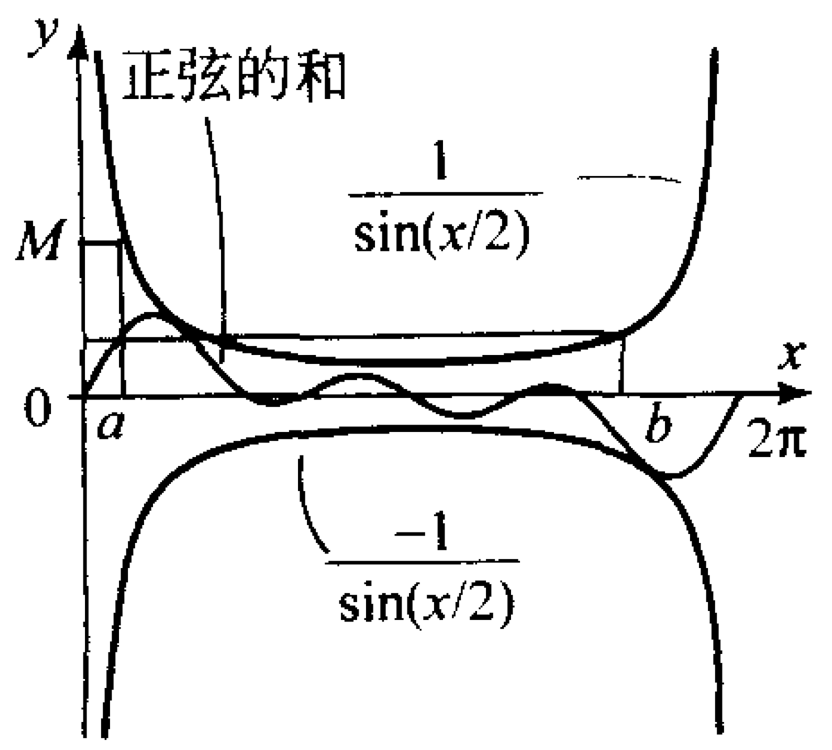


图 3

(b) 由于级数的每一项都是 2π-周期的，所以只需考虑 $[0,\ 2\pi]$ 中的 x 即可. 在 $x=0$ 或 $x=2\pi$ 处，级数显然收敛，故假设 x 在 $(0,\ 2\pi)$ 中. 给定这样一个数 x，我们总可以选取一个闭区间 $E=[a,\ b]$，使得 $0<a<x<b<2\pi$. 由(a)，级数在 E 上一致收敛，特别地，级数在 x 点收敛，这就证明了

97

(b). (c)部分的证明完全一样，只是除了点 $x=2n\pi$，因为此时级数的收敛性不再成立，所以这些点必须去掉. ■

例 1 三角级数的一致收敛性

定理 2(a) 的直接应用是证明级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{\sqrt{k}}$, 以及 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k\ln(k+1)}$ 在区间[0.1,6]，或任意严格包含于[0,2π]的区间上，一致收敛.（注意到，任何一个级数都不能用魏尔斯特拉斯 M- 判别法来判断.） ■

附录：定理 1 的证明

定理 1 的证明是建立在下面这个公式之上的，这个公式与级数的分部积分类似.

阿贝尔分部求和公式 令(a_k)和(u_k)是两个数列，且记 $U_k=\sum_{j=0}^{k}u_j$，则对任意整数 $m>n\geqslant 0$，我们有

$$\sum_{k=n+1}^{m}a_ku_k=\sum_{k=n+1}^{m}U_k(a_k-a_{k+1})+U_ma_{m+1}-U_na_{n+1}.$$

证明 我们有

$$a_ku_k=(U_k-U_{k-1})a_k=U_k(a_k-a_{k+1})+(U_ka_{k+1}-U_{k-1}a_k).$$

从 $n+1$ 到 m 求和，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{m}a_ku_k&=\sum_{k=n+1}^{m}U_k(a_k-a_{k+1})+\sum_{k=n+1}^{m}(U_ka_{k+1}-U_{k-1}a_k)\\&=\sum_{k=n+1}^{m}U_k(a_k-a_{k+1})+(U_{n+1}a_{n+2}-U_na_{n+1})+\\&\quad(U_{n+2}a_{n+3}-U_{n+1}a_{n+2})+\cdots+(U_ma_{m+1}-U_{m-1}a_m)\\&=\sum_{k=n+1}^{m}U_k(a_k-a_{k+1})+U_ma_{m+1}-U_na_{n+1}.\end{aligned}$$ ■

在狄利克雷判别法的证明过程中，我们将用到柯西序列这个概念. 序列(a_n)称为**柯西序列**，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得对所有 m，$n>N$，我们有$|a_m-a_n|<\varepsilon$. 因此，柯西序列就是其项可以任意接近的序列. 直观地，柯西序列一定是收敛的，这个重要性质称为实数和复数的**完备性**. 在此，我们只叙述，而不证明.

98

完备性 假设(a_n)是一列实数或复数，则(a_n)收敛，当且仅当它是柯西序列.

定理 1 的证明 对 $E=[a,b]$中的 x，令 $s_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_ku_k(x)$，以及 $U_n(x)=\sum_{k=0}^{n}u_k(x)$. 我们必须证明序列$(s_n)$在 E 上一致收敛. 由假设，存在数 M，使得 $|U_n(x)|\leqslant M$ 对所有 n 和 E 中的所有 x 成立. 对 $m>n$，分部求和得

$$|s_m-s_n|=\left|\sum_{k=n+1}^{m}a_ku_k\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{m}U_k(a_k-a_{k+1})+U_ma_{m+1}-U_na_{n+1}\right|.$$

现在，我们运用三角不等式以及 U_k 的界 M，得到

$$|s_m(x)-s_n(x)|\leqslant M\sum_{k=n+1}^{m}|a_k-a_{k+1}|+M|a_{m+1}|+M|a_{n+1}|,$$

对 E 中的所有 x 成立. 由于对所有 k，有 $a_k\geqslant a_{k+1}\geqslant\cdots\geqslant 0$，所以上式的求和项不需要绝对值号. 然后，对嵌套级数 $\sum_{k=n+1}^{m}(a_k-a_{k+1})$ 求和，我们得到

$$|s_m(x)-s_n(x)|\leqslant M(a_{n+1}-a_{m+1})+M(a_{m+1}+a_{n+1})=2Ma_{n+1}. \tag{7}$$

因为 $a_{n+1}\to 0$，所以当 m，$n\to\infty$时，有 $|s_m(x)-s_n(x)|\to 0$，这就说明序列 $(s_n(x))$ 是柯西序列. 由完备性，$(s_n(x))$ 是收敛的. 令 $s(x)$ 为这个极限，在(7)式中令 $m\to\infty$，由于 $s_m(x)\to s(x)$，我们得

$$|s(x)-s_n(x)|\leqslant 2Ma_{n+1}$$

对 E 中所有 x 成立. 现在由假设，有 $a_{n+1}\to 0$，以及 $(s_n(x))$ 在 E 上一致收敛到 $s(x)$. ■

习题 2.10

1. 验证(4)和(6).
2. 利用(4)，证明定理 2 的(c)部分.

在习题 3～8 中，确定给定级数收敛的 x 值，验证你的答案.

3. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{\sqrt{k}}$.
4. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 3kx}{k^2}$.
5. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin kx}{\sqrt{k}}+\frac{\cos kx}{k^2}\right)$.
6. $\sum_{k=6}^{\infty}\frac{\cos kx}{k-5.}$
7. $\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\sin kx}{k-2}$.
8. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k+1)x}{k}$.
9. **正弦和发散.**

   (a)试证：对所有 $x\neq m\pi$，$\lim_{k\to\infty}\sin kx\neq 0$. [提示：如果 $\sin kx\to 0$，则 $\sin(k+1)x\to 0$. 展开 $\sin(k+1)x$，并运用 2.3 节习题 31.]

   (b)试证：对所有 $x\neq m\pi$，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx$ 发散.

10. **不能逐项微分的一致收敛级数.**

    (a)试证：级数

    $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}$$

    在区间 $[0.2,\pi/2]$ 上一致收敛，但是在此区间上不能逐项微分. [提示：见习题 9.]

    (b)给出另外一个不能逐项微分的一致收敛级数.

11. **不绝对收敛的一致收敛级数**. 在例 1 中，我们证明了级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{\sqrt{k}}$ 在区间[0.1,6] 上一致收敛.

(a) 试证:级数在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处不是绝对收敛.(因此,一个级数可能一致收敛,但是不绝对收敛.)

(b) 在区间[0.1,6] 上,找出另外一点,使得级数在该点不是绝对收敛.

(c) 试证:级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{\sqrt{k}}$ 在所有 x 处收敛. 记 $f(x)$ 为级数定义的 2π- 周期函数,判断 f 是否平方可积.[提示:帕塞瓦尔恒等式.]

12. (a)建立不等式

$$\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|\leqslant\frac{1}{\left|2\sin\frac{1}{2}x\right|}\quad(x\neq 2k\pi).$$

(b) 画出 $\frac{\pm 1}{2\sin\frac{1}{2}x}$ 和 $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx,n=1,2,\cdots,20$ 的图像,由图理解上述不等式.

(c) 对哪些 x,我们有 $\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|=\frac{1}{\left|2\sin\frac{1}{2}x\right|}$?[提示:求解 $\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|=1$.]

13. 由定理 2(c),对任意 $x\neq 2m\pi$,级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}$ 收敛. 画出几个部分和在区间 $0<x<2\pi$ 上的草图,并与函数 $\ln\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}\right)$ 的图像比较,你能得出什么结论?

14. **复级数的狄利克雷判别法**. 由定理 1 推导如下狄利克雷判别法则:假设 (a_k) 是正的且递减到零，且 (u_k) 是一数列(可能为复数)，级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k u_k$ 收敛,当且仅当存在数 M 使得 $\left|\sum_{k=0}^{n}u_k\right|\leqslant M$ 对所有 n 成立.

15. **专题问题：交错级数判别法的推广**.

(a)交错级数判别法的陈述：如果 (a_k) 是正的且递减到零，则 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ 收敛. 利用习题 14 证明这个判别法.[提示:取 $u_k=(-1)^k$,以及 $M=1$.]

(b) 证明如下形式的交错级数判别法:如果 (a_k) 是递减到零,则级数 $a_1+a_2-a_3-a_4+a_5+a_6-a_7-\cdots$(两项"+"号接两项"−"号)收敛.

100

(c) 按照(b) 中的方法,推广交错级数判别法.

专题问题:完成习题 16,以及 17 ~ 18 中的任一个.

16. **含有交错项的三角级数**. 证明定理 2 的如下变形.

假设 $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ 和 $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ 是递减到零的正数列,$E=[a,b]$ 是区间 $(-\pi,\pi)$ 的任意闭子区间,则

(a)**(一致收敛性)**级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k\cos kx$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k\sin kx$ 在 E 上一致收敛.

(b)**(逐点收敛性)**级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k\sin kx$ 对所有的 x 逐点收敛.

(c)**(逐点收敛性)**级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k\cos kx$ 在除去 $x=(2n+1)\pi,n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 外逐点收敛,在这些点处级数可能收敛或发散.

[提示:利用定理 2,注意到 $(-1)^k\sin kx=\sin k(x+\pi)$,以及 $(-1)^k\cos kx=\cos k(x+\pi)$.]

在习题 17 ~ 18 中,确定给定级数收敛的 x 值,验证你的答案.

17. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\sin kx}{k}$.

18. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\cos kx}{k}$.

专题问题:完成习题 19、20,以及 21 ~ 24 中的任一个.

19. **只含有偶数指标项的三角级数**. 证明定理 2 的如下变形. 假设$(a_k)_{k=1}^{\infty}$ 和$(b_k)_{k=1}^{\infty}$ 是递减到零的正数列,$E=[a,b]$ 是区间$(-\pi,\pi)$ 的任意闭子区间,则

 (a)(**一致收敛性**) 级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 2kx$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin 2kx$ 在 E 上一致收敛.

 (b)(**逐点收敛性**) 级数 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin 2kx$ 对所有的 x 收敛.

 (c)(**逐点收敛性**) 级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 2kx$ 在除去 $x=n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 外逐点收敛,在这些点处级数可能收敛或发散.[提示:利用定理 2,并作变量代换 $2x=u$.]

101

20. **只含有奇数指标项的三角级数**. 证明定理 2 的如下变形.

 假设$(a_k)_{k=1}^{\infty}$ 和$(b_k)_{k=1}^{\infty}$ 是递减到零的正数列,$E=[a,b]$ 是区间$(0,\pi)$ 的任意闭子区间,则

 (a)(**一致收敛性**) 级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(2k+1)x$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin(2k+1)x$ 在 E 上一致收敛.

 (b)(**逐点收敛性**) 级数 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin(2k+1)x$ 对所有的 x 逐点收敛.

 (c)(**逐点收敛性**) 级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(2k+1)x$ 在除去 $x=n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 外逐点收敛,在这些点处级数可能收敛或发散.

在习题 21 ~ 24 中,确定给定级数收敛的 x 值,验证你的答案.[提示:参考习题 19 和 20.]

21. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{k}$.

22. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{\sqrt{k}}$.

23. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{k}$.

24. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{k-1}$.

102

第3章　直角坐标中的偏微分方程

……偏微分方程是一切物理定理的基础. 在气体、液体和固体的声理论中, 在弹性研究中, 在光学中, ……偏微分方程表达了可以通过实践检验的基本自然法则.

——伯恩哈德·黎曼

综述 3.1和3.2节是导论性内容. 本章主要内容是3.3节, 因为该节包含了分离变量的一般方法. 3.3、3.5和3.8节运用了2.1～2.4节介绍的傅里叶级数基本理论. 3.6节讨论了热传导问题, 该问题将导出广义傅里叶级数, 这是本书中第一次提到这个概念. 3.7节是将3.3和3.5节内容推广到二维情形. 3.9～3.10节运用了二重傅里叶级数(3.7节), 以及拉普拉斯方程(3.8节). 3.11节包含了热传导方程和拉普拉斯方程的理论性质, 本节是自封的, 它建立在多元微积分基本结果的基础之上.

导读 本章的论题是本教材的核心内容. 通过应用, 我们所学的抽象理论就变得生动了, 你将会发现: 当利用分离变量法来求解偏微分方程时, 利用傅里叶级数(3.3和3.5节)或广义傅里叶级数(3.6节)来展开函数这个思想变得很自然. 本章的思想在以后几章中作进一步的延伸和拓展. 在偏微分方程基础课程中, 可以略去3.7～3.11节而不影响内容的连贯性.

本章中, 我们求解一些重要的偏微分方程, 它们都来源于含有多变量函数的物理模型. 本章绝大部分内容所基于的方法是所谓的分离变量法, 将在3.3节予以介绍. 这个强有力的方法可以使我们将新的多变量问题化为我们所熟悉的常微分方程. 它的成功源自函数可以用某些特殊函数展开成级数这个事实. 就是在这一点上, 我们关于傅里叶级数的知识可以派上用场. 3.9节介绍了特征函数展开法, 并利用它求解了许多无法直接运用分离变量法求解的问题. 3.10节讨论了具有新边界条件的二维问题, 即同时含有函数及其法向导数的罗宾条件, 综合前面几节所发展的工具, 我们解决这些问题. 热传导方程和拉普拉斯方程的解具有许多有趣的数学性质, 其中之一就是3.11节所介绍的最大值原理, 它是关于解的最大值和最小值的. 除了这些定性性质以外, 我们还将讨论边值问题解的唯一性.

3.1　物理学和工程技术中的偏微分方程

正如你所想, 在诸如机械或电子振动等物理现象建模过程中, 会自然产生常微分方程. 如果一个现象涉及多个自变量函数时, 就会导出偏微分方程. 就像我们在1.2节中所看到的, 偏微分方程出现在弦振动的研究中. 事实上, 正如本书其余部分所示, 偏微分方程是描述诸如膜、杆、板等力学、均匀物体中的热流、位势理论、电磁学、弹性力学等问题的基础. 这些方程的理论非常广泛, 涉及应用数学的许多领域. 本章我们研究几个重要的偏微分方程及其经典应用. 为求解这些方程, 在3.3节我们介绍所谓的分离变量法, 这个方法自然导出用傅里叶展

开表示的解，傅里叶展开对这个方法的实现起着极其重要的作用．我们从本书将要遇到的一些标准方程开始．

例 1　经典偏微分方程

令 u 为两个或多个自变量——(时间)t、(空间坐标)x 和 y 的函数．下面是本书将要学习的偏微分方程：

(a) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$　　(一维波动方程)

(b) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$　　(二维波动方程)

(c) $\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$　　(一维热传导方程)

(d) $\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$　　(二维热传导方程)

(e) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$　　(二维拉普拉斯方程)

(f) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,\ y)$　　(二维泊松方程)

(g) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial u}{\partial t}+Au=0$　　(电报方程)

(h) $\mathrm{i}\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+V(x)\psi$　　(一维薛定谔方程) ■

上面的大部分方程中都出现表达式$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，它及其高维对应式称为 u 的**拉普拉斯算子**，记为 Δu 或者$\nabla^2 u$．

偏微分方程的**阶**是方程中所出现导数的最高阶数．方程称为**线性的**，如果它关于未知函数及其偏导数都是一次的，且在方程的任意一项中至多出现一个；否则，方程称为**非线性的**．例 1 中的微分方程都是二阶线性的，但是二阶方程 [104]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x$$

是非线性的，因为 $u\frac{\partial u}{\partial x}$项同时包含了 u 和$\frac{\partial u}{\partial x}$两项．

为简化记号，经常用下标表示偏导数，例如，$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}$，$u_y=\frac{\partial u}{\partial y}$，$u_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$等等．利用这个记号，我们将**含两个自变量的二阶线性偏微分方程的一般形式**写为

$$\boxed{Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G,}\tag{1}$$

其中 A，B，C，D，E，F，G 是 x 和 y 的函数．方程称为**齐次的**，如果 $G=0$．我们将总是假设 u 是非常好的函数，其阶数小于或等于方程阶的混合偏导数是相等的(如 $u_{xy}=u_{yx}$，$u_{xxy}=u_{xyx}=u_{yxx}$等)，因此，在(1)中，我们不需要显式地写出 u_{yx}项．一般而言，其非零项含有未知

函数或它的偏导数的线性偏微分方程是**齐次的**，否则，线性方程是**非齐次的**. 例 1 中，除了泊松方程，其他都是齐次的.

在对物理问题建模过程中，经常得到一个微分方程，以及一组表述解在所考虑区域边界上性态的方程，这些方程称为**边界条件**. 为表述一个物理现象，可能还需要其他方程，如解在时刻 $t=0$ 的初始值或**初始条件**. 带有边界和初始条件的偏微分方程称为**初边值问题**或**边值问题**.(在 1.2 节，弦振动的例题中我们已经用到这些概念.)线性性和齐次性等概念同样可以推广到初边值条件中，例如，初始条件 $u(x, 0)+u_x(x, 0)=0$ 是线性齐次条件，而条件 $u(x, 0)+u_x(x, 0)=1$ 是线性的，但非齐次.

与常微分方程情形一样，我们有如下的有用结果，其证明留作习题.（与附录 A.1 定理 4 比较.）

105

定理 1(叠加原理) 如果 u_1 和 u_2 是线性齐次偏微分方程的解，则任意线性组合 $u=c_1u_1+c_2u_2$ 也是解，其中 c_1 和 c_2 是常数. 进一步地，如果 u_1 和 u_2 满足一个线性齐次边界条件，则 $u=c_1u_1+c_2u_2$ 也满足.

例 2 解的叠加

考虑二维拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

这是一个二阶线性齐次方程.（它具有形式(1)，取 $A=C=1$，以及 $B=D=E=F=G=0$.）代入方程直接验证，函数

$$u=x+y,\quad u=x^2-y^2,\quad u=\frac{x}{x^2+y^2},\quad u=\frac{y}{x^2+y^2},\quad u=\ln(x^2+y^2),\quad u=e^x\sin y$$

都是解. 事实上，有更多的函数满足拉普拉斯方程，习题中给出了一些例子，这些函数称为**调和函数**. 因此，与二阶线性常微分方程(其通解可以表达成两个函数的线性组合)不同，一个线性偏微分方程可以有无穷多组不相关(线性无关)的解. 叠加原理在产生新解时特别有用，例如我们可以通过上面所列解的线性组合来得到拉普拉斯方程的解，一个特例是函数 $(x+2y)/(x^2+y^2)$. ■

在试图叠加解之前，必须验证方程是线性齐次的. 下例表明：当方程不是线性时，叠加原理会失效.

例 3 叠加原理的失效

一阶方程

$$u_t+uu_x=0 \tag{2}$$

是非线性的，因为有 uu_x 项. 就像我们在 1.1 节所做(参考下面习题中有关非线性方程的部分)，可以用特征线法来求解. 代入(2)式，可以验证

$$u(x,t)=\frac{x}{t+1}$$

是解. 但是，立刻可以看出，除非 $c=1$ 或 $c=0$，这个解的标量倍数

$$\frac{cx}{t+1}$$

都不是(2)的解，因此，如果方程不是线性的，定理 1 就会失效. ■ 106

下节将介绍建模技巧，并说明本节所遇到的方程如何在应用中产生，我们的重点将是波动方程.

习题 3.1

在习题 1～6 中，确定给定的偏微分方程、边界或初始条件是线性的还是非线性的；如果是线性的，是齐次的还是非齐次的；并确定偏微分方程的阶.

1. $u_{xx}+u_{xy}=2u$，$u_x(0, y)=0$.
2. $u_{xx}+xu_{xy}=2$，$u(x, 0)=0$，$u(x, 1)=0$.
3. $u_{xx}-u_t=f(x, t)$，$u_t(x, 0)=2$.
4. $u_{xx}=u_t$，　$u(x, 0)=1$，　$u(x, 1)=0$.
5. $u_t u_x+u_{xt}=2u$，　$u(0, t)+u_x(0, t)=0$.
6. $u_{xx}+e^t u_{tt}=u\cos x$，　$u(x, 0)+u(x, 1)=0$.
7. 验证：给定函数是二维拉普拉斯方程的解.

 (a) $u=x+y$.　(b) $u=x^2-y^2$.

 (c) $u=\frac{x}{x^2+y^2}$.　(d) $u=\frac{y}{x^2+y^2}$.

 (e) $u=\ln(x^2+y^2)$　(f) $u=e^y\cos x$.

 (g) $u=\ln(x^2+y^2)+e^y\cos x$.　(h) $u=e^y\cos x+x+y$.

8. 验证：函数

$$u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

是三维拉普拉斯方程

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$$

的解.

9. 考虑二阶线性齐次偏微分方程的一般形式

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=0.$$

 (a) 试证：函数 $u(x, y)=e^{ax}e^{by}$ 是解，当且仅当 a 和 b 满足方程

$$Aa^2+2Bab+Cb^2+Da+Eb+F=0.$$

 (b) 求出方程

$$u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+2u_x+2u_y+u=0$$

 的至少四个解.

10. **电报方程**

$$u_{tt}+2Bu_t-c^2u_{xx}+Au=0$$

控制沿电缆传输的电流. 假设 $c>0$ 和 $A>0$，利用习题 9，求出两个解.

11. **二阶线性方程的分类**. 含两个自变量的二阶线性偏微分方程，写成形式(1)，称为**椭圆型的**，如果 $AC-B^2>0$；**双曲型的**，如果 $AC-B^2<0$；**抛物型的**，如果 $AC-B^2=0$；按照这个定义将例 1 中的方程(a)、(c)、(e)、(f)和(g)作分类(如果方程含有 t，将 t 看成方程(1)中的 y). 107

专题问题：一阶非线性方程．这些方程在交通流、冲击波、冲破障碍的声波以及应用数学的其他许多分支的建模中起着非常重要的作用．在习题12～14中将研究非线性方程

$$u_t + A(u)u_x = 0, \quad \text{带有初始条件} \quad u(x,0) = \phi(x), \tag{3}$$

其中$A(u)$是u的函数．当$A(u)=u$时，(3)就化为例3中的方程．

12. 添加尽可能多的细节，重写(3)的如下求解过程，这个求解是建立在1.1节的特征线法基础上的．

步骤1：将(3)解释成方向导数，从而得出$u(x(t),\ t)$在曲线$x=x(t)$上取常值，其方向场由下式给出：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(u(x(t),t)).$$

这就是(3)的特征线．

步骤2：令$x(t)$表示特征线((4)的解)．由于u沿着$(x(t),\ t)$取常值，因此由(3)得$u(x(t),\ t)=u(x(0),\ 0)=\phi(x(0))$，从而$A(u(x(t),\ t))$是常值，且等于$A(\phi(x(0)))$．由(4)式，我们得出结论：这些特征线就是斜率为$A(\phi(x(0)))$的直线，我们将这些直线写成

$$x = tA(\phi(x(0))) + x(0).$$

步骤3：从上式求出$x(0)$，因而得到特征线的一个隐式关系式，比如$L(x,\ t)=x(0)$，这样就完成了(3)的求解．(3)的最终解可以表示成如下形式：$u(x,\ t)=f(L(x,\ t))$，其中f是某个取定函数，以满足(3)中的初始条件，即$f(L(x,\ 0))=\phi(x)$．

作为这个方法的一个示例，我们来求解(2)，带有初始条件$u(x,\ 0)=x$．此时，$A(u)=u$，以及$\phi(x)=x$．由步骤2，特征线形如$x=tx(0)+x(0)$，解出$x(0)$，得$x(0)=\frac{x}{t+1}$，从而得到隐式关系式$L(x,\ t)=\frac{x}{t+1}$．因此，解为

$$u(x,t) = f\left(\frac{x}{t+1}\right).$$

令$t=0$，并利用初始条件，我们得到$f(x)=x$，这就得到解为$u(x,\ t)=\frac{x}{t+1}$．直接代入方程可以验证这是解．

在习题13～17中，利用习题12的方法，求解给定的非线性问题．

13. $u_t+\ln(u)u_x=0$，$u(x,\ 0)=\mathrm{e}^x$．
14. $u_t+(u+1)u_x=0$，$u(x,\ 0)=x^2$．

[提示：在步骤2中确定$L(x,\ t)$时，你将有两个可能的选择，选取那个满足$\lim\limits_{t\to 0}u(x,\ t)=u(x,\ 0)=x^2$的．]

15. $u_t+(2+u)u_x=0$，$u(x,\ 0)=x^2$．[提示：参见习题14的提示．]
16. $u_t+u^2u_x=0$，$u(x,\ 0)=x$．
17. $u_t+u^2u_x=0$，$u(x,\ 0)=\sqrt{x}$，$x>0$．

3.2 建模：弦振动和波动方程

本节我们推导控制弦振动的方程，正如你的猜测，我们的目标是导出1.2节曾简单研究过的一维波动方程．

考虑一根长度为L、两端分别固定在x轴上$x=0$和$x=L$处张紧的弦．假设弦被拉离其平衡位置、然后释放而产生振动，并假设弦只在一个固定平面内振动，令$u(x,\ t)$为弦在时刻$t\geqslant 0$、位置x处的横向位移．特别地，$u(x,\ 0)$表示弦的初始形状(见图1)．我们期望通过求

解 $u(x, t)$在 $t>0$ 和 $0<x<L$ 时的取值来确定弦随后的运动. 为达到此目的，本节推导出 u 所满足的偏微分方程；下节通过求解带有适当条件的偏微分方程来确定 u.

在研究中，我们作了如下并非远离现实的假设，比如考虑拉紧的吉他弦.

1. 弦具有常数质量密度 ρ(均质弦).

2. 弦是完全弹性的，没有弯曲阻力.

3. 弦只在横向上运动(这蕴涵着水平方向上的张力分量在所有点处都是相等的). 弦的横向振动很微小，且只在包含 x 轴的 xu 平面内发生振动. 同时，弦在任意一点处的斜率$\partial u/\partial x$ 也很小.

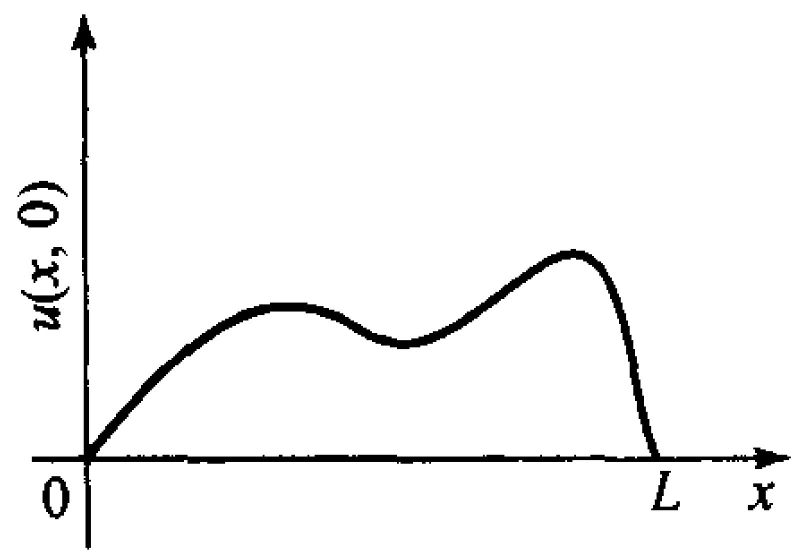


图 1 弦的初始形状，$u(x, 0)$

弦自由振动的建模

首先，我们分析弦上没有受到外力作用且弦的重量与张力相比较可以忽略的情形，因此在第一个实验中，作用在弦上唯一有意义的力就是其张力. 令 τ 表示在平衡位置时的张力大小，这个张力在弦的所有位置都是相同的，并且由于弦在运动时产生的长度改变可以忽略，因此有理由假设张力在弦的整个运动过程中都没有改变. 同时，由于弦没有弯曲阻力，张力在每一点处与弦相切.

考虑介于分别位于 x 和 $x+\Delta x$ 处的 A 点和 B 点之间的那一小段弦，令 τ_1 和 τ_2 分别表示 A 点和 B 点的张力(这是弦分别从左端点和右端点对这小段弦所施加的力)，则 τ_1 和 τ_2 都具有大小 τ，但一般而言，方向不同(图 2a). 由于水平方向没有运动，所以我们只需考虑张力在垂直方向上的分量.

109

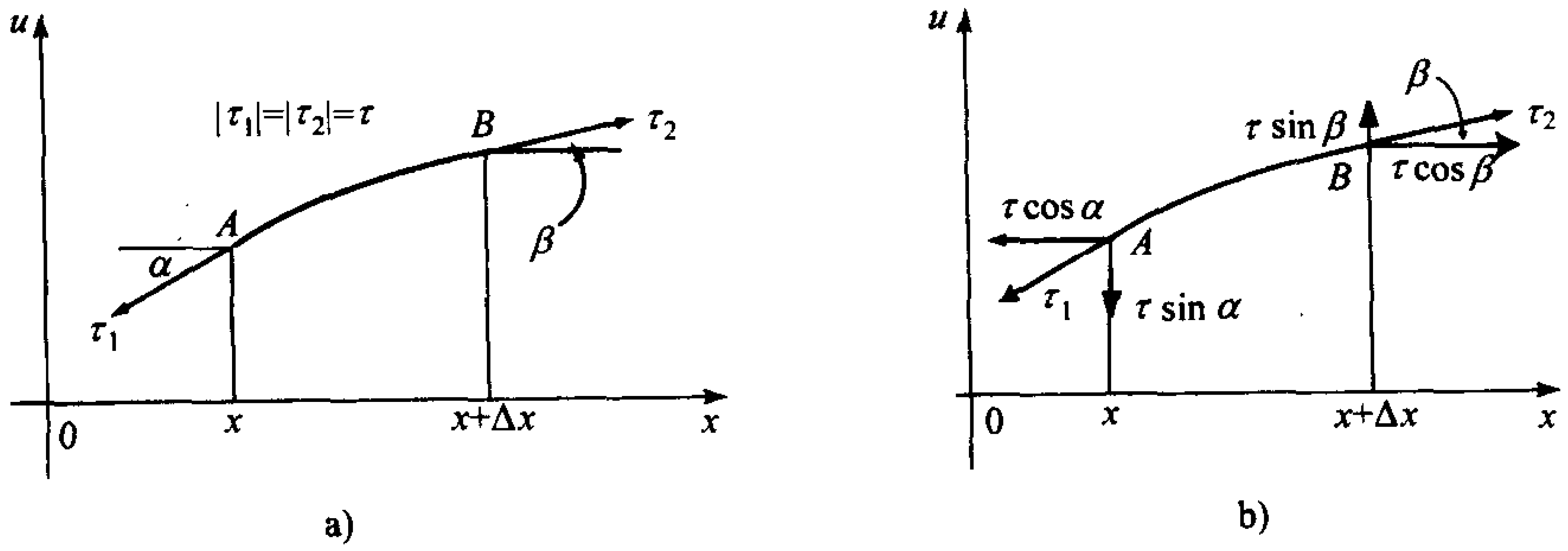


图 2 作用在小段弦上的力

张力的垂直分量为$-\tau\sin\alpha$ 和 $\tau\sin\beta$，其中 α 和 β 是在 A 点和 B 点处切线与水平线所产生的夹角(图 2b). 将牛顿第二定律应用到张力的垂直分量上，得到

$$-\tau\sin\alpha+\tau\sin\beta=ma,$$

其中 m 是介于 x 和 $x+\Delta x$ 之间那段弦的质量，a 是其加速度. 我们有 $a=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$和 $m=\rho\Delta x$，其中 ρ 表示弦的质量密度(即单位长度的质量). 因此

$$-\tau\sin\alpha+\tau\sin\beta=\rho\Delta x\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1}$$

注意到，对很小的 θ，由于 $\cos\theta$ 接近于 1，则 $\sin\theta$ 接近于 $\tan\theta$. 所以(1)式中，可以将正弦替换为正切，得到

$$-\tau\tan\alpha+\tau\tan\beta=\rho\Delta x\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{2}$$

固定时刻 t，视 $u(x,t)$ 仅为 x 的函数. 由于 $u(x,t)$ 图像切线的斜率是 $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$，我们得到

$$\tan\alpha=\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \quad 和 \quad \tan\beta=\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t).$$

代入(2)，我们得到

$$\tau\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]=\rho\Delta x\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)}{\Delta x}=\frac{\rho}{\tau}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，方程左端的商趋近于 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$，从而我们得到弦自由振动的**一维波动方程**

110

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},} \tag{3}$$

其中记

$$\boxed{c^2=\frac{\tau}{\rho}.} \tag{4}$$

注意，c 表示速度，因为 τ 的单位是质量·长度/时间^2，而 ρ 的单位是质量/长度，因此 c^2 的单位是长度^2/时间^2.

受迫振动情形

如果有另外的横向力作用在弦上(由于其自身重量或者其他外力)，令 $F(x,t)$ 表示单位长度上沿 u 方向上的外力. 为推导此时的偏微分方程，我们要做的只是在(2)的左端加上外力 $F(x,t)\Delta x$. 然后，再像前面所做，我们得到弦的**受迫振动方程**：

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{F(x,t)}{\rho}.} \tag{5}$$

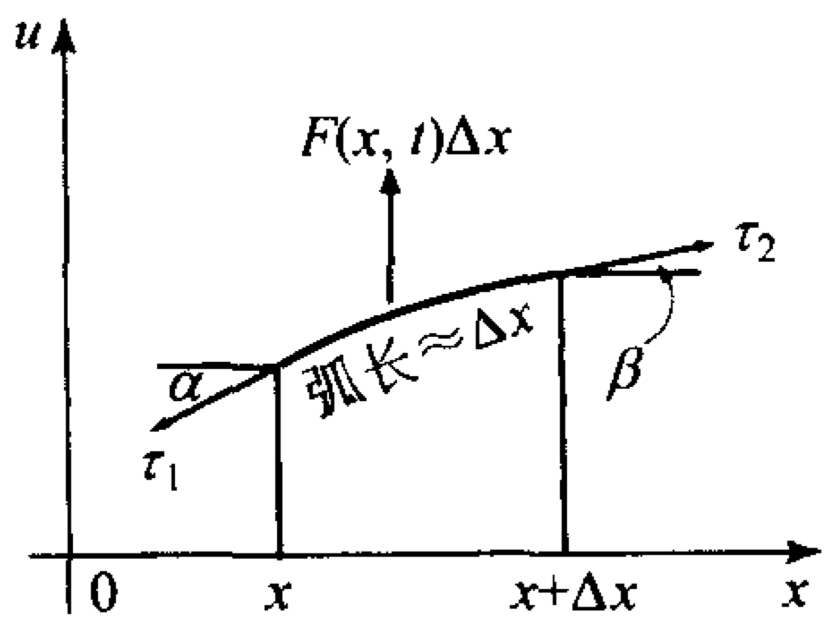


图 3 受迫振动的受力图

(5)式的两个特殊情形特别有趣. 当外力只是重力加速度 g (考虑水平放置的弦)时，则方程变为

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-g.} \tag{6}$$

当外力是与瞬时速度成正比的阻力(比如，在流体中的弦振动)时，方程变为

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2k\,\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},} \tag{7}$$

其中 k 是正常数.

在习题中，运用本节的建模思想，我们将推导出各种经典的偏微分方程.

习题 3.2

在习题 1～4 中，推导出满足给定条件的张紧均质弦的振动方程.

1. 除张力外，不考虑其他外力，线密度是 10^{-3}kg/m，而 $\tau=100$N.
2. 与习题 1 一样，不过要考虑重量.
3. 除张力外，不考虑其他外力，弦长度为 1m，质量为 10^{-2}kg，张力为 $\tau=10$N.
4. 与习题 3 一样，不过要考虑重量.
5. 给出(5)、(6)和(7)的详细推导过程.
6. **悬链**. 本题推导描述长度为 L 悬链振动的偏微分方程. 为方便起见，x 轴为垂直的，且正方向为向上的，链的固定端点在 $x=L$ 处. 令 $u(x, t)$ 表示链的偏斜，假设偏斜只发生在(x, u)平面内，如图所示；而 ρ 表示链的质量密度(单位长度上的质量).

   (a)试证：在平衡位置，点 x 处的张力是 $\tau(x)=\rho gx$，其中 g 是重力加速度.

   (b)利用方程(1)和(2)的推理，试证：

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\tau(x+\Delta x)\sin\beta-\tau(x)\sin\alpha,$$

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{\Delta x}\left[\tau(x+\Delta x)\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)-\tau(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right].$$

   (c)令 $\Delta x\to 0$，得到

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\tau(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right],$$

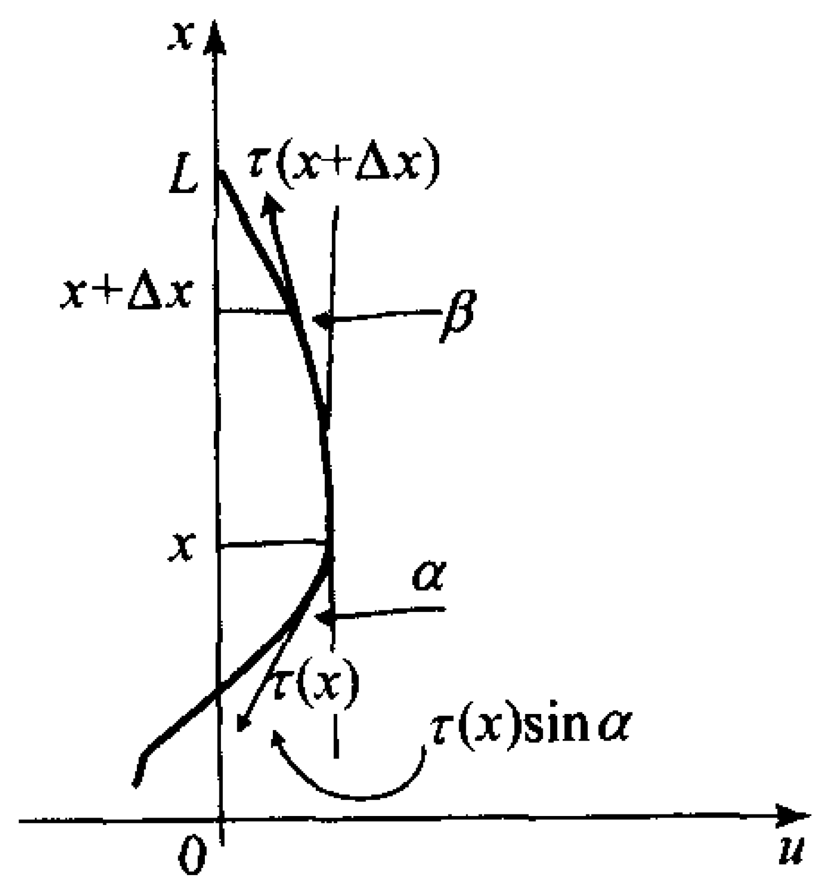
   从而，最终得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=g\left(x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

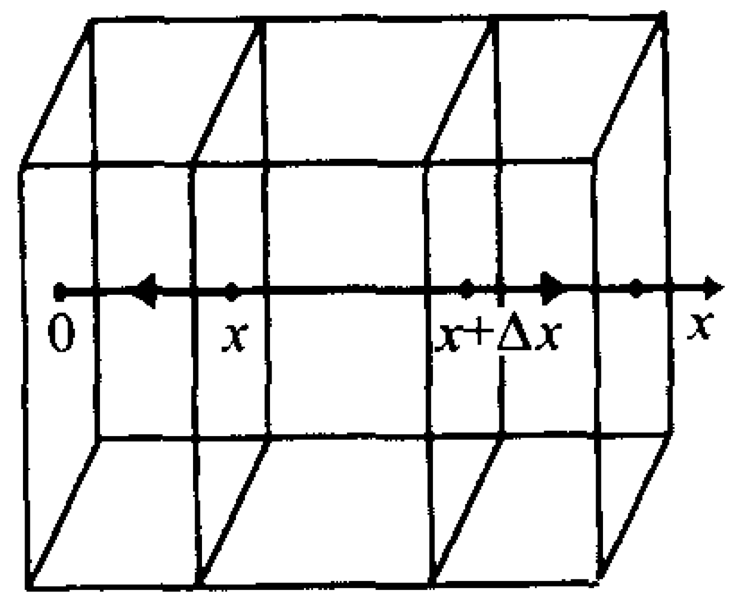
   通过求解满足初始边界条件的方程，可以完全确定链的运动. 我们将在 6.3 节求解.

7. **弹性棒的纵振动**. 一根弹性棒沿 x 轴放置，一端固定在原点. 在每一横截面上的、沿 x 轴方向的位移引起棒在与 x 轴平行方向上的振动. x 处的横截面在时刻 $t>0$ 的纵向位移 $u(x, t)$ 由初始位置 $u(x, 0)$ 确定. 考虑介于 x 和 $x+\Delta x$ 之间的那段棒，令 $F(x, t)$ 为 t 时刻作用在 x 处那段棒上的外力. 实验显示

$$F(x,t)=-AEu_x(x,t),$$



习题 6 的图



习题 7 的图

112

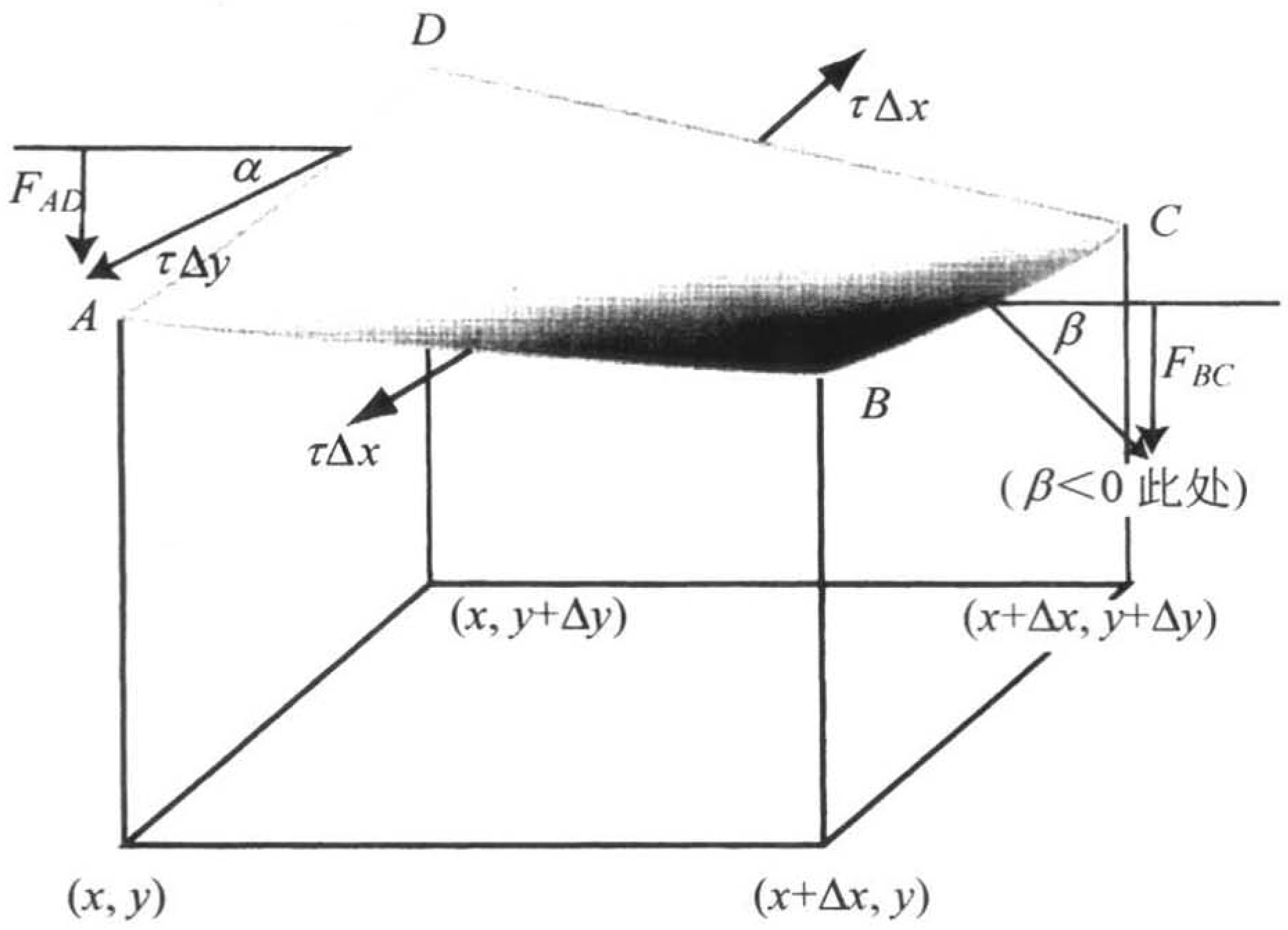
其中 A 是横截面的面积，E 是正常数，称为**杨氏弹性模量**. 令 ρ 表示棒的密度(单位体积的质量).

(a)由牛顿第二定律，推导方程：

$$\rho A\Delta x u_{tt}(x,t)=-AEu_x(x,t)+AEu_x(x+\Delta x,t).$$

(b)试证：弹性棒的纵振动由波动方程 $u_{tt}=c^2u_{xx}$ 来控制，其中 $c^2=\dfrac{E}{\rho}$.

8. **矩形薄膜的自由横振动**. 考虑边界固定在水平框上的矩形均质弹性薄膜. 在对薄膜加以理想条件下，我们可以推导出控制其微小振动的方程. 假设薄膜上每一点处的振动只在垂直方向上，且薄膜没有弯曲阻力. 我们还假设在任何时刻薄膜上的张力为常数. 令 $u(x,\ y,\ t)$表示薄膜在 t 时刻$(x,\ y)$点处的垂直位移. 如图所示，考虑薄膜表面上的一小部分 $ABCD$. 我们来确定这部分所受的力，由于这块内部的张力相互平衡，我们只需考虑沿着四条边上的张力. 沿着某条边，张力产生一个与这条边垂直、和薄膜相切、方向向外的净力. 我们集中考虑 AB 边.



$$F_{AD}\approx\tau\Delta y\sin\alpha\approx\tau\Delta y\tan\alpha\approx-\tau u_x(x,y,t)\Delta y$$

$$F_{BC}\approx\tau\Delta y\sin\beta\approx\tau\Delta y\tan\beta\approx\tau u_x(x+\Delta x,y,t)\Delta y$$

这条边上的净力大小为 $\tau\Delta x$，其中 τ 是单位长度的张力，在图中我们画出这个向量，以及其他三条边上的相应向量.

(a)试推导：AB 和 CD 边上张力垂直分量的合力近似为

$$\tau u_y(x,y+\Delta y,t)\Delta x-\tau u_y(x,y,t)\Delta x;$$

而 AD 和 BC 边上张力垂直分量的合力近似为

$$\tau u_x(x+\Delta x,y,t)\Delta y-\tau u_x(x,y,t)\Delta y.$$

113

[提示：见图，并参考弦振动的建模过程.]

(b)假设在薄膜的运动中，除张力外，不考虑其他力，由牛顿第二定律推导

$$\tau(u_y(x,y+\Delta y,t)-u_y(x,y,t))\Delta x+\tau(u_x(x+\Delta x,y,t)-u_x(x,y,t))\Delta y$$
$$=\Delta x\Delta y\rho u_{tt}(x,y,t)$$

其中 ρ 是薄膜的质量密度(单位面积的质量). 推导薄膜自由振动的**二维波动方程**：

$$u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy}),\quad 其中\ c^2=\frac{\tau}{\rho}.$$

(这个方程将在 3.7 节讨论.)

9. **矩形薄膜的受迫横振动**.

(a)试证：如果作用在薄膜单位面积上的横向外力由 $F(x,\ y,\ t)$给出，则薄膜受迫横振动的方程为

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) + \frac{F}{\rho}, \quad \text{其中} \quad c^2 = \frac{\tau}{\rho}.$$

(b)如果唯一外力是重力，试证：方程变为

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) - g,$$

其中 g 是重力加速度.

3.3 一维波动方程的求解：分离变量法

在 1.2 节，我们对(两端点固定的)弦的振动问题作了初步研究，本节运用分离变量法，给出具有任意初始位置(位移)和速度时这个问题的完整解答，即求解描述端点固定的弦振动的波动方程的边值问题. 假设弦沿 x 轴张紧放置，端点分别固定在 $x=0$ 和 $x=L$ 处(图 1). 令 $u(x, t)$表示弦在 t 时刻 x 点处的位置，由前一节，我们知道 u 满足**一维波动方程**：

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, t > 0.} \tag{1}$$

为求出 u，我们将求解这个方程，其**边界条件**为

$$\boxed{u(0,t) = 0 \quad \text{和} \quad u(L,t) = 0 \text{ 对所有 } t > 0,} \tag{2}$$

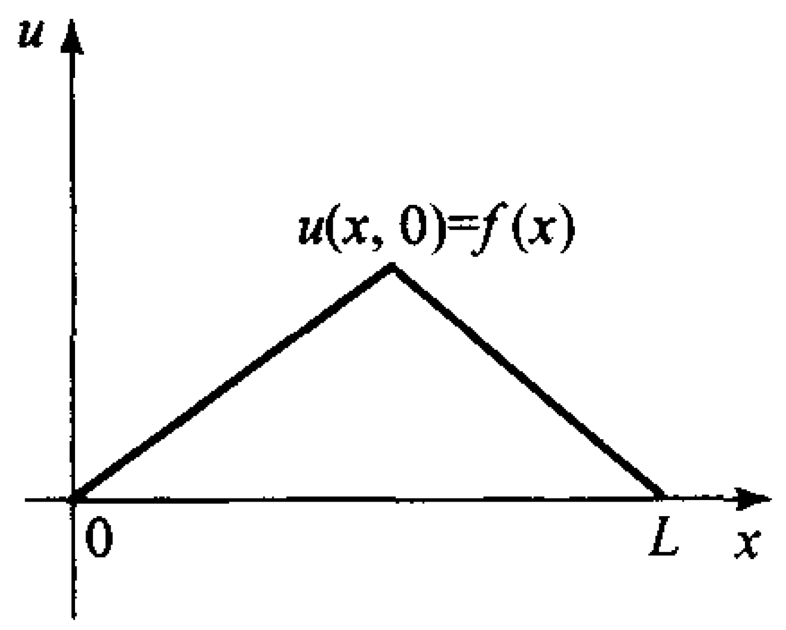


图 1 张紧弦的初始形状，$u(x, 0)$

114

初始条件为

$$\boxed{u(x,0) = f(x) \quad \text{和} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \text{ 当 } 0 < x < L.} \tag{3}$$

边界条件说明弦的端点在任何时刻都固定，而初始条件给出弦的初始形状 $f(x)$，以及其初始速度 $g(x)$.

我们将给出这个问题的两个解，一个是基于所谓的**分离变量法**，这个非常有力的方法将用来求解本书中的许多偏微分方程；另一个解是由达朗贝尔发现的，用闭形式来表达 u，从而得到一些用行波来表示的有趣几何解释，下节将介绍这种方法.

为揭示分离变量法的主要思想，我们将求解过程分解成三个基本步骤.

步骤 1：在(1)和(2)中分离变量

首先，我们求出(1)的形如

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{4}$$

的非零**乘积解**，其中 $X(x)$只是 x 的函数，而 $T(t)$只是 t 的函数. 问题就化为求解 X 和 T，对(4)作关于 t 和 x 的微分，得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = XT'' \quad \text{和} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T.$$

代入(1)式，得到

$$XT'' = c^2 X''T,$$

再除以 c^2XT，得到

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X}. \tag{5}$$

(不用担心 XT 为 0，我们将继续这种形式求解过程.)在方程(5)中，变量是**分离的**，因为方程

115

左边只是 t 的函数，而右端只是 x 的函数. 由于 t 和 x 是相互独立的，要得到等式的唯一方法是(5)式两端为常数且相等，所以

$$\frac{T''}{c^2 T} = k \quad 和 \quad \frac{X''}{X} = k,$$

其中 k 是任意常数，称为**分离常数**. 我们将变量分离的方程写成如下两个常微分方程：

$$X'' - kX = 0 \tag{6}$$

和

$$T'' - kc^2 T = 0. \tag{7}$$

这样，我们得到了两个常微分方程来替代我们原先的偏微分方程，这是分离变量法的要点. 但是，这两个方程通过常数 k 而耦合在一起，因此并不是相互独立的. 我们下一步是在边界条件(2)中分离变量. 利用(4)式和边界条件，得到

$$X(0)T(t) = 0 \quad 和 \quad X(L)T(t) = 0, \quad 对所有\ t > 0.$$

如果 $X(0) \neq 0$ 或 $X(L) \neq 0$，则对所有 t，$T(t)$必须为 0，因此由(4)，u 恒等于零. 为避免这个平凡解，令

$$X(0) = 0 \quad 和 \quad X(L) = 0.$$

因此我们得到 X 的边值问题：

$$\boxed{X'' - kX = 0, \quad X(0) = 0 \quad 和 \quad X(L) = 0.}$$

正如下一步骤所发现的，并不是所有的分离常数 k 都能导出 X 的非平凡解. 我们的讨论将涉及简单的二阶线性常系数常微分方程的求解，关于这个专题综述请参看附录 A.2.

步骤 2：求解变量分离的方程

首先，我们求解 X 的方程，因为它带有边界条件，而 T 的方程没有，边界条件可以将解的范围缩小.

如果 k 是正的，比如 $k=\mu^2$，$\mu>0$，则 X 的方程变为

$$X'' - \mu^2 X = 0,$$

其通解为

$$X(x) = c_1 \cosh\mu x + c_2 \sinh\mu x$$

116

(参看附录 A.2 例 1). 我们现在说明：X 满足其边界条件的唯一方法就是选取 $c_1=c_2=0$. 事实上，$X(0)=0$ 蕴涵着 $0=c_1\cosh(0)+c_2\sinh(0)=c_1$，因此得 $X(x)=c_2\sinh\mu x$. 条件 $x(L)=0$ 蕴涵着 $c_2\sinh(\tilde{\mu}L)=0$，但是 $\mu L\neq 0$，即 $\sin\mu L\neq 0$，因此 $c_2=0$，即得 $X=0$. 因此，$k>0$ 情形只导出平凡解.

类似地，当 $k=0$ 时，微分方程化为 $X''=0$，其通解为 $X(x)=c_1x+c_2$. X 满足其边界条件的唯一方法就是选取 $c_1=c_2=0$，这又将导出平凡解 $u=0$. 所以，唯一剩下的可能是

$$\boxed{k = -\mu^2 < 0.}$$

相应于 X 的边值问题是

$$X'' + \mu^2 X = 0, \quad X(0) = 0 \quad 和 \quad X(L) = 0.$$

微分方程的通解为

$$X = c_1 \cos\mu x + c_2 \sin\mu x.$$

条件 $X(0)=0$ 蕴涵着 $c_1=0$，因此 $X=\sin\mu x$；条件 $X(L)=0$ 蕴涵着

$$c_2 \sin\mu L = 0.$$

为避免平凡解 $X=0$，取 $c_2=1$（取 $c_2=1$，这只是为了方便起见，任何其他非零值均可），得到

$$\sin\mu L = 0.$$

由于正弦函数在 π 的整数倍处为零，我们得到

$$\mu = \mu_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

因此

$$X = X_n = \sin\frac{n\pi}{L}x, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

注意到，对 n 的负值情形，我们得到了一个相同的解，只差一个符号. 因此，不失一般性，舍去对应于负 n 的解.

现在，回到(7)式，代入 $k=-\mu^2=-(\frac{n\pi}{L})^2$，得到

$$\boxed{T'' + \left(c\frac{n\pi}{L}\right)^2 T = 0.}$$

[117]

方程的通解是

$$T_n = b_n \cos\lambda_n t + b_n^* \sin\lambda_n t,$$

其中我们令

$$\boxed{\lambda_n = c\frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \cdots.}$$

像(4)式那样将 X 和 T 的解结合起来，我们得到(1)式的一组无穷多个满足边界条件(2)的乘积解：

$$\boxed{u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi}{L}x(b_n\cos\lambda_n t + b_n^*\sin\lambda_n t), \quad n = 1, 2, \cdots.}$$

这就是波动方程的**正规波型**（见 1.2 节），这些解的物理意义在本节末讨论.

由于所有正规波型都满足线性齐次方程(1)和边界条件(2)，由叠加原理(3.1 节定理 1)，其任意线性组合都满足(1)和(2). 但是不难发现：如此线性组合，一般而言，可能不满足初始条件(3). 因此，受叠加原理启发，自然要尝试"无穷"线性组合

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{L}x(b_n\cos\lambda_n t + b_n^*\sin\lambda_n t)$$

作为边值问题(1)～(3)的解.

步骤 3：整个问题的傅里叶级数解

为彻底解决我们的问题，我们必须确定未知系数 b_n 和 b_n^*，以使函数 $u(x, t)$满足初始条

件(3). 以(3)中第一个条件开始，在无穷级数解 u 中令 $t=0$，得到

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{L}x,\quad 0<x<L.$$

右端的级数是 f 的半幅正弦级数展开式，因此由 2.4 节公式(4)，得到正弦系数 b_n 为

118

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

类似地，由(3)中的第二个初始条件，我们确定 b_n^*. 对 u 的级数关于 t 逐项微分，并令 $t=0$，得到

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n^*\lambda_n\sin\frac{n\pi}{L}x.$$

由于这是 g 的半幅正弦展开式，所以我们得

$$b_n^*\lambda_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

解出 b_n^*，并代入 λ_n 的值，得到

$$b_n^*=\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

这样，我们确定出了解 u 的级数表达式中的所有未知系数. 我们将上面所得到的总结如下.

一维波动方程的解 一维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<L,t>0,$$

带有边界条件

$$u(0,t)=0\quad 和\quad u(L,t)=0\ 对所有\ t>0$$

以及初始条件

$$u(x,0)=f(x)\quad 和\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)\quad 对\quad 0<x<L$$

的解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{L}x(b_n\cos\lambda_n t+b_n^*\sin\lambda_n t),\tag{8}$$

其中

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x,\quad b_n^*=\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x,\tag{9}$$

以及

119

$$\lambda_n=c\frac{n\pi}{L},\quad n=1,2,\cdots.\tag{10}$$

例 1 端点固定张紧弦的振动

长度为 $L=1$ 的张紧弦端点固定在 $x=0$ 和 $x=1$ 处，弦的初始形状(见图 2)是由函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{10}x & 如果\ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{3},\\[2ex] \dfrac{3(1-x)}{20} & 如果\ \dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

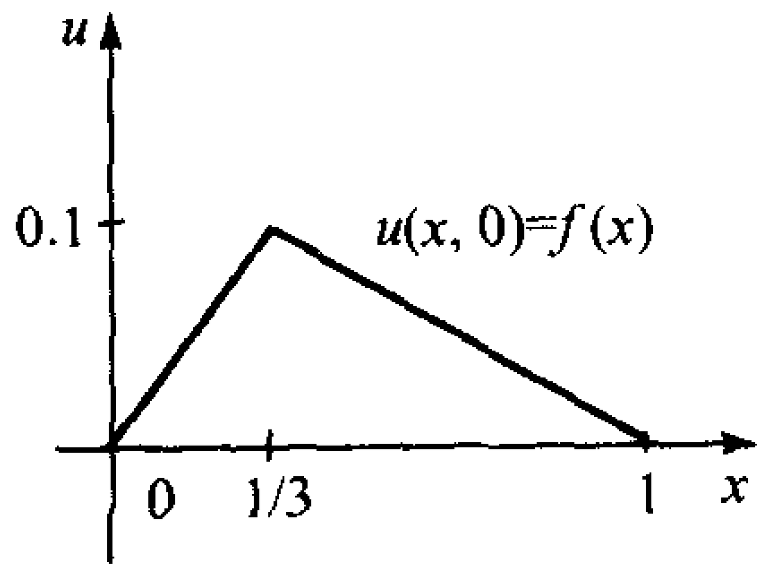


图 2 例 1 中弦的初始形状

所确定的三角形，弦自静止释放，开始振动，确定弦的随后运动，$c=1/\pi$.

解 由于 $g(x)=0$，我们有 $b_n^*=0$. 利用(9)式，并分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}b_n &= 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x\\ &= \frac{3}{5}\int_0^{1/3} x\sin n\pi x\mathrm{d}x + \frac{3}{10}\int_{1/3}^1 (1-x)\sin n\pi x\mathrm{d}x\\ &= -\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{5n\pi} + \frac{3}{5}\frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2\pi^2} + \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{5n\pi} + \frac{3}{10}\frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2\pi^2}\\ &= \frac{9}{10\pi^2}\frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2}.\end{aligned}$$

由(10)，得 $\lambda_n=n$. 将所有这些代入(8)式，我们得到解

$$u(x,t) = \frac{9}{10\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2}\sin n\pi x\cos nt.$$

对固定的 t 值，画出 $u(x,t)$ 的图像，我们得到弦在此刻的形状. 其近似图像可以由仅画出级数部分和的图像得到. 正如所料，当 $t=0$ 时，我们得到弦的初始形状由函数 $f(x)$ 给出(见图 3).

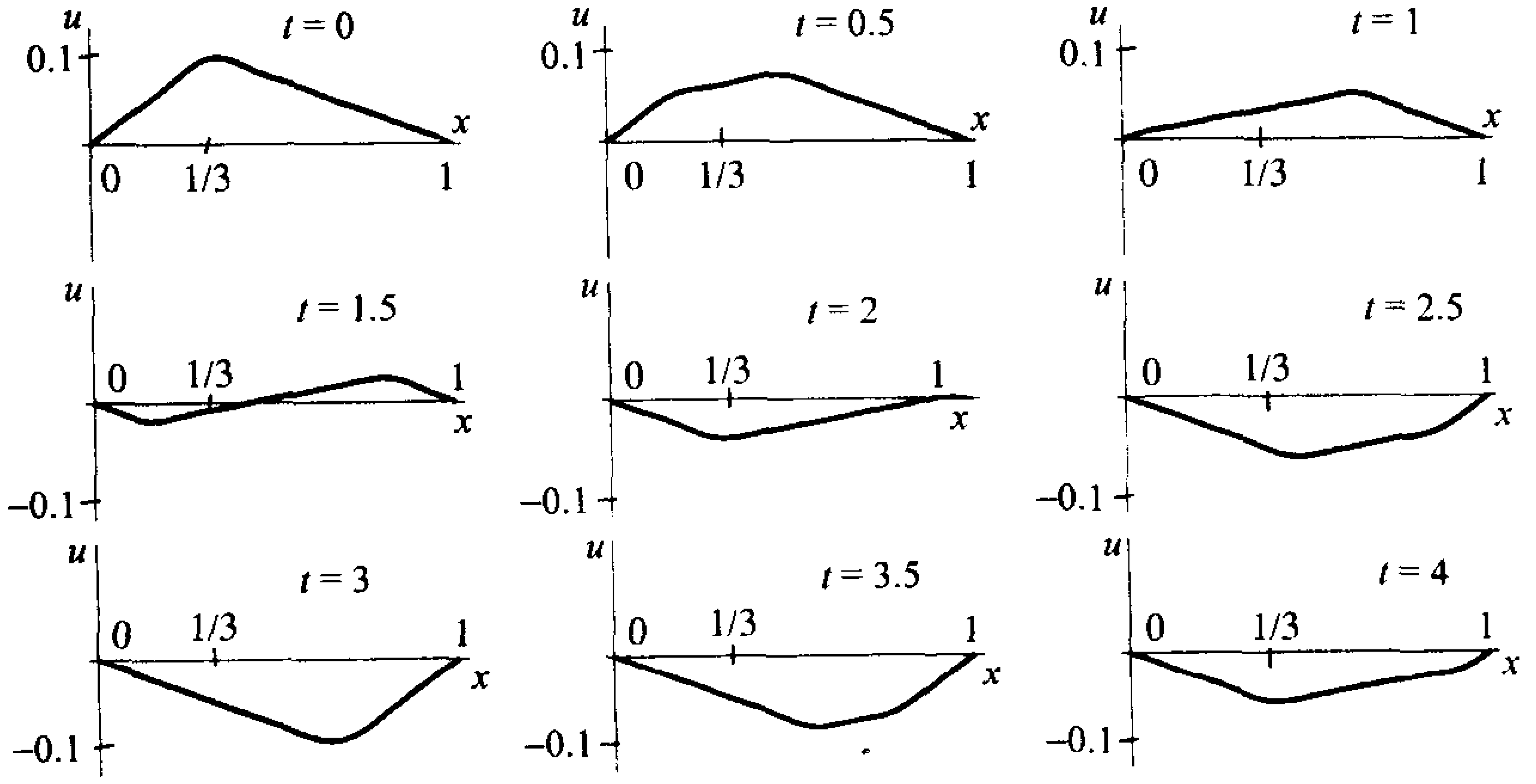


图 3 弦在不同时刻的瞬时形状，用级数解的第 10 项部分和画出

在有些例题中，我们可能会发现一些大得不现实的位移，这仅是为了方便，因为我们的方程是线性的，为得到较为现实的位移，我们只需将我们的解乘以一个伸缩因子. ■ [120]

由(8)式知：弦振动问题的解是正规波型

$$u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi}{L}x(b_n\cos\lambda_n t + b_n^*\sin\lambda_n t) \quad n=1,2,\cdots. \tag{11}$$

的无穷求和. 当弦按照其中某个 u_n 波型振动时，我们说它在其第 n 个正规波型中. 第一个正规波型称为**基本波型**；所有其他波型称为**泛音**. 在音乐中，某个给定正规波型所产生的声音的强度依赖于$\sqrt{b_n^2+(b_n^*)^2}$(第 n 个正规波型)的振幅. 正规波型的**角频**或**固有频率**(2π 单位时间内

振动的次数)，是 $\lambda_n = n\pi c/L$. 固有频率越大，声音的音质越高. 回顾 3.2 节(4)式，$c=\sqrt{\tau/\rho}$，其中 τ 是弦的张力，而 ρ 是质量密度，因此声音的音质可以由改变张力或弦的长度来改变. 例如，通过压下弦，弦的长度变短，声音的音质增高.

当弦按正规波型振动时，弦上某些点始终是固定不动的(图 4). 这些点是方程 $\sin\frac{n\pi}{L}x=0$ 的解，在这些点中不计弦的端点，在第 n 个正规波型中，弦上有$(n-1)$个等距的不振动点.

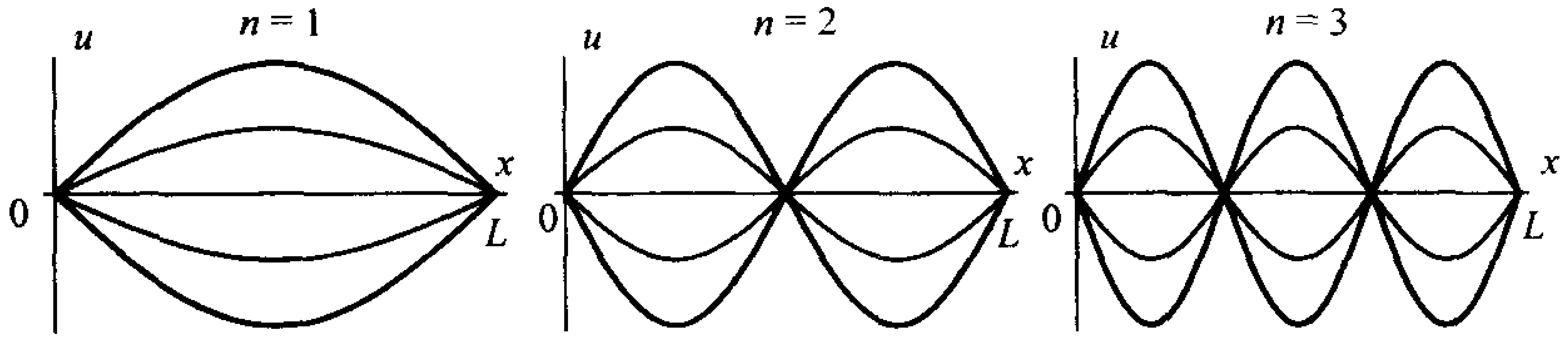


图 4 正规波型，不计弦的端点，在第 n 个正规波型中，弦上有$(n-1)$个等距的不振动点

我们讨论了弦按正规波型振动，什么样的初始条件会导致弦这样振动? 我们以下例来说明.

例 2 振动的正规波型

试证：如果弦自初始形状 $f(x)=\sin\frac{m\pi}{L}x\,(0<x<L)$ 开始释放，则其振动由第 m 个方式给出.（注意到，弦的初始形状由(11)的第 m 个正规波型令 $t=0$ 得到.）

解 我们利用(8)来求解 $u(x,t)$，由于 $g(x)=0$，我们得 $b_n^*=0$. 为求出 b_n，我们计算积分

121

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\frac{m\pi}{L}x\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x.$$

由三角系的正交性，除在 $m=n$ 时，值为 1 以外，上式最后的表达式为零. 因此如果 $n\neq m$，$b_n=0$；而 $b_m=1$. 将这些值代入(8)式，得到解

$$u(x,t) = u_m(x,t) = \sin\frac{m\pi}{L}x\cos c\frac{m\pi}{L}t,$$

这就是弦的第 m 个正规波型(当 $m=5$ 时的实例参见图 5). 因此，当弦从由正规波型给出的初始形状开始振动时，弦将继续以这个正规波型振动. 图 5 以第 5 个正规波型来说明了这个现象. ■

我们以另外一个例题结束本节，这个例题显示如何利用正规波型来理解更复杂的运动.

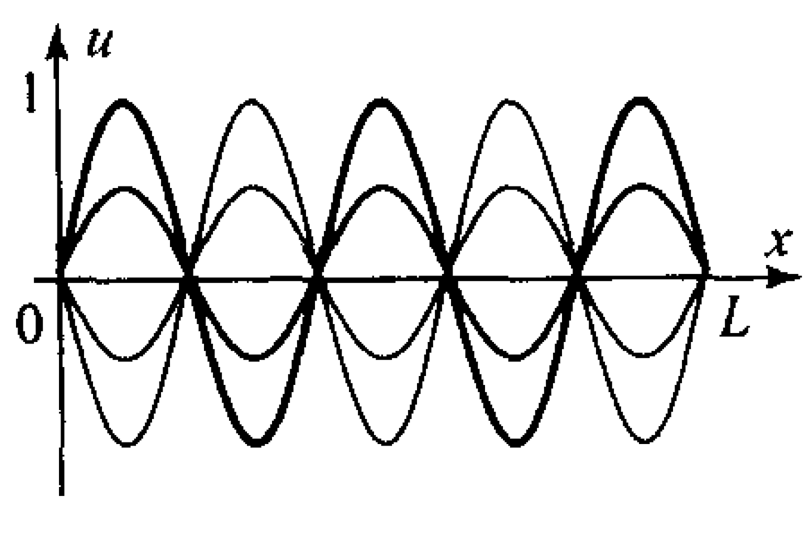


图 5 不同的 t 值时的第 5 个正规波型 $u_5(x,t)$

例 3 非零初始速度

求解长度为 $L=\frac{\pi}{2}$ 的弦的运动，如果 $c=1$，初始位移和初始速度由 $f(x)=0$ 和 $g(x)=x\cos x$ 给出.

解 由于 $f(x)=0$，(8)式中的所有 b_n 均为零. 在计算

b_n^* 时，首先注意到 b_n^* 等于函数$g(x)=x\cos x, 0<x<\frac{\pi}{2}$正弦傅里叶系数的$\frac{1}{\lambda_n}$倍，其中 $\lambda_n=2n$. 由于 $x\cos x$ 是奇的，所以它在$0<x<\frac{\pi}{2}$上的傅里叶正弦级数就等于在$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$上的傅里叶级数. 由 2.3 节例 5 的结果，我们得到

$$b_n^* = \frac{1}{\lambda_n}\frac{16(-1)^{n+1}n}{\pi(4n^2-1)^2} = \frac{8(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)^2}, \quad n=1,2,\cdots.$$

因此，由(8)式，解为

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx\sin 2nt. \tag{12}$$

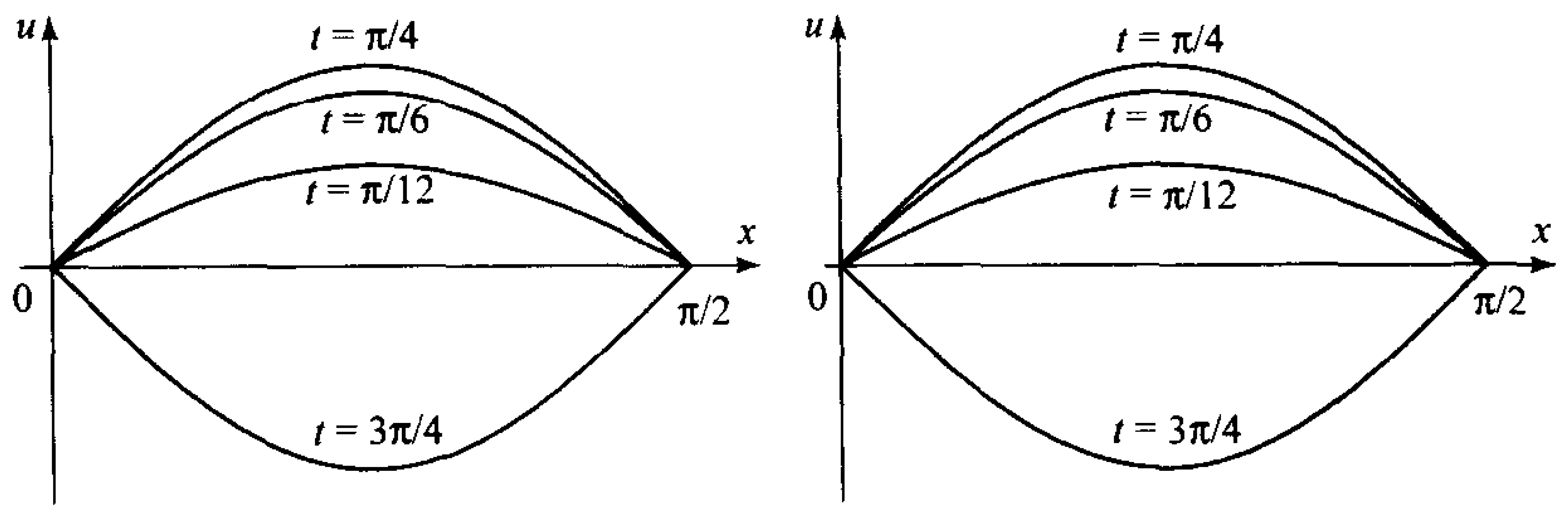


图 6　利用(12)式第一和第四项部分和得到例 3 中弦在 $t=\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$时的图像，注意到，第一个正规波型(左图)很好地描述了弦的运动

122

在图 6 中，我们描出了弦在初始速度影响下开始运动的若干时刻的图像，注意到，第一个部分和

$$\frac{8}{9\pi}\sin 2x\sin 2t$$

就已经很好地描述了弦的运动. 这可以通过观察(12)式中级数的系数来验证，由于级数系数很快衰减到零，因此后面项的影响很小. ■

对于具有非零初始位移和速度的问题，我们只需像例 1 和例 3 那样分别处理，然后像方程(8)和(9)那样再将结果综合起来. 也就是说，像例 1 那样从初始位移 $f(x)$得到 b_n，像例 3 那样从初始速度 $g(x)$得到 b_n^*，然后把这些结果综合到(8)中. 注意到，如例 3 所示，如果已知 $f(x)$和/或 $g(x)$的傅里叶正弦级数，则我们的工作将大大简化.

习题 3.3

在习题 1～10 中：

(a)对单位长度的弦，满足给定条件，求解边值问题(1)～(3).

(b)画出一组在不同 t 值时级数部分和的图像，以显示弦的运动. 为确定部分和应该包含几项，请比较在 $t=0$ 时的图像和 $f(x)$的图像，当部分和包含足够多的项时，其图像应该与 $f(x)$的图像吻合得很好.

1. $f(x)=0.05\sin\pi x$，$g(x)=0$，$c=\frac{1}{\pi}$.

2. $f(x)=\sin\pi x\cos\pi x$，$g(x)=0$，$c=\frac{1}{\pi}$.

3. $f(x)=\sin\pi x+3\sin 2\pi x-\sin 5\pi x$，$g(x)=0$，$c=1$.

4. $f(x)=\sin\pi x+\frac{1}{2}\sin 3\pi x+3\sin 7\pi x$，$g(x)=\sin 2\pi x$，$c=1$.

5. $g(x)=0$，$c=4$，

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ 2(1-x), & \frac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

6. $g(x)=2$，$c=\frac{1}{\pi}$，

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3},\\ \frac{1}{30}(x-1/3), & \frac{1}{3}<x\leqslant\frac{2}{3},\\ \frac{1}{30}(1-x), & \frac{2}{3}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

7. $g(x)=1$，$c=4$，

$$f(x)=\begin{cases}4x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{4},\\ 1, & \frac{1}{4}<x\leqslant\frac{3}{4},\\ 4(1-x), & \frac{3}{4}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

8. $f(x)=x\sin\pi x$，$g(x)=0$，$c=\frac{1}{\pi}$.

123

9. $f(x)=x(1-x)$，$g(x)=\sin\pi x$，$c=1$.

10. $g(x)=0$，$c=1$，

$$f(x)=\begin{cases}4x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{4},\\ -4(x-1/2), & \frac{1}{4}<x\leqslant\frac{3}{4},\\ 4(x-1), & \frac{3}{4}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

11. **运动的时间周期.**

(a)试证：第 n 个正规波型(11)关于时间是以 $2L/nc$ 为周期的，因此对任意 n，u_n 的周期为 $2L/c$.

(b)试证：正规波型的任意叠加关于时间仍然是以 $2L/c$ 为周期的，因此弦的振动是以 $2L/c$ 为周期的.

(c)**半时间周期时弦的形状.** 利用(8)式，对所有 x 和 t，试证：$u(x,\ t+L/c)=-u(L-x,\ t)$；关于弦在半时间周期时的形状，可以得出什么样的结论？

专题问题：在习题 12 中，求解带有阻尼的波动方程，然后将你的解答应用到具体问题，完成习题 13～15 中的任意一个.

12. **弦的阻尼振动.** 当具有与速度成正比的阻力时，一维波动方程变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2k\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(见 3.2 节(7)式). 按照本节的方法，我们将求解这个方程，带有条件(2)和(3).

(a)假设乘积解具有形式 $u(x,\ t)=X(x)T(t)$，推导如下关于 X 和 T 的方程：

$$X'' + \mu^2 X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0,$$
$$T'' + 2kT' + (\mu c)^2 T = 0,$$

其中 μ 是分离常数.

(b)试证：

$$\mu = \mu_n = \frac{n\pi}{L} \quad 和 \quad X = X_n = \sin\frac{n\pi}{L}x, \quad n = 1,2,\cdots.$$

(c)为求出解 T，我们必须求解 $T'' + 2kT' + \left(\frac{n\pi}{L}c\right)^2 T = 0$. 回顾二阶常系数线性微分方程的通解(附录 A.2)，解释为何要分成三种情形分别处理：$n<\frac{kL}{\pi c}$，$n=\frac{kL}{\pi c}$以及$n>\frac{kL}{\pi c}$. 相应的解 T 为

$$T_n = e^{-kt}(a_n\cosh\lambda_n t + b_n\sinh\lambda_n t),$$
$$T_{\frac{kL}{\pi c}} = a_{\frac{kL}{\pi c}}e^{-kt} + b_{\frac{kL}{\pi c}}te^{-kt},$$
$$T_n = e^{-kt}(a_n\cos\lambda_n t + b_n\sin\lambda_n t),$$

其中

$$\lambda_n = \sqrt{\left|k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}c\right)^2\right|}.$$

[124]

(d)试证：当$\frac{kL}{\pi c}$不是正整数时，解为

$$u(x,t) = e^{-kt}\sum_{1\leqslant n<\frac{kL}{\pi c}}\sin\frac{n\pi}{L}x(a_n\cosh\lambda_n t + b_n\sinh\lambda_n t)$$
$$+ e^{-kt}\sum_{\frac{kL}{\pi c}<n<\infty}\sin\frac{n\pi}{L}x(a_n\cos\lambda_n t + b_n\sin\lambda_n t),$$

其中求和是对整数求，且

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx, \quad n = 1,2,\cdots,$$

而 b_n 由方程

$$-ka_n + \lambda_n b_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx, \quad n = 1,2,\cdots$$

确定.

(e)试证：当$\frac{kL}{\pi c}$是正整数时，解如(d)中，带一个附加项

$$\sin\left(\frac{k}{c}x\right)(a_{\frac{kL}{\pi c}}e^{-kt} + b_{\frac{kL}{\pi c}}te^{-kt}),$$

其中除了 $b_{\frac{kL}{\pi c}}$ 由方程

$$-ka_{\frac{kL}{\pi c}} + b_{\frac{kL}{\pi c}} = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{k}{c}x\,dx$$

确定外，a_n 和 b_n 如(d)中.

13. 求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,$$
$$u(x,0) = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

[提示：由于 $k=0.5$ 和 $L=\pi$，对所有 n 我们有 $n>\frac{kL}{\pi}$，所以只需考虑习题 12 解的一种情形.]

14. 求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,$$
$$u(x,0)=x\sin x,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0.$$

15. (a)求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+3\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,$$
$$u(x,0)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=10.$$

125 (b)画图说明当 t 趋近于无穷时，解趋近于零.

3.4 达朗贝尔方法

正如前面提到的，本节将说明相应于弦振动

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<L,\quad t>0, \tag{1}$$

$$u(0,t)=0\quad 和\quad u(L,t)=0\quad 对所有\ t>0, \tag{2}$$

$$u(x,0)=f(x)\quad 和\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)\quad 对\ 0<x<L \tag{3}$$

的边值问题的傅里叶级数解具有更简单的表达式，仅用初始值 f 和 g 来表达. 更确切地，我们将证明(1)～(3)的解可以表达为

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}[f^*(x-ct)+f^*(x+ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g^*(s)\,ds,} \tag{4}$$

其中 f^* 和 g^* 表示 f 和 g 的奇延拓，这称为弦振动问题的**达朗贝尔解**，它可以用行波来作一个有趣的解释. 如下例所示，利用三角恒等式，可以由前一节的解(3.3 节(8)式)推导出(4).

例 1 从傅里叶级数到达朗贝尔解

当 $f(x)=\sin\frac{m\pi}{L}x$ 和 $g(x)=0$ 时，前一节傅里叶级数方法得到(1)～(3)的解为

$$u(x,t)=\sin\frac{m\pi}{L}x\cos c\frac{m\pi}{L}t.$$

(见 3.3 节例 2.)另一方面，达朗贝尔解(4)得到如下形式的解：

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{m\pi}{L}(x-ct)+\sin\frac{m\pi}{L}(x+ct)\right].$$

回忆起三角恒等式 $\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$，我们发现这两个解是一样的. ■

由前一节的傅里叶级数解推导出达朗贝尔解(4)是基于类似的思想，将在习题中给出其证

明框架．此时，直接验证(4)满足方程(1)～(3)就能说明(4)的正确性．为简化记号，我们去掉 * 号，用同一个记号来记函数及其奇延拓．另外，我们假设下面计算中所出现的导数都存在．首先，我们验证(4)满足(1)，对(4)求关于 t 的导数，利用链式法则和微积分基本定理，我们得到 [126]

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}[f(x-ct)+f(x+ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\mathrm{d}s\right\}$$
$$=\frac{1}{2}[-cf'(x-ct)+cf'(x+ct)]+\frac{1}{2}[g(x+ct)+g(x-ct)].$$

关于 t 求二阶导数，我们得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{c^2}{2}[f''(x-ct)+f''(x+ct)]+\frac{c}{2}[g'(x+ct)-g'(x-ct)].$$

类似地，对(4)求关于 x 的导数得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}[f'(x-ct)+f'(x+ct)]+\frac{1}{2c}[g(x+ct)-g(x-ct)]$$

和

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}[f''(x-ct)+f''(x+ct)]+\frac{1}{2c}[g'(x+ct)-g'(x-ct)].$$

因此，$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，从而(4)满足波动方程(1)．

为验证(4)满足(2)和(3)，我们利用 f^* 和 g^* 是奇的和 $2L$-周期的这个事实．例如，为验证在 $x=0$ 处的边界条件(2)，我们在(4)中令 $x=0$，得到

$$u(0,t)=\frac{1}{2}[f^*(-ct)+f^*(ct)]+\frac{1}{2}\int_{-ct}^{ct}g^*(s)\mathrm{d}s=0,$$

因为 f^* 是奇的，所以 $f^*(-ct)=-f^*(ct)$；g^* 是奇的，所以其在对称区间上的积分为 0．我们将(2)式中第二个条件以及(3)式的验证留作习题 14．

达朗贝尔解的几何解释

当初始速度为零时，达朗贝尔解具有如下更简单的形式：

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}[f^*(x-ct)+f^*(x+ct)].} \tag{5}$$

这里有一个有趣的几何解释，对固定的 t，$f^*(x-ct)$(作为 x 的函数时)的图像由 $f^*(x)$的图像向右平移 ct 个单位得到，随着 t 增加，图像表示的波以速度 c 向右传播．类似地，$f^*(x+ct)$的图像是以速度 c 向左传播的波．由(5)式知，波动方程的解是两列向相反方向传播的、其形状由弦的初始形状确定的波的平均值． [127]

一般形式的达朗贝尔解(4)较难从几何上解释，但是，它确实告诉我们：在 x 点处 $t>0$ 时刻的位移完全由在 $x-ct$ 和 $x+ct$ 处的初始位移，以及介于 $x-ct$ 和 $x+ct$ 之间的区间上的初始速度决定．为理解初始速度对运动的影响，令 G 表示 g^* 的一个原函数，因此

$$G(x)=\int_a^x g^*(z)\mathrm{d}z,$$

对某个固定的数 a. 注意到

$$G(x+2L)-G(x)=\int_{x}^{x+2L}g^{*}(z)\mathrm{d}z=\int_{-L}^{L}g^{*}(z)\mathrm{d}z=0,$$

其中第二个等式是由于 2.1 节定理 1，而最后一个等式是由于 g^* 是奇的. 因此，G 是 $2L$-周期的.（周期函数的原函数在 2.1 节习题 15～16 讨论过.）利用 f^* 和 G，解(4)可改写为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2}[f^{*}(x-ct)+f^{*}(x+ct)]+\frac{1}{2c}[G(x+ct)-G(x-ct)]\\&=\frac{1}{2}\left[f^{*}(x-ct)-\frac{1}{c}G(x-ct)\right]+\frac{1}{2}\left[f^{*}(x+ct)+\frac{1}{c}G(x+ct)\right],\end{aligned}\tag{6}$$

试证：一般地，解还是由右行和左行波形构成. 与(5)的情形的主要区别在于，此时两个波形不再具有相同的形状，函数 $\frac{1}{2}\left[f^{*}(x)-\frac{1}{c}G(x)\right]$ 和 $\frac{1}{2}\left[f^{*}(x)+\frac{1}{c}G(x)\right]$ 分别给出了右行和左行波的形状.

例 2　零初始速度的达朗贝尔解

考虑 3.3 节例 1 的波动问题，其中 $L=1$，$c=\frac{1}{\pi}$，

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{10}x & 若\ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{3},\\[2mm]\dfrac{3(1-x)}{20} & 若\ \dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

以及 $g(x)=0$.

(a)利用达朗贝尔解来确定弦在 $t=\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{2\pi}{3}$ 的形状.

128　(b)确定弦第一次回到其初始形状的时间.

解　(a)由于 $g(x)=0$，利用(5)式，我们得到弦在时刻 $t=\frac{\pi}{3}$ 的形状如 $\frac{1}{2}[f^{*}(x-1/3)+f^{*}(x+1/3)]$ 的图像. 为画出这个图像，我们首先画出 f 的 2-周期奇延拓 $f^*(x)$ 的图像. 将它向左平移 1/3 单位，我们得到 $f^*(x-1/3)$ 的图像；向右平移相同的数量，得到 $f^*(x+1/3)$]的图像. 现在，弦在时刻 $t=\frac{\pi}{3}$ 的形状由 $f^*(x-1/3)$ 和 $f^*(x+1/3)$]的图像作平均(相加再除以 2)得到. 由于我们只关心弦的形状，我们将图像限制在区间 $0<x<1$ 上. 见图 1，其中我们还画出了 $t=\frac{2\pi}{3}$ 时的形状.

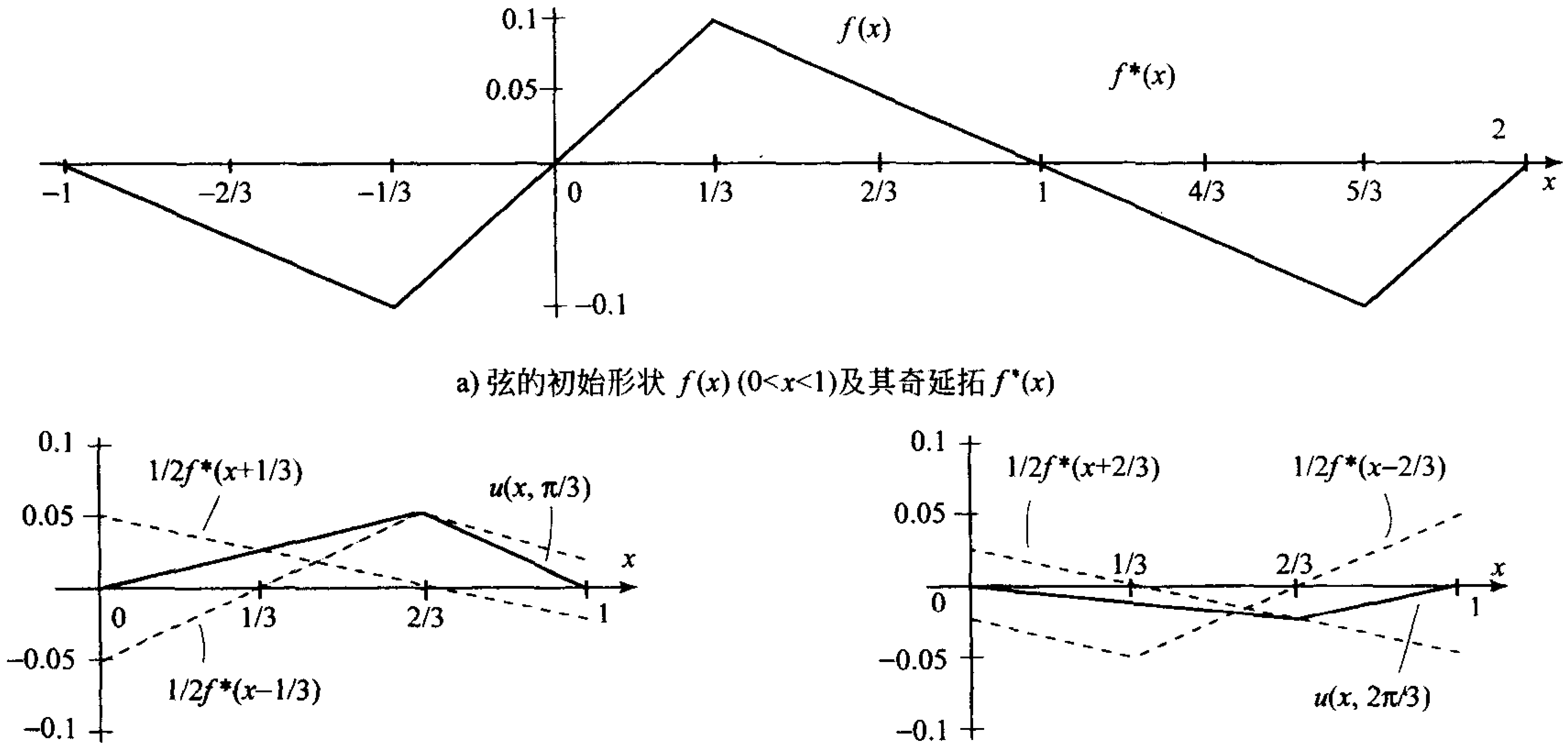
(b)当

$$\frac{1}{2}[f^{*}(x-t/\pi)+f^{*}(x+t/\pi)]=f^{*}(x)$$

时，弦回到其初始形状. 由于 f^* 是 2-周期的，所以当 $t/\pi=2$ 或 $t=2\pi$ 时，上式成立. ■

例 3　非零初始速度的达朗贝尔解

利用达朗贝尔方法求解波动问题(1)～(3)，其中 $c=1$，$L=1$，$f(x)=0$，以及 $g(x)=x$，$0<x<1$.



a) 弦的初始形状 $f(x)$ $(0<x<1)$及其奇延拓 $f^*(x)$

b) 弦在$t=\pi/3$时的形状，由$f^*(x-1/3)$和$f^*(x+1/3)$］的图像作平均得到：$u(x,\pi/3)=1/2(f^*(x-1/3)+f^*(x+1/3))$

c) 弦在$t=2\pi/3$时的形状：$u(x,2\pi/3)=1/2(f^*(x-2/3)+f^*(x+2/3))$

图 1

解 当 $f^*=0$ 时，利用(4)式得

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g^*(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{2}(G(x+t)-G(x-t)),\tag{7}$$

其中 g^* 是 g 的 2-周期奇延拓，而 G 是 g^* 的一个原函数，我们取

$$G(x)=\int_{-1}^{x}g^*(z)\mathrm{d}z.$$

129

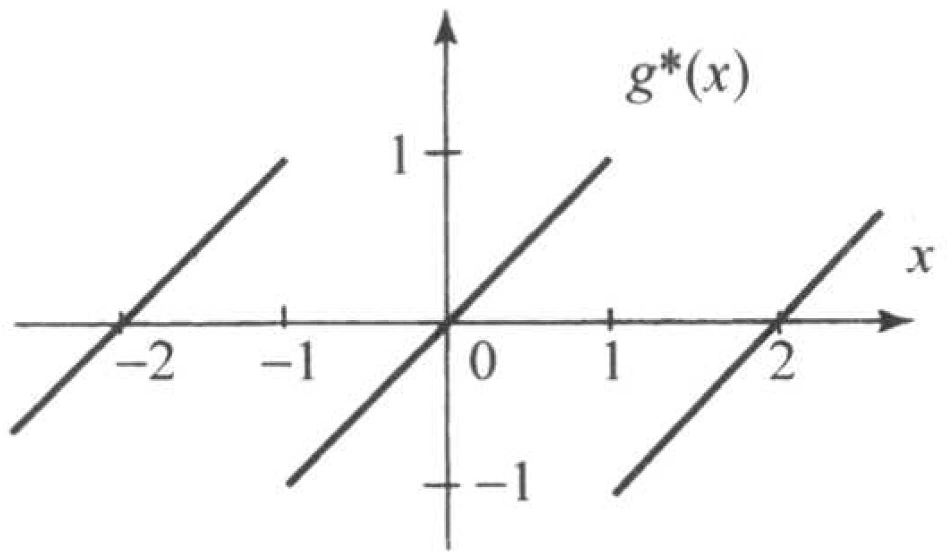
为得到解，我们必须确定 G，由(6)式前面的讨论，我们知道 G 是 2-周期的，因此只需在长度为 2 的任意区间上确定 G. 由于在区间$(-1,1)$上 $g^*(x)=x$，对$(-1,1)$上所有 x，我们得到

$$G(x)=\int_{-1}^{x}z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2},$$

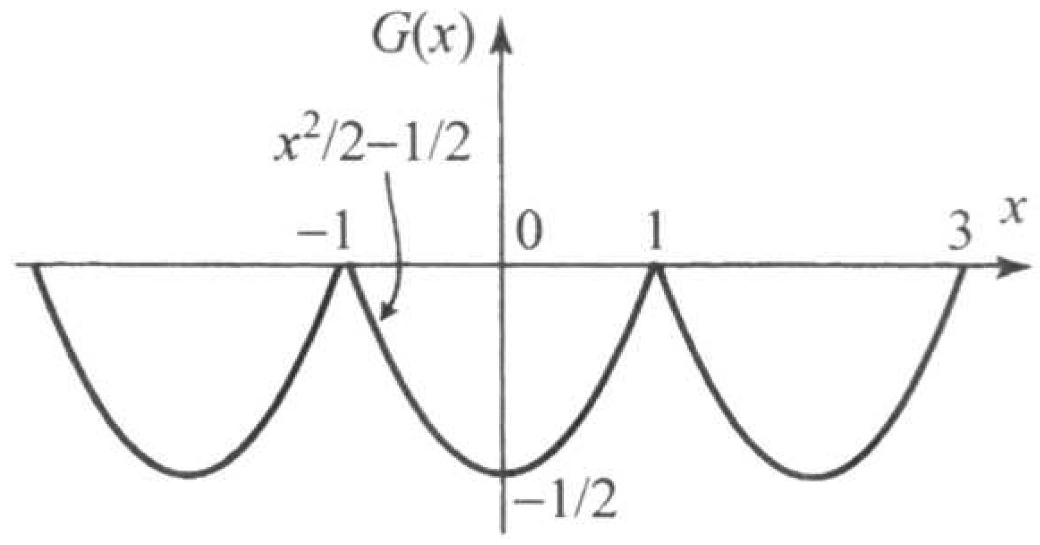
因此

$$G(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2} & \text{若} -1<x<1,\\ G(x+2) & \text{否则}.\end{cases}$$

G 的图像如图 2b 所示. 由(7)式，为得到弦在给定时刻 t 时的形状，只需将 G 的图像向左、向右平移 t 个单位再作差，并除以 2. 此时，我们仍然得到两个半长的波，但一个取相反数，我们只需将它们叠加起来. 注意到当 $t=0$ 时，将得到零初始位置.



a) g的2-周期奇延拓g^*的图像



b) g^*的原函数G的图像，注意到G是2-周期的

图 2 ■

特征线

这里我们将讨论波动方程及其解的几个有趣性质，到目前为止，为将 $u(x, t)$解释为弦在某给定时刻 t 的形状，对固定 t 值，我们视 $u(x, t)$为 x 的函数. 为了下面的讨论，改变我们的思考方式是有益的，将 $u(x, t)$视为(x, t)的函数，其中 x 和 t 在 xt 平面内同时变化. 由于弦具有有限长度 L，所以我们特别关心半无界带状区域 S，S 由所有点$(x, t)(0\leqslant x\leqslant L, t\geqslant 0)$组成.

xt 平面中斜率为$\pm\frac{1}{c}$的直线起着重要的作用，这些直线称为波动方程的**特征线**，可以写成如下形式：

$$x-ct=x_0-ct_0\left(\text{斜率}=\frac{1}{c}>0,\text{过点}(x_0,t_0)\right); \tag{8}$$

$$x+ct=x_0+ct_0\left(\text{斜率}=-\frac{1}{c}<0,\text{过点}(x_0,t_0)\right). \tag{9}$$

特征线构成了覆盖 xt 平面的两族平行线(图 3). 任何一点(x_0, t_0)是由两条特征线组成的等腰三角形的顶点，其与 x 轴相交于点 x_0-ct_0 和 x_0+ct_0(图 4). 这个三角形的底边，$[x_0-ct_0, x_0+ct_0]$称为点(x_0, t_0)的**依赖区间**(图 4). 130

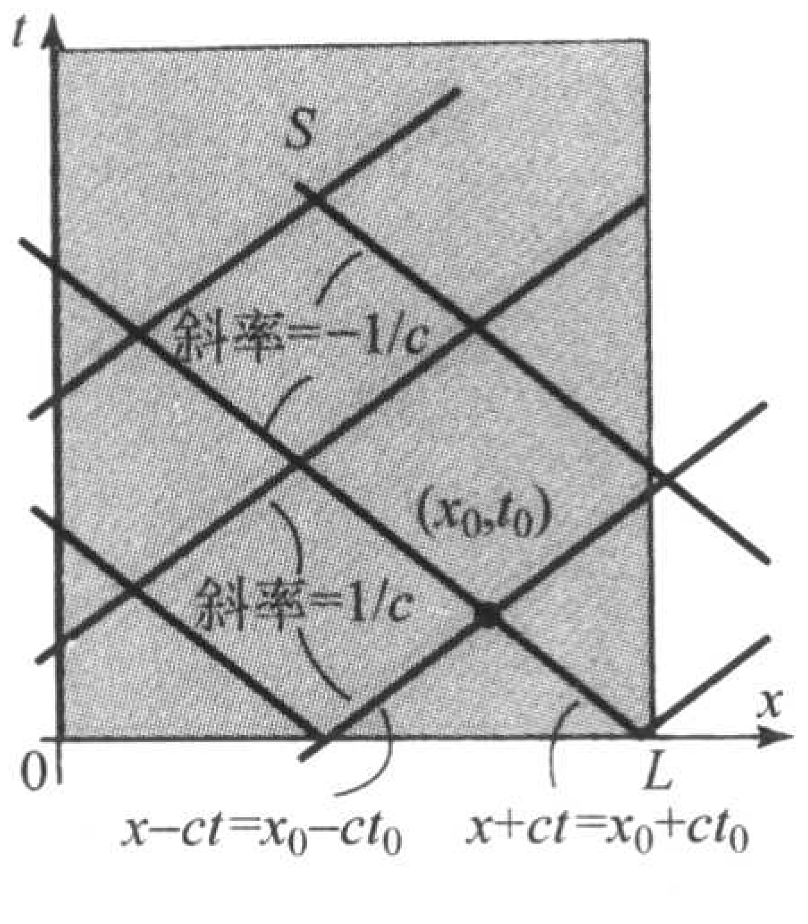


图 3

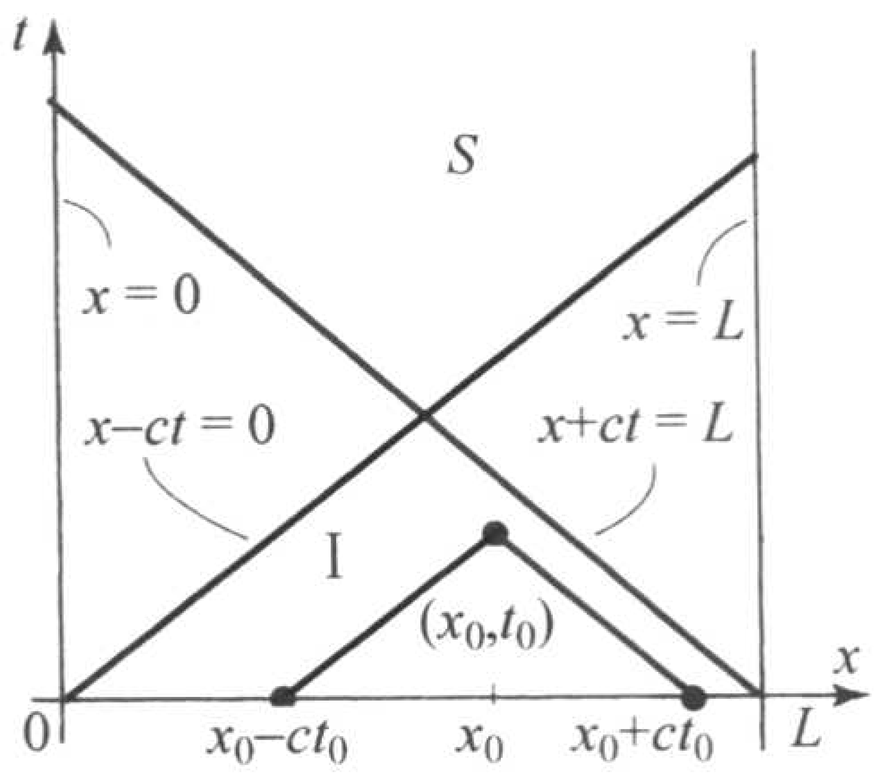


图 4 依赖区间，以 x_0 为中心、ct_0 为半径

为理解这个概念，由达朗贝尔解(4)，我们发现 $u(x_0, t_0)$由 f^* 在这个区间的端点处的值，以及 g^* 在这个区间上的积分决定. 在点(x_0, t_0)的依赖区间以外的 f^* 和 g^* 的值不以任何方式影

响 $u(x_0, t_0)$ 的值，由此，这个区间以外的任何扰动，在点 (x_0, t_0) 处都感觉不到. 由图 4 易见，整个依赖区间 $[x_0-ct_0, x_0+ct_0]$ 包含在区间 $[0, L]$ 内，当且仅当点 (x_0, t_0) 属于三角区域Ⅰ，其由区间 $[0, L]$、$\left(\text{过原点斜率为}\frac{1}{c}\text{的}\right)$特征线 $x-ct=0$ 以及$\left(\text{过点}(0, L)\text{斜率为}-\frac{1}{c}\text{的}\right)$特征线 $x+ct=L$ 界定. 因此，对区域Ⅰ内的点 (x, t)，$u(x, t)$ 仅依赖于 f 和 g 在区间 $[0, L]$ 上的值；所以为计算 $u(x, t)$，我们并不需要 f 和 g 的周期延拓.

例 4　利用依赖区间

考虑波动问题

$$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ &u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \\ &u(x,0) = x(1-x), \quad u_t(x,0) = 8x. \end{aligned}$$

对图 4 中的区域Ⅰ中的点 (x, t)，求解 $u(x, t)$，其中 $L=1$，$c=2$.

解　应用达朗贝尔解，以及区域Ⅰ中的点的依赖区间包含在 $[0, 1]$ 内这个事实，我们得到

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}[f(x-2t)+f(x+2t)]+\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} 8s\,ds \\ &= \frac{1}{2}[(x-2t)(1-(x-2t))+(x+2t)(1-(x+2t))]+s^2\Big|_{x-2t}^{x+2t} \\ &= -4t^2+x-x^2+(x+2t)^2-(x-2t)^2 \\ &= -4t^2+x-x^2+8tx. \end{aligned}$$

■

下面，我们描述求解区域Ⅰ外点处 u 值的方法. 我们需要如下的有趣恒等式，我们称每条边在特征线上的四边形为**特征平行四边形**.

命题 1(特征平行四边形)　令 P_1，P_2，Q_1，Q_2 表示特征平行四边形的顶点，P_1 与 P_2 相对(图 5)，则

$$u(P_1)+u(P_2) = u(Q_1)+u(Q_2). \tag{10}$$

证明　记

$$A(x,t) = \frac{1}{2}\left[f^*(x-ct)-\frac{1}{c}G(x-ct)\right], B(x,t) = \frac{1}{2}\left[f^*(x+ct)+\frac{1}{c}G(x+ct)\right], \tag{11}$$

131

其中 G 是 g^* 的原函数，则对所有 (x, t)，由(6)得

$$u(x,t) = A(x,t)+B(x,t).$$

由(11)式，我们注意到 A 在特征线 $x-ct=x_0-ct_0$ 上是常数，而 B 在特征线 $x+ct=x_0+ct_0$ 上是常数，因此，$A(P_1)=A(Q_1)$，$B(P_1)=B(Q_2)$，$B(P_2)=B(Q_1)$，$A(P_2)=A(Q_2)$(图 5)，所以

$$u(P_1)+u(P_2) = A(P_1)+B(P_1)+A(P_2)+B(P_2) = u(Q_1)+u(Q_2).$$

■

利用(10)，通过几何构造法，我们可以将图 6 的带状区域 S 化简到区域Ⅰ上，从而确定其上的 u 值. 为此，我们将 S 剖分成如下由特征线界定的三角形以及多边形区域. 首先，以自 x 轴上 $x=0$ 和 $x=L$ 处的两条特征线出发；在 S 的边界上，将它们反射成斜率相反的特征线，记这些区域为Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ等等，如图 6 所示.

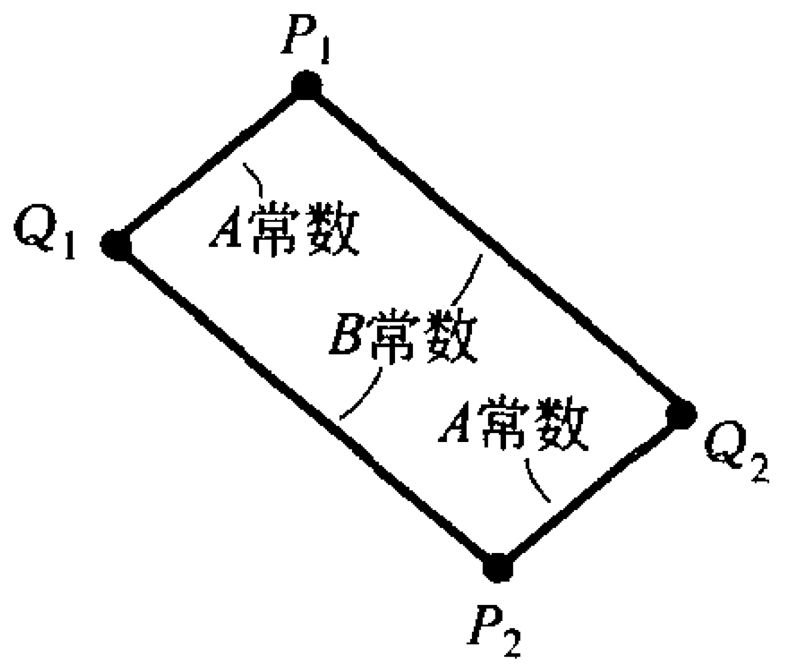


图 5 特征平行四边形

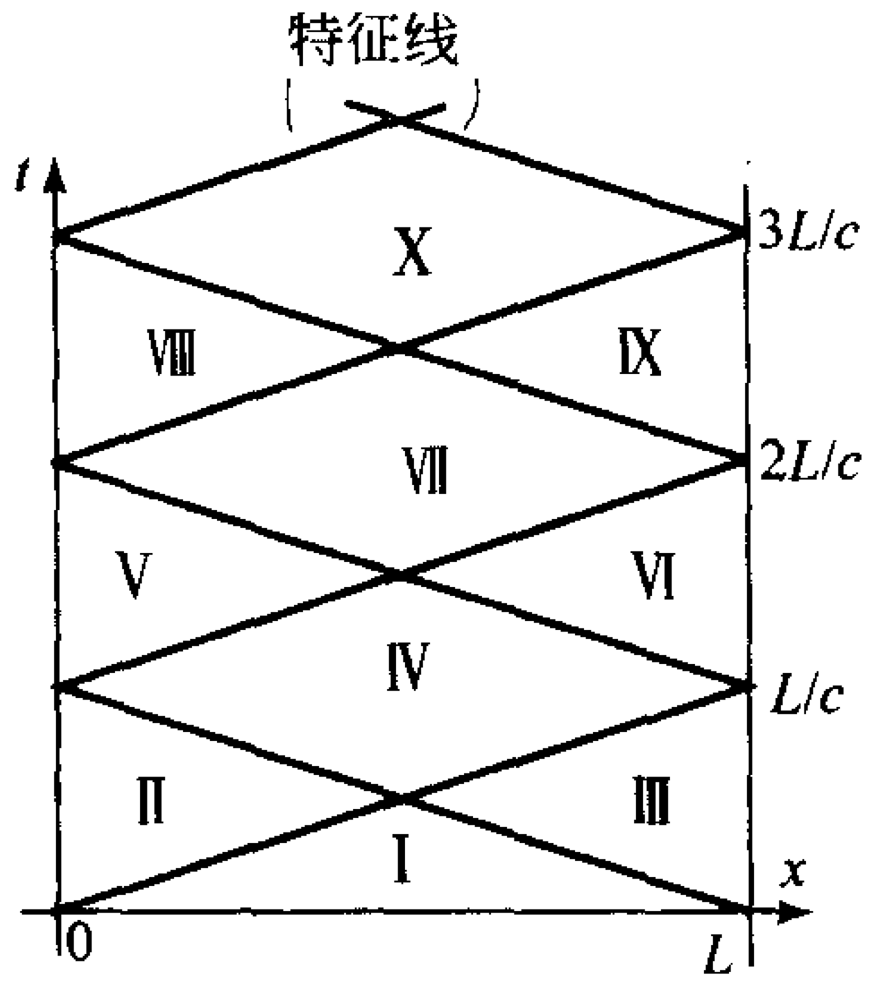


图 6 通过反射特征线，剖分带状区域

例 5 利用特征平行四边形

参考例 4，确定区域Ⅱ内的 u 值.

解 令 $P_1=(x_0,t_0)$为区域Ⅱ内的任意一点. 如图 7 所示，画出以 P_1，P_2，Q_1，Q_2 为顶点的特征平行四边形，顶点 P_2 和 Q_2 在特征线 $x-2t=0$ 上，而 Q_1 在边界 $x=0$ 上. 由命题 1，我们有 $u(P_1)=u(Q_1)+Q(u_2)-u(P_2)$. 我们将利用例 4 中的公式 $u(x,t)=-4t^2+x-x^2+8tx$ 来求解 $u(P_2)$和 $u(Q_2)$，因为 P_2 和 Q_2 在区域Ⅰ内. 另外，$u(Q_1)=0$，因为边界条件 $u(0,t)=0$ 对所有 $t>0$ 成立.

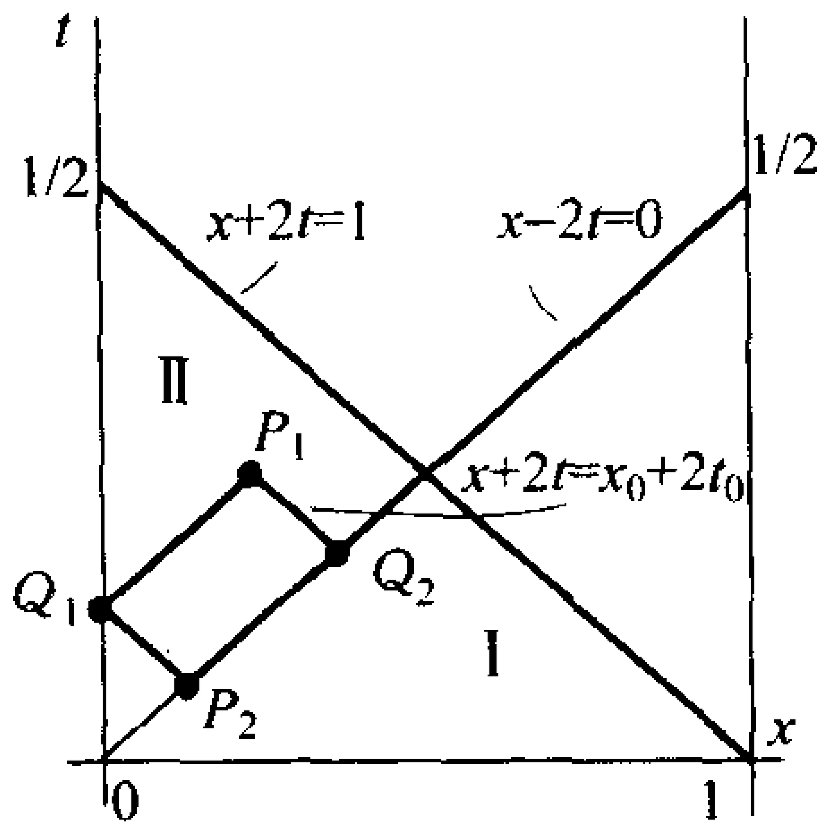


图 7

为确定 P_2 和 Q_2 的坐标，我们利用图 7 所示的特征线方程以及简单的几何关系. 例如，Q_2 是特征线 $x+2t=x_0+2t_0$ 和 $x-2t=0$ 的交点. 这两个方程相加得到 $2x=x_0+2t_0$ 或$x=\frac{x_0+2t_0}{2}$；由 $x=2t$，我们得到 $t=\frac{x_0+2t_0}{4}$，因此 $Q_2=\left(\frac{x_0+2t_0}{2},\ \frac{x_0+2t_0}{4}\right)$. Q_1 和 P_2 的坐标可类似计算，我们有 $Q_1=\left(0,\ -\frac{x_0}{2}+t_0\right)$和 $P_2=\left(\frac{-x_0+2t_0}{2},\ \frac{-x_0+2t_0}{4}\right)$. 为简化记号，记$P_1=(x,t)$以代替$(x_0,t_0)$，则对区域Ⅱ内的 $P_1=(x,t)$，有

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= u(Q_2)-u(P_2)\\
&= u\left(\frac{x+2t}{2},\frac{x+2t}{4}\right)-u\left(\frac{-x+2t}{2},\frac{-x+2t}{4}\right)\\
&= \overbrace{-4\left(\frac{x+2t}{4}\right)^2+\frac{x+2t}{2}-\left(\frac{x+2t}{2}\right)^2+8\,\frac{x+2t}{2}\,\frac{x+2t}{4}}^{u(Q_2)}\\
&\quad \overbrace{+4\left(\frac{-x+2t}{4}\right)^2-\frac{-x+2t}{2}+\left(\frac{-x+2t}{2}\right)^2-8\,\frac{-x+2t}{2}\,\frac{-x+2t}{4}}^{-u(P_2)}\\
&= x+4tx.
\end{aligned}
$$

注意到这个 $u(x,t)$表达式满足波动方程以及在 $x=0$ 处的边界条件. 波动问题中的其他条件并不涉及区域Ⅱ内的点，所以不必验证. ■

在习题中，利用类似于例题 4 和 5 中的技巧，求解区域Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ内的 u 值.

习题 3.4

在习题 1～8 中，利用达朗贝尔公式(4)，求解单位长度弦满足给定条件的边值问题(1)～(3). 对每一种情况，仔细描述 f^* 和 G(g^* 的原函数)(参见例题 2 和 3).

1. $f(x)=\sin\pi x$，$g(x)=0$，$c=\frac{1}{\pi}$.
2. $f(x)=\sin\pi x\cos\pi x$，$g(x)=0$，$c=\frac{1}{\pi}$.
3. $f(x)=\sin\pi x+3\sin 2\pi x$，$g(x)=\sin\pi x$，$c=1$.
4. $f(x)=0$，$g(x)=1$，$c=1$.
5. $f(x)$如 3.3 节习题 5，$g(x)=x$，$c=1$.
6. $f(x)=0$，$g(x)=\cos\pi x$，$c=1$.
7. $f(x)=0$，$g(x)=-10$，$c=1$.
8. $f(x)=0$，$g(x)=\sin\pi x$，$c=1$.
9. 确定习题 1 和 5 中弦第一次回到其初始形状的时间.
10. 画出习题 1 中解在 $t=1/2$ 和 1 时的图像.
11. 画出习题 4 中解在 $t=1/2$ 和 1 时的图像.
12. **运动的时间周期**. 利用达朗贝尔解，证明 3.3 节习题 11(b)的结果.
13. 假设 f 和 g 都关于 $x=\frac{L}{2}$对称；即，$f(L-x)=f(x)$和 $g(L-x)=g(x)$. 试证：

$$u\left(x,t+\frac{L}{c}\right)=-u(x,t)$$

对所有 $0<x<L$ 和 $t>0$ 成立.

14. 验证达朗贝尔解(4)满足：(a)边界条件 $u(L,t)=0$，$t>0$；(b)初始条件(3). [提示：对(a)，利用 f 和 g 的奇性和 $2L$-周期性.]
15. 考虑边值问题(1)～(3)，$c=1$，$L=1$，$g(x)=0$，以及

$$f(x)=\begin{cases}4x & 若\ 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{4},\\ 4\left(\frac{1}{2}-x\right) & 若\ \frac{1}{4}<x\leqslant\frac{1}{2},\\ 0 & 若\ \frac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

(a)利用达朗贝尔方法，画出弦在 $t=0$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$时的图像.

(b)对 $t=\frac{1}{4}$，确定弦上在平衡位置的点.

(c)在弦上取一个具有零初始位移的点 $x\left(\frac{1}{2}<x<1\right)$，过多长时间该点开始振动?

(d)对任意弦常数 $c>0$，(c)的结果如何?

16. **零初始速度的达朗贝尔解**. (a)由 3.3 节(8)式开始，试证：如果初始速度 $g(x)=0$，则

133

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\left[\sin\frac{n\pi}{L}(x-ct)+\sin\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right].$$

(b) 利用(a) 推导达朗贝尔解(4). $\left[\text{提示}: f^*(s)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{L}s.\right]$

17. **专题问题：达朗贝尔解(一般情形).** 令 g^* 表示 g 的 $2L$-周期奇延拓，令

$$G(x)=\int_0^x g^*(s)\mathrm{d}s.$$

(a)试证：G 是偶的、$2L$-周期的，并且

$$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\left(\cos\frac{n\pi}{L}x-1\right),$$

其中

$$B_n=\frac{-2}{n\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x=-cb_n^*\quad(n=1,2,\cdots).$$

[提示：2.3 节习题 33.]

(b)利用(a)，证明：

$$G(x+ct)-G(x-ct)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\left[\cos\frac{n\pi}{L}(x+ct)-\cos\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right].$$

(c)利用(b)，证明：$\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g^*(s)\mathrm{d}s=\sum_{n=1}^{\infty}b_n^*\sin\frac{n\pi}{L}x\sin\lambda_n t.$

(d)利用(c)、3.3 节(8)式和习题 16，推导达朗贝尔解(4).

18. **专题问题：能量守恒.** 振动的弦在 t 时刻的能量为

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^L(u_t^2+c^2u_x^2)\mathrm{d}x.$$

(a)在积分号下求导，试证：

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\int_0^L(u_tu_{tt}+c^2u_xu_{xt})\mathrm{d}x.$$

(b)利用波动方程以 c^2u_{xx} 替代 u_{tt}，得到

134

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=c^2\int_0^L(u_xu_t)_x\mathrm{d}x.$$

(c)利用(2)式，证明：$u_t(0,\ t)=u_t(L,\ t)=0$ 对所有 $t>0$ 成立.

(d)证明能量守恒定律，即弦自由振动时的能量在所有时刻为常数. [提示：利用(b)和(c)，证明 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t=0$.]

19. 参看例 3.

(a)特征线是什么?

(b)确定点(0.5，0.2)和(0.3，2)的依赖区间.

(c)描述此时的区域Ⅰ；(b)中的哪个点属于区域Ⅰ.

(d)对区域Ⅰ中的所有点，确定 $u(x,\ t)$.

20. 参看例 3，对区域Ⅱ中的所有点，确定 $u(x,\ t)$.

21. 参看例 4，对区域Ⅲ中的所有点，确定 $u(x,\ t)$(见图 8).

22. 参看例 4，对区域Ⅳ中的所有点，确定 $u(x,\ t)$(见图 8).

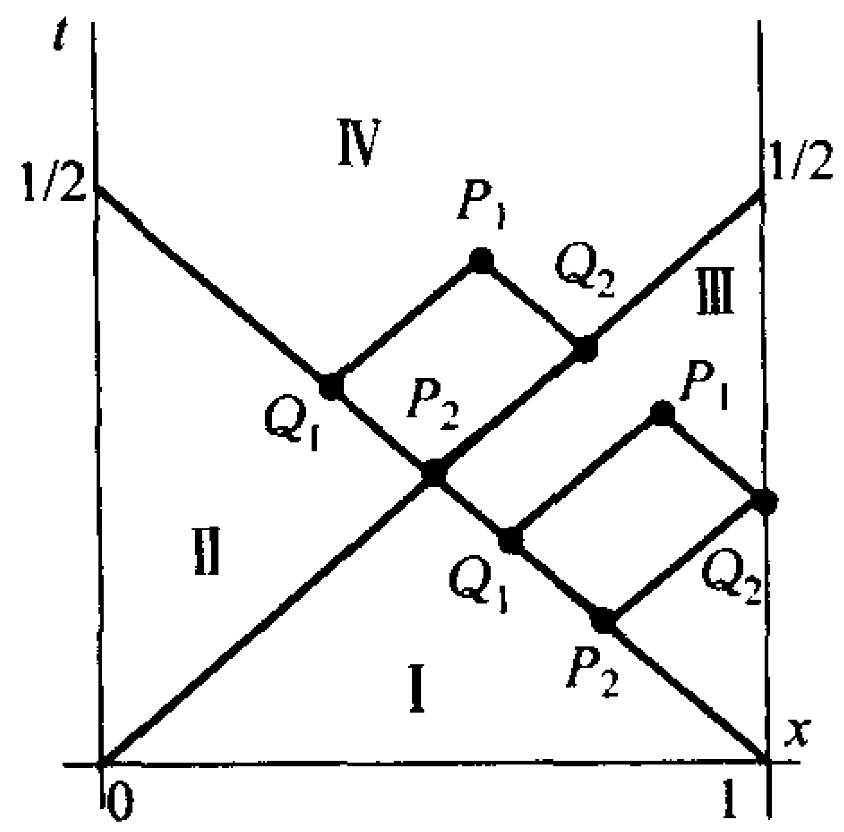


图 8

3.5 一维热传导方程

本节及下节，我们研究长度为 L 的均匀棒的温度分布问题，设棒的侧曲面是绝热的，内部没有热源，满足一定的边界和初始条件. 为描述这个问题，令 $u(x,\ t)(0<x<L,\ t>0)$ 表示

棒上 x 点处在 t 时刻的温度(图 1). 假设棒的初始温度分布是 $u(x, 0)=f(x)$，且棒的端点一直保持常温 0 度，试问：当 $0<x<L$，$t>0$ 时，$u(x, t)$是什么？正如所料，为回答这个问题，我们必须求解一个边值问题. 我们将在本节后的附录中证明 u 满足**一维热传导方程**

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<L,\quad t>0.$$

另外，u 满足**边界条件**

$$u(0,t)=0\quad 和\quad u(L,t)=0\quad 对所有\ t>0$$

以及**初始条件**

$$u(x,0)=f(x)\quad 对\ 0<x<L.$$

由于问题关于 t 是一阶的，所以我们只需一个初始条件，而不像波动问题，那里需要两个初始条件. 我们将用分离变量法来求解这个问题，然后我们将引入稳态温度这个概念，并利用它求解相应的非零边值的热传导问题. 下节介绍这些问题的有趣而重要的变形.

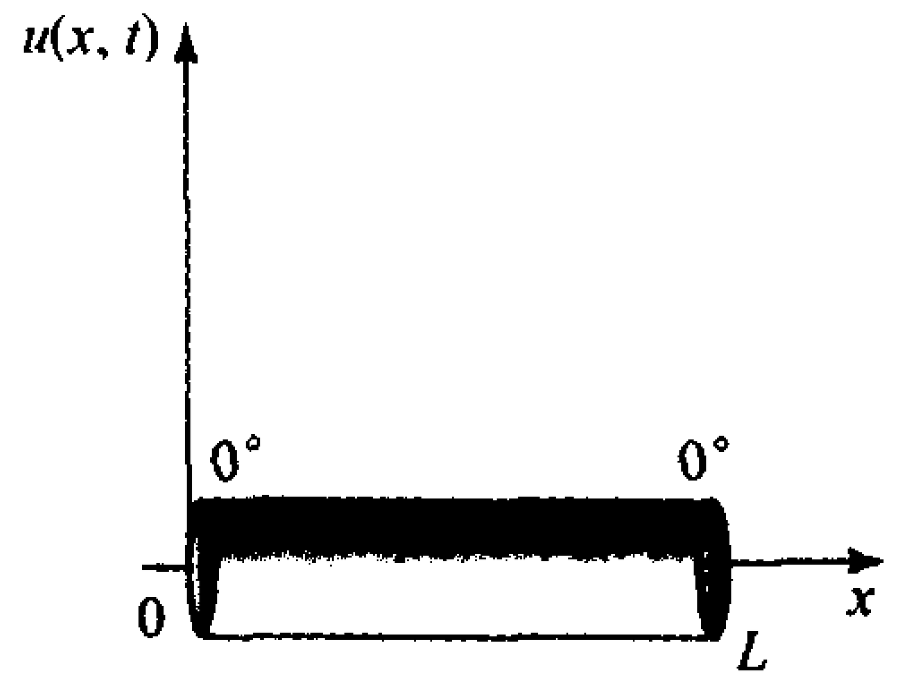


图 1 绝热棒，端点保持 0 度

135

分离变量

首先，我们寻找形如

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

的乘积解，其中 $X(x)$仅为 x 的函数，而 $T(t)$仅为 t 的函数. 代入热传导方程，并分离变量，我们得到

$$\frac{T'}{c^2T}=\frac{X''}{X}.$$

为使这个等式成立，我们有

$$\frac{T'}{c^2T}=k\quad 及\quad \frac{X''}{X}=k,$$

其中 k 是**分离常数**. 由此，我们得到两个常微分方程

$$X''-kX=0\quad 及\quad T'-kc^2T=0.$$

在边界条件中分离变量，得到

$$X(0)T(t)=0\quad 及\quad X(L)T(t)=0\quad 对所有\ t>0.$$

为避免平凡解，我们要求

$$X(0)=0\quad 及\quad X(L)=0.$$

因此，我们得到关于 X 的边值问题：

$$X''-kX=0,\quad X(0)=0\quad 及\ X(L)=0.$$

这个问题就是我们在 3.3 节求解弦振动所遇到的，我们知道

$$k=-\mu^2,\quad 其中\ \mu=\mu_n=\frac{n\pi}{L},\quad n=1,2,\cdots,$$

以及

$$\boxed{X = X_n = \sin\frac{n\pi}{L}x, \quad n = 1,2,\cdots.}$$

将 k 的值代入关于 T 的微分方程中，我们得到一个一阶常微分方程

136

$$T' + \left(c\frac{n\pi}{L}\right)^2 T = 0,$$

其通解为

$$\boxed{T_n(t) = b_n e^{-\lambda_n^2 t}, \quad n = 1,2,\cdots.}$$

其中我们令

$$\boxed{\lambda_n = c\frac{n\pi}{L}, \quad n = 1,2,\cdots}$$

(参见附录 A.1 定理 1). 因此我们得到乘积解，或者**正规波型**

$$u_n(x,t) = b_n e^{-\lambda_n^2 t}\sin\frac{n\pi}{L}x, \quad n = 1,2,\cdots.$$

由构造过程知，每个 u_n 是热传导方程的解，满足给定的(齐次)边界条件. 受叠加原理(3.1 节定理 1)的启发，我们令

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n^2 t}\sin\frac{n\pi}{L}x.}$$

我们下一步是确定系数 b_n，使之满足初始条件 $u(x,0)=f(x)$.

整个问题的傅里叶级数解

令 $t=0$，并利用初始条件，得

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x.$$

注意到这个和式正如 f 的半幅正弦级数展开式，由 2.4 节(4)式，我们得到

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \quad n = 1,2,\cdots,$$

137

这完全确定了解. 我们将求解过程总结如下.

一维热传导方程的解 一维热边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0 \quad 和 \quad u(L,t) = 0 \quad 对所有\ t > 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = f(x) \quad 对\ 0 < x < L \tag{3}$$

的解是

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n^2 t}\sin\frac{n\pi}{L}x, \tag{4}$$

其中

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x \quad 及 \quad \lambda_n = c\frac{n\pi}{L}, \quad n = 1,2,\cdots. \tag{5}$$

例 1 端点保持 0℃ 的棒中的温度

一根长度为 π 的细棒放在沸水中（温度 100℃），当温度全都达到 100℃时，将棒从沸水中移开. 假设侧面绝热，在 $t=0$ 时刻，将两端迅速浸入到保持在冰点温度 0℃ 的介质中，取 $c=1$，求解 $t>0$ 时的温度 $u(x, t)$.

解 我们所需解决的边值问题是

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

$$u(0,t) = 0 \quad 及 \quad u(\pi,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = 100, \quad 0 < x < \pi.$$

由(4)式，我们有

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t}\sin nx,$$

其中

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 100\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{200}{n\pi}(1-\cos n\pi).$$

代入 b_n 的值，并利用事实：当 n 是偶数时，$(1-\cos n\pi)=0$；而当 n 是奇数时，其值为 2，我们得到

$$u(x,t) = \frac{400}{\pi}\sum_{\substack{n=0 \\ n奇}}^{\infty}\frac{e^{-n^2 t}}{n}\sin nx = \frac{400}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-(2k+1)^2 t}}{2k+1}\sin(2k+1)x.$$

如果将某个给定的 t 值代入级数解，可得到一个仅依赖 x 的函数. 这个函数就给出棒在 t 时刻的温度分布. 特别地，当 $t=0$ 时，$u(x, 0)$就是初始温度分布 $f(x)$的半幅正弦级数展开式，如图 2 和图 4 中第一幅图所示. 图 3 和图 4 是对不同 t 值分别以 $k=0$ 和 $k=10$ 的部分和逼近级数解所得的图像. [138]

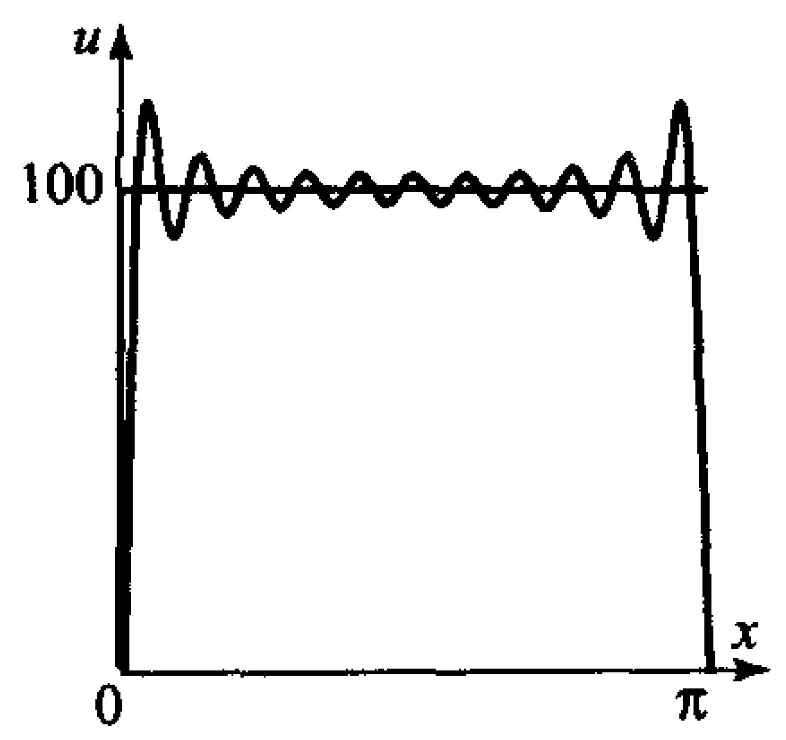


图 2 初始温度分布的正弦傅里叶级数展开式部分和(k 取到 10) $100 = \frac{400}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$, $0 < x < \pi$(参见 2.3 节习题 1)

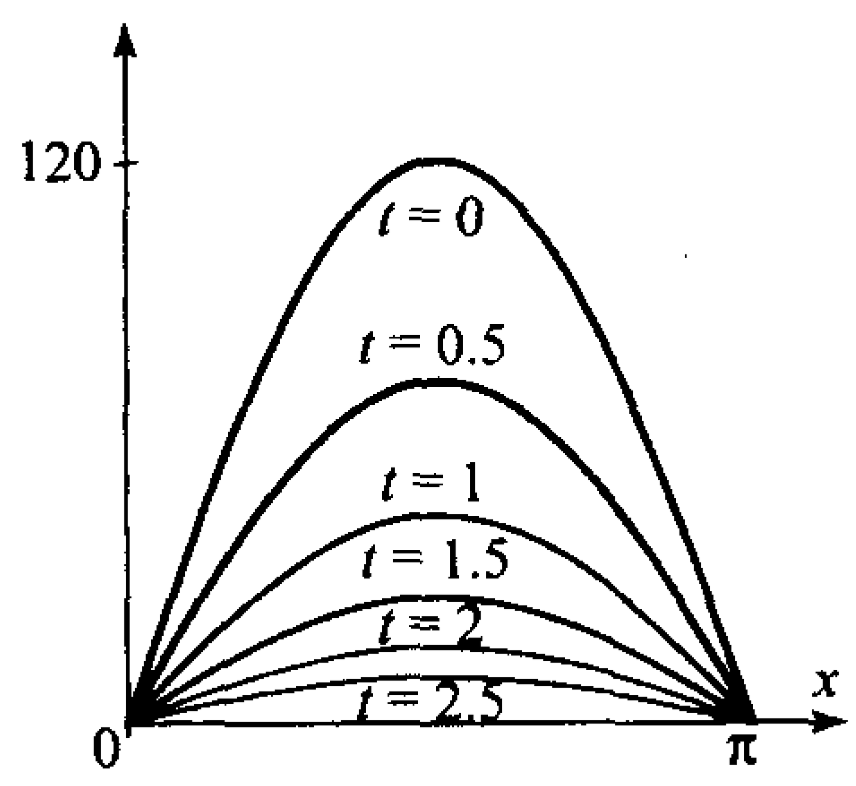


图 3 用第一正规波型 $u_1(x, t)=\frac{400}{\pi}e^{-t}\sin x$ 逼近温度分布

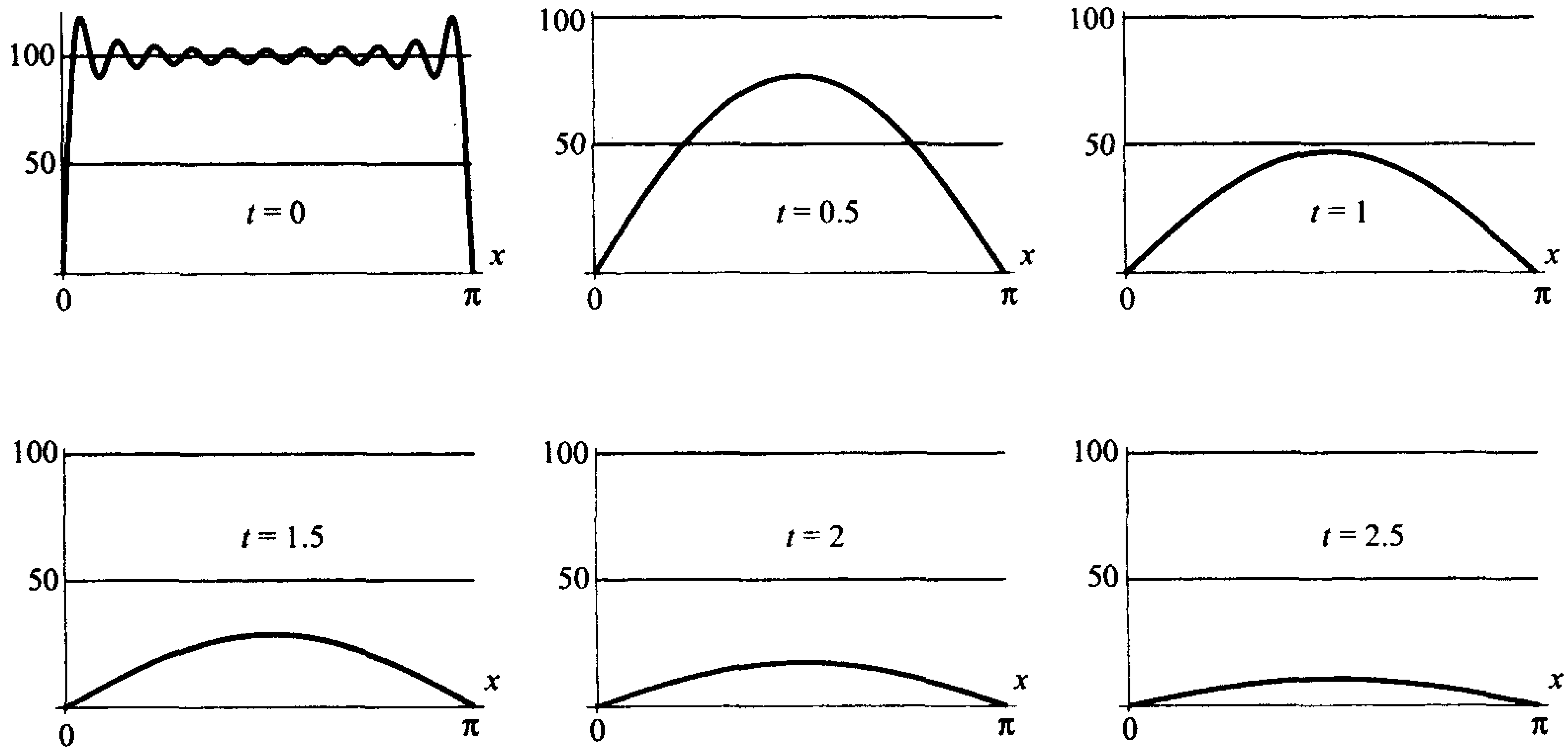


图 4　端点保持 0℃的棒中的温度分布．当 t 增加时，温度衰减到 0．注意到，当 t 很大时，图像的形状由第一正规波型主导．事实上，与图 3 比较，当 $t \geqslant 0.5$ 时，两个图像几乎无法相互区分了

注意到，级数解的高阶项是指数快速衰减的，第二个非零项的指数是第一项的 9 倍，而第三项的是第一项的 25 倍．这说明高阶项极快衰减到零，正因为如此，图 4 第一幅图中出现的吉布斯现象很快地消失了．■

稳态温度分布

图 4 中的图像说明：当 t 增加时，棒中的温度趋近于零．这是很直观的，因为棒的端点保持 0℃，且内部没有热源．一般地，当 $t \to \infty$ 时，温度分布仅是 x 的函数，称为**稳态解**(或**与时间无关的解**)．因此，例 1 中的稳态解是恒等于 0 的函数．

对于一般边界条件，由于稳态解与时间无关，所以 $\partial u/\partial t=0$，代入(1)式得，稳态分布满足微分方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$，或者简单地，$\frac{d^2 u}{dx^2}=0$，因为稳态解 u 仅是 x 的函数．这个微分方程的通解为 $u(x)=Ax+B$，其中 A 和 B 是由边界条件确定的常数，我们以下例说明．

139

例 2　稳态解

描述一端保持温度 T_1、另一端保持温度 T_2 长度为 L 的棒的稳态解．假设侧面是绝热的，且内部没有热源．

解　我们有 $u(0)=T_1$ 和 $u(L)=T_2$，因此由 $u(x)=Ax+B$ 这个事实得到，$B=T_1$，以及 $AL+T_1=T_2$．解出 A，得 $A=\frac{T_2-T_1}{L}$，因此

$$u(x)=\frac{T_2-T_1}{L}x+T_1.$$

从而，稳态解的图像是过给定边界值(在 0 点为 T_1、在 L 点为 T_2)的直线段(见图 5). ■

在本章后面几节中，我们将研究高维的稳态温度分布，这些问题将求解带两个或更多自变量的拉普拉斯方程，这是应用数学中最重要的微分方程之一. 如例 2 所示，其解本质上依赖于边界条件.

下面，我们说明如何利用稳态解来求解某些非齐次边值问题.

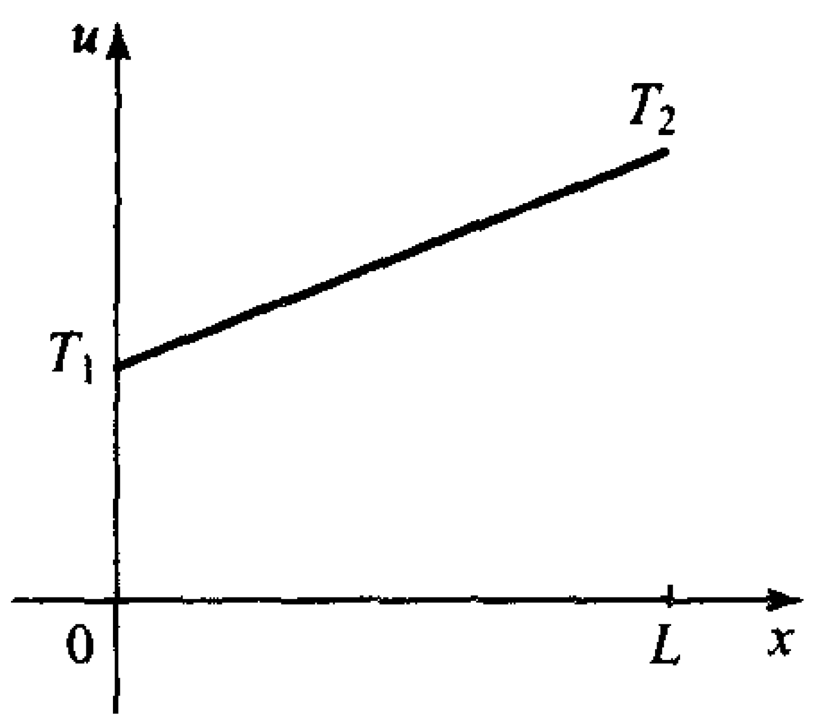


图 5 稳态解，或与时间无关的解

非零边界条件

考虑热边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<L,\quad t>0, \tag{6}$$

$$u(0,t)=T_1 \quad 及 \quad u(L,t)=T_2,\quad t>0, \tag{7}$$

$$u(x,0)=f(x),\quad 0<x<L. \tag{8}$$

当 T_1 和 T_2 不同时为零时，该问题是非齐次的，如果直接尝试用分离变量来求解时，将会遇到边界条件所带来的困难. 正如我们即将描述的，通过减去、再加上稳态解，该问题可以化为零边值问题.

首先，我们求解相应于边界条件(7)的稳态解 $u_1(x)$. 由例 2，我们有

$$\boxed{u_1(x)=\frac{T_2-T_1}{L}x+T_1.} \tag{9}$$

在初始温度分布(8)中减去 $u_1(x)$，考虑所得到的零边值(齐次)热边值问题 [140]

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<L,\quad t>0, \tag{10}$$

$$u(0,t)=0 \quad 及 \quad u(L,t)=0,\quad t>0, \tag{11}$$

$$u(x,0)=f(x)-u_1(x),\quad 0<x<L. \tag{12}$$

令 $u_2(x, t)$是(10)～(12)的解. 由(4)和(5)，我们有

$$\boxed{u_2(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-\lambda_n^2 t}\sin\frac{n\pi}{L}x,} \tag{13}$$

其中 $\lambda_n=\frac{cn\pi}{L}$，且

$$\boxed{b_n=\frac{2}{L}\int_0^L\left(f(x)-\overbrace{\left(\frac{T_2-T_1}{L}x+T_1\right)}^{u_1(x)}\right)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx.} \tag{14}$$

现在，稳态解 $u_1(x)$加上 $u_2(x, t)$就得到(6)～(8)的解：

$$\boxed{u(x,t)=u_1(x)+u_2(x,t).} \tag{15}$$

这可以直接代入方程(6)～(8)，并利用 u_1 和 u_2 的性质，加以验证(参见习题 10).

例 3 非齐次边值问题

考虑例 1 的试验，当棒上温度全都达到 100℃后，将 $x=0$ 端点保持在冰点 0°，而 $x=\pi$ 端点保持在 100°，试求解之.

解 我们有 $T_1=0$，$T_2=100$，因此 $u_1(x)=\frac{100}{\pi}x$，初始条件(12)变为 $100-\frac{100}{\pi}x$. 我们现在来确定(13)式中级数解 u_2 的系数. 利用(14)式及分部积分，我们得到

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(100-\frac{100}{\pi}x\right)\sin nx\,dx=\frac{200}{n\pi}.$$

利用(15)式，我们得到解

$$u(x,t)=\frac{100}{\pi}x+\frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}e^{-n^2t}. \tag{16}$$

141 当我们考察这个解时，会问两个问题：当 $t\to\infty$时，由这个解可以得到稳态解吗？以及当 $t=0$ 时，它可以得到初始温度分布 100 吗？由极限 $\lim_{t\to\infty}\frac{\sin nx}{n}e^{-n^2t}=0$ 知：当 $t\to\infty$时，(16)式级数的每一项均趋于 0，这就得到

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t)=\frac{100}{\pi}x=u_1(x).$$

这个证明不是很严格的(一般而言，函数无穷求和的极限未必等于函数极限的和). 但是，因为有 e^{-n^2t}这一项，级数收敛的速度很快，类似于 2.7 节有关函数项级数收敛性的讨论，可以严格证明这个结论. 为回答第二个问题，我们在(16)式中令 $t=0$，从而得到

$$u(x,0)=\frac{100}{\pi}x+\frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

当 $0<x<\pi$ 时，这个式子等于 100 吗？将这个无穷级数看成锯齿函数的傅里叶级数，我们得到

$$u(x,0)=\frac{100}{\pi}x+\frac{200}{\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)=100,\quad 对\ 0<x<\pi,$$

这就得到了第二个问题的肯定答案. 图 6 的图像说明了这两个答案. 为画出 $u(x,t)$，我们利用(16)式，截取其前三项. ■

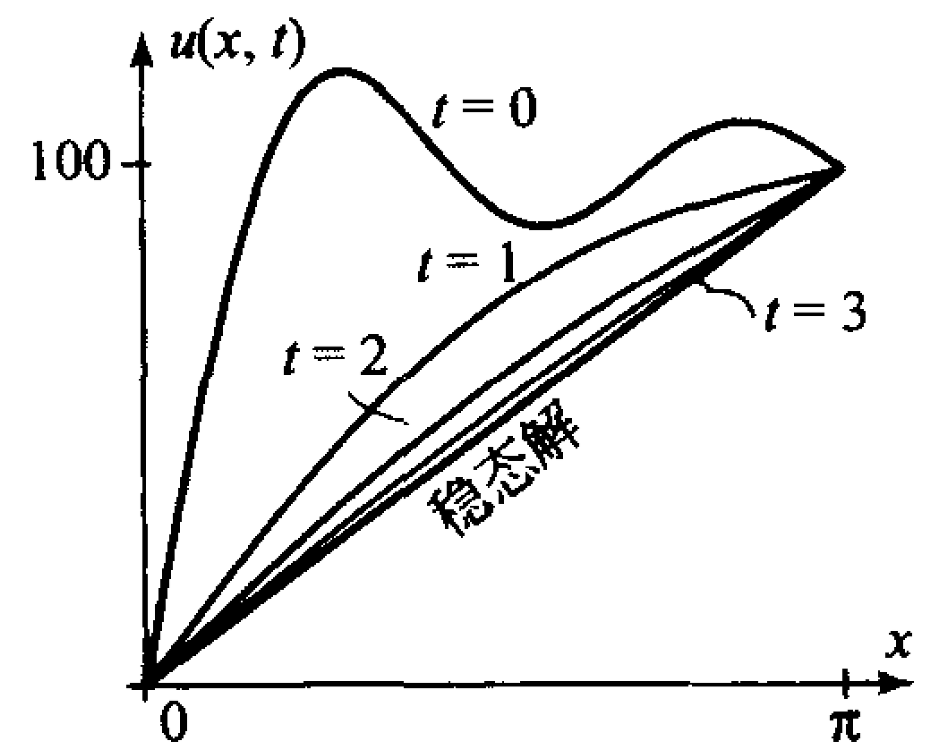


图 6 当 t 增加时，$u(x,t)$ 趋于稳态解 $u_1(x)$. 当 $t=0$ 时，图像趋近于初始温度分布. 注意在端点处图像超出值 100 的吉布斯现象

从最后这个例题中，可以总结出一个求解非齐次边值问题的方法. 通过减去稳态解，我们可以化成一个零边值问题，再用分离变量法求解. 这个方法的有效性依赖于热传导方程是线性的这个事实. 这些思想非常重要，并在后面章节中用来求解更复杂的高维非齐次问题.

附录：一维热传导方程的推导

考虑一根水平放置在 x 轴上长度为 L 的棒，其端点在 $x=0$ 和 $x=L$ 处. 假设棒的横截面是均匀的，且侧面的绝热性很好，所以棒内的热流仅为 x 方向的. 142 为推导控制棒内热传导的方

程，我们引入一些定义和物理定律. 我们将需要如下定义：

$u(x,t)$ = x 处 t 时刻的温度，

$e(x,t)$ = **热能密度**(单位体积的热能)，

$\phi(x,t)$ = **热通量**(单位时间内沿正方向流过单位面积的热能的数量)，

$Q(x,t)$ = **热源**(单位体积单位时间的热能)，

$s(x)$ = **比热**(使单位质量的物体温度升高 1 度所需的热能，此处假设它只依赖于棒上的位置 x)，

$\rho(x)$ = **质量密度**(单位体积的质量).

考虑棒上 x 处宽度为 Δx 的竖直薄片，记其横截面积为 A(图 7)，该薄片的体积为 $A\Delta x$，因而其全部热能是

$$\text{薄片中的热能} = e(x,t)A\Delta x.$$

由于薄片中的热能也可以定义为：使薄片的温度从某个参照温度，比如说 0°，升高到当前温度 $u(x,\ t)$所需的能量，我们有

$$e(x,t)A\Delta x = s(x)u(x,t)\rho(x)A\Delta x.$$

因此

$$e(x,t) = s(x)u(x,t)\rho(x). \tag{17}$$

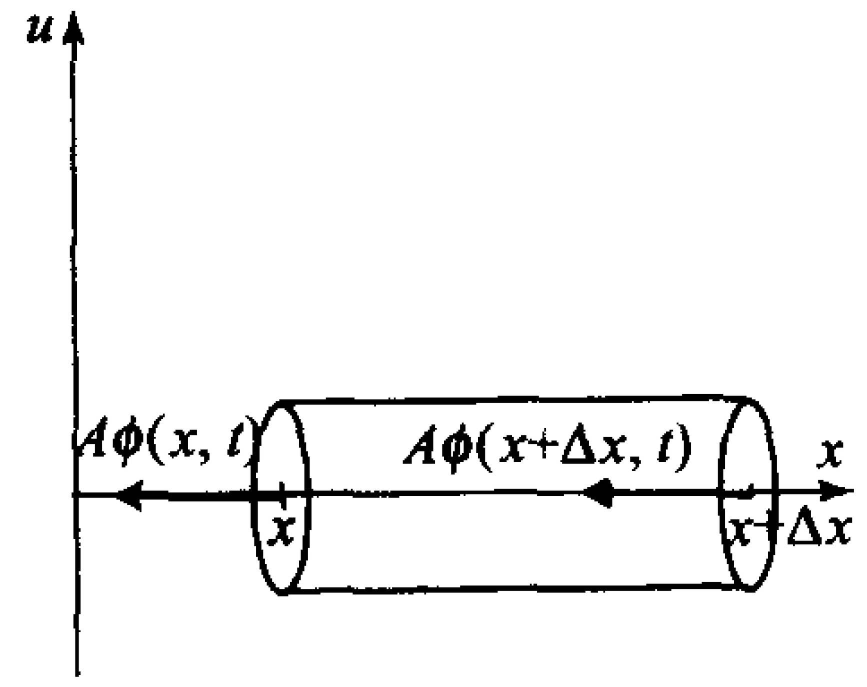


图 7　流入棒上一小段的热流

热能守恒定律表明热能的改变是由于从边界流过的热能以及内部热源. 应用到 x 处的薄片上，定律说明

$$\frac{\partial}{\partial t}[e(x,t)A\Delta x] = \phi(x,t)A - \phi(x+\Delta x,t)A + Q(x,t)A\Delta x \tag{18}$$

(见图 7). 我们要运用的第二个定律是**傅里叶热传导定律**，以方程

$$\phi(x,t) = -K_0\frac{\partial u}{\partial x}$$

来描述，其中正常数 K_0 称为**热导率**. 傅里叶定律的定量描述就是热从温度高处流向温度低处这个众所周知的事实. (因此，如果随着 x 的增加温度也在增加，则热能将向左流动，这就解释为傅里叶定律中的负号.) [143]

现在，我们已经有了推导热传导方程所需的知识，回到(18)式，除以 $A\Delta x$，并在方程右端令 $\Delta x\to 0$，得到

$$\frac{\partial}{\partial t}e(x,t) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\phi(x,t)-\phi(x+\Delta x,t)}{\Delta x} + Q(x,t) = -\frac{\partial\phi}{\partial x} + Q(x,t).$$

将左端的 $e(x,\ t)$以(17)式替代，而右端应用傅里叶定律，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t}[s(x)u(x,t)\rho(x)] = -\frac{\partial}{\partial x}\left[-K_0\frac{\partial u}{\partial x}\right] + Q(x,t),$$

由此得到**热传导方程**

$$s(x)\rho(x)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = K_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t).$$

如果比热和密度都是常数，则方程化为

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\frac{K_0}{s\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{s\rho}Q(x,t).$$

常数$\frac{K_0}{s\rho}$称为**热扩散率**. 最后，如果没有内部热源，则 $Q(x,\ t)=0$，方程变为

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\frac{K_0}{s\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

令 $c^2=\frac{K_0}{s\rho}$，我们就得到本节讨论的热传导方程.

习题 3.5

在习题 1～6 中，求解给定条件的热传导方程(1)～(3)，并简单描述每种情形相应的物理解释.

1. $L=\pi$，$c=1$，$f(x)=78$.

2. $L=\pi$，$c=1$，$f(x)=30\sin x$.

3. $L=\pi$，$c=1$，

$$f(x)=\begin{cases}33x & 若\ 0<x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 33(\pi-x) & 若\ \frac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$$

4. $L=\pi$，$c=1$，

$$f(x)=\begin{cases}100 & 若\ 0<x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0 & 若\ \frac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$$

5. $L=1$，$c=1$，$f(x)=x$.

[144] 6. $L=1$，$c=1$，$f(x)=e^{-x}$.

7. (a)对不同的 t 值，画出例 1 的温度分布图像，大约需要多少时间最大温度低于 50°.

(b)画出曲面 $z=u(x,\ t)(t>0)$，并解释其意义，特别注意当 $t\to 0$ 和 $t\to\infty$时描述所得到的曲面.

8. (a)对任意 c，求解推广的例 1.

(b)对 $c=1$，2，3，画出 $t=1$ 时解的图像. 描述 c 值的改变是如何影响热传导率的，通过考虑(4)和(5)给出的解来验证你的答案.

9. 确定长度为 1 的棒满足给定边界条件的稳态解.

(a)$u(0,\ t)=0$，$u(1,\ t)=100$.　　(b)$u(0,\ t)=100$，$u(1,\ t)=100$.

10. (a)验证由(15)式给出的(6)～(8)的解.

(b)试证：用(8)式的初始温度分布 $f(x)$的傅里叶系数，(14)式的系数是

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx-2\,\frac{T_1+(-1)^{n+1}T_2}{n\pi}.$$

在习题 11～14 中，求解给定条件的非齐次边值问题(6)～(8).

11. $u(0,\ t)=100$，$u(1,\ t)=0$，$f(x)=30\sin(\pi x)$，$L=1$，$c=1$.

12. $u(0,\ t)=100$，$u(1,\ t)=100$，$f(x)=50x(1-x)$，$L=1$，$c=1$.

13. $u(0,\ t)=100$，$u(\pi,\ t)=50$，$f(x)$如习题 3，$L=\pi$，$c=1$.

14. $u(0,\ t)=0$，$u(\pi,\ t)=100$，$f(x)$如习题 4，$L=\pi$，$c=1$.

15. 如果初始温度分布 $f(x)$就等于稳态解 $u_1(x)$，则(6)～(8)的解是多少？试以物理知识验证你的答案.

16. **专题问题：非齐次波动问题.** 利用求解边值问题(6)～(8)的求解思想，求解非齐次波动问题

$$\begin{aligned}&u_{tt}=c^2u_{xx}, && 0<x<L, && t>0,\\ &u(0,t)=A, && u(L,t)=B, && t>0,\\ &u(x,0)=f(x), && u_t(x,0)=g(x), && 0<x<L,\end{aligned}$$

其中 A 和 B 不全为零．（可以验证，与时间无关的解仍然是 $u_1(x)=\frac{B-A}{L}x+A$．与热传导方程不同的是，当 $t\to\infty$时，波动方程的解一般并没有极限，因此，$u_1(x)$并不是时间渐近形式的解．但是，解是围绕 u_1 波动的．为此，物理学家仍然称 u_1 为平衡解．）

17. 试证：对固定 $t>0$，热传导方程(4)的解对 $0\leqslant x\leqslant L$ 是一致收敛的．（假设 $f(x)$对 $0\leqslant x\leqslant L$ 是有界的．） [145]

3.6 棒中的热传导：各种边界条件

我们继续研究带有不同的边界条件的一维热传导方程．它们是棒中热传导的不同模型：两端绝热，一端保持零度、另一端随周围介质而改变温度，以及其他有趣变形．我们将会发现：边界条件决定那些构成解的函数类型．在前一节中，解表达成正弦级数；这里我们将用余弦级数，以及其他所谓的广义傅里叶级数展开式．

例 1 **两端绝热的棒**

初始热量分布为 $f(x)$、两端没有漏热、长度为 L 的棒中的热传导问题(图 1)可以用热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<L,\quad t>0 \tag{1}$$

和边界条件(在两端点都没有沿 x 方向的热通量)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0,\quad t>0, \tag{2}$$

以及初始条件

$$u(x,0)=f(x),\quad 0<x<L \tag{3}$$

来表示．试用分离变量法求解这个问题．

解 假设 $u(x,t)=X(x)T(t)$，按照 3.5 节的方法，完全一样的思路，可以得到如下方程：

$$T'-kc^2T=0$$

$$X''-kX=0,\quad X'(0)=0\quad 及\quad X'(L)=0,$$

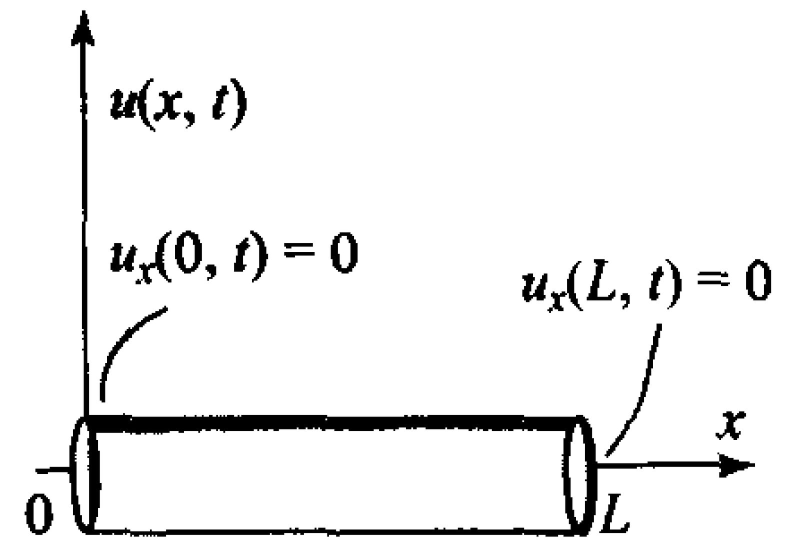


图 1 两端绝热的棒

其中 k 是分离常数．注意到，微分方程与 3.5 节的一样，但是由于条件(2)，边界条件是不同的．边界条件的差异将导致 X 解的不同．易证，正值 k 只能导致平凡解 $X=0$．对 $k=0$，我们有 $X''=0$，这导致 $X=c_1x+c_2$．微分后代入边界条件，我们发现：$c_1=0$，而 c_2 为任意数．因此取 $k=0$，得到一个非平凡解

$$X_0=1.$$

为考察负分离常数情形，我们令 $k=-\mu^2$，求解所得到的方程，得到 $X=c_1\cos\mu x+c_2\sin\mu x$．计算

$$X'=-c_1\mu\sin\mu x+c_2\mu\cos\mu x,$$ [146]

并利用第一个边界条件 $X'(0)=0$，我们得到 $c_2=0$；利用第二个边界条件 $X'(L)=0$，我们得到方程 $\sin\mu L=0$，由此我们得到

$$\mu=\mu_n=\frac{n\pi}{L},\quad n=1,2,\cdots.$$

因此，

$$X_n = \cos\frac{n\pi}{L}x, \quad n = 1,2,\cdots.$$

相应地，关于 T 的方程解为

$$T_0 = a_0 \quad 及 \quad T_n = a_n e^{-\lambda_n^2 t}, \quad n = 1,2,\cdots,$$

其中 $\lambda_n = c\frac{n\pi}{L}$. 叠加乘积解，我们得到

$$\boxed{u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 t}\cos\frac{n\pi}{L}x.} \tag{4}$$

将这个解与零端点条件的热传导问题解(4)(3.5 节)比较，发现边界条件的改变使得正弦变成了余弦，且解将涉及初始温度分布的傅里叶余弦展开，而不是傅里叶正弦展开. 为完成解，我们必须确定系数 a_n，使之满足初始条件(3)，这就得到

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x.$$

注意到，这是 f 的余弦展开式，我们得出结论

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \quad 及 \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx.} \tag{5}$$

(利用 2.4 节(2)式.)因此，边值问题(1)～(3)的解由(4)给出，其中系数由(5)式确定. ■

例 1 中出现余弦展开式，而前一节中出现正弦展开式，这是由于边界条件的改变而引起的：零端点条件导致正弦展开式；而端点零导数条件导致余弦展开式. 正如下例所示，当施加其他类型的边界条件时，将自然出现其他的展开式. 这些所谓的广义傅里叶级数展开式将在第 6 章详细讨论.

例 2 一端有热辐射的棒：广义傅里叶级数

确定长度为 L 的棒上的温度 $u(x, t)$，假设一端保持在零度，另一端有热量流失到周围介质中，流失速率与其温度成正比. 因此，边界条件是

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = -\kappa u(L,t) \quad (t > 0), \tag{6}$$

147

其中 κ 为正常数，称为**热交换常数或对流系数**. 记初始温度分布为 $f(x)$，边值问题就是求解热传导方程(1)、边界条件(6)以及初始条件(3). 这个问题中的边界条件称为**罗宾条件**，这是形如 $c_1 u(x_0, t) + c_2 u_x(x_0, t) = h(t)$ 的线性边界条件.

解 令 $u(x, t) = X(x)T(t)$，应用如 3.5 节的分离变量法，得到方程 $X'' - kX = 0$，$X(0) = 0$，$X'(L) = -\kappa X(L)$，以及 $T' - kc^2 T = 0$，其中 k 是分离常数. 如果 k 是正的，比如 $k = \mu^2$，$\mu > 0$，则 $X'' - \mu^2 X = 0$ 的通解是 $X = c_1\cosh\mu x + c_2\sinh\mu x$，条件 $X(0) = 0$ 蕴涵着 $c_1 = 0$. 而由条件 $X'(L) = -\kappa X(L)$，我们得到 $\mu c_2\cosh\mu L = -\kappa c_2\sinh\mu L$，但是 $\cosh\mu L$ 和 $\sinh\mu L$ 都是严格正的，所以只有当 $c_2 = 0$ 时，最后一个方程才成立，从而得到 $X = 0$. 因此，$k > 0$ 将推出平凡解. 类似地，可以得到 $k = 0$ 蕴涵着平凡解. 因此，$k = -\mu^2 < 0$，方程变为

$$X'' + \mu^2 X = 0, \quad X(0) = 0 \quad 及 \quad X'(L) = -\kappa X(L),$$

$$T' + \mu^2 c^2 T = 0.$$

求解关于 X 的方程，得到 $X=c_1\cos\mu x+c_2\sin\mu x$. 利用边界条件，我们得到 $X=\sin\mu x$，其中 μ 满足 $\mu\cos\mu L+\kappa\sin\mu L=0$，或等价地

$$\tan\mu L = -\frac{\mu}{\kappa}. \tag{7}$$

注意到，正是边界条件导致了复杂方程(7)，与在求解零边值热传导问题(3.5 节)时所得到的简单方程 $\sin\mu L=0$ 比较.

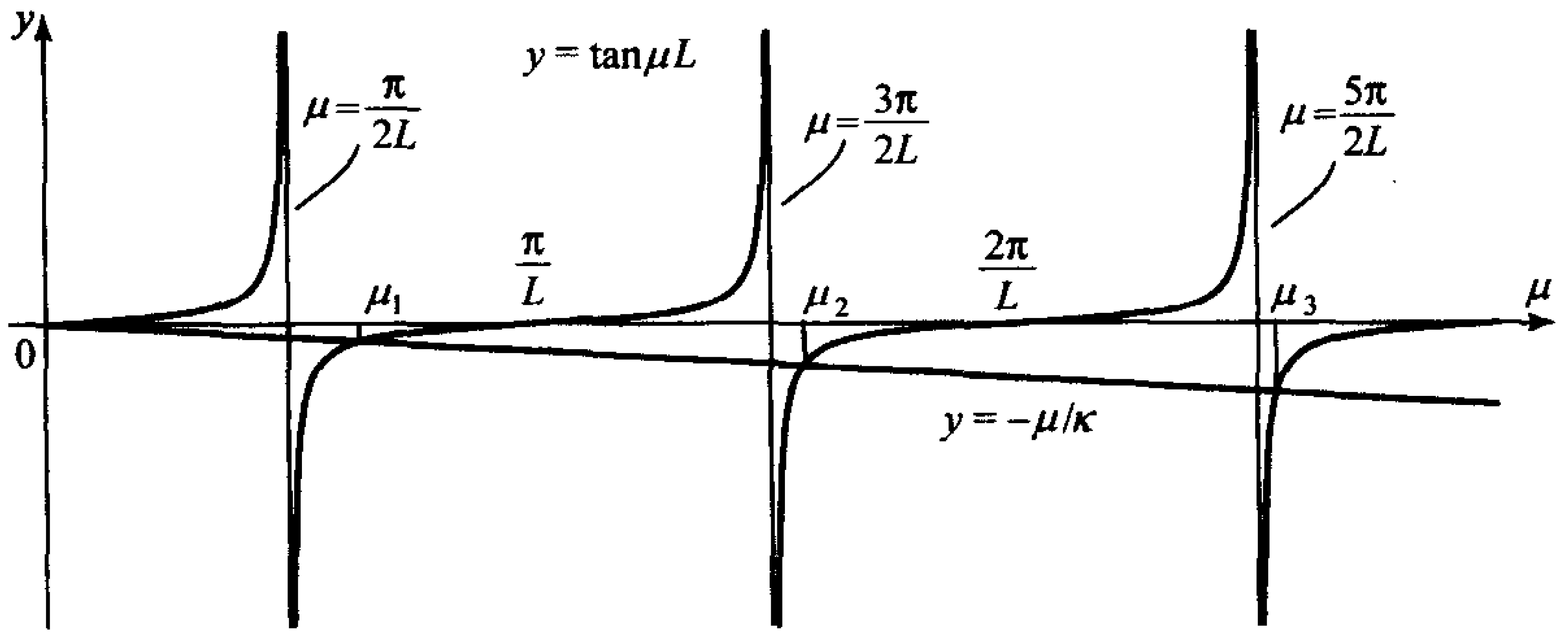


图 2　$y=\tan\mu L$ 和 $y=-\frac{\mu}{\kappa}$ 作为 $\mu>0$ 的函数时的图像，超越方程 $\tan\mu L=-\frac{\mu}{\kappa}$ 有无穷多个正根 $\mu_1<\mu_2<\mu_3\cdots$

在图 2 中，我们画出了 $y=\tan\mu L$ 和 $y=-\frac{\mu}{\kappa}$ 作为 μ 的函数时的图像. 这些图形的交点就是(7)的解. 因此，如图 2 所示，方程(7)有无穷多个正根 μ_1，μ_2，…. 虽然，我们不能像前面的例子那样给出 μ_n 的显式表达式，但是我们可以像前面那样来求解边值问题. 正如例 3 显示，利用计算机系统，可以得到 μ_n 的数值逼近. 相应于 μ_n，我们有

$$X_n = \sin\mu_n x$$

和

$$T_n = c_n e^{-c^2\mu_n^2 t}, \quad n = 1,2,\cdots,$$

148

这可以通过求解 T 的方程得到. 叠加乘积解，我们得到

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-c^2\mu_n^2 t}\sin\mu_n x} \tag{8}$$

是(1)和(2)的解. 将解(8)与 3.5 节(4)式比较，注意到，此时解关于 x 不是周期的，因为解 $\sin\mu_n x$ 没有公共的周期. 为完成解，我们必须确定系数 c_n，使之满足初始条件. 令 $t=0$，我们得到

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\sin\mu_n x. \tag{9}$$

这就是所谓的带有**广义傅里叶系数** c_n 的**广义傅里叶级数**. 注意，表达式(9)与 2.4 节的正弦级

数展开式有些类似，但是也有不同之处(例如，函数 $\sin\mu_n x$ $(n=1,2,\cdots)$ 没有公共的周期). 这个新的表示形式推广了傅里叶正弦级数展开式，后者相应于 $\kappa\to\infty$(此时，由图 2 可以发现，μ_n 趋于 $n\pi/L$). 有关这种展开式的一般理论将在第 6 章介绍. 类似于傅里叶级数情形，我们观察到，如果函数

$$\sin\mu_1 x, \sin\mu_2 x, \cdots$$

满足如下的“正交关系”：

$$\int_0^L \sin\mu_m x \sin\mu_n x \, dx = 0, \quad 对\ m \neq n, \tag{10}$$

则我们可以求出 c_n，将(9)式乘以 $\sin\mu_m x$，并从 0 到 L 积分，假设我们可以交换求和与积分的顺序，并利用(10)，得到

$$\int_0^L f(x)\sin\mu_m x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \overbrace{\int_0^L \sin\mu_m x \sin\mu_n x \, dx}^{=0\ 除非\ n=m} = c_m \int_0^L \sin^2\mu_m x \, dx.$$

这就得到公式

$$\boxed{c_n = \frac{1}{\int_0^L \sin^2\mu_n x \, dx}\int_0^L f(x)\sin\mu_n x \, dx.} \tag{11}$$

习题 10 给出了正交关系(10)式的证明框架，由此就可以完成这个形式上的讨论. 从而，边值问题(1)、(6)和(3)的完全解就是级数(8)，其系数由(11)式给出. ■

为将上述讨论严格化，我们需要一个类似于傅里叶表示定理(2.3 节定理 1)的形如(9)的级数表示定理. 这样的表示定理在第 6 章介绍，那里我们学习施图姆-刘维尔问题的一般理论(参见，特别地，6.2 节定理 3). 这些结果的要点是：对分段光滑函数，系数由(11)确定的形如(9)式的级数以与傅里叶级数一样的方式收敛. 我们以例 2 的如下数值应用来说明这些思想.

149

例 3　一端有热辐射的棒的数值应用

考虑例 2 中的边值问题，$L=1$，$c=1$，$\kappa=1$，以及初始温度分布 $f(x)=x(1-x)$.

(a)求出前五个 μ_n 和相应的 X_n.

(b)求出由(9)给出的 $f(x)$ 级数展开式的前五项，画出 f 以及几个部分和的图像，以验证展开式的正确性.

(c)写出解(8)的前五项，对不同的 t 值，画出这个部分和的图像，并由此来估计要经过多长时间棒的最高温度降到 0.1 度以下.

解　(a)在图 3 中，我们画出了 $y=\tan x$ 和 $y=-x$ 的图像. 按照例 2 的求解过程，为求出 μ_n，我们必须求解方程 $\tan x=-x$. 利用计算机系统，我们可以找到其前五个解近似为

$$\mu_1 = 2.0288, \quad \mu_2 = 4.9132, \quad \mu_3 = 7.9787,$$
$$\mu_4 = 11.0855, \quad \mu_5 = 14.2074.$$

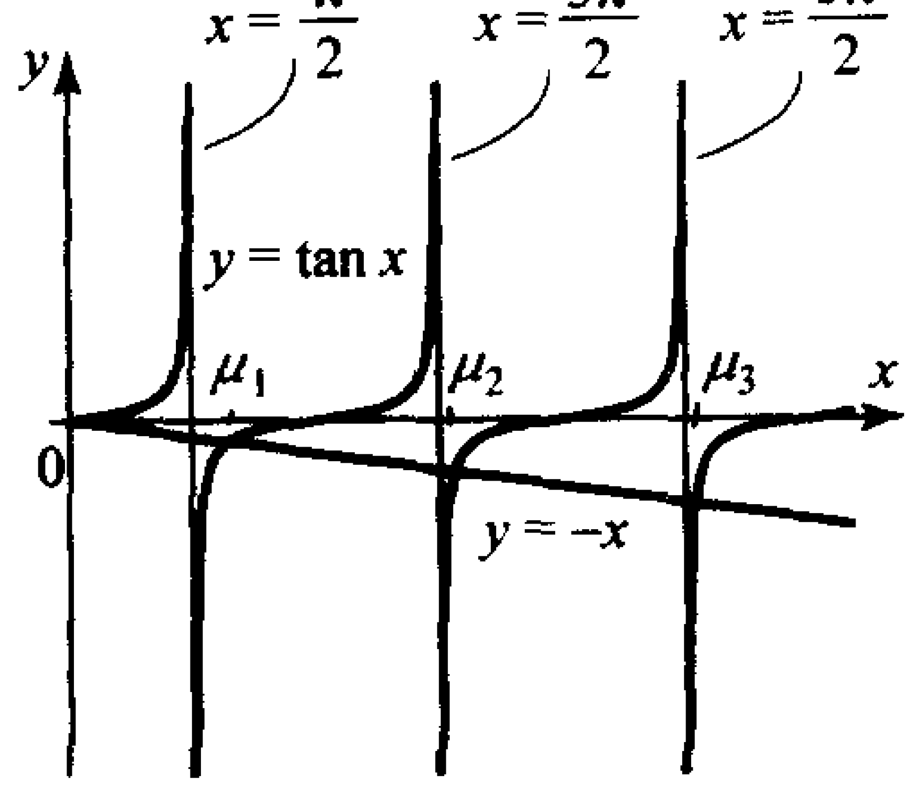


图　3

因此，

$$X_1(x) = \sin(2.0288x), \quad X_2(x) = \sin(4.9132x),$$

$$X_3(x)=\sin(7.978\,7x),\quad X_4(x)=\sin(11.085\,5x),\quad X_5(x)=\sin(14.207\,4x).$$

(b)由(9)和(11)式，我们有

$$x(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\mu_n x,$$

其中

$$c_n=\int_0^1 x(1-x)\sin\mu_n x\,dx\Big/\int_0^1\sin^2\mu_n x\,dx,$$

μ_j 的近似数值由(a)给出．利用计算机，我们可以得到这些系数的近似值

$$c_1=0.213\,3,\quad c_2=0.104\,0,\quad c_3=-0.022\,0,\quad c_4=0.018\,7,\quad c_5=-0.008\,3.$$

因而，f 的展开式为

$$f(x)=0.213\,3\sin(2.028\,8x)+0.104\,0\sin(4.913\,2x)-0.022\,0\sin(7.978\,7x)$$
$$+0.018\,7\sin(11.085\,5x)-0.008\,3\sin(14.207\,4x)+\cdots.$$

记住，这并不是傅里叶正弦级数，因为函数 $\sin\mu_n x$ 并没有公共的周期，但是与傅里叶级数一样的是，这个展开式也可以用来逼近函数．在图 4 中，沿着 f 的图像，我们画出了这个广义傅里叶级数的第五项部分和的图像．除了在端点 $x=1$ 处收敛得较慢外，在整个区间[0，1]上，我们都得到了一个较好的逼近． 150

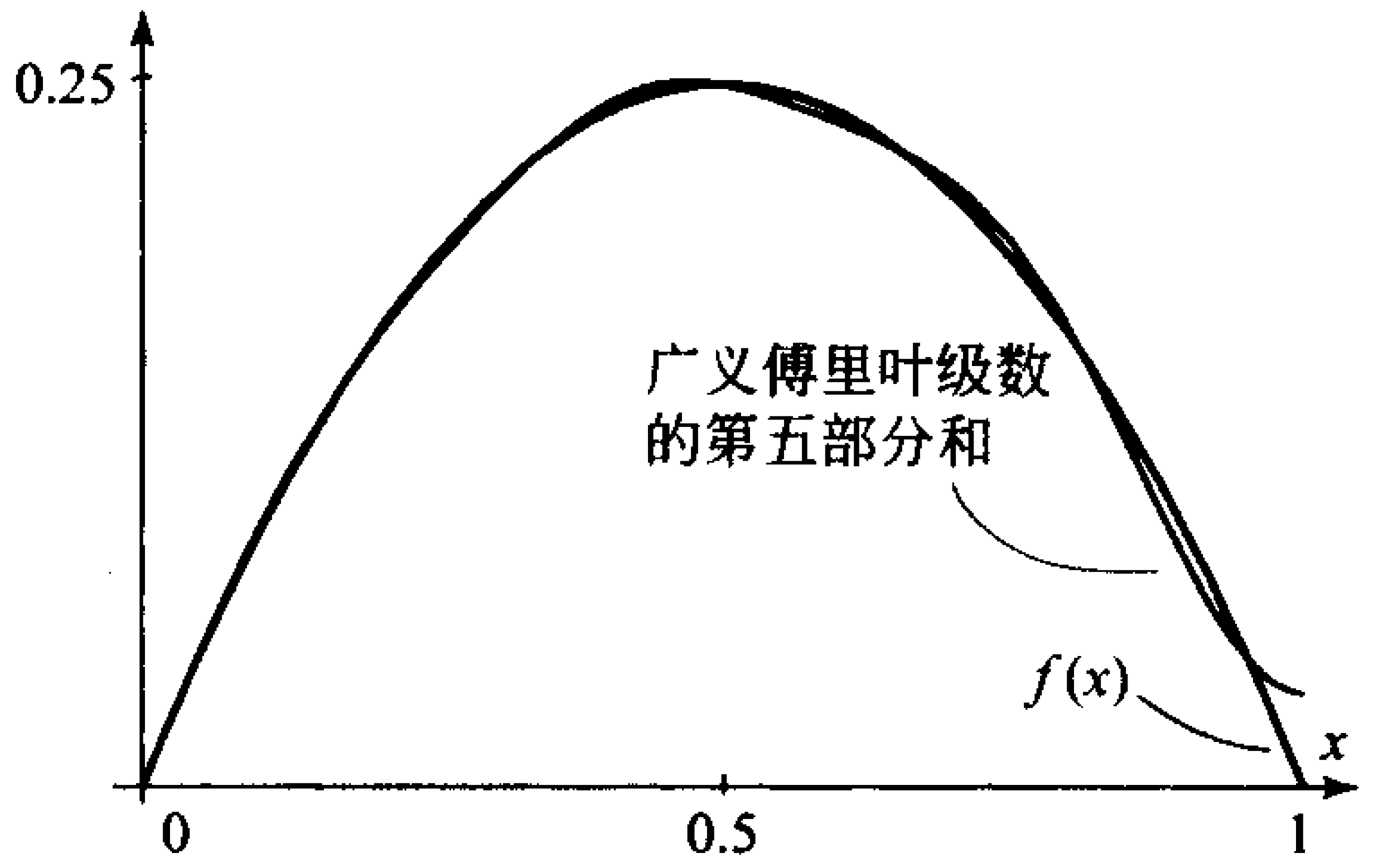


图 4　$f(x)=x(1-x)(0<x<1)$的广义傅里叶级数展开

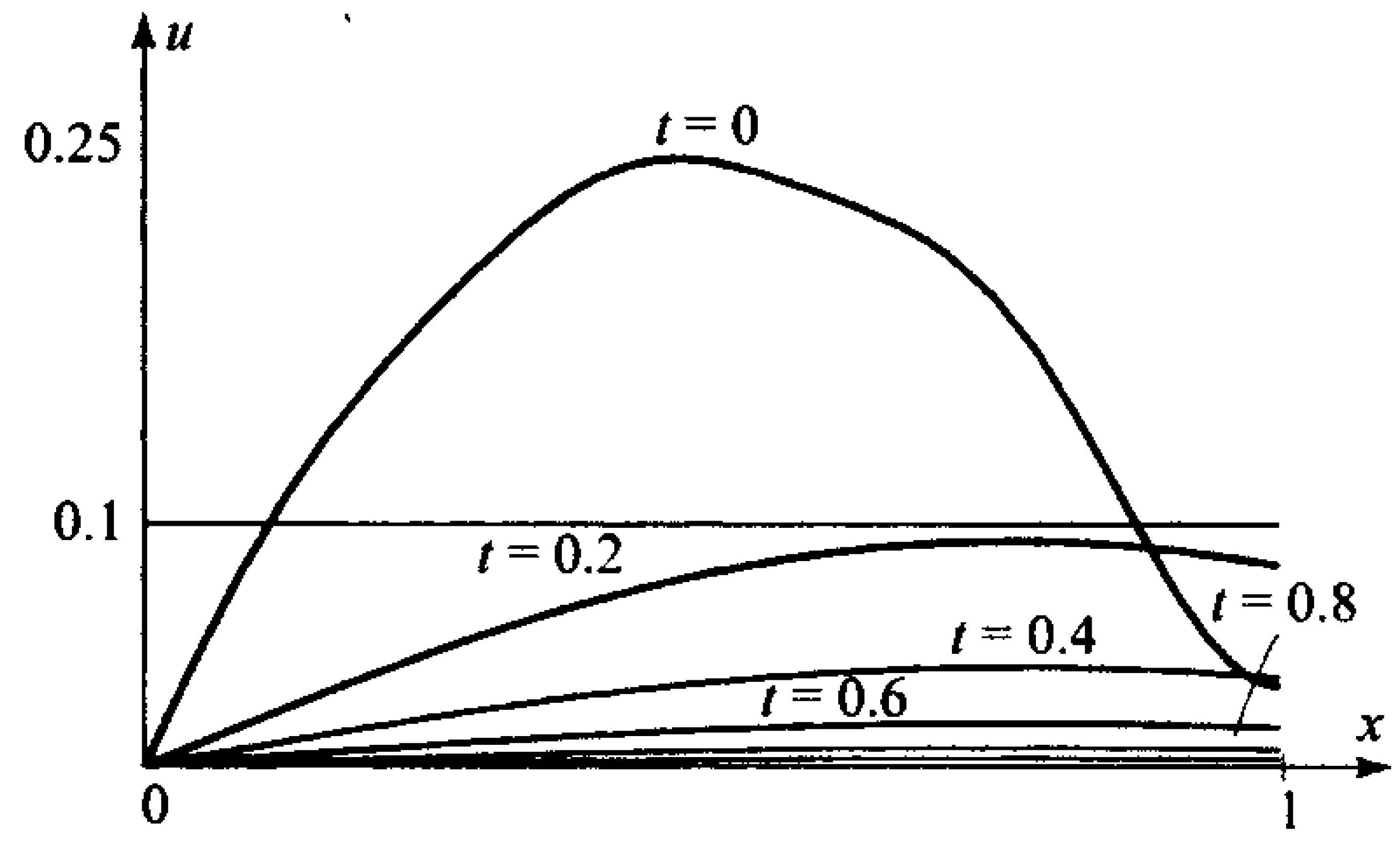


图 5　不同时刻的温度分布(用第六项部分和)

(c)结合(8)式及(b)部分，我们有

$$u(x,t)=0.213\,3e^{-\mu_1^2 t}\sin(2.028\,8x)+0.104\,0e^{-\mu_2^2 t}\sin(4.913\,2x)$$
$$-0.022\,0e^{-\mu_3^2 t}\sin(7.978\,7x)+0.018\,7e^{-\mu_4^2 t}\sin(11.085\,5x)$$
$$-0.008\,3e^{-\mu_5^2 t}\sin(14.207\,4x)+\cdots,$$

其中 μ_n 由(a)给出，画出第五项部分和在 $t=0$，0.2，0.4，…时的图像．由图 5，我们发现大约在 $t=0.2$ 时，棒上的最高温度降到 0.1 度以下． ■

习题 3.6

在习题 1～6 中，对给定数据，求解热传导问题(1)～(3)．

1. $L=\pi$，$c=1$，$f(x)=100$．[提示：在这种情形下，你可以利用物理直观来猜测答案．]
2. $L=1$，$c=1$，$f(x)=\cos\pi x$．

3. $L=\pi$，$c=1$，当 $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)=100x$；而当 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 时，其值为 $100(\pi-x)$.

4. $L=1$，$c=1$，当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=100$；而当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时，其值为 0.

5. **只含奇调和项的问题.** 试证：带有边界条件 $u(0,\ t)=0$ 和 $u_x(L,\ t)=0$，以及初始条件 $u(x,\ 0)=f(x)$，热传导方程(1)的解是

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\sin\left[\frac{\pi}{2L}(2n+1)x\right]e^{-\left[c\frac{\pi}{2L}(2n+1)\right]^2t},$$

其中

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left[\frac{\pi}{2L}(2n+1)x\right]dx.$$

151

6. 求解习题 5 中的问题，$c=1$，$L=\pi$，以及 $f(x)=\sin x$.

7. 长度为 L 的棒在给定时刻 t 的平均温度由

$$\frac{1}{L}\int_0^L u(x,t)\,dx$$

给出. 假设如例 1，棒是绝热的，即与周围介质没有热交换，试证：平均温度对所有时间是常值的. 用初始热量分布 $f(x)$ 来表示，平均温度是多少？你的答案与直观相符吗？试解释. [提示：对(4)式逐项积分.]

8. 试证：例 1 中的稳态温度是常值，且等于平均温度.

9. 计算习题 1 和 5 的平均温度.

10. **正交性.** 按照下面的步骤建立正交关系(10).

(a)对 $m\neq n$，试证：

$$\int_0^L\sin\mu_m x\sin\mu_n x\,dx=\left[\mu_m\sin\mu_n L\cos\mu_m L-\mu_n\cos\mu_n L\sin\mu_m L\right]/(\mu_n^2-\mu_m^2).$$

(b)利用(7)式证明(a)的右端为 0.

在习题 11～14 中，对给定初始温度分布，重做例 3.

11. $f(x)=x$.

12. $f(x)=\sin\pi x$.

13. $f(x)=\begin{cases}100 & 若\ 0<x\leqslant\frac{1}{2},\\ 0 & 若\ \frac{1}{2}<x<1.\end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases}0 & 若\ 0<x\leqslant\frac{1}{2},\\ 100\left(x-\frac{1}{2}\right) & 若\ \frac{1}{2}<x<1.\end{cases}$

15. **专题问题：一端绝热、另一端有热辐射的棒.** 将例 2 的左端边界条件改为 $u_x(0,\ t)=0$，其他条件不变，再完成例 2. 你的答案将含有余弦函数.

16. **专题问题：薄圆环内的热传导.** 这个问题研究单位半径的薄圆环内的热传导，假设其侧面是绝热的. 环内的温度由热传导方程(1)控制，其中 x 表示沿环的弧长(图 6). 因此，虽然是二维的形状，但是我们得到的是一维的问题. 形状确实起着作用，因为此时的边界条件是周期的，即

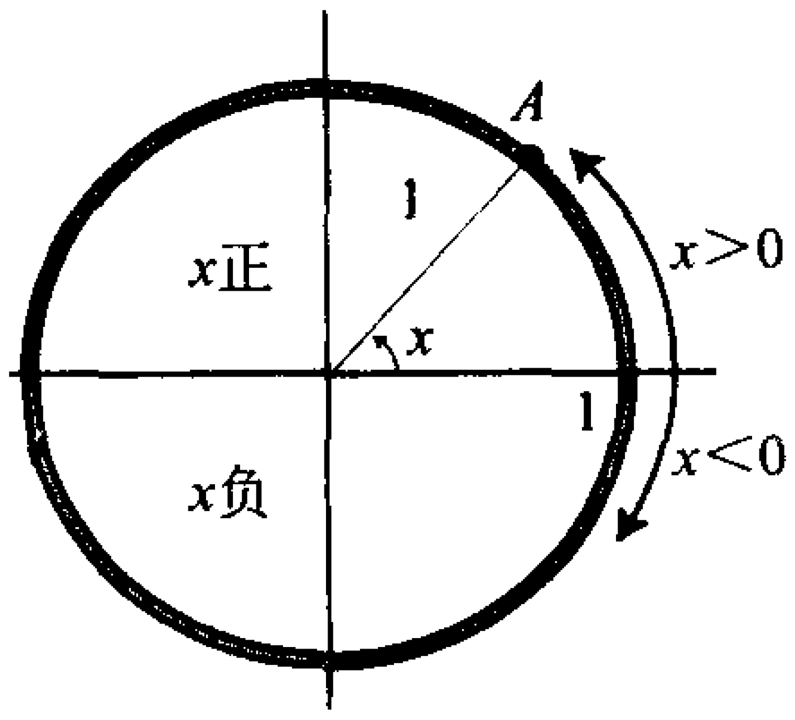


图 6　当 x 取遍区间$(-\pi,\ \pi]$时，点 A 走遍半径为 1 的圆周. 这里，x 是点 A 到点$(1,\ 0)$的距离，它也可以用由水平轴和从原点且过点 A 的射线所构成的角的弧度来度量

$$u(-\pi,t)=u(\pi,t) \quad 及 \quad u_x(-\pi,t)=u_x(\pi,t).$$

这里我们将环想成是在区间$-\pi<x\leqslant\pi$上参数化了的，初始条件由(3)式给出.

(a)利用分离变量法，推导出微分方程和边界条件

$$T'-kc^2T=0,$$
$$X''-kX=0,$$
$$X(-\pi)=X(\pi) \quad 及 \quad X'(-\pi)=X'(\pi).$$

152

(b)试讨论：选取正的k只会得到X的平凡解.

(c)试证：对$k=0$，我们得到解$X_0=a_0$.

(d)试证：对$k=-\mu^2$，非平凡解只出现在$\mu=n$，$n=1，2，3，\cdots$时，而相应的解是$X_n=a_n\cos nx+b_n\sin nx$.

(e)得出结论：

$$u(x,t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)e^{-n^2c^2t},$$

其中a_0，a_n和b_n是f的傅里叶系数，由2.2节的欧拉公式给出.

下面一组习题说明：边界条件对解有着各种各样的影响. 例如，在下面这个习题中，你将发现分离常数可能取正、负值，也将遇到关于μ的新方程，因而有新的广义傅里叶级数展开式.

17. **专题问题：涉及正、负值分离常数的问题.** 考虑热边值问题

$$u_t=u_{xx}, \quad t>0, \quad 0<x<1,$$
$$u_x(0,t)=-u(0,t), \quad u_x(1,t)=-u(1,t),$$
$$u(x,0)=f(x).$$

这是端点有正比于其温度的漏热的棒中热传导问题模型.

(a)利用分离变量法，得到

$$T'-kT=0,$$
$$X''-kX=0, \quad X'(0)=-X(0),X'(1)=-X(1),$$

其中k是分离常数.

(b)试讨论：k不能为0.

(c)试证：如果$k=\mu^2$，则$\mu=1$，且相应的解为

$$T_0(t)=e^t \quad 及 \quad X_0(x)=e^{-x}.$$

(d)试证：如果$k=-\mu^2$，则$\mu=n\pi$，$n=1，2，\cdots$，且相应的解为

$$T_n(t)=e^{-(n\pi)^2t}$$

且

$$X_n(x)=n\pi\cos n\pi x-\sin n\pi x, \quad n=1,2,\cdots.$$

(e)建立函数X_0，X_1，X_2，$\cdots$在区间(0，1)上的正交性：

$$\int_0^1 X_j(x)X_k(x)dx=0 \quad 若\ j\neq k.$$

153

(f)得出结论

$$u(x,t)=c_0e^te^{-x}+\sum_{n=1}^{\infty}c_nT_n(t)X_n(x),$$

其中

$$c_0=\frac{2e^2}{e^2-1}\int_0^1 f(x)e^{-x}dx,$$

且

$$c_n = \frac{2}{1+n^2\pi^2}\int_0^1 f(x)X_n(x)\,dx, \quad n = 1,2,\cdots.$$

18. 取 $f(x)=x$，求出习题 17 中的解，画出对不同 t 值的温度分布图像，并讨论在 $x=0$ 和 $x=1$ 处的性态.

19. **专题问题：两端有热辐射的棒；方程** $\tan\mu=\frac{2\mu}{\mu^2-1}$. 考虑热边值问题

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx}, && t>0,\quad 0<x<1, \\ &u_x(0,t) = u(0,t), && u_x(1,t) = -u(1,t), \\ &u(x,0) = f(x). \end{aligned}$$

(a)利用分离变量法，得到

$$\begin{aligned} &T' - kT = 0, \\ &X'' - kX = 0, \quad X'(0) = X(0), \quad X'(1) = -X(1), \end{aligned}$$

其中 k 是分离常数.

(b)试证：$k=-\mu^2<0$.

(c)试证：相应的解为

$$T_n(t) = e^{-\mu_n^2 t}$$

和

$$X_n(x) = \mu_n\cos\mu_n x + \sin\mu_n x, \quad n = 1,2,\cdots,$$

其中 μ_n 是方程 $\tan\mu=\frac{2\mu}{\mu^2-1}$ 的第 n 个正根.

(d)画图证明上面最后一个方程有无穷多个正解，求出前五个根 μ_1，μ_2，…，μ_5 的近似值.

(e)建立函数 $X_n(n=1, 2, \cdots, 5)$在区间(0，1)上的正交性关系式(利用习题 10 的提示，实际上对所有的 n 都可以证明正交性)；

(f)得出结论

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T_n(t) X_n(x),$$

其中

$$c_n = \frac{1}{\kappa_n}\int_0^1 f(x)X_n(x)\,dx$$

和

$$\kappa_n = \int_0^1 X_n^2(x)\,dx.$$

154 20. 取 $f(x)=x$，求出习题 19 中的解，画出对不同 t 值的温度分布图像，并讨论在 $x=0$ 和 $x=1$ 处的性态.

3.7 二维波动方程和热传导方程

假设一个弹性薄膜张紧在长宽分别为 a 和 b 的矩形框架上，四边固定(图 1)，将它作一个竖直移动，再释放，然后膜开始振动. 膜的振动由**二维波动方程**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad 0<x<a, \quad 0<y<b, \quad t>0 \tag{1}$$

控制，其中 $u=u(x, y, t)$表示点(x, y)在时刻 t 的位移(参见 3.2 节习题 8). 四边固定这个事实可以表达为在边界上对所有 $t\geqslant 0$ 满足条件 $u(x, y, t)=0$. 更明确地，我们有**边界条件**

$$
\begin{aligned}
&u(0,y,t)=0 \quad \text{及} \quad u(a,y,t)=0 \quad \text{对 } 0\leqslant y\leqslant b \quad \text{和} \quad t\geqslant 0,\\
&u(x,0,t)=0 \quad \text{及} \quad u(x,b,t)=0 \quad \text{对 } 0\leqslant x\leqslant a \quad \text{和} \quad t\geqslant 0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

初始条件为

$$
u(x,y,0)=f(x,y) \quad \text{及} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0)=g(x,y) \tag{3}
$$

分别表示在 $t=0$ 时膜的形状和速度. 为确定膜的振动，我们必须求出满足(1)～(3)的函数 u. 我们按照 3.3 节的步骤，运用分离变量法求解边值问题.

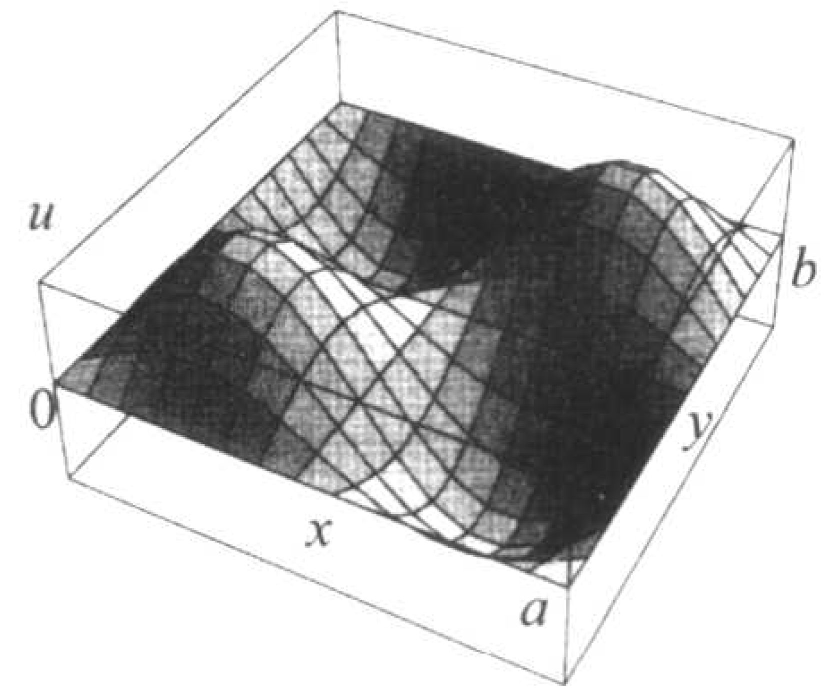


图 1　四边固定膜的初始形状

在(1)和(2)中分离变量

当在高维情形中运用分离变量法时，请记住前面讨论的一维情形. 首先，我们寻求如下形式的乘积解

$$
u(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t).
$$

微分并代入方程(1)，我们得到

$$
XYT''=c^2(X''YT+XY''T).
$$

两边同除以 c^2XYT，得到

$$
\frac{T''}{c^2T}=\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}.
$$

由于左边仅是 t 的函数，而右边仅是 x 和 y 的函数，两边表达式必须等于常数. 因为期望得到关于 t 是周期的解，我们仅考虑负分离常数. (就像前节所做的那样，我们也可以通过讨论来去除非负情形，因为它们仅导出平凡解.)因此，　155

$$
\frac{T''}{c^2T}=-k^2 \quad \text{及} \quad \frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=-k^2 \quad (k>0).
$$

第一个方程得出

$$
T''+k^2c^2T=0
$$

(具有周期解)，而由第二个方程得出

$$
\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}-k^2.
$$

由于最后这个方程的右端仅依赖于 y，而左端仅依赖于 x，我们推出

$$
\frac{X''}{X}=-\mu^2 \quad \text{及} \quad -\frac{Y''}{Y}-k^2=-\mu^2, \quad \mu>0
$$

或

$$
X''+\mu^2X=0 \quad \text{及} \quad Y''+\nu^2Y=0,
$$

其中 $\nu^2=k^2-\mu^2$. (这里，我们再次去除所有非负分离常数，因为它们仅导出平凡解.)在边界条件(2)中分离变量，我们得到方程

$$
\begin{aligned}
&X''+\mu^2X=0, \quad X(0)=0, \quad X(a)=0,\\
&Y''+\nu^2Y=0, \quad Y(0)=0, \quad Y(b)=0,\\
&T''+c^2k^2T=0, \quad k^2=\mu^2+\nu^2.
\end{aligned}
$$

变量分离方程的解

上面最后三个微分方程的通解分别是

$$X(x)=c_1\cos\mu x+c_2\sin\mu x,$$

$$Y(y)=d_1\cos\nu y+d_2\sin\nu y,$$

$$T(t)=e_1\cos ckt+e_2\sin ckt\quad (k^2=\mu^2+\nu^2).$$

由 X 和 Y 的边界条件，我们得到 $c_1=0$ 和 $c_2\sin\mu a=0$，$d_1=0$ 和 $d_2\sin\nu a=0$. 因此，

$$\mu=\mu_m=\frac{m\pi}{a}\quad 及\quad \nu=\nu_n=\frac{n\pi}{b}\quad m,n=1,2,\cdots,$$

以及

156

$$X_m(x)=\sin\frac{m\pi}{a}x\quad 及\quad Y_n(y)=\sin\frac{n\pi}{b}y.$$

(注意到，如果 $m=0$ 或者 $n=0$，解恒等于零，没有意义. 同样，选取负的 m 和 n，仅改变解的符号，不会产生新的解.) 对 m，$n=1$，2，…，我们有

$$k=k_{mn}=\sqrt{\mu_m^2+\nu_n^2}=\sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}},$$

以及

$$T(t)=T_{mn}(t)=B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B_{mn}^*\sin\lambda_{mn}t,$$

其中我们令

$$\lambda_{mn}=c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}.$$

这些 λ_{mn} 称为膜的**特征频率**. 与一维弦振动不同的是，特征频率不是任何一个基本频率的整数倍.

因此，我们推出了满足(1)和(2)的乘积解

$$u_{mn}(x,y,t)=\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B_{mn}^*\sin\lambda_{mn}t).$$

函数 u_{mn} 称为二维波动方程的**正规波型**.

整个问题的二重傅里叶级数解

为得到也满足初始条件(3)的解，受叠加原理启发，将所有乘积解叠加起来，我们尝试

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B_{mn}^*\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y.\tag{4}$$

由初始条件 $u(x,\ y,\ 0)=f(x,\ y)$，我们得到

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y.\tag{5}$$

计算系数 B_{mn} 的关键之处是观察到函数 $\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$ 在矩形 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$ 上是"正交

的"，即，如果$(m, n)\neq(m', n')$，有

$$\int_0^b\int_0^a \sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\sin\frac{m'\pi}{a}x\sin\frac{n'\pi}{b}y\,dx\,dy = 0. \tag{6}$$

如果$(m, n)=(m', n')$，则有

$$\int_0^b\int_0^a \sin^2\frac{m\pi}{a}x\sin^2\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy = \frac{ab}{4}. \tag{7}$$

157

(6)和(7)的证明是直接的，留作习题．将(5)式乘以 $\sin\frac{m'\pi}{a}x\sin\frac{n'\pi}{b}y$，在 $a\times b$ 的矩形上积分，并利用正交性，我们得到

$$\boxed{B_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy.} \tag{8}$$

系数由(8)给出的(5)中的级数称为 f 的**二重傅里叶级数**．类似地，利用第二个初始条件，我们得到

$$g(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{mn}^{*}\lambda_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y.$$

如上讨论，利用正交性，我们得到

$$\boxed{B_{mn}^{*} = \frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^b\int_0^a g(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy.} \tag{9}$$

现在，我们彻底确定了矩形膜振动的解，总结如下．

二维波动方程的解 带有边界条件(2)、边界条件(3)的二维波动方程(1)的解为

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B_{mn}^{*}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y,$$

其中

$$\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}},$$

B_{mn}和B_{mn}^{*}如(8)式和(9)式定义．

为验证(5)中级数的收敛性，以及查阅的方便，我们叙述二重傅里叶级数表示定理，它对关于 x 和 y 具有第一、二阶连续偏导数的连续函数成立．(参见《Fourier Series》，Georgi P. Tolstov 著，Dover 出版社出版，1976，第 178 页．)这个重要结果在求解泊松方程时也要用到(3.9 节)．

定理 1(二重傅里叶正弦级数表示) 假设 $f(x, y)$对所有 $0<x<a$，$0<y<b$ 都有定义，则我们有二重傅里叶正弦级数展开式

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y, \tag{10}$$

其中**二重傅里叶正弦级数系数** B_{mn} 由(8)式给出．

158

例 1 四边固定的张紧膜的振动

如图 2 中第一幅图所示，一块 $a=1$，$b=1$，$c=1/\pi$ 的正方形膜放置在 xy 平面上．膜的边

固定，且膜被张成由函数 $f(x, y)=x(x-1)y(y-1)$，$0<x<1$，$0<y<1$ 表示的形状．假设膜自静止开始振动，确定膜上每一点处 $t>0$ 时的位置．

解 我们有 $g(x, y)=0$，从而 $B_{mn}^{*}=0$．对 m，$n=1$，2，…，我们有

$$B_{mn}=4\int_0^1\int_0^1 x(x-1)y(y-1)\sin m\pi x\sin n\pi y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^1 y(y-1)\sin n\pi y\,\mathrm{d}y\int_0^1 x(x-1)\sin m\pi x\,\mathrm{d}x,$$

分部积分得

$$\int_0^1 x(x-1)\sin m\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2((-1)^m-1)}{\pi^3 m^3}.$$

对变量 y 积分可得类似公式，因此

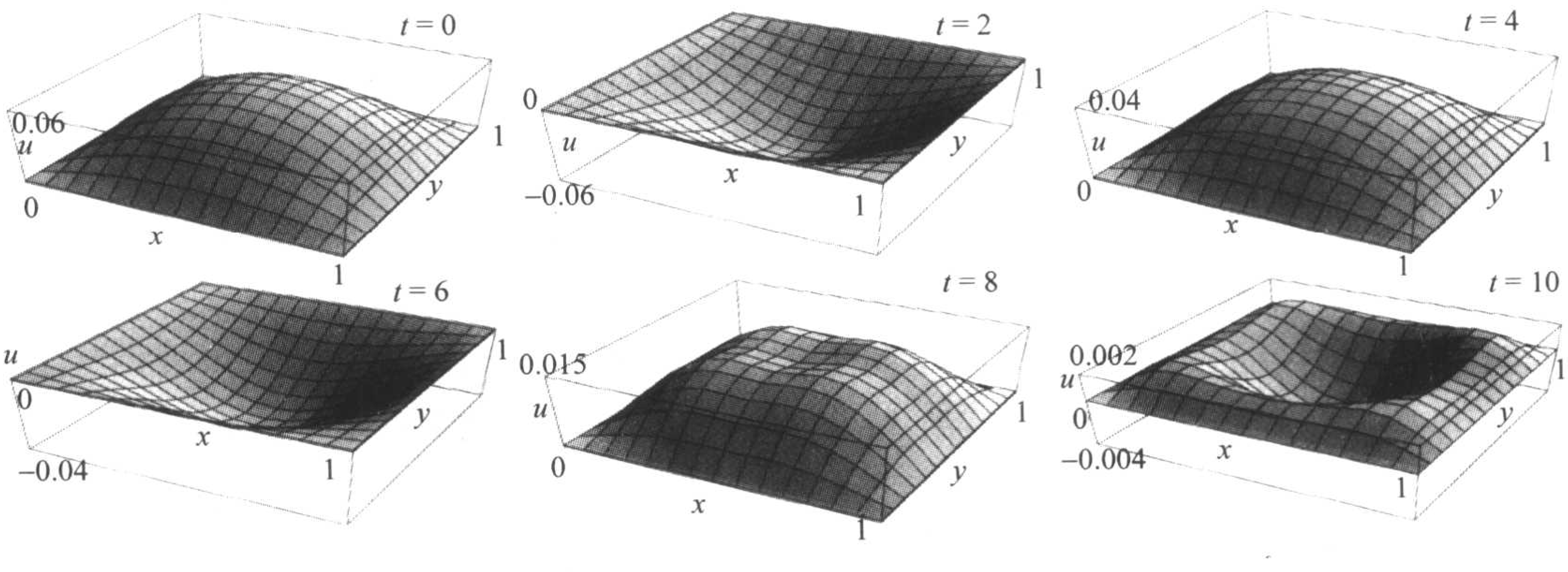
$$B_{mn}=4\,\frac{2((-1)^n-1)}{\pi^3 n^3}\,\frac{2((-1)^m-1)}{\pi^3 m^3}\quad 对所有\ m,n=1,2,\cdots.$$

如果 m 或 n 是偶数，则 B_{mn} 是零；如果 m 和 n 都是奇数，则 $B_{mn}=\dfrac{64}{\pi^6 m^3 n^3}$．因此，解为

$$u(x,y,t)=\sum_{n奇}\sum_{m奇}\frac{64}{\pi^6 m^3 n^3}\sin m\pi x\sin n\pi y\cos\sqrt{m^2+n^2}\,t$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{\frac{64}{\pi^6(2k+1)^3(2l+1)^3}\sin((2k+1)\pi x)\sin((2l+1)\pi y)$$

$$\times\cos\sqrt{(2k+1)^2+(2l+1)^2}\,t\Big\}.$$



159

图 2　例 1 的膜在不同 t 值时的形状 ■

在例 1 中值得注意的是，与弦振动不同，膜运动关于时间 t 不是周期的，这是由于特征频率不是调和相关的——它们不是某个固定频率的整数倍．因而，正规波型的叠加并不是周期的．

结点线

作个试验，我们撒一些沙子在振动着的膜表面. 观察到，对某些频率，沙子集中在膜表面上的固定曲线上. 这些曲线称为**结点线**，由在膜的振动过程中保持不动的点组成. 我们通过分析形如

$$u_{mn}(x,y,t)=\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B_{mn}^{*}\sin\lambda_{mn}t)$$

的解来解释这个现象. 对所有 t 保持不动的点 x，y 是方程 $u_{mn}(x, y, t)=0$ 对所有 $t>0$ 都成立的解. 因此，为确定结点线，只需求解方程

$$\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y=0,\quad 对\ 0<x<a,\quad 0<y<b.$$

例如，当 $a=b=1$ 时，u_{21} 的结点线是直线 $x=\frac{1}{2}$；u_{22} 的结点线是 $x=\frac{1}{2}$ 和 $y=\frac{1}{2}$；u_{32} 的结点线是 $x=\frac{1}{3}$，$x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{1}{2}$(图 3).

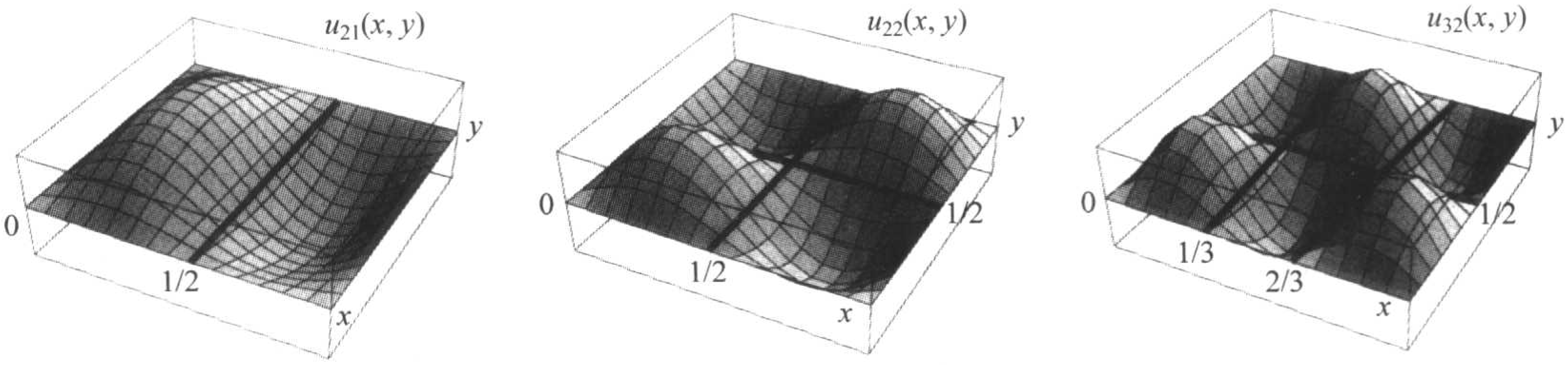


图 3 u_{21}，u_{22}，u_{32} 的结点线

二维热传导方程

我们以陈述带有齐次边界条件的二维热传导方程的解结束本节. 这个二维热传导问题是描述矩形薄板的温度分布，假设板表面绝热，四边保持零度，初始温度分布为 $f(x, y)$. 这个问题的求解是基于分离变量技巧的，按照求解二维波动方程的步骤，其细节留作习题. [160]

二维矩形热传导方程的解 二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\quad 0<x<a,\quad 0<y<b,\quad t>0, \tag{11}$$

带有**边界条件**

$$\begin{aligned}&u(0,y,t)=u(a,y,t)=0,\quad 0<y<b,\quad t>0,\\&u(x,0,t)=u(x,b,t)=0,\quad 0<x<a,\quad t>0,\end{aligned} \tag{12}$$

以及**初始条件**

$$u(x,y,0)=f(x,y),\quad 0<x<a,\quad 0<y<b$$

的解为

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\mathrm{e}^{-\lambda_{mn}^2t},\tag{13}$$

其中

$$\lambda_{mn}=c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}},\tag{14}$$

以及

$$A_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad m,n=1,2,\cdots.\tag{15}$$

例 2 **二维热传导问题**

求解正方形板的热传导问题，$a=b=1$，$c=1/\pi$，假设四边保持零度，初始温度分布是 $u(x,\ y,\ 0)=100°$.

解 我们有

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{mn}\sin m\pi x\sin n\pi y\mathrm{e}^{-\lambda_{mn}^2t},$$

其中 $\lambda_{mn}=\sqrt{m^2+n^2}$，

$$A_{mn}=400\int_0^1\int_0^1\sin m\pi x\sin n\pi y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{400}{\pi^2}\frac{[1-(-1)^m][1-(-1)^n]}{mn}.$$

161

由于当 m 或 n 是偶数时，A_{mn} 为零，因此，我们有

$$u(x,y,t)=\frac{1\,600}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\sin(2l+1)\pi x\sin(2k+1)\pi y}{(2l+1)(2k+1)}\mathrm{e}^{-\lambda^2_{(2l+1)(2k+1)}t}.$$

图 4 描述了板在不同 t 值时的温度分布. 注意温度在板上是光滑的，且趋于零，这就是在这个边界条件(零度)下我们所预期的结果.

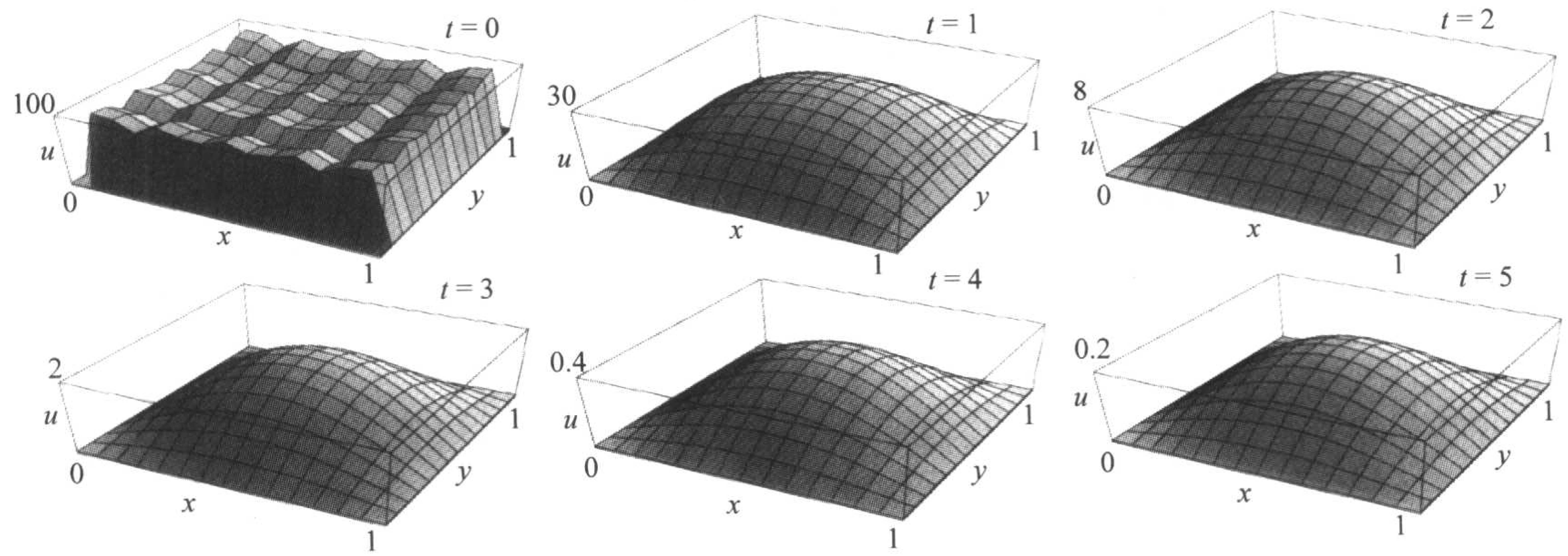


图 4 在不同时刻例 2 的温度分布(利用 k 和 l 从 0 到 4 的部分和). 第一幅图是初始温度分布的近似，注意到对所有 $t>0$ 边界温度都为零 ■

习题 3.7

在习题 1～8 中：

(a)取 $a=b=1$，$c=1/\pi$，对给定函数 f 和 g，求解边值问题(1)～(3).

(b)对不同时刻 t，画出级数解部分和的图像，以描述膜的振动，包含 $t=0$ 的图像，并与 $f(x, y)$的图像比较.

1. $f(x, y)=\sin 3\pi x\sin\pi y$，$g(x, y)=0$.
2. $f(x, y)=\sin\pi x\sin\pi y$，$g(x, y)=\sin\pi x$.
3. $f(x, y)=x(1-x)y(1-y)$，$g(x, y)=2\sin\pi x\sin 2\pi y$.
4. $f(x, y)=x\cos\frac{\pi x}{2}y(1-y)$，$g(x, y)=1$.
5. $f(x, y)=0$，$g(x, y)=1$.
6. $f(x, y)=0$，$g(x, y)=x(1-y)$.
7. $f(x, y)=x(1-e^{x-1})y(1-y^2)$，$g(x, y)=0$.
8. $f(x, y)=\sin(xy)\cos\frac{\pi x}{2}\sin\pi y$，$g(x, y)=0$.

162

在习题 9～10 中，求出并画出给定函数的结点线.

9. $u(x, y, t)=\sin 4\pi x\sin\pi y\cos t$，$0<x<1$，$0<y<1$.
10. $u(x, y, t)=\sin\frac{3\pi}{2}x\sin\pi y\sin\sqrt{2}t$，$0<x<2$，$0<y<1$.

在习题 11～14 中，对单位正方形($a=b=1$)，给定初始温度分布 f，求解热传导方程(11)，假设四边保持零度，$c=1$.

11. $f(x, y)=100$.
12. $f(x, y)=x(1-x)y(1-y)$.
13. $f(x, y)=\sin\pi x\sin\pi y$.
14. $f(x, y)=\begin{cases}1 & \text{当 } y\leqslant x, \\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$
15. (a)在例 2 中，取 $c=1$，对不同的 t 值，画出解的图像，并估计大约经过多长时间板的最高温度低于 50°?

    (b)如果 $c=2$，结果如何？将热传导的速度看成 c 的函数，你能得出什么样的结果？
16. 建立关系式(6)和(7)$\left(\text{函数 }\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\text{ 的正交性和规范性}\right)$.
17. **专题问题**. 本题推导热传导问题的解(13).

    (a)试证：如果假设 $u=X(x)Y(y)T(t)$，则分离变量法得到

$$X''+\mu^2X=0,\quad X(0)=0,\quad X(a)=0,$$
$$Y''+\nu^2Y=0,\quad Y(0)=0,\quad Y(b)=0,$$
$$T'+c^2(\mu^2+\nu^2)T=0.$$

    (b)得出乘积解

$$u_{mn}(x,y,t)=A_{mn}e^{-c^2\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]t}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y.$$

    (c)对给定初始温度分布 $f(x, y)$，利用定理 1 推导(13)～(15)式.

3.8 直角坐标中的拉普拉斯方程

在 3.5 节中，我们发现相应于一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<L,\quad t>0$$

的稳态温度分布满足方程 $u_{xx}=0$，因为稳态解与时间无关. 方程 $u_{xx}=0$ 很容易求解，仅得到线性解 $u(x)=c_1x+c_2$. 对于在 $a\times b$ 矩形上的二维稳态或者与时间无关问题，我们考虑方程

163

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b. \tag{1}$$

这个方程称为含两个自变量的**拉普拉斯方程**，在 3.7 节热传导方程(11)中令关于时间的导数为零，可以得到该方程. 正如 3.1 节所示，拉普拉斯方程解的范围很广. 在每个特定问题中，我们所寻求的解由给定边界条件决定. 本节剩下的部分，我们求解(1)，使得解 u 在矩形边界上为给定值. 更具体地，我们施加**边界条件**

$$u(x,0)=f_1(x),\quad u(x,b)=f_2(x),\quad 0<x<a,$$
$$u(0,y)=g_1(y),\quad u(a,y)=g_2(y),\quad 0<y<b,$$

如图 1 所示.

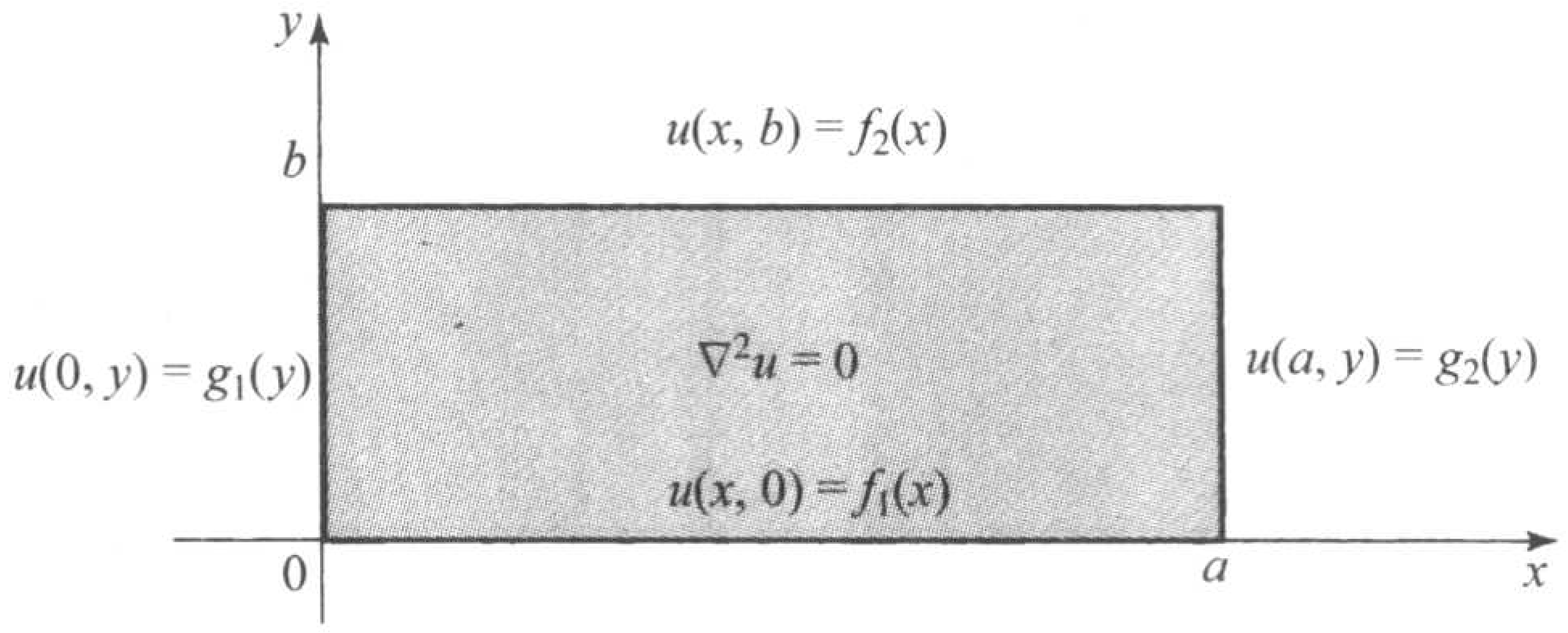


图 1　矩形上的一般狄利克雷问题

平面区域上的一个拉普拉斯方程加上给定边界值所构成的问题称为**狄利克雷问题**，所以，我们上面描述的问题是矩形上的狄利克雷问题. 与其讨论很一般情形的问题，我们还不如先求解其特殊情形：f_1，g_1，g_2 都是零；在本节结尾处，我们再回到一般性的问题.

例 1　矩形上的狄利克雷问题

利用分离变量法，求解图 2 所描述的边值问题.

解　首先，我们寻求乘积解 $u(x,\ y)=X(x)Y(y)$. 代入(1)，并利用分离变量法，我们得到方程

$$X''+kX=0,\quad Y''-kY=0,$$

其中 k 是分离常数，以及边界条件

$$X(0)=0,\quad X(a)=0,\quad 及\quad Y(0)=0.$$

对关于 X 的边值问题，可以验证：$k\leqslant 0$ 只会导出平凡解；对 $k=\mu^2>0$，我们得到解 $X=c_1\cos\mu x+c_2\sin\mu x$. 加上 X 的边界

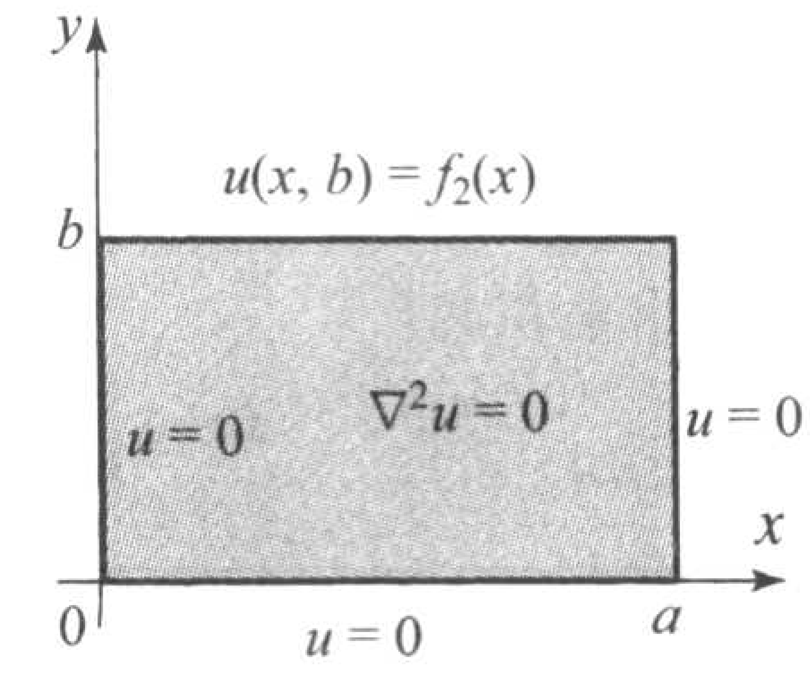


图 2　例 1 中的狄利克雷问题

条件，得到 $c_1=0$，

$$\mu=\mu_n=\frac{n\pi}{a},\quad n=1,2,\cdots,$$ 164

因此，

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{a}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

转到 Y，由 $k=\mu_n^2$，我们得到

$$Y=A_n\cosh\mu_n y+B_n\sinh\mu_n y.$$

加上 $Y(0)=0$，我们发现 $A_n=0$，因而

$$Y_n=B_n\sinh\mu_n y.$$

所以，我们得到乘积解

$$B_n\sin\frac{n\pi}{a}x\sinh\frac{n\pi}{a}y.$$

将这些解叠加，我们得到解的一般形式

$$\boxed{u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{a}x\sinh\frac{n\pi}{a}y.}\tag{2}$$

最后，边界条件 $u(x,\ b)=f_2(x)$ 蕴涵着

$$f_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\frac{n\pi b}{a}\sin\frac{n\pi}{a}x.$$

为满足这个要求，我们选择系数 $B_n\sinh\frac{n\pi b}{a}$ 为 f_2 在区间 $0<x<a$ 上的傅里叶正弦系数. 因此由 2.4 节定理 1，有

$$\boxed{B_n=\frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f_2(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx,\quad n=1,2,\cdots.}\tag{3}$$

因此，图 2 描述的狄利克雷问题的解由(2)式给出，其系数由(3)式确定. ■

下面是例 1 的一个特别应用.

例 2 正方形板中的稳态温度

(a)确定 1×1 正方形板中的稳态温度分布，其中一边保持 100°，其他三边保持 0°.

(b)特别地，求解板中心处的稳态温度.

解 (a)适当选取坐标，我们可以将这个问题看成例 1 的特殊情形，其中 $f_2(x)=100°$，以及 $a=b=1$. 由(2)和(3)式，我们有

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin n\pi x\sinh n\pi y,$$ 165

其中

$$B_n=\frac{200}{\sinh n\pi}\int_0^1\sin n\pi x\,dx=\frac{200}{n\pi\sinh n\pi}(1-\cos n\pi).$$

化简，我们得到解

$$u(x,y)=\frac{400}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)}\frac{\sinh(2k+1)\pi y}{\sinh(2k+1)\pi}.$$

注意到，当 $y=1$ 时，这就化为 100 的傅里叶正弦级数展开式，满足边界条件. 同样，如果 $0<y<1$，双曲正弦以 k 阶指数衰减，因而导致级数快速收敛.

(b)取 $x=y=\frac{1}{2}$，以求出中心的温度，我们得到

$$u\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{200}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}\frac{1}{\cosh(2k+1)\frac{\pi}{2}}. \tag{4}$$

这里，我们利用了

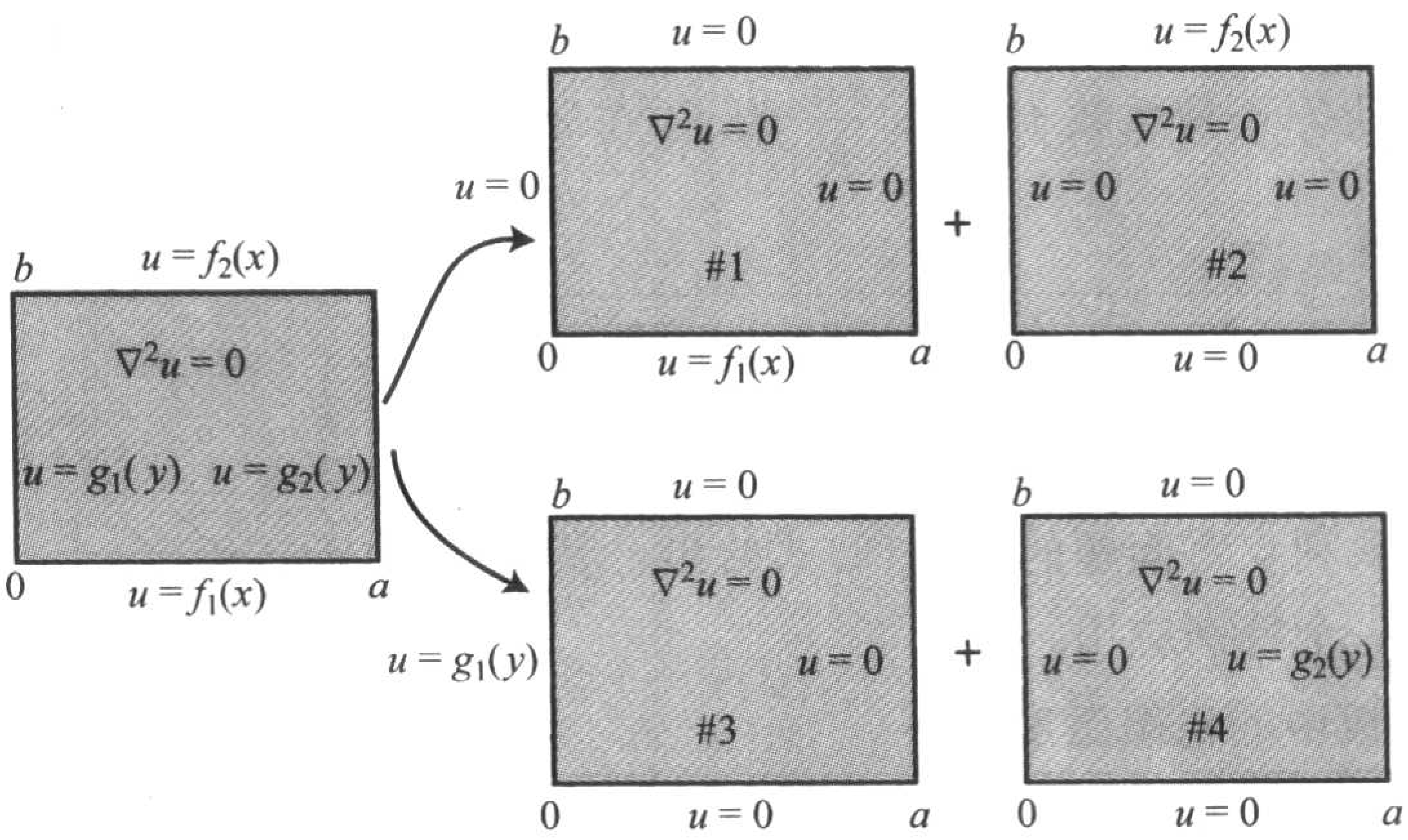
$$\sinh u = 2\sinh\frac{u}{2}\cosh\frac{u}{2}$$

和

$$\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}=(-1)^k$$

来化简. 通过巧妙地运用对称性，我们在后面将说明这个级数收敛到 25. 这里，通过求其前四项和来逼近这个无穷和，误差小于 10^{-4}，得到其值为 25. ■

现在，我们回到图 1 所描述的一般情形. 结果证明利用例 1 的解可以求解这个问题. 其技巧是将原问题分解成四个子问题，如图 3 所示.



166

图 3 利用线性性，原来的狄利克雷问题可以分解成四个简单的狄利克雷子问题之和

令 u_1，u_2，u_3，u_4 分别是相应的第 1，2，3，4 子问题的解. 直接计算，我们知道函数

$$u=u_1+u_2+u_3+u_4$$

是由图 1 给出的原问题的解. 因此，我们只需确定 u_1，u_2，u_3，u_4. 函数 u_2 已经由例 1 计算出来了，我们有

$$u_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{a}x\sinh\frac{n\pi}{a}y,$$

其中

$$B_n = \frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f_2(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx. \tag{5}$$

其他的解类似可得. 特别地，u_4 与 u_2 完全一样，只是将 a 和 b 的位置互换，以及 x 和 y 的位置互换. 因此，

$$u_4(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh\frac{n\pi}{b}x\sin\frac{n\pi}{b}y,$$

其中

$$D_n = \frac{2}{b\sinh\frac{n\pi a}{b}}\int_0^b g_2(y)\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy. \tag{6}$$

类似地，可以求出 u_1 和 u_3，我们有

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{a}x\sinh\frac{n\pi}{a}(b-y),$$

其中

$$A_n = \frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f_1(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx \tag{7}$$

和

$$u_3(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\frac{n\pi}{b}(a-x)\sin\frac{n\pi}{b}y,$$

而

$$C_n = \frac{2}{b\sinh\frac{n\pi a}{b}}\int_0^b g_1(y)\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy. \tag{8}$$

167

至此，我们彻底解决了图 1 中狄利克雷问题，我们将其解总结如下.

矩形中的狄利克雷问题的解 图 1 中的二维狄利克雷问题的解为

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{a}x\sinh\frac{n\pi}{a}(b-y) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{a}x\sinh\frac{n\pi}{a}y$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh\frac{n\pi}{b}(a-x)\sin\frac{n\pi}{b}y + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh\frac{n\pi}{b}x\sin\frac{n\pi}{b}y, \tag{9}$$

其中系数 A_n，B_n，C_n，D_n 由(5)～(8)式给出.

让我们重新考虑例 2(b)，我们将利用对称性来导出 $u\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$的值. 考虑板的四边都是给定边界值 100 的问题，显然，其解在整个板上都是 $u(x, y)=100$. 另一方面，我们可以将这个问题分解成如图 3 所示的四个子问题. 由对称性，可以假设四个解 u_1，u_2，u_3 和 u_4 在中心处是相等的. 令在中心处的两种解相等，我们得到

$$100 = u_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) + u_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) + u_3\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) + u_4\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 4u_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

因此，$u_2\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=25$. 注意，利用这种方法，我们得到了(4)中级数的精确值. 作为一个挑战，试利用别的方法来求出这个级数的值.

你可能回想起，在 3.5 节我们利用稳态解来求解带非齐次边界条件的热传导问题. 正如你所料，这个方法在求解高维非齐次热传导问题时也有用，参见习题 11.

习题 3.8

在习题 1～6 中，对给定数据，求解图 1 所示的狄利克雷问题.

1. $a=1$，$b=2$，$f_2(x)=x$，$f_1=g_1=g_2=0$.
2. $a=1$，$b=1$，$f_1(x)=0$，$f_2=100$，$g_1=0$，$g_2=100$.
3. $a=2$，$b=1$，$f_1(x)=100$，$f_2=g_1=0$，$g_2(y)=100(1-y)$.
4. $a=b=1$，$f_1(x)=1-x$，$f_2(x)=x$，$g_1=g_2=0$.
5. $a=b=1$，$f_1(x)=\sin 7\pi x$，$f_2(x)=\sin \pi x$，$g_1(y)=\sin 3\pi y$，$g_2(y)=\sin 6\pi y$.
6. $a=b=\pi$，$f_1(x)=\cos x$，$f_2(x)=x\sin x$，$g_1(y)=\pi-y$，

168

$$g_2(y)=\begin{cases}3 & 若\ 0<y<\pi/2 \\ 0 & 若\ \frac{\pi}{2}<y<\pi.\end{cases}$$

7. (a)试证：当用 $f_2(x)$的傅里叶正弦系数 b_n 来表达时，例 1 的解为

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{a}x\,\frac{\sinh\frac{n\pi}{a}y}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}.$$

(b)试对一般问题(9)叙述相应的结论.

8. 求出习题 1 中板中心处的近似温度.
9. 运用分离变量法，推导(7)式中的 u_1 和 A_n.
10. **拉普拉斯方程解的极大值原理**. 画出例 2 解的图像，注意到，解的极大值和极小值在边界达到. 解的这个性质对一般的边界条件都成立，称为**极大值原理**. 关于这个方面的详细内容请参考 3.11 节.
11. **专题问题：带有非零边值的二维热传导问题**. 考虑图 4 所示的非齐次热传导问题，令 $v(x, y)$表示由 $\nabla^2 v=0$ 和如图所示的边界条件构成的狄利克雷问题的解，而 $w(x, y, t)$表示由 $w_t=c^2\nabla^2 w$、零边值和初始温度分布为 $w(x, y, 0)=f(x, y)-v(x, y)$的热传导问题的解.

    (a)试证：图 4 所示的热传导问题的解是 $u(x, y, t)=v(x, y)+w(x, y, t)$，其中 v 由(9)式给出，而 w 由 3.7 节(13)～(15)式给出，并在(15)式中，$f(x, y)$替换为 $f(x, y)-v(x, y)$.

    (b)对 $a=b=1$，$c=1$，$f_1=0$，$f_2=100$，$g_1=g_2=0$，以及 $f(x, y)=0$ 求解该问题.

    (c)对 $t>0$，画出(b)部分中的中心处的温度图像，讨论当 $t\to\infty$时的性态.
12. **专题问题：三维拉普拉斯方程和狄利克雷问题**. 三维实体内的稳态温度问题将导出相应于三维拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

的狄利克雷问题. 考虑如图 5 所示的问题(参考习题 13 其一般形式)，按照以下步骤推导出解

$$u(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\sinh\lambda_{mn}z,$$

$$\lambda_{mn} = \pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2},$$

$$A_{mn} = \frac{4}{ab\sinh(c\lambda_{mn})}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy.$$

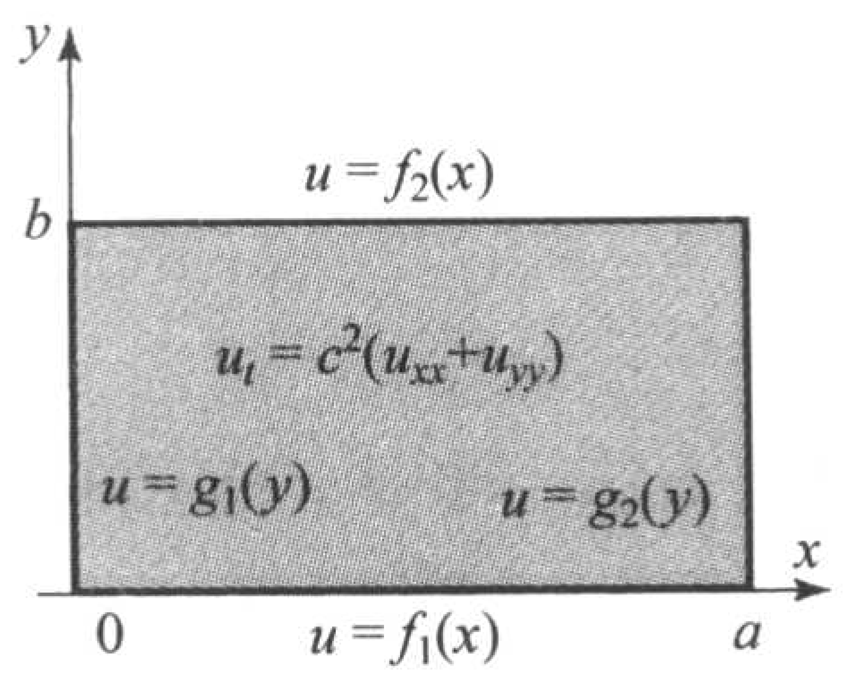


图 4

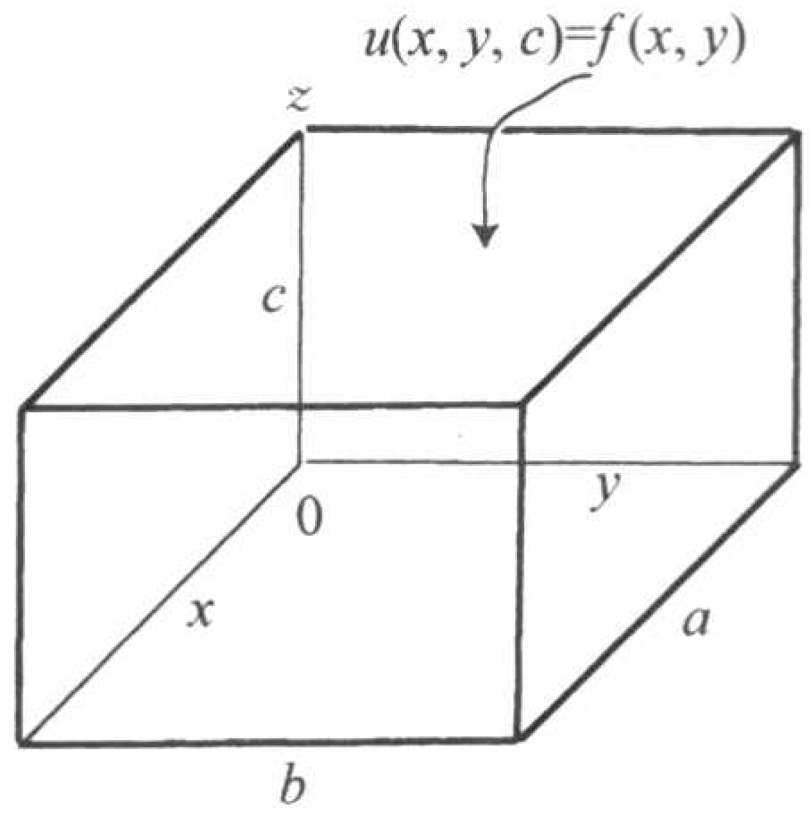


图 5 除了在上水平面上，$u(x, y, c)=f(x, y)$外，u在其他边界上都为 0

(a)**步骤 1.** 寻求形如 $X(x)Y(y)Z(z)$的乘积解. 运用分离变量法，推出方程

$$X''+\mu^2X=0,\qquad Y''+\nu^2Y=0,\qquad Z''-(\mu^2+\nu^2)Z=0,$$
$$X(0)=X(a)=0,\quad Y(0)=Y(b)=0,\quad Z(0)=0.$$

169

(你要验证分离常数的符号.)

(b)**步骤 2.** 试证：

$$\mu=\frac{m\pi}{a},\quad \nu=\frac{n\pi}{b},\quad m,n=1,2,\cdots,$$

并推出乘积解

$$u_{mn}(x,y,z)=A_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\sinh\lambda_{mn}z.$$

(c)**步骤 3.** 利用 3.7 节定理 1 完成求解过程.

13. 当六个面中的几个面上边界值非零时，如何求解习题 12 中的问题？

3.9 泊松方程：特征函数展开法

本节我们介绍求解包含拉普拉斯方程在内的边值问题的新方法，我们要介绍的方法称为特征函数展开法. 利用这个方法，我们将得出前面问题的另一种解法，前面用的是分离变量法. 更重要的是，我们可以求解前面方法无法求解的非齐次问题.

为显示特征函数展开法的威力，我们求解在 $a\times b$ 矩形上的泊松边值问题，如图 1 所示，其中涉及**泊松方程**

$$\boxed{\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y).}\tag{1}$$

注意到，如果 $f(x, y)\neq 0$，方程是非齐次的，如果你尝试分离变量法，将会很快发现这个方法不能应用. 泊松方程出现在与时间无关的热源的稳态热传导问题中. 当 $f(x, y)\neq 0$ 时，这是非齐次的，因而不能直接运用分离变量法求解. 本节的目的就是求解含有这个方程的边值问题，在求解过程中，我们将引入非常有用的特征函数展开法.

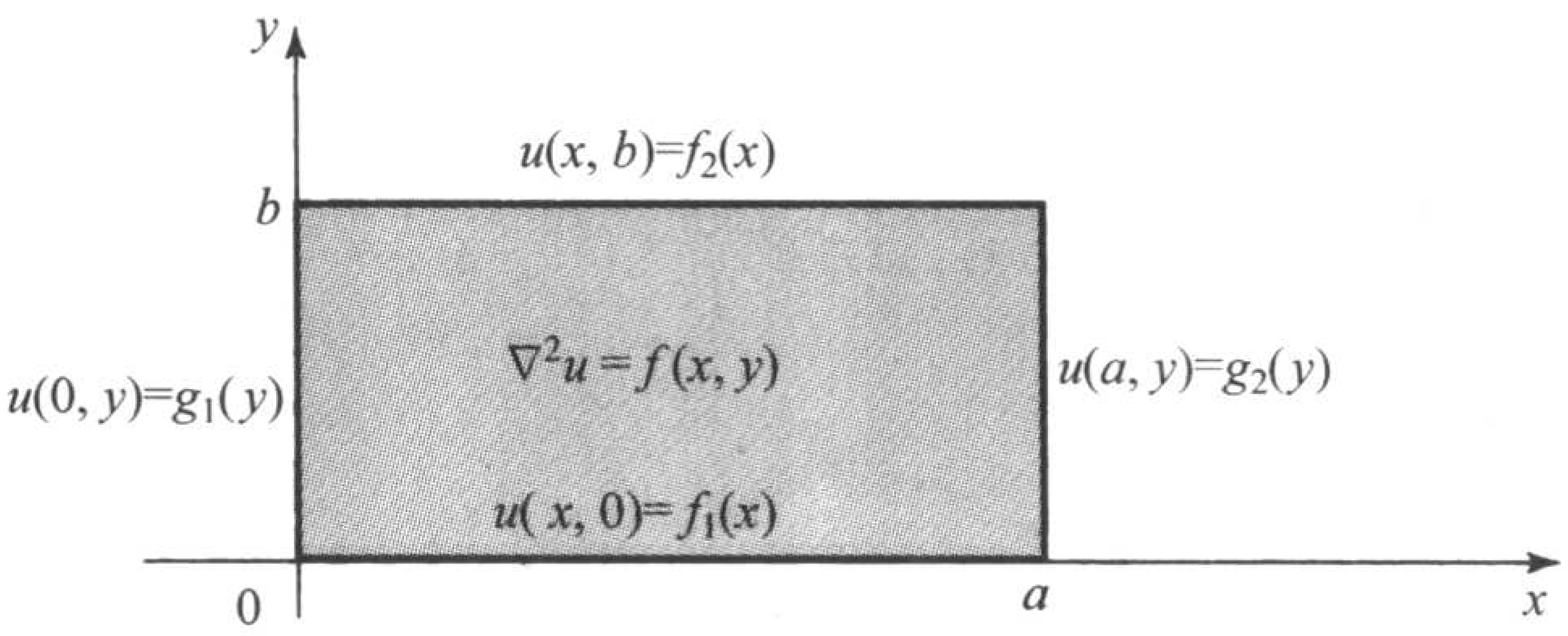


图 1　矩形上的一般泊松问题

170　正如我们在 3.8 节所做的，为求解图 1 中的一般泊松问题，第一步是，运用叠加原理，将它分解成更简单的子问题，这时的分解如图 2 所示.

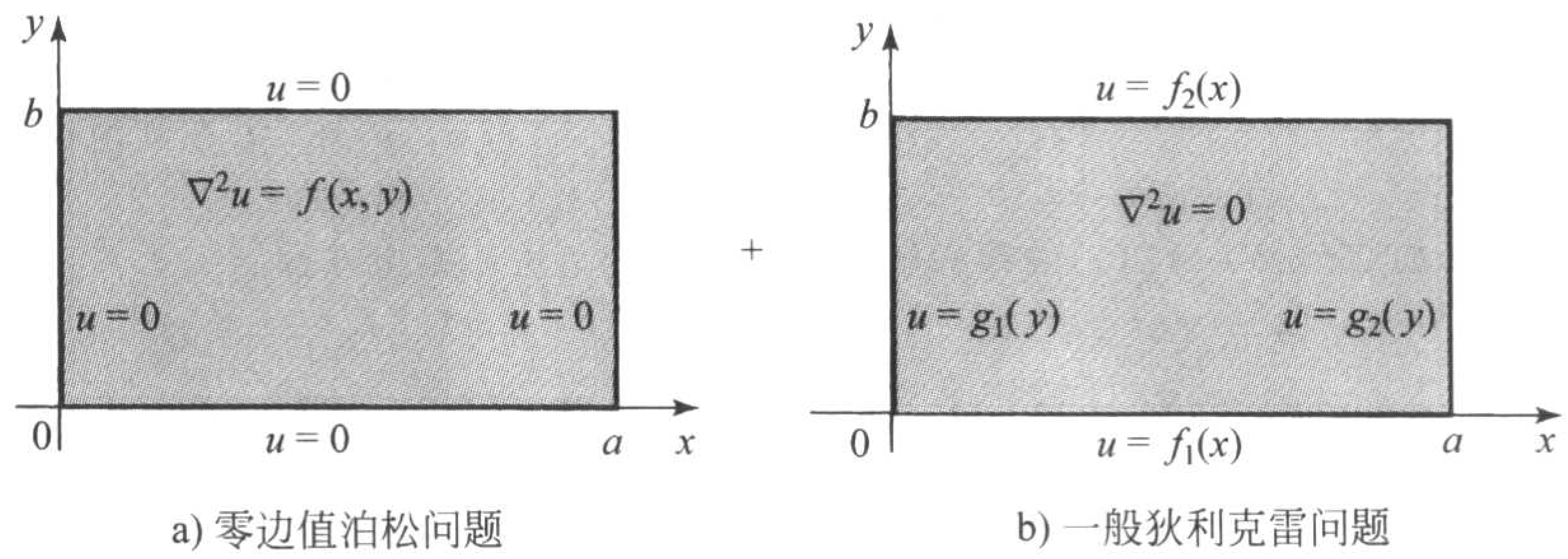


图 2　一般泊松问题的分解

图 2b 描述的是狄利克雷问题，可以用前一节的方法来求解. 因此，为完成图 1 中的问题求解，我们只需处理带有零边值的泊松问题(图 2a).

我们从狄利克雷问题的求解(3.8 节)得到提示，它是我们的问题在 $f(x, y)=0$ 时的特殊情形. 考察函数 $\phi_{mn}(x, y)=\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$，它显然满足图 2a 中的 0 边界条件. 函数 ϕ_{mn} 还满足其他重要性质，计算 $\phi_{mn}(x, y)$的拉普拉斯算子，我们发现

$$\nabla^2(\phi_{mn}) = \sin\frac{n\pi}{b}y\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sin\frac{m\pi}{a}x\right)+\sin\frac{m\pi}{a}x\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sin\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$=-\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y.$$

所以，ϕ_{mn} 的拉普拉斯算子是 ϕ_{mn} 的常数倍，运用线性代数里常用的术语，我们称该常数

$$\lambda_{mn}=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\quad(m,n=1,2,\cdots)$$

是拉普拉斯算子的**特征值**，而函数 $\phi_{mn}(x, y)=\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$ 是相应的**特征函数**. 因为拉普拉斯算子作用在特征函数上的影响很容易描述(就是在特征函数上乘以一个常数)，所以对涉及矩形上拉普拉斯算子的问题，很自然尝试用特征函数级数来作为解. 当我们求解图 2a 中问题的解时，这个思想将更加明朗. 让我们尝试解

$$\boxed{u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}E_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y,} \tag{2}$$ [171]

其中 E_{mn}是待定常数．注意到，对所有函数 $\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$ 求和就得到 3.7 节的二重傅里叶正弦级数解．直接验证，u 满足图 2a 中的零边值条件．现在，我们求出 E_{mn}，使得 u 满足泊松方程(1)．在这个过程中，我们通常假设可以交换求和与微分的顺序．对(2)式求两次导数，代入(1)式，我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}-E_{mn}\underbrace{\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]}_{\lambda_{mn}}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y=f(x,y). \tag{3}$$

将(3)视为 $f(x, y)$的二重傅里叶正弦级数展开式(3.7 节定理 1)，我们得出结论

$$\boxed{E_{mn}=\frac{-4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy.} \tag{4}$$

至此，我们彻底解决了图 1 中的泊松问题．将我们的发现总结如下．

矩形中泊松方程的解　图 1 中泊松问题的解为

$$u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y),$$

其中 u_1 是图 2a 中零边值泊松问题的解，而 u_2 是图 2b 中狄利克雷问题的解．函数 u_1 由(2)和(4)给出，而函数 u_2 由 3.8 节的(5)～(9)给出．

例 1　**零边值泊松问题**

在 1× 1 正方形中，求解$\nabla^2 u=1$，满足边界条件：$u=0$ 在所有四边都成立．

解　注意到，此时 $u_2=0$，函数 u_1 由(2)和(4)给出，其中 $a=b=1$ 和 $f(x, y)=1$．因此，

$$E_{mn}=\frac{-4}{\lambda_{mn}}\int_0^1\int_0^1\sin m\pi x\sin n\pi y\,dx\,dy,$$

其中

$$\lambda_{mn}=(m\pi)^2+(n\pi)^2.$$

求出积分值(如 3.7 节例 2 所做)，并代入(2)，我们得到解

$$u(x,y)=\frac{-16}{\pi^4}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\pi x\sin(2l+1)y}{(2k+1)(2l+1)((2k+1)^2+(2l+1)^2)}.$$ ■ [172]

特征函数展开法

让我们来总结一下我们求解泊松问题的步骤，并描述其中求解含有拉普拉斯的边值问题的一般方法．我们考虑函数

$$\phi_{mn}(x,y)=\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y, \tag{5}$$

它是**特征问题**

$$\nabla^2\phi(x,y)=-\lambda\phi(x,y), \tag{6}$$

$$\phi(0,y)=0,\quad \phi(a,y)=0,\phi(x,0)=0,\quad \phi(x,b)=0 \tag{7}$$

的解(或**特征函数**). 注意，其边界条件与图 2a 中的完全一样. 方程(6)称为**亥姆霍兹方程**，当在热传导方程和波动方程中分离变量时(见习题 16)，就会出现该方程. 每个 ϕ_{mn} 相对应一个**特征值**为

$$\lambda=\lambda_{mn}=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2,\quad m,n=1,2,3,\cdots. \tag{8}$$

将相应的亥姆霍兹问题的特征函数叠加起来，以构造边值问题解的方法称为**特征函数展开法**. 在给定区域上，这个方法的有效性取决于在这个区域上亥姆霍兹问题的特征函数是否构成一个**完备集**，即定义在这个区域上的函数是否都可以展开成含特征函数的级数，这种展开称为**特征级数展开**. 对于矩形，特征级数展开是二重正弦级数展开；其他区域将导致不同类型的级数展开，我们将在以后的章节中看到这点.

在下面这个例题中，我们运用特征函数展开法来求解非齐次问题，它不能直接运用分离变量法来求解.

例 2 **特征函数展开法**

在 1×1 正方形中($0<x<1$，$0<y<1$)，求解$\nabla^2 u=u+3$，满足边界条件：$u=0$ 在所有四边都成立.

解 相应的特征函数问题就是由(6)～(7)给出的，$a=b=1$. 特征值是 $\lambda_{mn}=(m\pi)^2+(n\pi)^2$，相应的特征函数是 $\phi_{mn}(x,\ y)=\sin m\pi x\sin n\pi y$. 这就意味着 $\nabla^2(\phi_{mn}(x,\ y))=-((m\pi)^2+(n\pi)^2)\phi_{mn}(x,\ y)$，你可以很容易验证这点. 我们的解最有可能是

173

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}E_{mn}\sin m\pi x\sin n\pi y,$$

其中 E_{mn} 待定. 将这个表达式代入方程，并假设求和与微分可以交换顺序，我们得到

$$\nabla^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}E_{mn}\sin m\pi x\sin n\pi y\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}E_{mn}\sin m\pi x\sin n\pi y+3$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}E_{mn}\ \nabla^2(\sin m\pi x\sin n\pi y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}E_{mn}\sin m\pi x\sin n\pi y+3$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}-E_{mn}\lambda_{mn}\sin m\pi x\sin n\pi y=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}E_{mn}\sin m\pi x\sin n\pi y+3$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}E_{mn}(-1-\lambda_{mn})\sin m\pi x\sin n\pi y=3.$$

因此，$E_{mn}(-1-\lambda_{mn})$就是函数 $f(x,\ y)=3(0<x<1,\ 0<y<1)$的二重正弦傅里叶系数. 由 3.7 节定理 1，我们得到

$$E_{mn}(-1-\lambda_{mn})=4\int_0^1\int_0^1 3\sin m\pi x\sin n\pi y\,dx\,dy.$$

求出积分值，然后解出 E_{mn}，我们得到

$$E_{mn}=-\frac{12}{1+\lambda_{mn}}\frac{1}{mn\pi^2}((-1)^m-1)((-1)^n-1)$$

$$
= \begin{cases} 0 & \text{当 } m \text{ 或 } n \text{ 为偶数时,} \\ \dfrac{-48}{\pi^2 mn(1+\lambda_{mn})} & \text{当 } m \text{ 和 } n \text{ 都为奇数时,} \end{cases}
$$

这就完全确定了解. ■

一维特征值问题

如果将解(2)与 3.8 节例 1 中的狄利克雷问题的解比较，你会发现这里我们利用二重级数，而在前一节中解表达为单重级数. 我们将说明：如果以相应的一维齐次问题为开始，也可以得到泊松问题的单重级数解. 这种方法的优点在于，单重级数通常收敛得快，并比二重级数更容易处理.

为求解图 2a 中的问题，考虑相应的一维特征值问题

$$\nabla^2 \phi(x) = -\lambda \phi(x), \tag{9}$$

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(a) = 0. \tag{10}$$

我们继续使用记号$\nabla^2 \phi(x)$，以显示与方程(1)有联系，当然，此时记号$\dfrac{\mathrm{d}^2 \phi}{\mathrm{d}x^2}$更合适一点. 容易验证该问题的特征函数是

$$\phi_m(x) = \sin \frac{m\pi}{a} x, \tag{11}$$

174

相应的特征值为

$$\lambda = \lambda_m = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2, \quad m = 1,2,3,\cdots. \tag{12}$$

现在，对图 2a 问题的解，我们尝试

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x.} \tag{13}$$

这里必须将系数 E_{mn} 看成第二个变量 y 的函数. 为完成求解，我们必须求出 $E_{mn}(y)$. 将(13)式代入(1)，我们得到

$$\boxed{\sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\left(E''_m(y) - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 E_m(y)\right)}_{b_m(y)} \sin \frac{m\pi}{a} x = f(x,y),} \tag{14}$$

其中 $0<x<a$，$0<y<b$. 对区间$(0, b)$上每一点 y，将(14)式想成函数 $x \mapsto f(x, y)$的傅里叶正弦级数展开式. (14)中的傅里叶正弦系数是 y 的函数，记为 $b_m(y)$，由 2.4 节(4)式，我们有

$$b_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x,y) \sin \frac{m\pi}{a} x \, \mathrm{d}x. \tag{15}$$

因此，$E_{mn}(y)$是二阶非齐次初值问题

$$E''_m(y) - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 E_m(y) = b_m(y), \tag{16}$$

$$E_m(0)=0 \quad 及 \quad E_m(b)=0 \tag{17}$$

的唯一解，其中初始条件(17)是由(13)式，以及 $u(x, 0)=0$ 和 $u(x, b)=0$ 这个事实得到．现在，我们运用参数变易公式(附录 A.3)来求解(16)．容易发现相应的齐次方程

$$E''_m(y)-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 E_m(y)=0$$

的两个解为

$$\boxed{h_1(y)=\sinh\left(\frac{m\pi}{a}(b-y)\right) \quad 及 \quad h_2(y)=\sinh\left(\frac{m\pi}{a}y\right).} \tag{18}$$

175 直接计算显示 h_1 和 h_2 的朗斯基行列式为

$$\boxed{W(h_1,h_2)=\frac{m\pi}{a}\sinh\left(\frac{m\pi}{a}b\right).} \tag{19}$$

回顾附录 A.1，$W(h_1, h_2)=h_1h_2'-h_1'h_2$．由于 $W(h_1, h_2)\neq 0$，这两个解是线性无关的．应用参数变易公式(附录 A.3(4)式)，我们得到(16)的一个形如

$$h_1(y)\int\frac{-h_2(y)}{W(h_1,h_2)}b_m(y)\mathrm{d}y+h_2(y)\int\frac{h_1(y)}{W(h_1,h_2)}b_m(y)\mathrm{d}y \tag{20}$$

的特解．这个公式中的每个积分在相差一个积分常数意义下是确定的，不同的常数得到(16)式的不同特解，它们只差 h_1 和 h_2 一个线性组合．取定一个积分常数，就确定了(16)～(17)的一个(唯一)解．由(19)式，我们发现 $W(h_1, h_2)$与 y 无关，因此将它写在(20)式的积分号外边．可以验证

$$\boxed{\begin{aligned}E_m(y)=\frac{-1}{\frac{m\pi}{a}\sinh\left(\frac{m\pi}{a}b\right)}\Bigg[&h_1(y)\int_0^y h_2(s)b_m(s)\mathrm{d}s\\&+h_2(y)\int_y^b h_1(s)b_m(s)\mathrm{d}s\Bigg]\end{aligned}} \tag{21}$$

满足初始条件，因此是初值问题(16)～(17)的唯一解．(利用 $h_1(b)=0$ 和 $h_2(0)=0$ 这个事实．)这就完成了图 2a 问题的求解，并得到一个单重级数解(13)，系数由(21)给定．

例 3　泊松问题的单重级数解

为求出例 1 中解的单重级数表达式，我们利用(13)．由(15)，我们有

$$b_m(y)=2\int_0^1\sin m\pi x\mathrm{d}x=\frac{-2(\cos m\pi-1)}{m\pi}=\begin{cases}\dfrac{4}{m\pi} & 当\ m\ 为奇数时,\\ 0 & 当\ m\ 为偶数时.\end{cases} \tag{22}$$

由(18)，我们有

$$h_1(y)=\sinh(m\pi(1-y)) \quad 及 \quad h_2(y)=\sinh(m\pi y).$$

由(21)和(22)，我们发现，当 m 是偶数时，$E_m(y)=0$；而如果 m 是奇数，有

$$\begin{aligned}E_m(y)=\frac{-4}{m^2\pi^2\sinh(m\pi)}\Bigg[&\sinh(m\pi(1-y))\int_0^y\sinh(m\pi s)\mathrm{d}s\\&+\sinh(m\pi y)\int_y^1\sinh(m\pi(1-s))\mathrm{d}s\Bigg].\end{aligned}$$

176

求出积分值，我们发现，对 $m=1, 3, 5, \cdots$，

$$E_m(y)=\frac{-4}{m^3\pi^3\sinh(m\pi)}[\sinh(m\pi(1-y))(\cosh(m\pi y)-1)$$
$$+\sinh(m\pi y)(\cosh(m\pi(1-y))-1)].$$

将这些代入(13)式，我们得到

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}E_{2k+1}(y)\sin((2k+1)\pi x).$$

习题 12 要求利用计算机来验证这个解事实上就等于例 1 中的二重级数解. ■

习题 3.9

在习题 1～4 中，运用二重傅里叶级数，对给定数据，求解图 1 中的泊松问题，取 $a=b=1$.

1. $f(x, y)=x$，$f_1=f_2=0$，$g_1=g_2=0$.
2. $f(x, y)=\sin 2\pi x$，$f_1=f_2=0$，$g_1=g_2=0$.
3. $f(x, y)=\sin\pi x$，$f_1(x)=0$，$f_2(x)=x$，$g_1=g_2=0$.
4. $f(x, y)=xy$，$f_1(x)=0$，$f_2(x)=x$，$g_1=g_2=0$.
5. 利用特征函数展开法，求解单位正方形($0<x<1$，$0<y<1$)中的 $\nabla^2 u=3u-1$，u 在边界上为零.
6. 利用特征函数展开法，求解单位正方形($0<x<1$，$0<y<1$)中的 $\nabla^2 u=u_{xx}+u$，u 在边界上为零.
7. 利用一维特征函数展开，求解习题 2 中的问题.
8. 利用一维特征函数展开，求解习题 1 中的问题.
9. 通过推导(5)和(8). 求解特征函数问题(6)～(7).
10. 推导(18)和(19)式.
11. 试证：(21)是(16)～(17)的解.
12. 利用计算机，通过求 1×1 的正方形内不同点处的值，验证例 1 和例 3 中的解是相等的.
13. **专题问题：矩形中的狄利克雷问题**. 利用特征函数展开法，推导 3.8 节例 1 的结果. 首先，考虑如下一维特征值问题

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}=-\lambda\phi(x),\quad \phi(0)=0,\quad \phi(a)=0.$$

14. **专题问题：盒中的泊松问题**. 利用三重傅里叶级数展开，求解在长方盒($0<x<a$，$0<y<b$，$0<z<c$)中的泊松方程

$$\nabla^2 u(x,y,z)=f(x,y,z)$$

满足边界条件：$u=0$ 在所有六个面上成立. 在求解这个问题过程中，你要回答如下问题： [177]

(a)相应的齐次问题是什么？

(b)特征值及其相应的特征函数是什么？

(c)对于三元函数，3.7 节定理 1 的对应结果是什么？

15. 如果 u 在盒的所有面上都不为零，描述习题 14 中问题的求解. [提示：3.8 节的习题 12 和习题 13.]
16. **亥姆霍兹方程**.

(a)在热传导方程

$$u_t=c^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$$

中分离变量，令 $u(x, y, z, t)=\phi(x, y, z)T(t)$，其中($x$, y, z)是空间变量，而 t 是时间变量. 试证：空间部分 ϕ 满足亥姆霍兹方程.

(b)对一维、二维热传导方程，重做(a)部分.

(c)对三维波动方程，重做(a)部分.

17. **专题问题：用特征函数展开法求解热传导方程**. 利用特征函数展开法，求解 3.7 节二维热边值问题. 注意：相应的特征函数问题由(6)和(7)式给出，级数解的系数应是 t 的函数.

专题问题：非齐次热边值问题. 完成习题 18 和习题 20，求解非齐次热边值问题. 为说明求解过程，完成习题 19 和习题 21.

18. **非齐次热边值问题：特殊情形**. 边值问题

$$u_t = c^2 u_{xx} + q(x,t),\quad t>0,\quad 0<x<L,$$
$$u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0,\quad t>0,$$
$$u(x,0)=f(x)$$

描述了长度为 L 的均匀棒的热传导，该棒侧面绝热，初始温度分布是 $f(x)$，棒的端点保持 0 度，附加项 $q(x,t)$是一个与时间有关的热源. 我们将运用特征函数展开法求解这个问题.

(a)求解相应的特征值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}=-\lambda\phi(x),\quad \phi(0)=0,\quad \phi(L)=0.$$

(b)将 f 和 g 的傅里叶正弦级数写成

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x,$$

其中

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x$$

和

178

$$q(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\sin\frac{n\pi}{L}x,$$

而

$$q_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L q(x,t)\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x.$$

为应用特征函数展开法，令

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)\sin\frac{n\pi}{L}x.$$

试证：$B_n(t)$满足一阶初值问题

$$\frac{\mathrm{d}B_n}{\mathrm{d}t}+c^2\lambda_n B_n=q_n(t),\quad B_n(0)=b_n,$$

其中 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$.

(c)试证：

$$B_n(t)=\mathrm{e}^{-c^2\lambda_n t}\left(b_n+\int_0^t q_n(s)\mathrm{e}^{c^2\lambda_n s}\,\mathrm{d}s\right).$$

19. (a)对特定情形 $c=1$，$L=\pi$，$q(x,t)=x\mathrm{e}^{-t}$，以及 $f(x)=0$，完成习题 18 的细节.

(b)对不同的 t 值，画出解的图像，考察当 $t\to\infty$时图的性态，这个渐近性态与你的预期相符吗?

20. **非齐次热边值问题：一般情形**. 本题我们将求解习题 18 中的热传导方程，带有同样的初始条件，以及如下与时间有关的边值条件：

$$u(0,t)=A(t),\quad u(L,t)=B(t),\quad t>0.$$

参见 3.5 节(问题(6)～(8))，我们求解了当 $A(t)$和 $B(t)$是常数时的情形，受其启发，我们有如下求解

方法.

(a)试证：解具有形式

$$u(x,t)=v(x,t)+\frac{B(t)-A(t)}{L}x+A(t),$$

其中 $v(x,\ t)$是下面热传导问题的解：

$$v_t=c^2v_{xx}+q(x,t)-\frac{B'(t)-A'(t)}{L}x-A'(t),\quad t>0,\quad 0<x<L,$$

$$v(0,t)=0,\quad v(L,t)=0,\quad t>0,$$

$$v(x,0)=f(x)-\frac{B(0)-A(0)}{L}x-A(0).$$

(b)利用(a)和习题 18，求解这个问题.

(c)描述当 $A(t)$和 $B(t)$是常数时所得的结果，与 3.5 节的结果比较.

21. (a)对特殊情形 $c=1$，$L=\pi$，$q(x,\ t)=0$，$A(t)=te^{-t}$，$B(t)=0$，以及 $f(x)=0$，完成习题 20 的所有细节.

(b)对不同的 t 值，画出解的图像，考察当 $t\to\infty$时图的性态.

179

3.10 诺伊曼条件和罗宾条件

至今为止，运用分离变量法和特征函数展开法，我们成功求解了边值问题. 利用线性性，我们运用叠加原理将问题简化，分解成若干个简单的子问题. 本节我们将设计出一些将上述工具相结合的方法，从而大大拓宽了应用范围.

我们要介绍的问题引出了二维问题中的一些经典论题，例如罗宾条件和诺伊曼条件. 更重要的是，它们显示出简单的思想是如何综合起来的，进而设计出更强有力的技巧. 为简化叙述，我们只关注在 $a\times b$ 矩形 R 上的拉普拉斯方程，在两个竖直边界上满足零边值条件

$$u(0,y)=0\quad 及\quad u(a,y)=0\quad 对所有\ 0<y<b,\tag{1}$$

如图 1 所示. 由下面的例题可知，运用叠加原理，更一般的问题都可以化为这种情形.

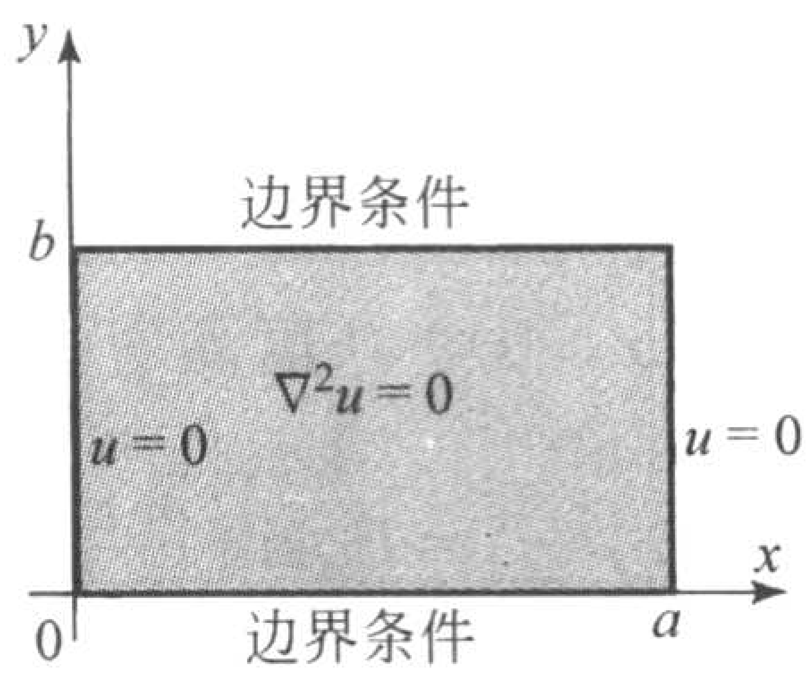


图 1 矩形上的拉普拉斯方程，在两个竖直边界上满足零边值条件

我们以一个简单的结果为开始，后面将会经常用到这个结果.

命题 1(乘积解) 如果 $\phi(x,\ y)=X(x)Y(y)$是图 1 中 $a\times b$ 矩形上的拉普拉斯方程的乘积解，在两个竖直边上满足零边值条件，则

$$\phi(x,y)=\phi_m(x,y)=\sin\frac{m\pi}{a}x\left(A_m\cosh\frac{m\pi}{a}y+B_m\sinh\frac{m\pi}{a}y\right),\tag{2}$$

其中 $m=1,\ 2,\ \cdots$，而 A_m 和 B_m 是任意常数.

在某些应用中，将(2)式写成形如

$$\phi_m(x,y)=\sin\frac{m\pi}{a}x\left(\alpha_m\cosh\frac{m\pi}{a}(\beta-y)+\beta_m\sinh\frac{m\pi}{a}(\beta-y)\right)\tag{3}$$

将更为方便，其中 β 是一固定数. 你可以直接验证(3)是图 1 问题的解，或者将双曲余弦和正

弦写成指数函数，可以验证(2)和(3)是等价的.

证明 正如前面我们多次所做的那样(比如，参见 3.8 节)，运用分离变量法，我们发现：如果 $\phi(x, y)=XY$ 是乘积解，则 X 满足：$X''+kX=0$，以及 $X(0)=X(a)=0$；而 Y 满足 $Y''-kY=0$. X 的非平凡解是 $X=X_m=\sin\frac{m\pi}{a}x$，相应地 $k=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$. 回到 Y 分量，我们有 $Y''-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 Y=0$，这就蕴涵着 $Y=A_m\cosh\frac{m\pi}{a}y+B_m\sinh\frac{m\pi}{a}y$，即为所求. ■

180 在边值问题中，我们称任何一个给定了解 u 在边界上取值的条件为**狄利克雷条件**；一个给定了法向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在边界上取值的条件为**诺伊曼条件**；任何一个给定了 $\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u$ 在边界上取值的条件为**罗宾条件**，其中 α 是 x 和 y 的函数，因此，狄利克雷条件和诺伊曼条件是罗宾条件的特殊情形. 在矩形区域中，边界上的法向导数就是 x 轴或 y 轴正向或负向的导数，因此，罗宾条件就是给定 $u_x+\alpha u$ 或 $u_y+\alpha u$ 在矩形边界上的取值.

用这些术语，让我们来求解混合狄利克雷和诺伊曼条件的问题.

例 1 混合的狄利克雷条件和诺伊曼条件

求解图 2 的边值问题.

解 由命题 1，乘积解具有形式

$$\phi_m(x,y)=\sin\frac{m\pi}{a}x\left(A_m\cosh\frac{m\pi}{a}y+B_m\sinh\frac{m\pi}{a}y\right). \quad (4)$$

我们知道，这些解已经满足了竖直边上的条件. 下面，我们确定 A_m 和 B_m，以满足水平边 $y=0$ 上的零狄利克雷条件. 事实上，$u(x, 0)=0$ 蕴涵着 $A_m\sin\frac{m\pi}{a}x=0$，这就导出 $A_m=0$，所以 $\phi_m(x, y)=B_m\sin\frac{m\pi}{a}x\sinh\frac{m\pi}{a}y$. 为满足上水平边上的非齐次诺伊曼条件，我们将乘积解叠加起来，尝试

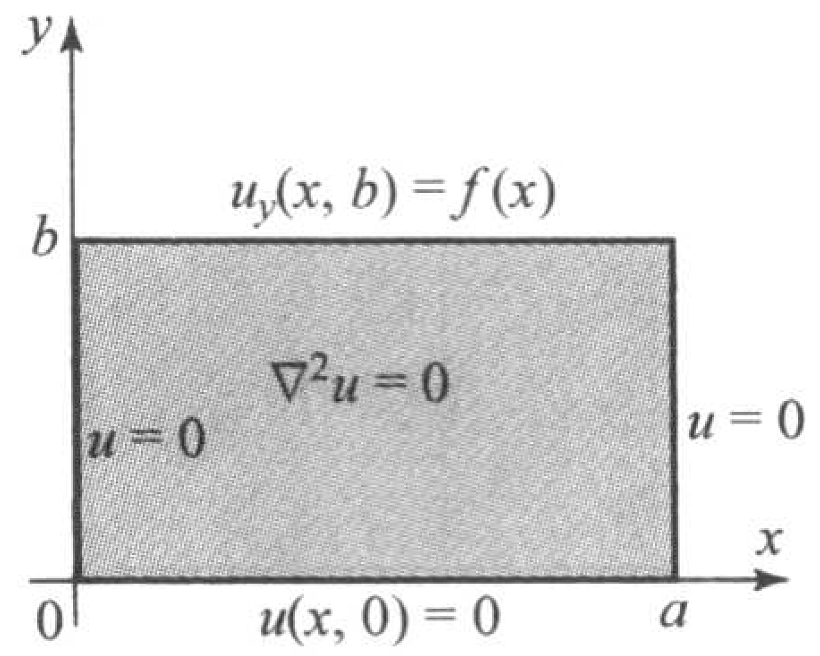


图 2 例 1 中混合的狄利克雷条件和诺伊曼条件，诺伊曼条件是非齐次的

$$u(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi}{a}x\sinh\frac{m\pi}{a}y. \quad (5)$$

对级数逐项微分，从形式上计算 u_y，并在 $y=b$ 处令 $u_y=f(x)$，我们得到

$$f(x)=u_y(x,b)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\frac{m\pi}{a}\cosh\left(\frac{m\pi}{a}b\right)\sin\frac{m\pi}{a}x,\quad 0<x<a.$$

这就是 $f(x)$ 在区间 $0<x<a$ 上的傅里叶正弦级数展开式，所以 $B_m\frac{m\pi}{a}\cosh\left(\frac{m\pi}{a}b\right)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶正弦系数；等价地，

$$B_m=\frac{2}{\pi m\cosh\left(\frac{m\pi}{a}b\right)}\int_0^a f(x)\sin\frac{m\pi}{a}x\,dx. \quad (6)$$

这就确定了系数 B_m，从而完成求解. ■

181 下面，我们考虑带有罗宾条件的问题.

例 2　罗宾条件

求解图 3 中的边值问题.

解　由(2)式，我们有乘积解

$$\phi(x,y)=\sin\frac{m\pi}{a}x\left(A_m\cosh\frac{m\pi}{a}y+B_m\sinh\frac{m\pi}{a}y\right).$$

为满足齐次罗宾条件，计算

$$\phi_y=\sin\frac{m\pi}{a}x\left(\frac{m\pi}{a}A_m\sinh\frac{m\pi}{a}y+\frac{m\pi}{a}B_m\cosh\frac{m\pi}{a}y\right).$$

因此，$\phi_y(x,0)+2\phi(x,0)=\sin\frac{m\pi}{a}x\left(\frac{m\pi}{a}B_m+2A_m\right)=0$，由此推出 $B_m=-\frac{2a}{m\pi}A_m$，因此乘积解具有形式

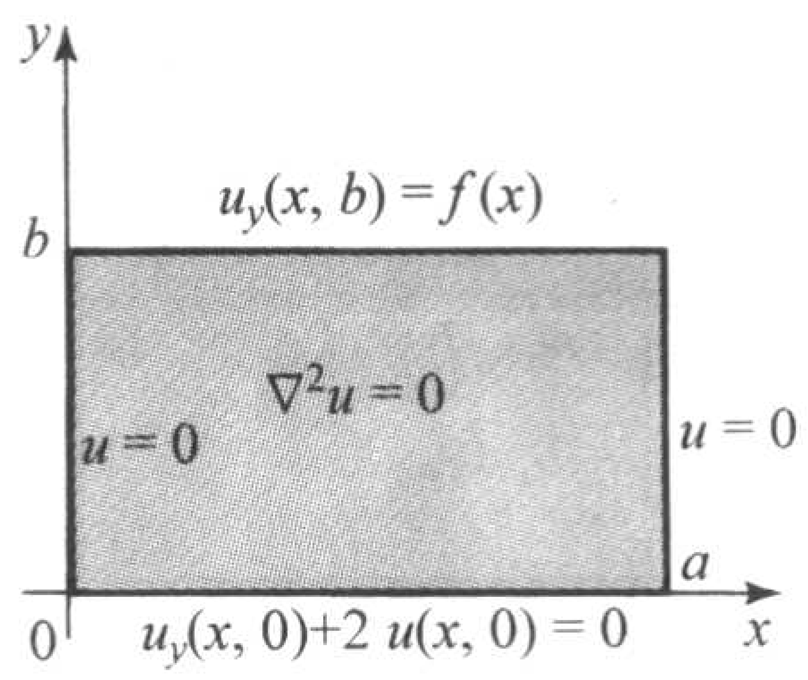


图 3　例 2 中混合的齐次罗宾条件和非齐次诺伊曼边界条件

$$A_m\sin\frac{m\pi}{a}x\left(\cosh\frac{m\pi}{a}y-\frac{2a}{m\pi}\sinh\frac{m\pi}{a}y\right).$$

回到最后一个在上水平边上的非齐次诺伊曼边界条件，我们将乘积解叠加起来，令

$$u(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin\frac{m\pi}{a}x\left(\cosh\frac{m\pi}{a}y-\frac{2a}{m\pi}\sinh\frac{m\pi}{a}y\right).\tag{7}$$

(我们总是最后处理非齐次条件.)由 $u_y(x,b)=f(x)$，我们得到

$$f(x)=u_y(x,b)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin\frac{m\pi}{a}x\left(\frac{m\pi}{a}\sinh\left(\frac{m\pi}{a}b\right)-2\cosh\left(\frac{m\pi}{a}b\right)\right),$$

这就是 $f(x)$在区间 $0<x<a$ 上的傅里叶正弦级数，因此，

$$A_m=\frac{2}{a\left(\frac{m\pi}{a}\sinh\left(\frac{m\pi}{a}b\right)-2\cosh\left(\frac{m\pi}{a}b\right)\right)}\int_0^a f(x)\sin\frac{m\pi}{a}x\,\mathrm{d}x.\tag{8}$$

这就确定了 A_m，从而解决了该问题. ■

在前面的例题中，我们总是最后处理非齐次条件，这个方法实质上依赖于每种情形的偏微分方程以及它的三个边界条件是齐次的这个事实，所以乘积解的无穷求和仍然满足方程和齐次条件. 在含有多于一个非齐次边界条件的边值问题中，我们利用线性性，将问题分解成若干子问题，每个子问题中至多只含有一个边界条件是非齐次的，我们用下面的例题来说明. [182]

例 3　边界条件的分解

图 4a 中的边值问题含有在两个水平边上的非齐次边界条件，我们可以将它写成两个子问题之和，在每个子问题中，有三个边界条件是齐次的(图 4b 和 c). 可以验证，如果 u_1 是问题#1 的解，而 u_2 是问题#2 的解，则 $u=u_1+u_2$ 是图 4a 中原问题的解. 下面，我们来求解子问题.

图 4b 中的问题#1 已经在例 1 中求过了. 由(5)和(6)，我们有

$$u_1(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin\frac{m\pi}{a}x\sinh\frac{m\pi}{a}y,$$

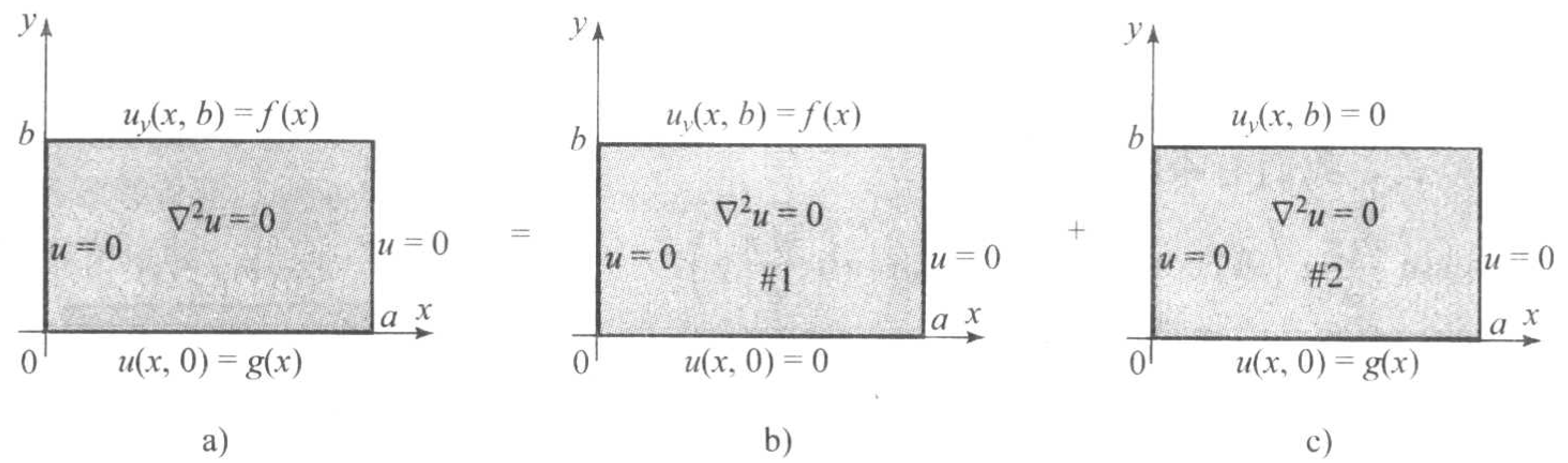


图 4 例 3 中边值问题的分解

其中

$$B_m = \frac{2}{\pi m \cosh\left(\frac{m\pi}{a}b\right)}\int_0^a f(x)\sin\frac{m\pi}{a}x\,\mathrm{d}x.$$

对问题♯2，运用形如(3)的乘积解更为方便，即 $\phi(x, y)=\sin\frac{m\pi}{a}x\left(A_m\cosh\frac{m\pi}{a}(b-y)+B_m\sinh\frac{m\pi}{a}(b-y)\right)$，则齐次边界条件 $u_y(x, b)$蕴涵着 $0=-B_m\frac{m\pi}{a}\sin\frac{m\pi}{a}x$，这就得到 $B_m=0$. 现在，为满足最后的在下水平边上的非齐次狄利克雷条件，我们将乘积解叠加起来，令

$$u_2(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\frac{m\pi}{a}x\cosh\frac{m\pi}{a}(b-y).$$

在 $y=0$ 处取值，得到

$$g(x) = u(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m\cosh\left(\frac{m\pi}{a}b\right)\sin\frac{m\pi}{a}x,\quad 0 < x < a.$$

这就是 $g(x)$在区间 $0<x<a$ 上的傅里叶正弦级数展开式，因此，有

$$A_m = \frac{2}{a\cosh\left(\frac{m\pi}{a}b\right)}\int_0^a g(x)\sin\frac{m\pi}{a}x\,\mathrm{d}x.$$

这就确定了系数 A_m，也就解决了问题♯2，进而完成求解. ■

183 在下个例题中，我们必须将非齐次边界条件(包含一个罗宾条件)分成两个部分.

例 4 边界条件的分解

图 5a 中的边值问题含有在两个水平边上的非齐次边界条件，为求解这个问题，我们将它写成两个子问题，在每个子问题中，有三个边界条件是齐次的. 可以直接验证，如果 u_1 是问题♯1 的解，而 u_2 是问题♯2 的解，则 $u=u_1+u_2$ 是原问题的解.

图 5b 的问题已经在例 2 中解决了，图 5c 的问题仅含有一个非齐次边界条件，可以用本节的方法求解，具体细节留作习题 3. ■

有关诺伊曼条件的进一步性质(例如，相容性)，以及涉及二维热传导方程的有趣应用，将在习题中介绍.

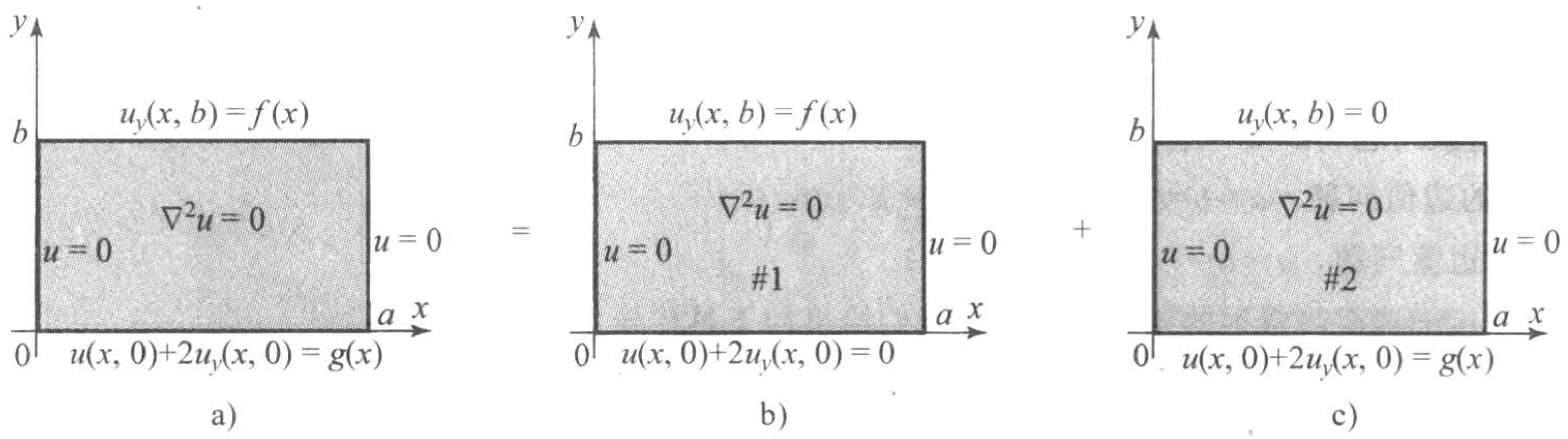


图 5　例 4 中边值问题的分解

习题 3. 10

1～3. 求解由图 6～8 所描述的边值问题.

1.

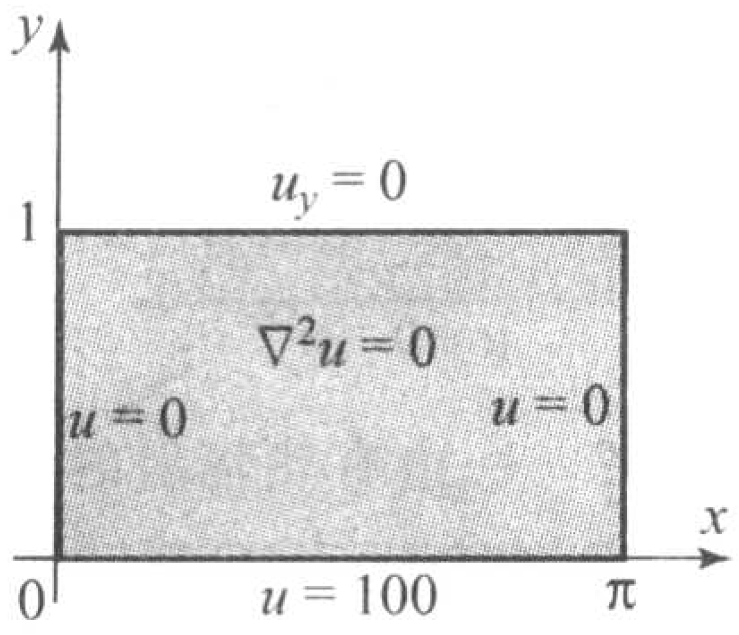


图 6　习题 1

2.

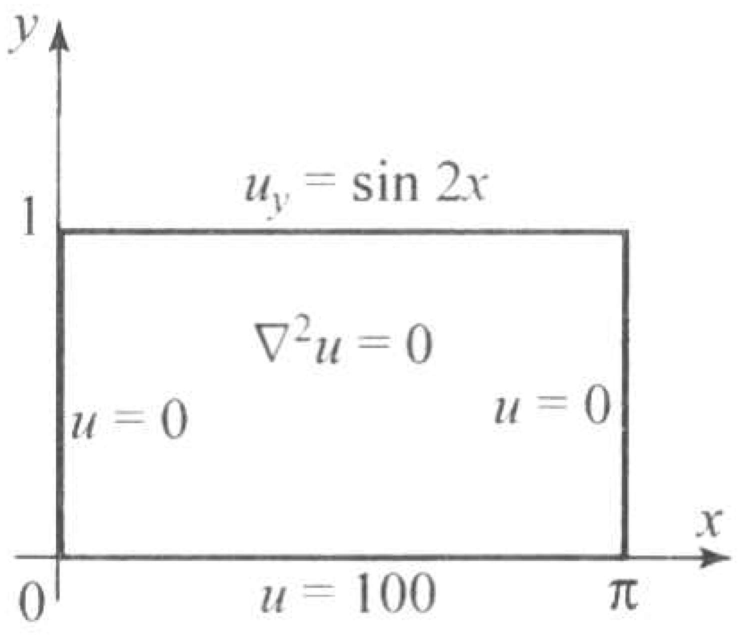


图 7　习题 2

3.

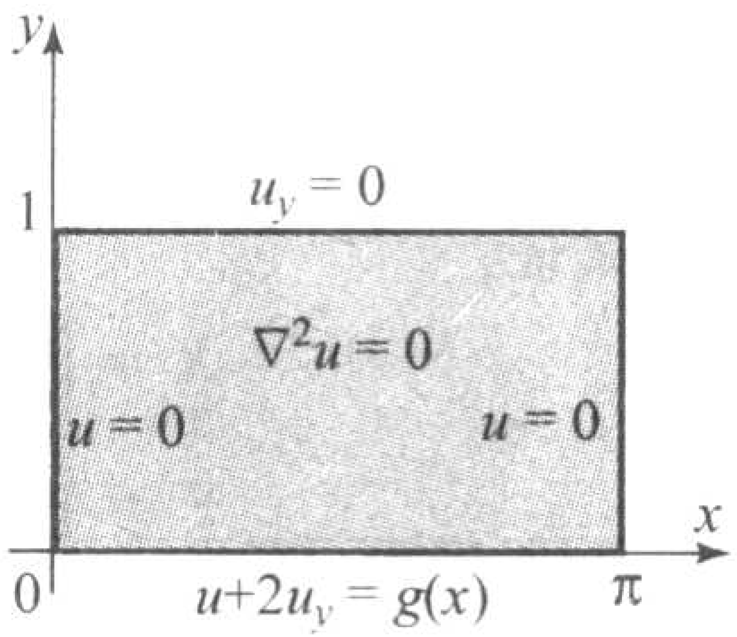


图 8　习题 3

4. (a)证明命题 1 的如下变形：如果 $\phi(x, y)=X(x)Y(y)$是图 9 中 $a\times b$ 矩形上的拉普拉斯方程的乘积解，在竖直边上满足零诺伊曼条件，则 $\phi(x, y)=B_0 y+A_0$，或

$$\phi(x,y)=\phi_m(x,y)=\cos\frac{m\pi}{a}x\left(A_m\cosh\frac{m\pi}{a}y+B_m\sinh\frac{m\pi}{a}y\right),$$

其中 $m=1, 2, \cdots$，而 A_m 和 B_m 是任意常数.

(b)对 $m=1, 2, \cdots$，试证：乘积解的另一种形式为

$$\phi_m(x,y)=\cos\frac{m\pi}{a}x\left(\alpha_m\cosh\frac{m\pi}{a}(\beta-y)+\beta_m\sinh\frac{m\pi}{a}(\beta-y)\right).$$

184

5～6. 利用习题 4，求解由图 10～11 所描述的边值问题.

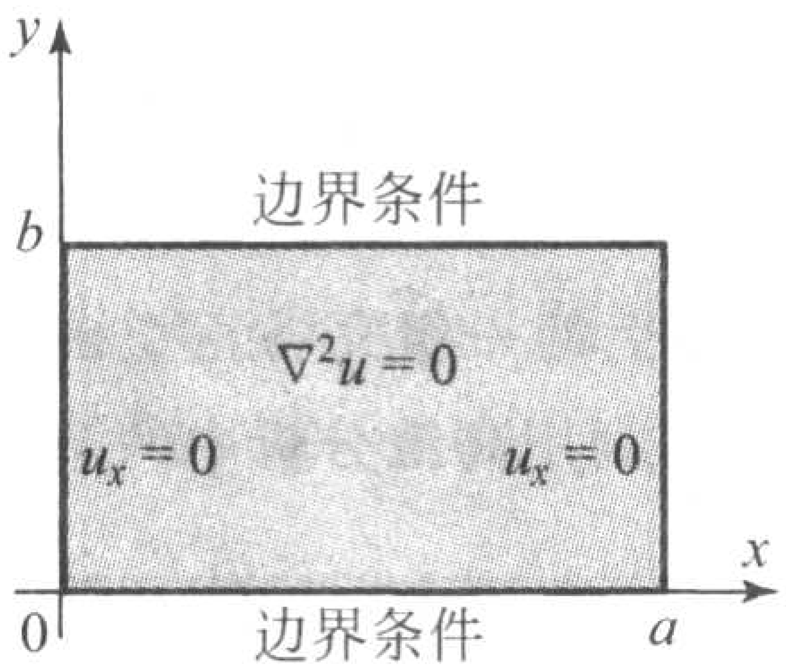


图 9　习题 4

5.

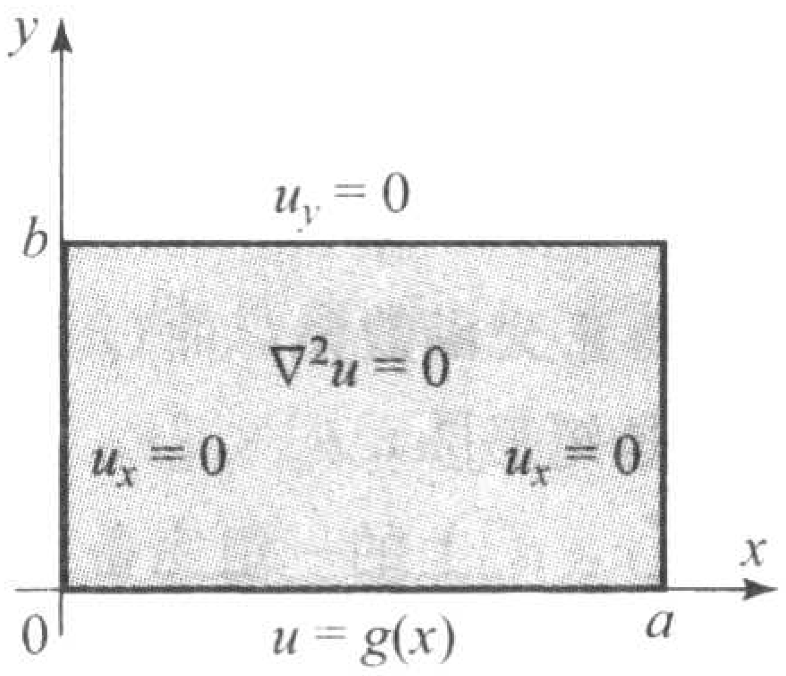


图 10　习题 5

6.

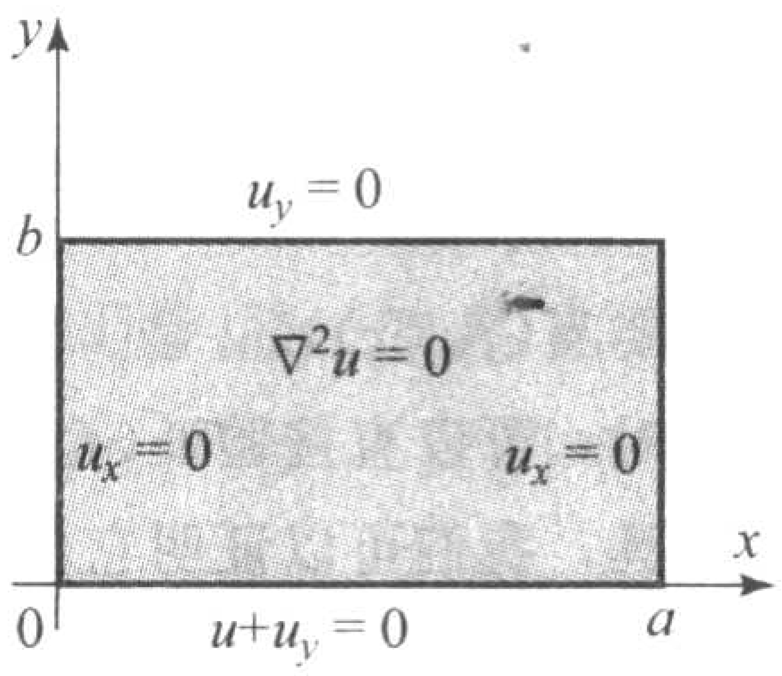


图 11　习题 6

在习题 7～10 中，(a)求解给定的边值问题.(b)通过验证边界条件来验证你的答案.

7. 图 2 中的边值问题，$a=b=\pi$，以及 $f(x)=\sin 2x$.

8. 图 3 中的边值问题，$a=b=\pi$，以及 $f(x)=\sin x$.

9. 图 4(a)中的边值问题，$a=b=\pi$，以及 $f(x)=g(x)=1$.

10. 图 8 中的边值问题，$a=b=\pi$，以及 $g(x)=1$.

11. **专题问题：一边有热辐射的绝热板**.这里我们给出如下热传导方程求解步骤：

$$u_t=c^2(u_{xx}+u_{yy}),\quad 0<x<a,\quad 0<y<b,\quad t>0,$$

满足初始条件 $u(x,y,0)=f(x,y)$和如图 12 所示的(罗宾)边界条件.这个问题描述了矩形绝热板中的温度分布，其中有三条边保持在 0 度，另一边以正比于其温度的速度向周围介质散热，热对流系数(或热交换常数)$\kappa>0$.

(a)试用分离变量法，证明：如果 $u(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t)$是满足方程和边界条件的乘积解(此时，不用担心初始条件)，则

$$X''+\mu^2X=0,\quad X(0)=0,\quad X'(a)=-\kappa X(a),$$

$$Y''+\nu^2Y=0,\quad Y(0)=0,\quad Y(b)=0,$$

$$T'+c^2(\mu^2+\nu^2)T=0.$$

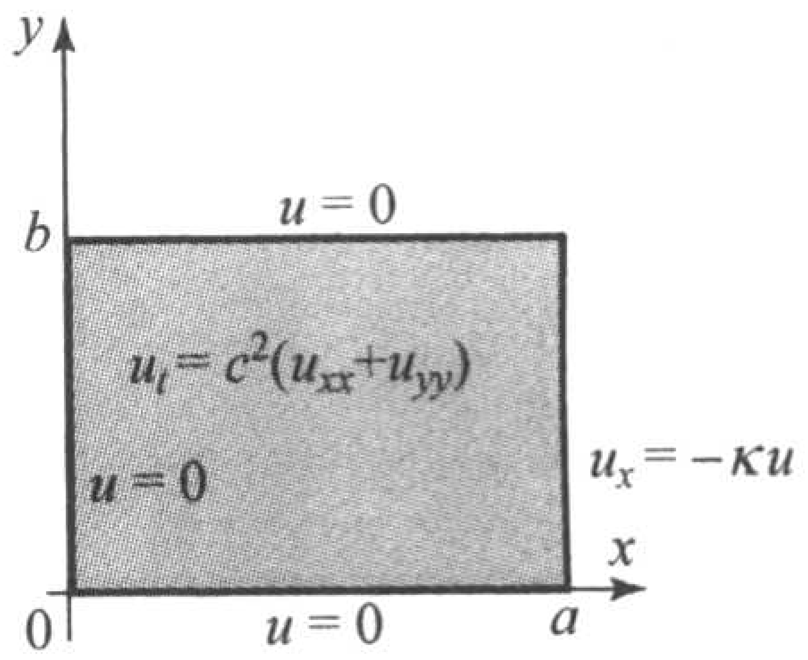


图 12　一边有热辐射的板

(b)试证：

$$X=X_m=\sin\mu_m x,\quad m=1,2,\cdots,$$

$$Y=Y_n=\sin\frac{n\pi}{b}y,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$T=T_{mn}=e^{-\lambda_{mn}^2 t},\quad m,n=1,2,\cdots,$$

185

其中 μ_m 是超越方程 $\tan a\mu=-\frac{\mu}{\kappa}$的第 m 个正根，而 $\lambda_{mn}^2=c^2\left(\mu_m^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)$.(参见 3.6 节例 2.)

(c)叠加乘积解，并利用初始条件，试证：问题的解是

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}B_{mn}e^{-\lambda_{mn}^2 t}\sin\mu_m x\sin\frac{n\pi}{b}y,$$

其中

$$B_{mn}=\frac{2}{b\int_0^a\sin^2\mu_m x\,dx}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\mu_m x\sin\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy.$$

(注：这里出现的二重正弦级数与 3.7 节中的最大区别在于：函数 $\sin\mu_m x$ 没有共同的周期.但是，就像 3.7 节二重傅里叶正弦级数一样，这些“广义二重傅里叶级数”可以用来展开任何一个有合理定义的函数$f(x,y)$.这是由于函数 $\sin\mu_m x$ 构成了区间[0，a]上的一组完备正交函数集(参见 3.6 节例 3 中的附注)，而函数 $\sin\frac{n\pi}{b}y$ 构成了区间[0，b]上的一组完备正交函数集(半幅正弦级数展开).一般地，只要当$(f_m(x))_{m=1}^{\infty}$是[a，b]上的一组完备正交函数集，而$(g_n(y))_{n=1}^{\infty}$是[c，d]上的一组完备正交函数集时，可以直接验证$(f_m(x)g_n(y))_{m,n=1}^{\infty}$是矩形[$a$，$b$]×[$c$，$d$]上的正交函数.利用高维分析中的基本工具，我们可以证明它们还是[a，b]×[c，d]上的一组完备函数集.)

12. (a)求解习题 11 中的热传导问题，$a=1$，$b=\pi$，$c=1$，$\kappa=1$，$f(x,y)=x(1-x)\sin y$.(参考 3.6 节例 3 是有帮助的.)

(b)写出至少五个乘积解，并构成级数解的一个部分和.

(c)考虑点$\left(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}\right)$处的温度 $u\left(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2},t\right)$，以及 3.6 节例 3 在点 $x=\frac{1}{2}$处的温度 $u\left(\frac{1}{2},t\right)$，哪个温

度衰减得更快？通过比较解析级数解来验证你的答案，并给出基于问题物理解释的理由.

13. **专题问题：诺伊曼问题中边界条件的相容性**. 矩形 R 上的诺伊曼问题是由拉普拉斯方程和诺伊曼边界条件构成的边值问题：$\nabla^2 u(x, y)=0$ 对 R 中所有的(x, y)成立，以及$\frac{\partial u}{\partial n}u(x, y)=f(x, y)$对 R 的所有边界点(x, y)成立. 在这个问题中，所有边都与周围介质有热交换，交换速度由 f 给出. 全热通量是 f 沿R 的边界积分. 由于 u 是稳态解，穿过边界的全热通量应为 0，这意味着：f 不能是任意的，它必须满足**相容性条件**：

$$\int_0^a f(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^b f(a,y)\mathrm{d}y-\int_0^a f(x,b)\mathrm{d}x-\int_0^b f(0,y)\mathrm{d}y=0.$$

这个条件可以由调和函数性质和格林恒等式推出(参见第 12 章). 这里我们说明：为应用傅里叶级数和分离变量法求解诺伊曼问题，相容性是必要条件. 为简化叙述，我们考虑图 13 中的问题. 186

(a)利用习题 4 中求出的乘积解，试证：解具有形式

$$u(x,y)=A_0+\sum_{m=1}^{\infty}A_m\cos\frac{m\pi}{a}x\cosh\frac{m\pi}{a}y.$$

(b)试证：

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\pi}{a}A_m\sinh\frac{m\pi b}{a}\cos\frac{m\pi}{a}x.$$

(c)由(b)得出：f 必须满足相容性条件

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=0.$$

[提示：f 的傅里叶余弦系数是多少?]

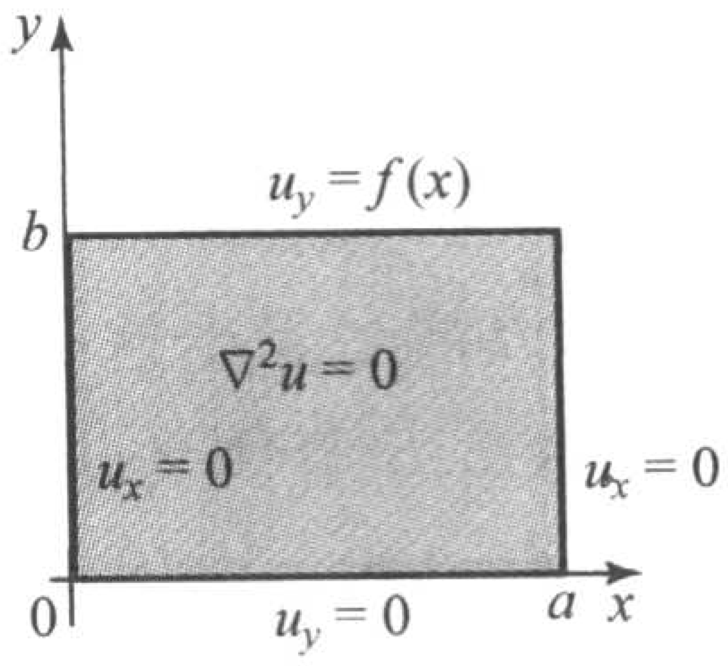


图 13 诺伊曼问题

(d)试证：对 $m=1, 2, \cdots$，有

$$A_m=\frac{2}{m\pi\sinh\frac{m\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\cos\frac{m\pi}{a}x\,\mathrm{d}x.$$

这在相差一个任意常数 A_0 的意义下确定了解，这是可以预料的，因为问题并不是只有唯一解. 事实上，如果 $u(x, y)$是解，则不难验证 $u(x, y)+C$ 也是解，其中 C 是任意常数.

14. 求解图 13 中的问题，$a=b=\pi$，以及 $f(x)=\frac{\pi}{2}-x$，$0<x<\pi$.

3.11 最大值原理

本节的标题是指热传导方程和拉普拉斯方程解的一个性质. 例如，考虑均匀棒中的温度分布，设侧面绝热，内部没有热源，满足边界条件和初始条件. 如果初始温度分布以及端点处的温度都不超过某个值 M，则基于物理背景的讨论，我们推出棒中的温度在随后时刻继续保持比 M 小；类似地，如果初始温度分布以及端点处的温度都不低于某个值 m，则我们推出棒中的温度在随后时刻继续保持比 m 大. 这些论断的数学描述就导出所谓的**最大值原理**，或**最大值-最小值原理**. 本节的目的就是对热传导方程和拉普拉斯方程证明这个原理，并推导出它的一些理论和实际应用. 关于拉普拉斯方程的结果有另外一种证明，将在第 12 章加以说明. 我们以热传导方程为开始. 187

定理 1(热传导方程的最大值原理) 考虑带有非齐次边界条件的热边值问题

$$u_t=c^2u_{xx}, \quad 0<x<L \quad t>0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = g_1(t),\quad u(L,t) = g_2(t),\quad t \geqslant 0,\tag{2}$$

$$u(x,0) = f(x),\quad 0 < x < L.\tag{3}$$

假设 f，g_1，g_2 是有界的，因此存在常数 m 和 M，使得对所有 $0\leqslant x\leqslant L$，以及 $t\geqslant 0$，我们有

$$m \leqslant f(x) \leqslant M;\quad m \leqslant g_1(t) \leqslant M;\quad m \leqslant g_2(t) \leqslant M.\tag{4}$$

则(1)～(3)的解满足不等式

$$m \leqslant u(x,t) \leqslant M;\quad 0 \leqslant x \leqslant L;\quad t \geqslant 0.\tag{5}$$

在端点 $x=0$，$x=L$ 或 $t=0$，(5)就退化为(4)，因此(5)式所提供的新信息是当 $0<x<L$ 和 $t>0$ 时 $u(x, t)$值的上、下界．(5)式的证明将在本节末的附录中介绍，下面我们给出一些例题和应用．

例 1　热传导方程的最大值原理

(a)在 3.5 节例 1 中，我们有 $f(x)=100$，$0<x<\pi$；$g_1(t)=0$，$g_2(t)=0$，$t\geqslant 0$．在(4)式中取 $m=0$ 和 $M=100$，由(5)式，我们推出对所有时刻有 $0\leqslant u(x, t)\leqslant 100$．对 $t>0$，由 3.5 节图 4 可以清楚看出这一点．

(b)在 3.5 节例 3 中，我们有 $f(x)=100$，$g_1(t)=0$，$g_2(t)=100$．同样，在(4)式中取 $m=0$ 和 $M=100$，由(5)式，我们推出 $0\leqslant u(x, t)\leqslant 100$．由 3.5 节图 6 可以清楚看出这一点．

(c)考虑热传导方程(1)，$c=1$，$L=1$，带有如下边界和初始条件：

$$u(0,t) = te^{-t},\quad u(1,t) = 0,\quad t \geqslant 0,$$

$$u(x,0) = 0,\quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

这里 $m=0$，以及 $M=e^{-1}$，这是 $te^{-t}(t\geqslant 0)$的最大值(参见图 1)．不用求解问题，由(5)式，我们可以得出 $0\leqslant u(x, t)\leqslant e^{-1}$．■

在下例中，我们应用最大值原理推导热传导问题(1)～(3)解的唯一性．

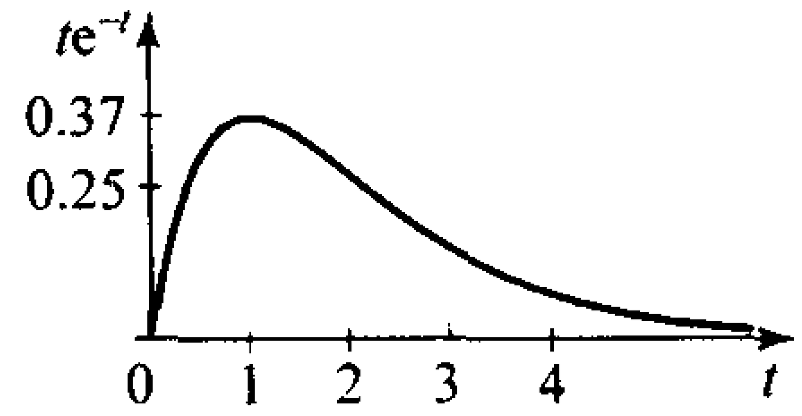


图 1　最大值 $M=e^{-1}\approx 0.37$，在 $t=1$ 点达到

188

例 2　热传导问题解的唯一性

试证：如果 $u_1(x, t)$和 $u_2(x, t)$是热传导问题(1)～(3)的解，则 $u_1(x, t)=u_2(x, t)$，因此热传导问题(1)～(3)的解是唯一的．

解　考虑函数 $u(x, t)=u_1(x, t)-u_2(x, t)$，由于 u_1 和 u_2 是(1)～(3)的解，易证 u 也是(1)的解，并且满足边界条件 $u(0, t)=u(L, t)=0$，初始条件 $u(x, 0)=0$．因此，对 u，取 $m=0$ 和 $M=0$，(5)式蕴涵着 $0\leqslant u(x, t)\leqslant 0$，从而 $u(x, t)=0$，即得 $u_1(x, t)=u_2(x, t)$．■

下面应用最大值原理，推导热传导问题解的比较原理．

例 3　比较原理

令 $u_1(x, t)$和 $u_2(x, t)$表示热传导问题(1)～(3)的两个解，假设 $u_1(0, t)\leqslant u_2(0, t)$，$u_1(L, t)\leqslant u_2(L, t)$，以及 $u_1(x, 0)\leqslant u_2(x, 0)$．换句话说，假设 u_2 的边界条件和初始条件控制 u_1 的边界条件和初始条件．试证：对所有 $0\leqslant x\leqslant L$ 和 $t\geqslant 0$，有 $u_1(x, t)\leqslant u_2(x, t)$．

解　函数 $u(x, t)=u_2(x, t)-u_1(x, t)$满足热传导方程(1)，以及边界条件 $u(0, t)=$

$u_2(0, t)-u_1(0, t)\geqslant 0$ 和 $u(L, t)=u_2(L, t)-u_1(L, t)\geqslant 0$，以及初始条件 $u(x, 0)=u_2(x, 0)-u_1(x, 0)\geqslant 0$. 取 $m\geqslant 0$，应用(5)式，我们得到 $0\leqslant u(x, t)$；等价地，$u_1(x, t)\leqslant u_2(x, t)$. ■

拉普拉斯方程

考虑矩形中的狄利克雷问题

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b, \tag{6}$$

$$u(x,0)=f_1(x),\quad u(x,b)=f_2(x),\quad 0<x<a, \tag{7}$$

$$u(0,y)=g_1(y),\quad u(a,y)=g_2(y),\quad 0<y<b. \tag{8}$$

假设我们已知边界条件的上、下界，并将这个问题视为没有内部热源的绝热板内的稳态温度分布. 有理由相信这些界也界定了狄利克雷问题的解，事实上，我们有如下重要结果.

定理 2(拉普拉斯方程的极大值原理) *假设 f_1，f_2，g_1，g_2 是有界的，因此，存在常数 m 和 M，使得对所有 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$，我们有*

$$m\leqslant f_1(x),f_2(x)\leqslant M;\quad m\leqslant g_1(y),g_2(y)\leqslant M. \tag{9}$$

则(6)～(8)的解满足不等式

$$m\leqslant u(x,y)\leqslant M;\quad 0\leqslant x\leqslant a;\quad 0\leqslant y\leqslant b. \tag{10}$$

[189]

在本节附录中，在完成定理 1 的证明之后，我们将介绍这个定理的证明. 类似于定理 1 可以得到热传导方程的性质，定理 2 可以用来推导拉普拉斯方程的性质. 特别地，我们有相应的唯一性定理和比较原理，这些结果的严格叙述将在习题中介绍.

附录：(5)和(10)的证明

首先证明(5)式，注意到，只需证明(5)中的一个不等式. 事实上，我们将证明

$$u(x,t)\leqslant M,\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{11}$$

其中 T 是任意固定的. 理解这一点就足够了，我们假设(11)成立，令 T 趋于无穷，得到不等式(11)对所有 $0\leqslant t<\infty$ 成立. 现在，考虑由(1)和初始条件 $u(0, t)=-g_1(t)$，$u(L, t)=-g_2(t)$，以及边界条件 $u(x, 0)=-f(x)$ 构成的问题. 对这个问题，上界是 $-m$，而下界是 $-M$. 进一步，这个问题的解是 $-u(x, t)$，其中 $u(x, t)$ 是(1)～(3)的解. 应用(11)式，我们得到 $-u(x, t)\leqslant -m$，或 $m\leqslant u(x, t)$. 因此，(11)式蕴涵着(5)式.

在证明(11)式过程中，我们将假设 $u(x, t)$ 在矩形 $R_T=\{(x, t): 0\leqslant x\leqslant L, 0\leqslant t\leqslant T\}$ 上连续. 现在，回想微积分中的一个结果断言：有界闭区间上的连续函数在区间上取到其最大值和最小值. 对多元连续函数也有类似的结果，它断言：有界闭集上(比如我们的矩形 R_T)的连续函数取到其最大值和最小值. 由这个结果，u 在 R_T 上取到其最大值. 我们的目标是证明这个值不可能在 R_T 内部或其上边界上达到. 这将得出其最大值在另外三边上的某点处达到. 但是，在这些边上，u 被 M 界定，因此(11)成立，进而推出(5)式.

我们需要两个引理.

引理 1 *令 $v(x, t)$ 是二元函数，对 $0<x<L$，$0<t\leqslant T$，v_t 和 v_{xx} 存在. 假设 v 在点 (x_0, t_0)*

处取到局部最大值，其中 $0<x_0<L$，$0<t_0\leqslant T$，则

(i) $v_{xx}(x_0, t_0)\leqslant 0$.

(ii)如果 $0<t_0<T$，$v_t(x_0, t_0)=0$.

(iii)如果 $t_0=T$，$v_t(x_0, t_0)\geqslant 0$.

证明 为证明(i)，视 $v(x, t_0)$ 为 x 的函数. 关于 v 的假设蕴涵着函数 $x\mapsto v(x, t_0)$ 在点 x_0 处取到局部最大值，因此图像的凹性推出其二阶导数不可能为正的，即(i)得证. 为证(ii)和(iii)，我们采用类似方法讨论，视 $v(x_0, t)$ 为 t 的函数. 如果这个函数在区间 $(0, T)$ 内部某处取到局部最大值，则一阶导数必为零，即得(ii). 如果函数在 $t=T$ 取到局部最大值，则它在 $t=T$ 处不可能是递减的，因此，(iii)得证. ■

190

我们希望证明 $u(x, t)$ 在 R_T 内部或其上边界上不可能取到最大值. 如果引理1中的不等式(i)是严格的，则我们完成了证明，因为将引理1应用到 u 上，得到 $u_t\geqslant 0$，以及 $u_{xx}<0$，从而在 R_T 内部或其上边界上的最大值点处，都有 $u_t\neq c^2u_{xx}$. 这显然与 u 是(1)的解这个事实矛盾. 不幸的是，在局部最大值点处，我们可能得到 $u_{xx}=0$，这不足以得到矛盾. 为克服这个问题，我们引入辅助函数

$$v(x,t)=u(x,t)+\frac{1}{n}x^2, \tag{12}$$

我们刚才的讨论对这个函数是有效的.

引理2 令 $v(x, t)$ 如(12)式定义，则

(i)对 R_T 内部或其上边界上的点，有 $v_t(x, t)<c^2v_{xx}(x, t)$.

(ii) v 在矩形 R_T 上的最大值仅可能在 $x=0$，$x=L$，或 $t=0$ 上取到.

(iii)对 R_T 内所有的 (x, t)，我们有 $v(x, t)\leqslant M+\frac{L^2}{n}$.

证明 由(12)式，我们有 $v_t=u_t$，以及 $v_{xx}=u_{xx}+\frac{2}{n}$. 由于对 R_T 内部或其上边界上的点，有 $u_t=c^2u_{xx}$，因此(i)得证. 为证(ii)式，假设 v 在矩形 R_T 内点 (x_0, t_0) 处取到局部最大值，由引理1，我们有 $v_t(x_0, t_0)\geqslant 0$，以及 $v_{xx}(x_0, t_0)\leqslant 0$. 但是，由(i)，$v_{xx}(x_0, t_0)>\frac{1}{c^2}v_t(x_0, t_0)\geqslant 0$，这就得到矛盾，因此(ii)得证. 为证(iii)，我们利用(ii)，以及对 $x=0$，$x=L$，或 $t=0$，$u(x, t)\leqslant M$ 这个事实. ■

现在，我们可以完成(5)式的证明. 利用(12)和引理2(iii)，对 R_T 内所有的 (x, t)，我们有

$$u(x,t)=v(x,t)-\frac{x^2}{n}\leqslant v(x,t)\leqslant M+\frac{L^2}{n}.$$

令 n 趋于无穷，我们得到(11)式，因而(5)式得证.

(10)的证明 就像我们在(5)式证明中所做的，我们只需证明不等式(10)的一部分即可. 事实上，只需证明

$$u(x,y)\leqslant M,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b. \tag{13}$$

利用引理1或引理1的证明，我们发现：如果 u 在矩形 $R=\{(x, y): 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b\}$ 内一

点(比如说(x_0, t_0))取到最大值，其中$0<x_0<a$，$0<y_0<b$，则

$$u_{xx}(x_0,y_0)\leqslant 0, \quad \text{及} \quad u_{yy}(x_0,y_0)\leqslant 0. \tag{14}$$

同样地，如果这两个不等式中有一个是严格的，则这将与等式$u_{xx}(x_0, y_0)+u_{yy}(x_0, y_0)=0$矛盾，从而完成证明．但是，(14)中的二阶导数可能为零，所以像我们在证明(5)式中所做的，我们引入辅助函数

$$v(x,y)=u(x,y)+\frac{x^2+y^2}{n}. \tag{15}$$

由于u在R的内部满足拉普拉斯方程，所以有

$$v_{xx}+v_{yy}=u_{xx}+u_{yy}+\frac{4}{n}=\frac{4}{n}>0.$$

191

这蕴涵着v在R的内部不可能取到局部最大值；否则，我们得到$v_{xx}\leqslant 0$和$v_{yy}\leqslant 0$，因而，$v_{xx}+v_{yy}\leqslant 0$，这就得到矛盾．因此，v的最大值只可能在R的边界上达到．由于u在R的边界上由M界定，由(15)式得出

$$v(x,y)\leqslant M+\frac{a^2+b^2}{n},$$

对R内的所有(x, y)成立．因此，对R内的所有(x, y)，有

$$u(x,y)=v(x,y)-\frac{x^2+y^2}{n}\leqslant v(x,y)\leqslant M+\frac{a^2+b^2}{n}.$$

令n趋于无穷，我们得到(13)，因而(10)成立． ■

习题 3.11

1. 参考3.5节习题3中的热传导问题，在这种情形下，最大值原理告诉我们什么？
2. 对3.5节习题11中的热传导问题，重做习题1.
3. 本题我们考虑带有内部热源的热传导问题，此时最大值原理不再成立．问题如下：

$$u_t=u_{xx}+2(t+1)+x(1-x), \quad 0<x<1, \quad t>0,$$
$$u(0,t)=0, \quad u(1,t)=0,$$
$$u(x,0)=x(1-x) \quad 0<x<1.$$

   (a)验证$u(x, t)=(t+1)x(1-x)$是解.

   (b)初始和边界值的最大值和最小值是多少？分别以M和m表示.

   (c)试证：对$t>0$的某些值，棒中某些点处的温度分布超出M，以具体例子说明你的答案.

4. 对二维热传导方程，叙述并证明**最大值原理**．(参考3.7节的带有零边值问题的叙述.)
5. 对波动方程，最大值原理失效，以3.3节中带有零初始速度的波动问题(1)～(3)为例，说明这个事实.
6. **狄利克雷问题解的唯一性**．利用最大值原理，证明狄利克雷问题(6)～(8)有唯一解.
7. 叙述并证明狄利克雷问题(6)～(8)的比较原理．仿照热传导方程(例3)描述你的陈述.

192

第 4 章　极坐标与柱面坐标中的偏微分方程

数学是理解自然法则的普遍性、事物之间的联系……的唯一方式.

——理查德·费曼

综述　傅里叶级数(2.1～2.4 节)和分离变量法(3.3 节)在本章中起着关键性作用. 4.1 节是自封的，它给出拉普拉斯算子在极坐标. 柱面坐标和球面坐标中的形式. 4.2 节和 4.3 节处理圆膜的振动. 这些需要贝塞尔函数(4.7 节和 4.8 节)和傅里叶级数的知识. 4.4 节用到傅里叶级数. 4.5 节需要在 4.7 节和 4.8 节所陈述的贝塞尔函数的进一步性质. 4.6 节阐述了在圆盘上的特征函数展开方法. 为学好本节，建议读者复习 3.9 节的内容.

导读　由 3.6 节，你已经知道如何由改变边界条件得到新形式的级数展开式. 本章我们将在圆形区域和柱形区域上求解边值问题. 这些问题的解将导出新的级数展开式，例如贝塞尔级数，对此你将不会感到惊奇. 这些级数乍看感到十分复杂，可是，借助计算机系统，你将能够画出它们的图形并且发现它们的性态非常像傅里叶级数. 这一章的思想将在第 5 章中进一步发挥，那里将在球面坐标中考虑问题，给出新的特殊函数族.

在前一章，我们用傅里叶级数的知识通过分离变量法，求解了几个感兴趣的边值问题. 方法的成功在很大程度上依赖于如下事实：即所考虑的区域易于在笛卡儿坐标中描述. 本章所提问题的区域易于在极坐标和柱面坐标中描述. 具体地说，我们对波动方程，热传导方程，拉普拉斯方程和泊松方程在圆盘和柱体上考虑边值问题. 随着在适当的坐标系中重述这些问题和分离变量，我们将遇到新的常微分方程，即贝塞尔方程，它的解叫做贝塞尔函数. 分离变量法的全过程将导致我们用贝塞尔函数研究函数的展开式，就像研究傅里叶级数的展开式那样.

开始阅读本章时，不必知道有关贝塞尔函数的知识. 如有需要，建议参考 4.7 节和 4.8 节，那里对这些特殊的级数展开式有全面的讲解. 4.9 节主要包含了贝塞尔函数的一些有趣的性质的证明，与傅里叶级数有令人吃惊的联系. 本节可以略去，不影响本章其余部分的学习.

4.1　各个坐标系中的拉普拉斯算子

二维及高维的拉普拉斯算子在应用中是极为重要的. 例如，它们出现在波动方程和热传导方程中，也出现在拉普拉斯方程中. 在前面几节，我们在矩形和立方体的区域上求解这些方程. 为了把我们的应用推广到圆域、球面和柱面，使用新的坐标系对我们是有利的，在这些坐标系中，区域及其边界有简单的表达式. 例如，对圆盘上的问题使用极坐标，圆心在原点的圆周的方程简化为 $r=a$. 类似地，球面上的问题可由使用球面坐标而简化. 为后文的应用，本节要在各坐标系中表示拉普拉斯算子.

极坐标中的拉普拉斯算子

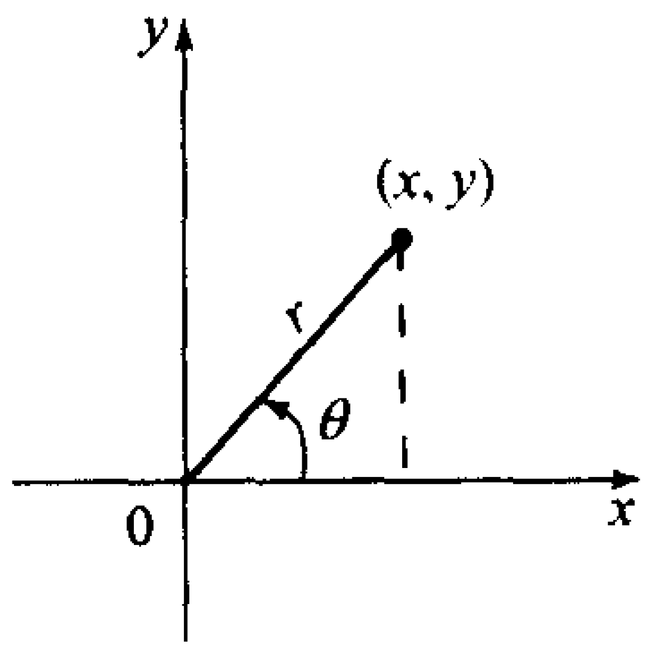


图 1 极坐标

我们回忆平面直角坐标和极坐标(图 1)的关系

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

(由于反正切函数在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 之间取值，我们有 $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \pm k\pi$，其中，$k=0$，1 或者 -1，这取决于 $x>0$，$x<0$ 且 $y\geqslant 0$，或者 $x<0$ 且 $y<0$. 另外，如果 $x=0$，则当 $y>0$ 时，$\theta=\frac{\pi}{2}$，当 $y<0$ 时，$\theta=-\frac{\pi}{2}$.)对等式 $r^2=x^2+y^2$ 关于 x 求导得

$$2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x \quad 或 \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}.$$

对 x 再次求导并化简得

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r - x\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2} = \frac{r - x\frac{x}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}.$$

对等式 $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \pm \pi$ 关于 x 求导得

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{r^2}.$$

对 x 再次求导并化简得

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{2y}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2xy}{r^4}.$$

对 y 求导，类似地得到

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2}, \quad 和 \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{x^2}{r^3}, \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{r^4}.$$

194

(验证这些等式.)由以上演算的结果，容易得到下述有趣的等式：

$$\boxed{\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0} \tag{1}$$

和

$$\boxed{\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial y} = 0.} \tag{2}$$

现在我们要把拉普拉斯算子转到极坐标. 用二维中的链式法则，得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}.$$

应用求导的乘积法则和链式法则，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\\ &\quad+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\\ &\quad+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

以 y 替代上式中的 x，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}.$$

以上二式相加并利用(1)和(2)化简，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right\}+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\left\{\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial y}\right\}\\ &\quad+\frac{\partial u}{\partial r}\left\{\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right\}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left\{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2\right\}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\left\{\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right\}\\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right\}+\frac{\partial u}{\partial r}\left\{\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right\}\\ &\quad+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left\{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2\right\}.\end{aligned}$$

195

上式中关于 x 和 y 的偏导数用它们的 r，θ 的表达式代入，得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{x^2}{r^3}+\frac{y^2}{r^3}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left(\frac{x^2}{r^4}+\frac{y^2}{r^4}\right).$$

利用等式 $x^2+y^2=r^2$ 简化上式，就得到**拉普拉斯算子的极坐标形式**

$$\boxed{\Delta u=\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.} \tag{3}$$

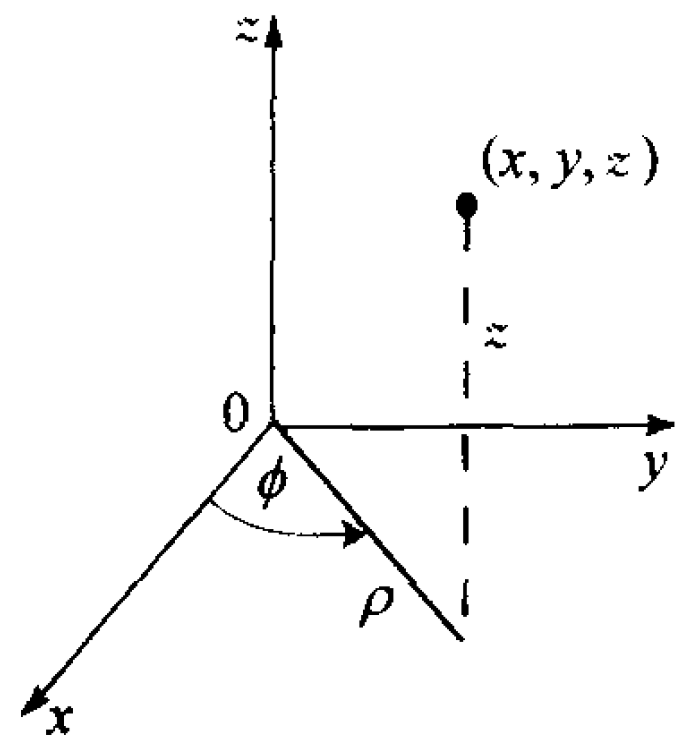


图 2 柱面坐标

柱面坐标中的拉普拉斯算子

如果 u 是三个变量 x，y 和 z 的函数，它的拉普拉斯算子是

$$\Delta u=\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

柱面坐标和极坐标的关系是

$$x=\rho\cos\phi,\quad y=\rho\sin\phi,\quad z=z,$$

其中，我们用 ρ 和 ϕ 表示 xy 平面中的极坐标，如图 2 所示.

由(3)便知**拉普拉斯算子的柱面坐标形式**显然是

$$\boxed{\Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.} \tag{4}$$

球面坐标中的拉普拉斯算子

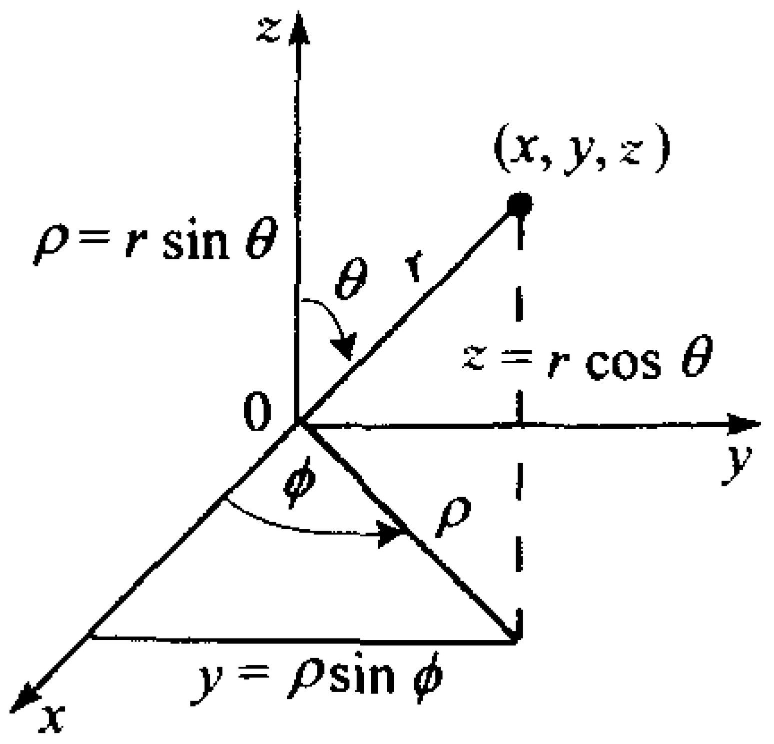


图 3 球面坐标

[196]

我们将用(r, θ, ϕ)表示点(x, y, z)的球面坐标(见图 3). 我们有

$$x = r\cos\phi\sin\theta, \quad y = r\sin\phi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta,$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

由图 3 中的几何关系，我们有

$$\rho = r\sin\theta, \quad x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad \rho^2 = x^2 + y^2.$$

我们的目的是用 r, θ 和 ϕ 表示$\nabla^2 u$. 由拉普拉斯算子的极坐标形式(3)，我们有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}. \tag{5}$$

注意到关系式

$$z = r\cos\theta, \quad \rho = r\sin\theta$$

和极坐标与直角坐标之间的关系式类似. 所以，再一次用拉普拉斯算子的极坐标形式，用 z 和 ρ 分别取代(3)中的 x 和 y 便得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \tag{6}$$

(5)式加上$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$并用(6)式，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}. \tag{7}$$

还要在球面坐标中给出$\partial u/\partial \rho$的表示. 由关系式 $\theta = \tan^{-1}(\rho/z)$可知

$$\frac{\partial \theta}{\partial \rho} = \frac{1}{1 + (\rho/z)^2}\frac{1}{z} = \frac{z}{z^2 + \rho^2} = \frac{z}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}.$$

等式 $\rho = r\sin\theta$ 两边对 ρ 求导，得

$$1 = \frac{\partial r}{\partial \rho}\sin\theta + r\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial \rho} = \frac{\partial r}{\partial \rho}\sin\theta + \cos^2\theta.$$

因此

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = \frac{1 - \cos^2\theta}{\sin\theta} = \sin\theta.$$

注意到 ϕ 和 ρ 是 xy 平面上的极坐标变量，故有$\partial\phi/\partial\rho = 0$. 用求导的链式法则，得

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\rho}{r} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}.$$

把此式代入(7)并化简就得到**拉普拉斯算子的球面坐标形式**

197

$$\boxed{\Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \cot\theta\frac{\partial u}{\partial \theta} + \csc^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\right).} \tag{8}$$

例 1 用球面坐标计算下面函数的拉普拉斯算子.

$$f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2), \quad (x,y,z) \neq (0,0,0).$$

解 用球面坐标，有

$$f(r,\theta,\phi) = \ln r^2 = 2\ln r.$$

由于 f 与 θ 及 ϕ 无关，所有关于这两个变量的偏导数等于零. 由(8)便得

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{2}{r^2} + \frac{4}{r^2} = \frac{2}{r^2}.$$

■

习题 4.1

在适当的坐标系中计算习题 1～8 中函数的拉普拉斯算子，并确定所给函数是否满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 u=0$. 自变量的个数指明了空间维数.

1. $u(x,\ y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.
2. $u(x,\ y)=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$.
3. $u(x,\ y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
4. $u(x,\ y,\ z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
5. $u(x,\ y,\ z)=(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$.
6. $u(x,\ y)=\ln(x^2+y^2)$.
7. $u(x,\ y,\ z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$.
8. $u(x,\ y)=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{y}{x^2+y^2}$.
9. (a)证明：如果 $u(r,\ \theta,\ \phi)$只依赖于 r，则它的拉普拉斯算子的形式是
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$
(b)当 u 只依赖于 r 和 θ 时，求 u 的拉普拉斯算子.
10. 补出由(7)式导出(8)式的具体运算.
11. **专题问题：调和函数.** 回顾 3.1 节所讲，如果 $u(x,\ y)$满足拉普拉斯方程，就称它是调和函数.
(a)证明：如果 u 和 v 是调和的，α，β是常数，则 $\alpha u+\beta v$ 是调和的.
(b)给出一个例子：u 和 v 是调和的，但 uv 不调和.
(c)证明：如果 u 和 u^2 都调和，则 u 必是常数. [提示：用偏导数分别写出 u 和 u^2 调和的表达式.]
(d)证明：如果 u，v 及 u^2+v^2 都是调和的，则 u 和 v 必是常数.

4.2 圆形膜的振动：对称情况

本节及下一节，我们研究张紧在圆周上且具有均匀质量密度的圆形薄膜的振动. 置圆膜的

198

中心为原点，记它的半径为 a. 薄膜的振动规律服从二维波动方程，这个方程由最适合于表达

该问题的极坐标表示．用拉普拉斯算子的极坐标形式(4.1 节中(3)式)，**二维波动方程**变为

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right).} \tag{1}$$

薄膜的初始形状用函数 $f(r, \theta)$表示，初始速度是 $g(r, \theta)$.

本节仅考虑 f 和 g 是**径向对称**或称**轴对称**的情况，即它们只依赖于半径 r，不依赖于 θ. 从物理上看，有理由认为这时解也不依赖于 θ(见图 1).

因此，$\frac{\partial u}{\partial \theta}=0$，(1)变为

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right),} \tag{2}$$

其中，$u=u(r, t)$，$0<r<a$，$t>0$. 因为薄膜张在圆周上，我们有**边界条件**

$$u(a,t) = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{3}$$

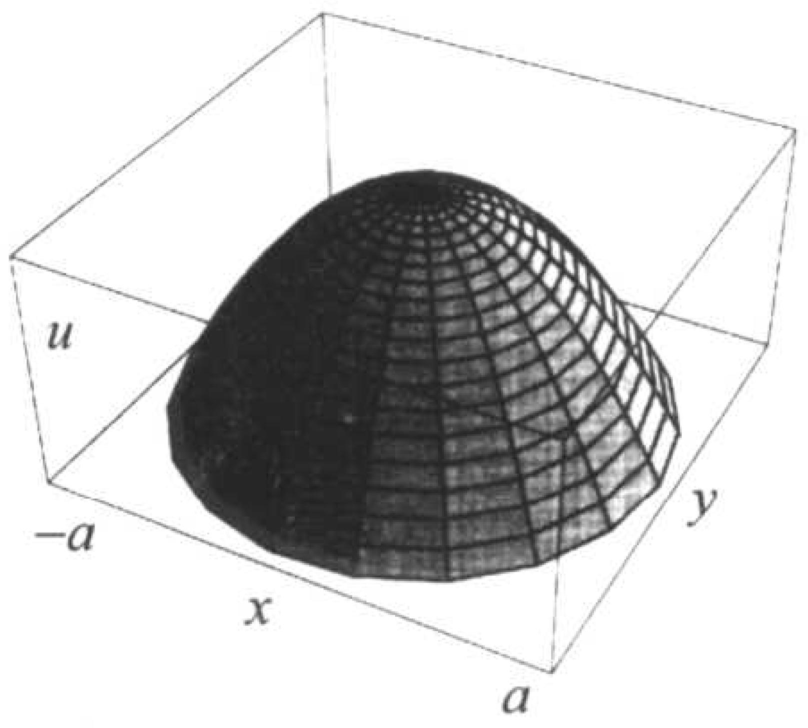


图 1 径向对称的形状

径向对称的**初始条件**是

$$u(r,0) = f(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r,0) = g(r), \quad 0 < r < a. \tag{4}$$

初始条件是径向对称的，因此它们仅依赖于 r.

如在第 3 章中所做，这里我们用分离变量法求解边值问题(2)～(4). 目的是在方程(2)中分离变量，把问题化为关于 r 和 t 的两个常微分方程. 你将看到，关于 t 的方程和在直角坐标系中对波动方程分离变量后得到的方程相同. 因此，它的解将由正弦函数和余弦函数组成. 关于空间变量 r 的方程是新的，它的解将涉及所谓的贝塞尔函数.

分离变量

设解具有形式 $u(r, t)=R(r)T(t)$，将此式求导后代入(2)，分离变量得

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{1}{R}\left(R'' + \frac{1}{r}R'\right) = -\lambda^2.$$

因为我们期望得到周期解 T，所以分离变量后的常数取负值(更严格的论证基于下述事实：解 R 在区间$[0, a]$上应该有界，参考 4.5 节狄利克雷问题的解). 因此 199

$$rR'' + R' + \lambda^2 rR = 0, \quad R(a) = 0 \quad (\text{由}(3)), \tag{5}$$

$$T'' + c^2\lambda^2 T = 0. \tag{6}$$

求解分离变量的方程

我们再一次由求解带有边界条件的方程开始，以减少可能的解的数目. 方程(5)叫做**零阶贝塞尔方程的参数形式**(这里的 λ 是参数). 这个方程在应用中经常出现，以至于它的解有专用名称. 由于方程是二阶齐次的，我们只需它的两个线性无关解就能写出它的通解. 为方便计，这两个线性无关解称为**第一类零阶贝塞尔函数和第二类零阶贝塞尔函数**，并分别记为 $J_0(\lambda r)$和 $Y_0(\lambda r)$. 因此，贝塞尔方程的参数形式(5)的通解是

$$R(r)=c_1J_0(\lambda r)+c_2Y_0(\lambda r),\tag{7}$$

其中，$r>0$(4.8 节定理 3)．函数 J_0 和 Y_0 将在 4.7～4.9 节中详细论述；这里仅引用那些需要的内容．图 2 画出了 J_0 和 Y_0 的图形．

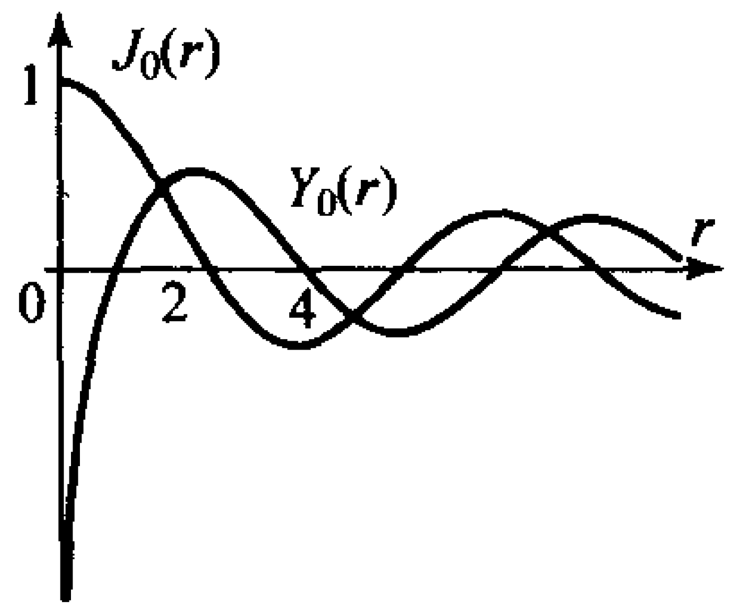


图 2 零阶贝塞尔函数

因为物理上要求波动方程的解是有界的，所以解的空间部分，$R(r)$，必须在 $r=0$ 附近有界．这本质上是关于 R 的第二个边界条件．现在的事实是 Y_0 在 0 附近无界，这使我们必须在(7)式中取 $c_2=0$．为避免平凡解，我们取 $c_1=1$，得

$$R(r)=J_0(\lambda r).\tag{8}$$

条件 $R(a)=0$(见(5)式)隐含

$$J_0(\lambda a)=0,$$

所以 λa 必须是贝塞尔函数 J_0 的一个根．由图 2 所示，J_0 有无穷多个正的零点，记它们为

$$\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\cdots<\alpha_n<\cdots.$$

(此式的证明请见 4.9 节，或 4.8 节的习题 35)．因此

[200]

$$\lambda=\lambda_n=\frac{\alpha_n}{a},\quad n=1,2,\cdots,$$

对应的(5)的解是

$$\boxed{R_n(r)=J_0\left(\frac{\alpha_n}{a}r\right),\quad n=1,2,\cdots,}$$

其中，α_n 是 J_0 的第 n 个正的零点．这些解与我们在前面多次见到的解 $\sin\frac{n\pi}{L}x$ 很类似，特别地，当求解一维波动方程时．唯一的差别在于正弦函数及其零点 $n\pi$ 现在被函数 J_0 及其零点 α_n 代替．回到(6)式，取 λ 为 λ_n，求得

$$\boxed{T(t)=T_n(t)=A_n\cos c\lambda_n t+B_n\sin c\lambda_n t.}$$

于是，我们得到(2)和(3)的乘积解

$$u_n(r,t)=(A_n\cos c\lambda_n t+B_n\sin c\lambda_n t)J_0(\lambda_n r)\quad n=1,2,\cdots.$$

整个问题的贝塞尔级数解

为了满足初始条件，受叠加原理的启发，我们令

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos c\lambda_n t+B_n\sin c\lambda_n t)J_0(\lambda_n r).$$

通过计算级数在 $t=0$ 时的值和利用初始条件，确定这些未知系数．从(4)中第一个条件得

$$u(r,0)=f(r)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0(\lambda_n r),\quad 0<r<a.$$

$f(r)$的这个级数表示很像一个傅里叶正弦级数，只是正弦函数现在被贝塞尔函数取代．也有适用于这种情况下的类似的展开定理；得到的级数展开式叫做**贝塞尔展开式**或者**傅里叶-贝塞尔展开式**(见 4.8 节定理 2)．就这个例子而言，我们用 $p=0$ 时的 4.8 节定理 2．**贝塞尔系数** A_n 由下式给出：

$$A_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(\alpha_n)} \int_0^a f(r) J_0(\lambda_n r) r \, dr,$$

其中，J_1 是一阶贝塞尔函数．现在对该级数关于 t 逐项求导，然后令 $t=0$，从第二个初始条件便得

$$u_t(r,0) = g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c\lambda_n B_n J_0(\lambda_n r).$$

201

因此 $c\lambda_n B_n = c\frac{\alpha_n}{a}B_n$ 是 g 的第 n 个贝塞尔系数，于是

$$B_n = \frac{2}{c\alpha_n a J_1^2(\alpha_n)} \int_0^a g(r) J_0(\lambda_n r) r \, dr.$$

至此，解完全确定．

定理 1(极坐标中的波动方程)　*具有边界条件和初始条件(3)和(4)的径向对称二维波动方程(2)的解是*

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos c\lambda_n t + B_n \sin c\lambda_n t) J_0(\lambda_n r), \tag{9}$$

其中，

$$A_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(\alpha_n)} \int_0^a f(r) J_0(\lambda_n r) r \mathrm{d}r,$$

$$B_n = \frac{2}{c\alpha_n a J_1^2(\alpha_n)} \int_0^a g(r) J_0(\lambda_n r) r \mathrm{d}r; \tag{10}$$

$$\lambda_n = \frac{\alpha_n}{a}, \quad \text{和} \quad \alpha_n = J_0 \text{ 的第 } n \text{ 个正零点}.$$

解(9)和 3.3 节中一维波动方程的解(8)之间有明显的类似．唯一差别就是空间变量现在由贝塞尔函数确定，而非相对简单的正弦函数．

在具体应用(10)式时，需要计算涉及贝塞尔函数的积分，这是相当复杂的．在许多有意义的情况下，这些积分可以借助于由习题和 4.8 节推演出的积分公式算出．作为一个例子，考虑积分

$$\int_0^a x^{p+1} J_p\left(\frac{\alpha}{a}x\right) \mathrm{d}x, \quad p \geqslant 0, \alpha > 0.$$

令 $u = \frac{\alpha}{a}x$，$\mathrm{d}u = \frac{\alpha}{a}\mathrm{d}x$，则

$$\begin{aligned}\int x^{p+1} J_p\left(\frac{\alpha}{a}x\right) \mathrm{d}x &= \frac{a^{p+2}}{\alpha^{p+2}} \int u^{p+1} J_p(u) \mathrm{d}u \\ &= \frac{a^{p+2}}{\alpha^{p+2}} u^{p+1} J_{p+1}(u) + C,\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由 4.8 节的(7)式而得．[由 4.8 节(7)式，$\int x^{p+1} J_p(x) \mathrm{d}x = x^{p+1} J_{p+1}(x) + C$.]

代回 $u = \frac{\alpha x}{a}$ 并化简，算出在 $x = 0$ 和 $x = a$ 的值，我们得到一个非常有用的等式

202

$$\boxed{\int_0^a x^{p+1} J_p\left(\frac{\alpha}{a}x\right)\mathrm{d}x = \frac{a^{p+2}}{\alpha}J_{p+1}(\alpha).} \tag{11}$$

例 1　具有定常初始速度的圆形膜

一个可弯曲的圆形膜张紧在它的边界上，在它表面附近的一声爆炸引起圆形膜以－100米/秒的初始速度振动．设膜的初始形状是平坦的，取 $a=1$ 及 $c=100$，确定其后薄膜的振动．

解　解由(9)式给出，由于 $f(r)=0$，故此处对所有 n，$A_n=0$．由(10)，

$$B_n = \frac{-2}{\alpha_n J_1^2(\alpha_n)}\int_0^1 J_0(\alpha_n r) r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{-2}{\alpha_n{}^2 J_1(\alpha_n)}, \quad (\text{由}(11),\text{取 } p=0).$$

因此，由(9)式得到解

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{\alpha_n^2 J_1(\alpha_n)}\sin(100\alpha_n t)J_0(\alpha_n r).$$

■

为了从例 1 的解答中得到解的数值，必须知道贝塞尔函数 J_0 的零点的值．因为这些值在求解许多问题时是有用的，故计算出这些值到很高的精确度，并列在表格中．借助于计算机系统，我们求出贝塞尔函数 $J_0(x)=0$ 的前五个正根的近似值．这些值和其他有关的数据列在表 1 中．

表 1　例 1 的数据

j	1	2	3	4	5
α_j	2.404 8	5.520 1	8.653 7	11.791 5	14.930 9
$J_1(\alpha_j)$	0.519 1	－0.340 3	0.271 4	－0.232 5	0.206 5
$\frac{-2}{\alpha_j^2 J_1(\alpha_j)}$	－0.666 2	0.192 9	－0.098 4	0.061 9	－0.043 4

借助于此表，我们得到例 1 中解的前三项：

$$u(r,t) \approx -0.666\,2J_0(2.40r)\sin(240t)$$
$$+0.192\,9J_0(5.52r)\sin(552t) - 0.098\,4J_0(8.65r)\sin(865t).$$

利用这些项，我们在图 3 中画出了在 $t>0$ 的几个时刻膜的形状．

正如所料，爆炸之后弹性膜迅速地开始向下振动．

下一个例子讨论具有非零初始位移和零初始速度的膜的振动情况．

例 2　具有径向对称的初始形状的圆形膜

已知 $f(r)=1-r^2$，$g(r)=0$，$a=c=1$，求解边值问题(2)～(4)．

解　注意到由于边界和初始条件的原因，这个问题是径向对称的．解由(9)式给出，由于 $g(r)=0$，故对所有的 n，$B_n=0$，而 A_n 是函数 $1-r^2$ 的贝塞尔系数，它由(10)式给出．即有

$$A_n = \frac{2}{J_1^2(\alpha_n)}\int_0^1 (1-r^2)J_0(\alpha_n r) r\mathrm{d}r$$

203

$$= \frac{2}{\alpha_n^4 J_1^2(\alpha_n)}\int_0^{\alpha_n}(\alpha_n^2 - s^2)J_0(s)s\,\mathrm{d}s \quad (s=\alpha_n r).$$

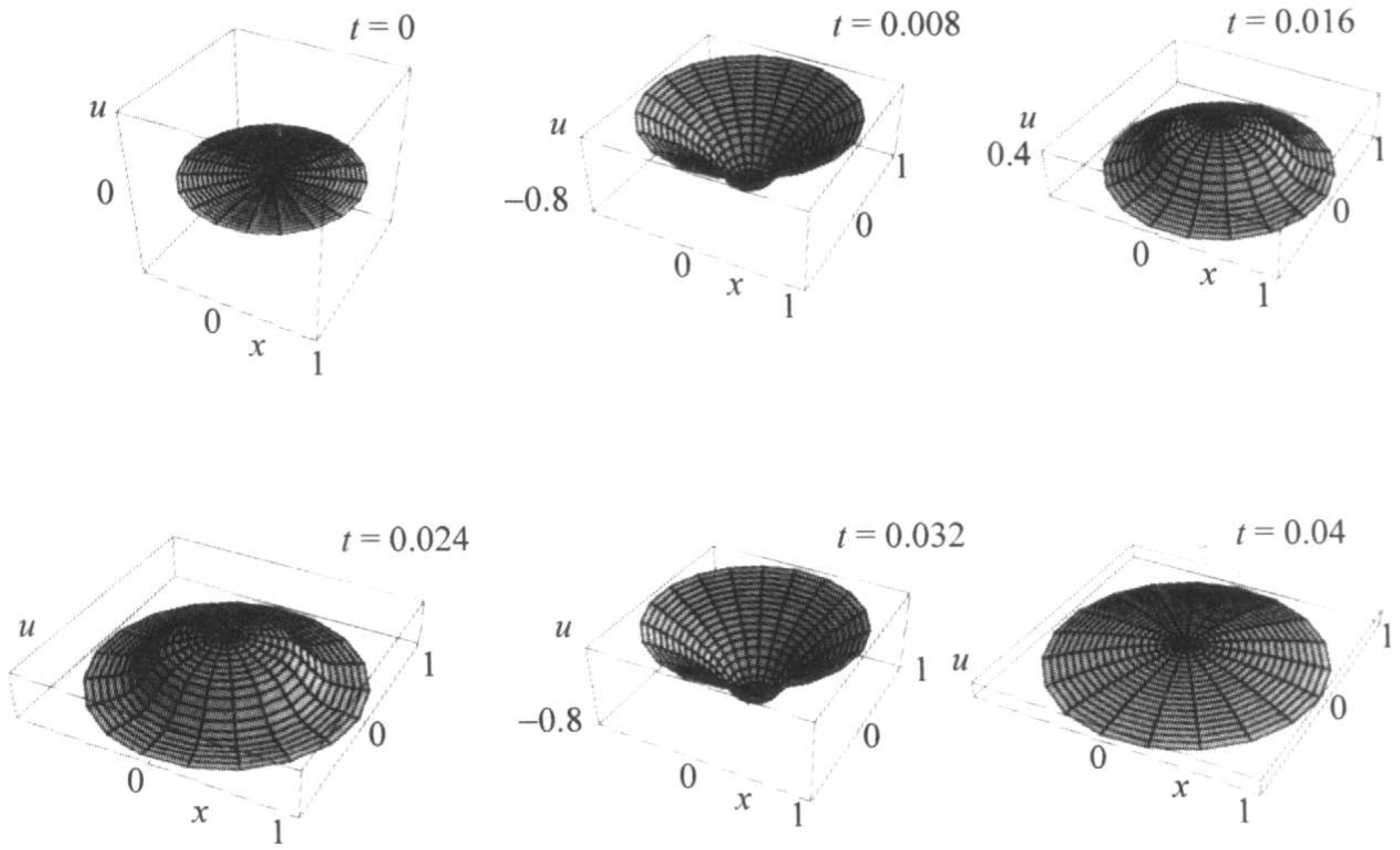


图 3　例 1 中具有径向对称的圆形膜振动

作分部积分，这里 $u=\alpha_n^2-s^2$，$dv=J_0(s)s\,ds$，因此 $du=-2s\,ds$，$v=J_1(s)s$（由 4.8 节的(7)式，取 $p=0$），我们得到

$$A_n=\frac{2}{\alpha_n^4 J_1^2(\alpha_n)}\left[(\alpha_n^2-s^2)J_1(s)s\Big|_0^{\alpha_n}+2\int_0^{\alpha_n}J_1(s)s^2\,ds\right]$$

$$=\frac{4}{\alpha_n^4 J_1^2(\alpha_n)}\int_0^{\alpha_n}J_1(s)s^2\,ds.$$

为求得积分，借助(11)式得到

$$A_n=\frac{4}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n)}J_2(\alpha_n).$$

204

由此看来，我们可以借助于(9)式写出解的显式表达式．然而，在这样做之前，我们提及另一个更有价值的化简方法，它是基于贝塞尔函数的另外一个性质．借助于 4.8 节 $p=1$ 时的(6)式：$J_{p+1}(x)=\frac{2p}{x}J_p(x)-J_{p-1}(x)$，并注意到 α_n 是 J_0 的一个零点，我们得

$$J_2(\alpha_n)=\frac{2}{\alpha_n}J_1(\alpha_n),$$

于是

$$A_n=\frac{8}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)}.$$

因此，由(9)式，得解

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)}\cos(\alpha_n t)J_0(\alpha_n r).$$

■

在例 2 的解式中令 $t=0$，我们应该得到初始位移，即应该有

$$\boxed{1-r^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)}J_0(\alpha_n r),\quad 0<r<1.}$$

这是函数 $1-r^2$ 的贝塞尔级数，我们在求例 2 的解时曾经计算过. 图 4 画出了这个级数的几个部分和，它收敛到 $1-r^2(0<r<1)$.

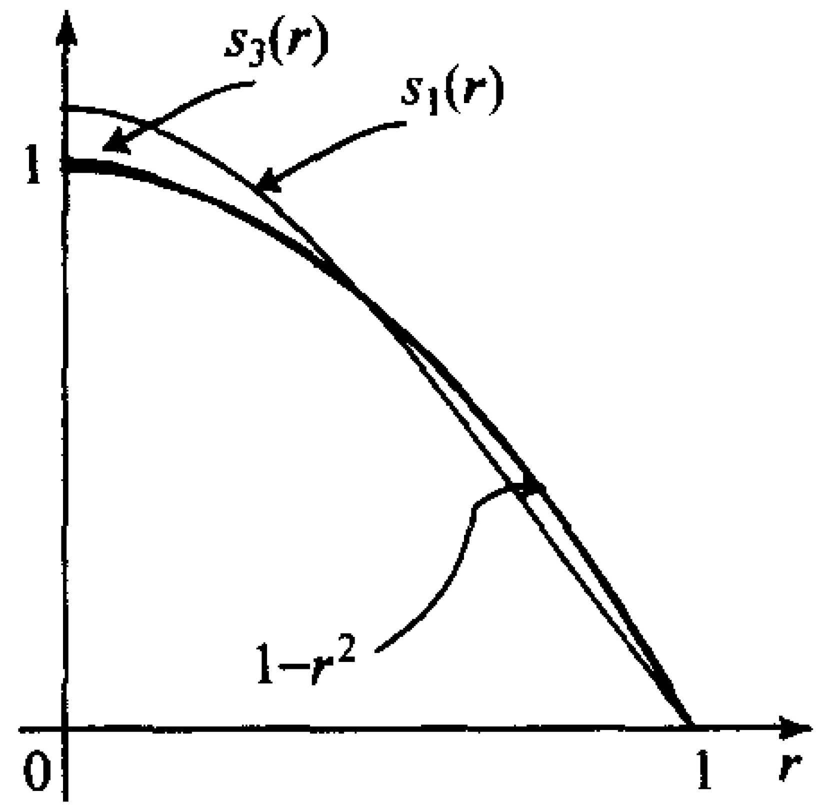


图 4 贝塞尔级数的部分和

作为本节的结束，我们给出例 2 的解的物理意义. 在推导波动方程的过程中，我们总是假设小位移，可是对一个具有单位半径的鼓的中心的振动，你也许不愿意把它的单位位移看作是小位移. 为了给问题一个有意义的解释，我们可以缩小初始数据. 由于边值问题是线性的，这只会导致解按同样比例缩小.

习题 4.2

在习题 1～8 中，用给定的数据求解膜振动问题(2)～(4). 若有可能，借助于计算机求出级数解的前五个非零系数值，并画出膜在 t 的各时刻的形状.（在做这些题时，利用公式(11).）

1. $a=2$，$c=1$，$f(r)=0$，$g(r)=1$.
2. $a=1$，$c=10$，$f(r)=1-r^2$，$g(r)=1$.
3. $a=1$，$c=1$，$f(r)=0$，

$$g(r)=\begin{cases}1 & 若\ 0<r<\dfrac{1}{2},\\[2ex] 0 & 若\ \dfrac{1}{2}<r<1.\end{cases}$$

205

[提示：仿照例 1.]

4. $a=1$，$c=1$，$f(r)=0$，$g(r)=J_0(\alpha_3 r)$.

[提示：4.8 节中的正交性关系式.]

5. $a=1$，$c=1$，$f(r)=J_0(\alpha_1 r)$，$g(r)=0$.

[提示：4.8 节中的正交性关系式.]

6. $a=2$，$c=1$，$f(r)=1-r$，$g(r)=0$.
7. $a=1$，$c=1$，$f(r)=J_0(\alpha_3 r)$，$g(r)=1-r^2$.
8. $a=1$，$c=1$，$f(r)=\dfrac{1}{128}(3-4r^2+r^4)$，$g(r)=0$.

[提示：分部积分，见例 2.]

9. (a) 对任意常数 $c>0$，求习题 3 的解.

(b) 当 c 增加时，描述解的变化.

10. **专题问题：圆盘上的径向对称热传导方程.**

用本节的方法证明下述热传导方程边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right),\quad 0<r<a,\quad t>0,$$

$$u(a,t)=0,\quad t>0,$$

$$u(r,0)=f(r),\quad 0<r<a$$

的解是

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-c^2\lambda_n^2 t}J_0(\lambda_n r),$$

$$A_n=\frac{2}{a^2J_1^2(\alpha_n)}\int_0^a f(r)J_0(\lambda_n r)r\mathrm{d}r,$$

其中，$\lambda_n=\frac{\alpha_n}{a}$，$\alpha_n$ 是 J_0 的第 n 个正的零点.

11. (a)当 $f(r)=100$，$0<r<a$ 时，求解习题 10 中的热传导问题. 你的解表示什么？

(b)已知 $a=1$，$c=1$，在时刻 $t=3$ 求圆盘上最热点的近似温度值. 最热点的位置在何处？由直观验证你的结论.

12. **专题问题：贝塞尔函数的积分恒等式.**

(a)用 4.8 节的(7)和(8)式，建立恒等式

$$\int J_1(x)\mathrm{d}x=-J_0(x)+C \quad 和 \quad \int xJ_0(x)\mathrm{d}x=xJ_1(x)+C.$$

下面，我们推广这两个恒等式.

(b)积分 4.8 节的(5)式，证明：

$$\int J_{p+1}(x)\mathrm{d}x=\int J_{p-1}(x)\mathrm{d}x-2J_p(x).$$

(c)用(a)中的第一个积分和(b)以及归纳法建立

$$\int J_{2n+1}(x)\mathrm{d}x=-J_0(x)-2\sum_{k=1}^{n}J_{2k}(x)+C, \quad n=0,1,2,\cdots.$$

206

作为例子，导出下面的恒等式：

$$\int J_3(x)\mathrm{d}x=-J_0(x)-2J_2(x)+C,$$

$$\int J_5(x)\mathrm{d}x=-J_0(x)-2J_2(x)-2J_4(x)+C.$$

(d)积分 4.8 节的(3)，证明：

$$xJ_{p+1}(x)+p\int J_{p+1}(x)\mathrm{d}x=\int xJ_p(x)\mathrm{d}x.$$

[提示：用分部积分法计算 $xJ_p'(x)$的积分.]

(e)在(d)中令 $p=2n$ 并用(c)证明：对 $n=0$，1，2，…，有

$$\int xJ_{2n}(x)\mathrm{d}x=xJ_{2n+1}(x)-2nJ_0(x)-4n\sum_{k=1}^{n}J_{2k}(x)+C.$$

推导下面的恒等式：

$$\int xJ_2(x)\mathrm{d}x=xJ_3(x)-2J_0(x)-4J_2(x)+C,$$

$$\int xJ_4(x)\mathrm{d}x=xJ_5(x)-4J_0(x)-8J_2(x)-8J_4(x)+C.$$

4.3 圆形膜的振动：一般情况

我们继续讨论圆形膜的振动，现在不假设对称性. 我们将求解极坐标中的二维波动方程

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right),} \tag{1}$$

其中，$0<r<a$，$0<\theta<2\pi$，$t>0$. 这里，$u=u(r,\theta,t)$表示膜在时刻 t 点(r,θ)的位移. **初始条件**(位移和速度)是

$$u(r,\theta,0)=f(r,\theta), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0)=g(r,\theta), \tag{2}$$

其中，$0<r<a$，$0<\theta<2\pi$. 膜的边缘固定的要求导致**边界条件**

207

$$u(a,\theta,t)=0,\quad 0<\theta<2\pi,t>0. \tag{3}$$

因为 θ 是极角，所以(r, θ)和$(r, \theta+2\pi)$表示同一个点，故有 $u(r, \theta, t)=u(r, \theta+2\pi, t)$. 换言之，$u$ 是关于 θ 以 2π 为周期的函数. 因此

$$u(r,0,t)=u(r,2\pi,t)\quad 及\quad \frac{\partial u}{\partial\theta}(r,0,t)=\frac{\partial u}{\partial\theta}(r,2\pi,t). \tag{4}$$

分离变量

我们首先推导(1)的满足边界条件(3)的通解. 用分离变量法，令 $u(r, \theta, t)=R(r)\Theta(\theta)T(t)$. 对 u 求导代入(1)，分离变量得

$$\frac{T''}{c^2T}=\frac{R''}{R}+\frac{R'}{rR}+\frac{\Theta''}{r^2\Theta}.$$

左边仅依赖于 t，而右边仅依赖于 r 和 θ. 所以，每边必须等于一个常数 k. 期望解对 T 是周期的，我们取 $k=-\lambda^2$. 于是

$$\frac{T''}{c^2T}=-\lambda^2,\quad 及\quad \frac{R''}{R}+\frac{R'}{rR}+\frac{\Theta''}{r^2\Theta}=-\lambda^2.$$

在第二个方程中分离变量，得

$$\lambda^2r^2+\frac{r^2R''}{R}+\frac{rR'}{R}=\mu^2\quad 及\quad -\frac{\Theta''}{\Theta}=\mu^2.$$

在分离常数 μ^2 前没有取负号，这是因为方程的解关于 Θ 必须是以 2π 为周期的. 边界条件(3)变为 $R(a)\Theta(\theta)T(t)=0$，$0<\theta<2\pi$，$t>0$. 为避免平凡解，必须附加条件 $R(a)=0$. 类似地，用(4)式可知 $\Theta(0)=\Theta(2\pi)$和 $\Theta'(0)=\Theta'(2\pi)$. 至此，我们已经得到了分离变量的方程

$$\begin{aligned}&\Theta''+\mu^2\Theta=0,\quad \Theta(0)=\Theta(2\pi),\quad \Theta'(0)=\Theta'(2\pi),\\&r^2R''+rR'+(\lambda^2r^2-\mu^2)R=0,\quad R(a)=0,\\&T''+c^2\lambda^2T=0.\end{aligned}$$

208

解分离变量的方程

我们从求解 Θ 开始. $\mu=0$ 时，解是常数 A_0. 如果 $\mu\neq0$，通解的形式为 $\Theta(\theta)=c_1\cos\mu\theta+c_2\sin\mu\theta$. 为满足边界条件，必须取 μ 为整数. 因此，

$$\boxed{\Theta_m(\theta)=A_m\cos m\theta+B_m\sin m\theta,\quad m=0,1,2,\cdots.}$$

注意我们从 Θ 的方程开始，是因为该方程具有完全足够的边界条件，并且它仅含有一个分离常数. 在确定 $\mu=m(m=0, 1, 2, 3, \cdots)$之后，我们转向 R 的方程，以确定分离常数 λ 的值使该方程有非平凡解. 关于 T 的方程放在最后处理.

(注意到负的 m 值得不到新的解). 在 R 的方程中令 $\mu=m$ 得

$$r^2R''+rR'+(\lambda^2r^2-m^2)R=0,\quad R(a)=0.$$

这是 m **阶贝塞尔方程的参数形式**，将在 4.8 节定理 3 中研究它. 引用这个定理可得

$$\boxed{R(r)=R_{mn}(r)=J_m(\lambda_{mn}r),\quad m=0,1,2,\cdots,n=1,2,\cdots,}$$

这里我们得到 J_m，而不是 Y_m 或 J_m 与 Y_m 的组合，是基于物理的考虑，我们必须保持解在 $r=0$ 有界.

其中，$\lambda_{mn}=\alpha_{mn}/a$ 及 α_{mn} 是贝塞尔函数 J_m 的第 n 个正的零点. 对 $\lambda=\lambda_{mn}$，T 的方程变为 $T''+c^2\lambda_{mn}^2T=0$，它的解是

$$A_{mn}\cos c\lambda_{mn}t \quad 和 \quad B_{mn}\sin c\lambda_{mn}t.$$

用 R，Θ 和 T 的表达式，得到(1)和(3)的乘积解

$$\boxed{u_{mn}(r,\theta,t)=J_m(\lambda_{mn}r)(a_{mn}\cos m\theta+b_{mn}\sin m\theta)\cos c\lambda_{mn}t} \tag{5}$$

和

$$\boxed{u_{mn}^*(r,\theta,t)=J_m(\lambda_{mn}r)(a_{mn}^*\cos m\theta+b_{mn}^*\sin m\theta)\sin c\lambda_{mn}t,} \tag{6}$$

其中，$m=0$，1，2，…，$n=1$，2，…. 注意，我们用 a_{mn} 取代了系数 A_mA_{mn}，类似的取代是 b_{mn}，a_{mn}^* 和 b_{mn}^*. 看起来这只是对未知系数重新标记，事实上如下文所述，这对解所做出的必要选择提供了方便. 同时注意到，因为 $m=0$ 时 $\sin m\theta=0$，所以不需要系数 b_{0n} 和 b_{0n}^*. 为了明确起见，取二者为 0. 209

叠加原理和通解

叠加原理意指把(5)和(6)中的所有函数加起来. 得到的和式显示在下面的(16)式中. 由于这个解的复杂性，我们分别考虑两种情况：一种情况中初始速度 g 是零，第二种情况中初始位移 f 是零. 联合这两种情况就得到通解.

例 1　具有零初始速度的膜振动

求解由(1)～(3)组成的边值问题，已知 $g=0$.

解　本情况中的初始条件是

$$u(r,\theta,0)=f(r,\theta),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0)=0,\quad 0<r<a,0<\theta<2\pi.$$

容易看出，只有由(5)给出的乘积解满足第二个条件. 因此，由叠加原理给出解的形式是

$$u(r,\theta,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_m(\lambda_{mn}r)(a_{mn}\cos m\theta+b_{mn}\sin m\theta)\cos c\lambda_{mn}t. \tag{7}$$

令 $t=0$ 得

$$\boxed{f(r,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_m(\lambda_{mn}r)(a_{mn}\cos m\theta+b_{mn}\sin m\theta).} \tag{8}$$

这肯定是 $f(r,\theta)$ 的一类广义傅里叶级数，用函数 $J_m(\lambda_{mn}r)\cos m\theta$ 和 $J_m(\lambda_{mn}r)\sin m\theta$ 来表示，因此 a_{mn} 和 b_{mn} 是函数 f 对应的广义傅里叶系数. 4.6 节对这个事实和许多有关的重要应用做了仔细阐述(特别地，见该节的定理 1 和定理 2). 我们现在要做的是应用傅里叶级数和贝塞尔级数的性质确定 a_{mn} 和 b_{mn}.

固定 r，把 $f(r,\theta)$ 看作 θ 的以 2π 为周期的函数. 为了便于使用傅里叶级数，我们把(8)写为

$$f(r,\theta)=\overbrace{\sum_{n=1}^{\infty}a_{0n}J_0(\lambda_{0n}r)}^{=a_0(r)}+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\Big(\overbrace{\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}J_m(\lambda_{mn}r)}^{=a_m(r)}\Big)\cos m\theta+\Big(\overbrace{\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}J_m(\lambda_{mn}r)}^{=b_m(r)}\Big)\sin m\theta\right\}$$

$$=a_0(r)+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m(r)\cos m\theta+b_m(r)\sin m\theta).$$

现在，我们可以清楚地看出：(对固定地 r) $a_0(r)$，$a_m(r)$和 $b_m(r)$是函数 $\theta\to f(r,\theta)$的傅里叶级数展开式中的傅里叶系数. 用 2.2 节的(2)～(4)，我们得到

210

$$a_0(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\theta)\mathrm{d}\theta=\sum_{n=1}^{\infty}a_{0n}J_0(\lambda_{0n}r),\tag{9}$$

$$a_m(r)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\theta)\cos m\theta\,\mathrm{d}\theta=\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}J_m(\lambda_{mn}r),\tag{10}$$

$$b_m(r)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\theta)\sin m\theta\,\mathrm{d}\theta=\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}J_m(\lambda_{mn}r),\tag{11}$$

其中 $m=1, 2, \cdots$. 令 r 变化，视上面的三个级数分别为函数 $a_0(r)$，$a_m(r)$和 $b_m(r)$的 $m=0, 1, 2, \cdots$阶的贝塞尔级数展开式. 这些级数中的系数是贝塞尔系数，则由 4.8 节(17)式得

$$a_{0n}=\frac{2}{a^2J_1^2(\alpha_{0n})}\int_0^a a_0(r)J_0(\lambda_{0n}r)r\mathrm{d}r,$$

$$a_{mn}=\frac{2}{a^2J_{m+1}^2(\alpha_{mn})}\int_0^a a_m(r)J_m(\lambda_{mn}r)r\mathrm{d}r,$$

$$b_{mn}=\frac{2}{a^2J_{m+1}^2(\alpha_{mn})}\int_0^a b_m(r)J_m(\lambda_{mn}r)r\mathrm{d}r.$$

应用(9)～(11)得

$$a_{0n}=\frac{1}{\pi a^2J_1^2(\alpha_{0n})}\int_0^a\int_0^{2\pi}f(r,\theta)J_0(\lambda_{0n}r)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r,\tag{12}$$

$$a_{mn}=\frac{2}{\pi a^2J_{m+1}^2(\alpha_{mn})}\int_0^a\int_0^{2\pi}f(r,\theta)\cos m\theta J_m(\lambda_{mn}r)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r,\tag{13}$$

$$b_{mn}=\frac{2}{\pi a^2J_{m+1}^2(\alpha_{mn})}\int_0^a\int_0^{2\pi}f(r,\theta)\sin m\theta J_m(\lambda_{mn}r)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r,\tag{14}$$

其中 $m, n=1, 2, \cdots$. 把这些系数代入(7)就得到问题的解. ■

在给出数值应用之前，我们先证明一个与贝塞尔函数有关的有用恒等式.

一个有用的恒等式 对任意的 $k\geqslant 0$，$a>0$ 和 $\alpha>0$，有

$$\int_0^a(a^2-r^2)r^{k+1}J_k\left(\frac{\alpha}{a}r\right)\mathrm{d}r=2\,\frac{a^{k+4}}{\alpha^2}J_{k+2}(\alpha).\tag{15}$$

证明 首先作变量代换，$\frac{\alpha}{a}r=x$，$\mathrm{d}r=\frac{a}{\alpha}\mathrm{d}x$，将积分变为

$$\frac{a^{k+2}}{\alpha^{k+2}}\int_0^\alpha\left(a^2-\frac{a^2x^2}{\alpha^2}\right)x^{k+1}J_k(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a^{k+4}}{\alpha^{k+2}}\int_0^\alpha x^{k+1}J_k(x)\mathrm{d}x-\frac{a^{k+4}}{\alpha^{k+4}}\int_0^\alpha x^{k+3}J_k(x)\mathrm{d}x.$$

211

在 4.8 节(7)式中取 $p=k$，得第一项为

$$\frac{a^{k+4}}{\alpha^{k+2}}[x^{k+1}J_{k+1}(x)]_0^\alpha = \frac{a^{k+4}}{\alpha}J_{k+1}(\alpha).$$

第二项可以借助于 4.8 节中(7)式用分部积分算得. 令 $u=x^2$，$dv=x^{k+1}J_k(x)dx$，则 $du=2xdx$，$v=x^{k+1}J_{k+1}(x)$. 于是，第二项变为

$$-\frac{a^{k+4}}{\alpha^{k+4}}[x^{k+3}J_{k+1}(x)]_0^\alpha + 2\frac{a^{k+4}}{\alpha^{k+4}}\int_0^\alpha x^{k+2}J_{k+1}(x)dx.$$

再次用 4.8 节(7)式，并化简得

$$-\frac{a^{k+4}}{\alpha}J_{k+1}(\alpha) + 2\frac{a^{k+4}}{\alpha^2}J_{k+2}(\alpha),$$

(15)式得证. ■

例 2 **振动膜**

参考例 1，确定解 $u(r,\theta,t)$，已知 $a=c=1$，$f(r,\theta)=(1-r^2)r\sin\theta$，$g(r,\theta)=0$.

解 由(12)，我们有

$$a_{0n} = \frac{1}{\pi J_1^2(\alpha_{0n})}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r^2)r\sin\theta J_0(\alpha_{0n}r)r d\theta dr = 0,$$

这里用到 $\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta = 0$. 用(13),(14)进行类似的论证以及三角函数的正交性，便得 $a_{mn}=0$ 对所有的 m,n 成立，及 $b_{mn}=0$ 当 $m\neq 1$ 成立. 当 $m=1$ 时，有

$$\begin{aligned} b_{1n} &= \frac{2}{\pi J_2^2(\alpha_{1n})}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r^2)r\sin^2\theta J_1(\alpha_{1n}r)r d\theta dr \\ &= \frac{2}{J_2^2(\alpha_{1n})}\int_0^1(1-r^2)r^2J_1(\alpha_{1n}r)dr, \end{aligned}$$

此处用到 $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta=1$. 借助于(15)式，取 $a=1$，$k=1$，得到

$$b_{1n} = \frac{4J_3(\alpha_{1n})}{\alpha_{1n}^2J_2^2(\alpha_{1n})} = \frac{16}{\alpha_{1n}^3J_2(\alpha_{1n})},$$

最后一步用了 4.8 节中当 $p=2$ 时的(6)式和 $J_1(\alpha_{1n})=0$. α_{1n} 是 J_1 的第 n 个正零点. 请见图 1 和 4.8 节的表 1，那里列出了前五个 α_{1n} 的数值.

把 b_{1n} 代入(7)，就得到解

$$u(r,\theta,t) = \sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\alpha_{1n}^3J_2(\alpha_{1n})}J_1(\alpha_{1n}r)\cos\alpha_{1n}t.$$

借助于计算机系统，我们算出了级数的前三个系数的近似数值，并在图 2 中画出了级数解(取 $n=3$)在各时刻 t 的部分和. ■

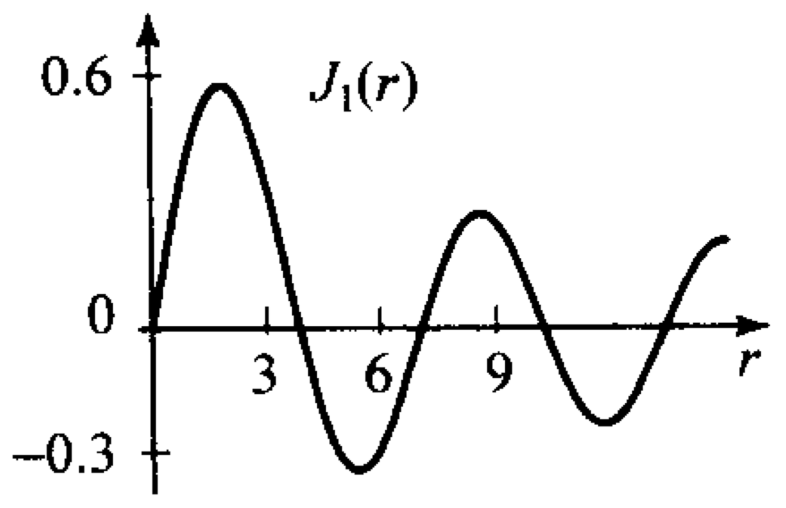


图 1 $J_1(r)$ 的前 4 个正零点

为完全求得膜振动的解，需要处理非零初始速度的情况. 这和我们刚刚处理过的情况类似，仅有一些微小的差别. 其简要的证明列在习题 7 和 8 中. 为方便参考，我们把这种情况下的完整的解叙述如下.

212

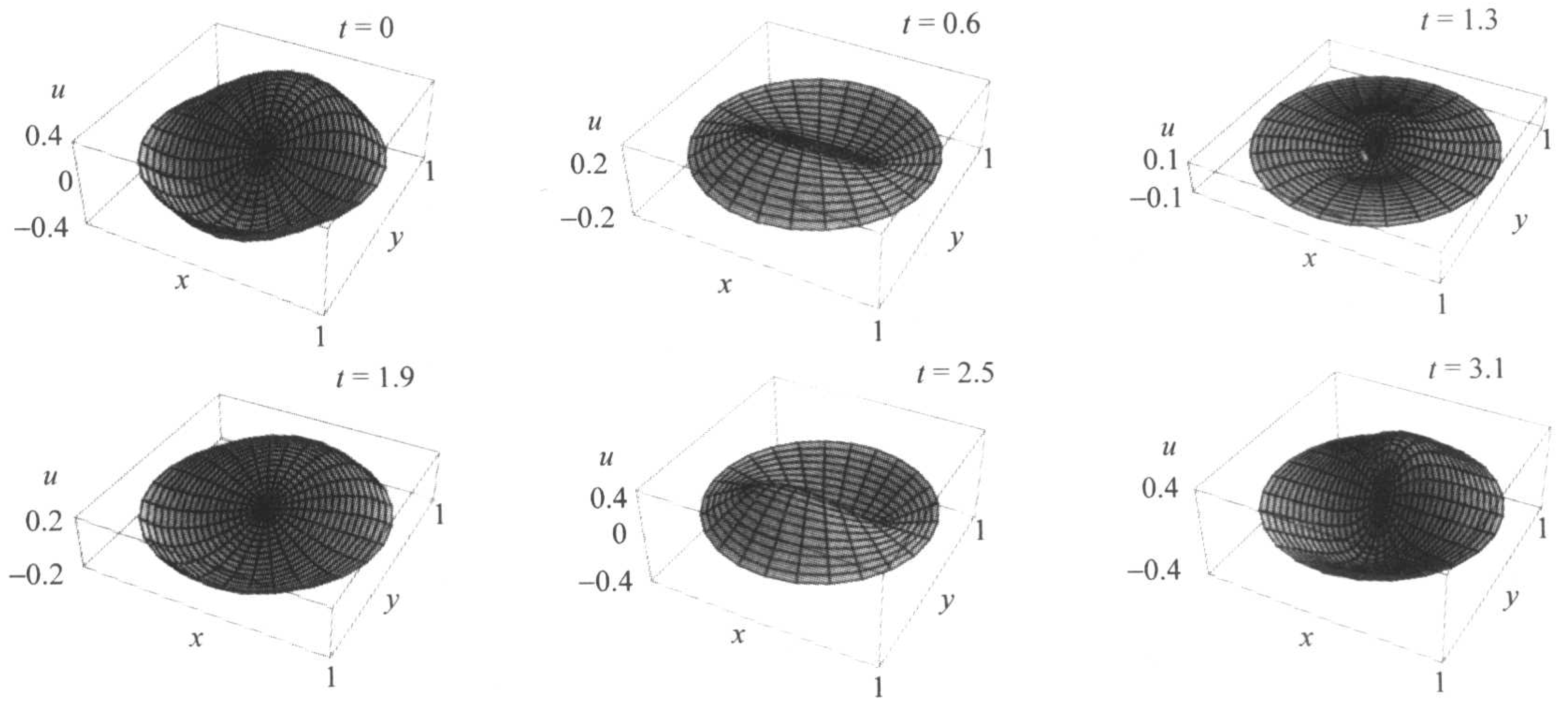


图 2　圆形膜的振动：非径向对称的情况

极坐标中的波动方程：一般情况　边值问题(1)～(3)的解是

$$u(r,\theta,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_m(\lambda_{mn}r)(a_{mn}\cos m\theta+b_{mn}\sin m\theta)\cos c\lambda_{mn}t$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_m(\lambda_{mn}r)(a_{mn}^*\cos m\theta+b_{mn}^*\sin m\theta)\sin c\lambda_{mn}t, \tag{16}$$

其中，$\lambda_{mn}=\frac{\alpha_{mn}}{a}$；$\alpha_{mn}$是$J_m$的第$n$个正零点；$a_{mn}$，$b_{mn}$由(12)～(14)给出；以及

$$a_{0n}^*=\frac{1}{\pi c\alpha_{0n}aJ_1^2(\alpha_{0n})}\int_0^a\int_0^{2\pi}g(r,\theta)J_0(\lambda_{0n}r)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r, \tag{17}$$

$$a_{mn}^*=\frac{2}{\pi c\alpha_{mn}aJ_{m+1}^2(\alpha_{mn})}\int_0^a\int_0^{2\pi}g(r,\theta)\cos m\theta J_m(\lambda_{mn}r)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r, \tag{18}$$

$$b_{mn}^*=\frac{2}{\pi c\alpha_{mn}aJ_{m+1}^2(\alpha_{mn})}\int_0^a\int_0^{2\pi}g(r,\theta)\sin m\theta J_m(\lambda_{mn}r)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r, \tag{19}$$

213　其中m，$n=1$，2，….

例 3　非零的初始位移和速度

确定(1)～(3)的解$u(r,\theta,t)$，已知

$$a=c=1,\quad f(r,\theta)=(1-r^2)r\sin\theta,\quad g(r,\theta)=(1-r^2)r^2\sin 2\theta.$$

解　解由(16)给出．因为第一个二重级数已在例 2 中计算过，我们只需计算第二个二重级数．利用三角函数的正交性，如例 2 中所论证，可得$a_{mn}^*=0$对所有的m和n成立，$b_{mn}^*=0$当$m\neq 2$成立．为计算b_{2n}^*，我们利用(19)式，其中，$g(r,\theta)=(1-r^2)r^2\sin 2\theta$，$a=c=1$，及$\lambda_{mn}=\alpha_{mn}$，便得

$$b_{2n}^*=\frac{2}{\pi\alpha_{2n}J_3^2(\alpha_{2n})}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r^2)r^2\sin^2 2\theta J_2(\alpha_{2n}r)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{\alpha_{2n} J_3^2(\alpha_{2n})} \int_0^1 (1-r^2) r^3 J_2(\alpha_{2n} r)\,\mathrm{d}r,$$

此处用到 $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta \mathrm{d}\theta = 1$. 为计算最后一个积分，我们用(15) 式，取 $a=1, k=2$，便得

$$b_{2n}^* = \frac{4J_4(\alpha_{2n})}{\alpha_{2n}^3 J_3^2(\alpha_{2n})} = \frac{24}{\alpha_{2n}^4 J_3(\alpha_{2n})},$$

最后一步用了 4.8 节 $p=3$ 时的(6)式和 $J_2(\alpha_{2n})=0$. 把这些算得的系数代入(16)中的第二个重级数并利用例 2 的解便得

$$u(r,\theta,t) = \sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\alpha_{1n}^3 J_2(\alpha_{1n})} J_1(\alpha_{1n} r) \cos\alpha_{1n} t$$

$$+ \sin 2\theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{\alpha_{2n}^4 J_3(\alpha_{2n})} J_2(\alpha_{2n} r) \sin\alpha_{2n} t.$$

级数中的系数可以借助计算机逼近，如例 2 中所做. ■

在习题中，我们将用本节的方法求解圆盘上一般的热传导问题.

习题 4.3

在习题 1～8 中，用给定的数据求解膜振动问题(1)～(3). 若有可能，借助于计算机求出级数解的前五个非零系数值，并画出膜在 t 的各时刻的形状.（在做这些题时，利用公式(15).）

1. $f(r,\theta)=(1-r^2)r^2\sin 2\theta$，$g(r,\theta)=0$，$a=c=1$.
2. $f(r,\theta)=(9-r^2)\cos 2\theta$，$g(r,\theta)=0$，$a=3$，$c=1$.
3. $f(r,\theta)=(4-r^2)r\sin\theta$，$g(r,\theta)=1$，$a=2$，$c=1$.
4. $f(r,\theta)=J_3(\alpha_{32}r)\sin 3\theta$，$g(r,\theta)=0$，$a=c=1$. [214]
5. $f(r,\theta)=0$，$g(r,\theta)=(1-r^2)r^2\sin 2\theta$，$a=c=1$.
6. $f(r,\theta)=1-r^2$，$g(r,\theta)=J_0(r)$，$a=c=1$.
7. **专题问题：具有零初始位移的圆形膜.**
   按照本题所列步骤确定半径为 a 且边界固定的圆形膜的振动，已知圆形膜的初始位移是 0，它的初始速度是 $g(r,\theta)$. 作为提示，请参考例 1 的解.
   (a)写明微分方程，边界条件和初始条件.
   (b)设形如 $R(r)\Theta(\theta)T(t)$的乘积解，证明 $T(0)=0$ 并断言
   $$u(r,\theta,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r)(a_{mn}^* \cos m\theta + b_{mn}^* \sin m\theta)\sin c\lambda_{mn} t.$$
   (c)用已知的初始速度和(b)推出
   $$g(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c\lambda_{0n} a_{0n}^* J_0(\lambda_{0n} r) + \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty} c\lambda_{mn} a_{mn}^* J_m(\lambda_{mn} r)\right)\cos m\theta + \left(\sum_{n=1}^{\infty} c\lambda_{mn} b_{mn}^* J_m(\lambda_{mn} r)\right)\sin m\theta\right\}.$$
   (d)如推导(12)～(14)所做，从这里开始推导(17)～(19).
8. **圆形膜振动问题的通解.**
   (a)证明边值问题(1)～(3)的解可以写为 $u(r,\theta,t)=u_1(r,\theta,t)+u_2(r,\theta,t)$，这里 u_1 和 u_2 满足(1)和(3)以及下面的初始条件
   $$u_1(r,\theta,0) = f(r,\theta),\quad \frac{\partial u_1}{\partial t}(r,\theta,0) = 0;$$

$$u_2(r,\theta,0)=0,\quad \frac{\partial u_2}{\partial t}(r,\theta,0)=g(r,\theta).$$

(b)结合习题 1 和习题 7 的结果推导通解(16).

9. **专题问题：贝塞尔函数的一个积分公式.** 按照所列步骤证明：对任意 $k\geqslant 0$ 和任意整数 $l\geqslant 0$，有

$$\int r^{k+1+2l}J_k(r)\mathrm{d}r=\sum_{n=0}^{l}(-1)^n 2^n\frac{l!}{(l-n)!}r^{k+1+2l-n}J_{k+n+1}(r)+C.$$

(a)证明这个公式对 $l=0$ 和所有的 $k\geqslant 0$ 成立. [提示：用 4.8 节(7)式.]

(b)关于 l 用归纳法完成证明. [提示：假设公式对 $l-1$ 和所有的 k 为真. 为对 l 建立此式，分部积分并用公式对 $l-1$ 和 $k+1$ 为真的归纳假设.]

215

10. 求解边值问题(1)～(3)，其中，$a=c=1$，$f(r,\theta)=(1-r^2)\left(\frac{1}{4}-r^2\right)r^3\sin3\theta$，$g(r,\theta)=0$. [提示：用习题 9.]

11. **专题问题：二维热传导方程(一般情况).** 用本节的方法证明热边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right),\quad 0<r<a,0<\theta<2\pi,t>0,$$

$$u(a,\theta,t)=0,\quad 0<\theta<2\pi,t>0,$$

$$u(r,\theta,0)=f(r,\theta),\quad 0<r<a,0<\theta<2\pi$$

是

$$u(r,\theta,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_m(\lambda_{mn}r)(a_{mn}\cos m\theta+b_{mn}\sin m\theta)\mathrm{e}^{-c^2\lambda_{mn}^2 t},$$

其中，$\lambda_{mn}=\frac{\alpha_{mn}}{a}$；$\alpha_{mn}$ 是 J_m 的第 n 个正零点；a_{mn}，b_{mn} 由(12)～(14)给出.

12. (a)用下列数据求解习题 11 中的热传导问题：$a=c=1$，$f(r,\theta)=(1-r^2)r\sin\theta$. [提示：见例 2.]

(b)当 $t=0$ 时，哪些点是最热的点?

(c)确定在 $t=1$，2 时最热点的位置. 求最热点在所给时刻的近似温度值.

13. 解热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2},\quad 0<r<1,\quad 0<\theta<2\pi,\quad t>0,$$

已知非零边界条件

$$u(1,\theta,t)=\sin3\theta$$

和初始条件 $u(r,\theta,0)=0$.

4.4 圆域中的拉普拉斯方程

半径为 a 的一个圆板，指定它的边界上的温度值，则圆板中的稳态(与时间无关)的温度分布满足**二维拉普拉斯方程(在极坐标中)**

$$\boxed{\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0,\quad 0<r<a,0<\theta<2\pi}\tag{1}$$

和边界条件

$$u(a,\theta)=f(\theta),\quad 0<\theta<2\pi.\tag{2}$$

(注意，f 必须是以 2π 为周期的.)方程(1)和(2)描述了一个在以 a 为半径的圆盘上的**狄利克雷问题**. 在 3.8 节已经解决了在矩形上的这类问题. 在其他区域上的问题，例如圆柱或者圆面上，将在随后的几节和第 5 章中研究.

216

用分离变量法，我们将寻找形如 $u(r, \theta)=R(r)\Theta(\theta)$ 的(1)的乘积解．把它代入(1)并化简得

$$R''\Theta+\frac{1}{r}R'\Theta+\frac{1}{r^2}R\Theta''=0 \qquad \text{（代入(1).）}$$

$$r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}+\frac{\Theta''}{\Theta}=0 \qquad \text{（乘 } r^2 \text{ 并除以 } R\Theta.\text{）}$$

$$r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}=\lambda \quad \text{和} \quad \frac{\Theta''}{\Theta}=-\lambda \qquad \text{（分离常数 } \lambda.\text{）}$$

$$r^2R''+rR'-\lambda R=0 \quad \text{和} \quad \Theta''+\lambda\Theta=0 \quad \text{（化简.）}$$

要记得 Θ 是以 2π 为周期的．由我们所知的关于方程 $\Theta''+\lambda\Theta=0$ 的解的知识，可知为得到关于 θ 以 2π 为周期的函数，$\lambda=n^2(n=0, 1, 2, \cdots)$．因此，分离后的方程变为

$$r^2R''+rR'-n^2R=0,$$
$$\Theta''+n^2\Theta=0.$$

以 2π 为周期的解是

$$\Theta=\Theta_n=a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta, \quad n=0,1,2,\cdots.$$

我们知道关于 R 的方程是**欧拉方程**．由附录 A. 3，欧拉方程是 $x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0$，它的指标方程是 $\rho^2+(\alpha-1)\rho+\beta=0$，指标根 ρ_1 和 ρ_2．如果 $\rho_1\neq\rho_2$，通解是 $y=c_1x^{\rho_1}+c_2x^{\rho_2}$．如果$\rho_1=\rho_2$，通解是 $y=c_1x^{\rho_1}+c_2x^{\rho_1}\ln x$．由附录 A. 3 的结果可知指标根是$\pm n$，于是解为

$$R(r)=c_1\left(\frac{r}{a}\right)^n+c_2\left(\frac{r}{a}\right)^{-n}, \quad n=1,2,\cdots \tag{3}$$

和

$$R(r)=c_1+c_2\ln\left(\frac{r}{a}\right), \quad n=0.$$

对于圆盘中的狄利克雷问题，解在 0 点应保持有界．因为$\left(\frac{r}{a}\right)^{-n}$和 $\ln\left(\frac{r}{a}\right)$在 $r=0$ 时无界，故取 $c_2=0$．（对于圆盘外部的或圆环上的狄利克雷问题，对常数的选取需有其他的考虑．见习题 12、21 和 24.）于是得到乘积解

$$u_0(r,\theta)=a_0 \quad \text{和} \quad u_n(r,\theta)=\left(\frac{r}{a}\right)^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta), n=1,2,\cdots.$$

217

叠加这些解得

$$\boxed{u(r,\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n[a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta].} \tag{4}$$

正如我们现在要证明的，未知系数 a_0，a_n，b_n 正是边界函数 $f(\theta)$的傅里叶系数．

圆盘上狄利克雷问题的解 *满足指定的边界条件(2)的拉普拉斯方程(1)的解由(4)给出，其中 a_0，a_n，b_n 是以 2π 为周期的函数 $f(\theta)$的傅里叶系数：*

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\,d\theta,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta\,d\theta, \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta\,d\theta, \tag{5}$$

$$n=1,2,\cdots.$$

证明 在(4)中令 $r=a$ 并用(2)得

$$f(\theta)=u(a,\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta).$$

这显然是 f 的傅里叶级数表示，因此系数由欧拉公式(2.2 节)给出. ■

因为(4)给出了圆盘内部点的稳态温度值，则在(4)中取 $r=0$ 就得到圆心的温度值 a_0. 现在

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\mathrm{d}\theta,$$

它表示圆心的温度值等于边界温度的平均值.

例 1 一个圆盘上的狄利克雷问题

求半径为 1 的圆盘中的稳态温度分布，已知上半圆周上的温度是 100 度，下半圆周上的温度是 0 度(见图 1).

解 边值由函数

$$u(1,\theta)=f(\theta)=\begin{cases}100 & 若\quad 0<\theta<\pi,\\ 0 & 若\quad \pi<\theta<2\pi\end{cases}$$

指定. 将它代入(5)得

218

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}100\mathrm{d}\theta=50,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}100\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta=0$$

和

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}100\sin n\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{100}{n\pi}[1-\cos n\pi].$$

把它们代入(4)，得解

$$u(r,\theta)=50+\frac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1-\cos n\pi)r^n\sin n\theta.$$

令 $r=0$，我们看到中心的温度是 50 度，它对应于圆盘边界温度的平均值.

在圆盘的边界上，即当 $r=1$，级数变为

$$u(1,\theta)=50+\frac{200}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\sin(2k+1)\theta.$$

按照已知的边值，这个级数应该表示函数 $f(\theta)$. 事实上，这就是 $f(\theta)$的傅里叶级数. 它的一些部分和描绘在图 2 中.

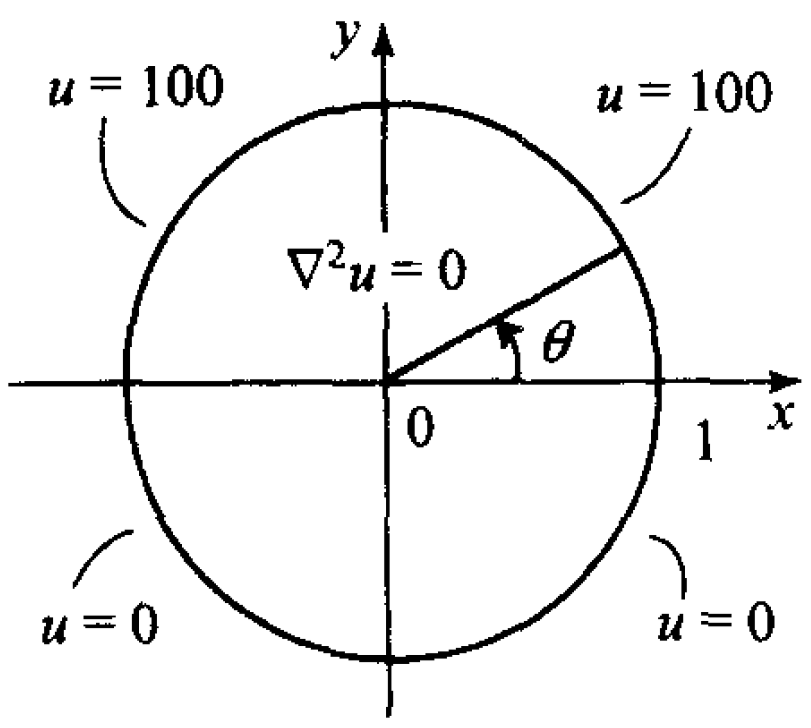


图 1 狄利克雷问题

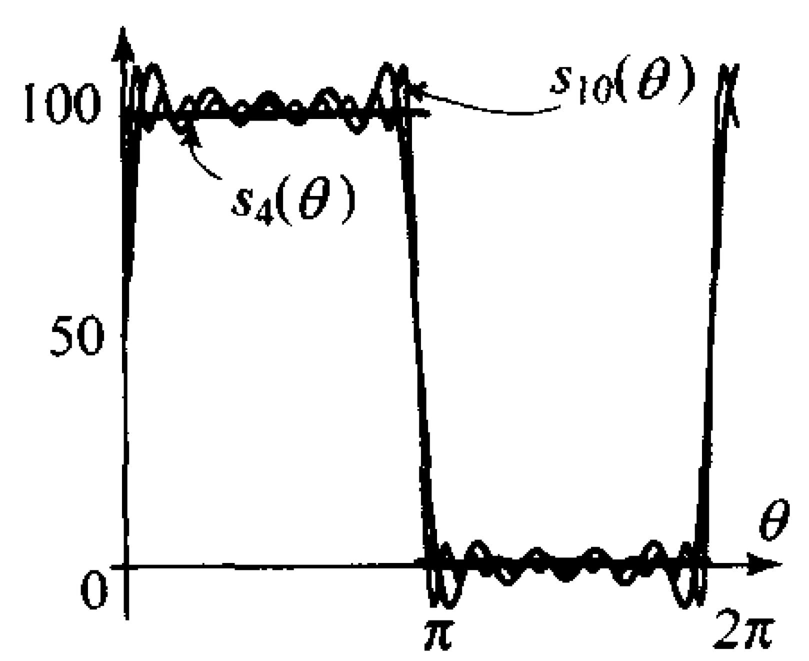


图 2 $f(\theta)$的傅里叶级数 ■

在许多有趣的情况下，狄利克雷问题的级数解可以借助于公式

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\sin n\theta}{n} = \tan^{-1}\left(\frac{r\sin\theta}{1-r\cos\theta}\right)} \tag{6}$$

用闭形式计算．此式对 $0<r<1$ 和任意的 θ 有效．利用复对数推导这个公式的过程写在习题 19 中．基于狄利克雷问题(1)～(2)解的唯一性，可以间接地证明该公式．在 3.10 节处理矩形中的狄利克雷问题时，对这个内在性质进行了讨论和证明．要证明(6)，只需证明左边和右边是同一个狄利克雷问题的解．事实上，我们将证明它们满足当 $a=1$ 时的(1)与当 $f(\theta)=\frac{1}{2}(\pi-\theta)$，$0<\theta<2\pi$ 时的(2)．要验证这个断言对(6)左边成立，只需用(4)式和 $f(\theta)$ 的傅里叶是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$ 这一事实．为了验证此断言对(6)右边为真，令 $u(r,\theta)=\tan^{-1}\left(\frac{r\sin\theta}{1-r\cos\theta}\right)$．我们必须证明$\nabla^2 u=0$ 和 $u(1,\theta)=\frac{1}{2}(\pi-\theta)$．第一部分直接计算可得，留作习题 6．对第二部分，我们有

$$\begin{aligned}
u(1,\theta) &= \tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)\left(\sin\theta = 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2};1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \\
&= \tan^{-1}\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2},
\end{aligned}$$

219

这就证明了(6)式．

例 2　转换到笛卡儿坐标

证明在笛卡儿坐标中例 1 的稳态解是

$$u(x,y) = 50 + \frac{100}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{1-x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{1+x}\right)\right], \tag{7}$$

其中，$x^2+y^2<1$．

解　首先，我们重写例 1 的解为

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) &= 50 + \frac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1-\cos n\pi)r^n\sin n\theta \\
&= 50 + \frac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}r^n - \frac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}r^n\sin n\theta.
\end{aligned}$$

注意到 $\cos n\pi\sin n\theta=\sin n(\theta-\pi)$并用(6)，得

$$u(r,\theta) = 50 + \frac{100}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{r\sin\theta}{1-r\cos\theta}\right) - \frac{100}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{r\sin(\theta-\pi)}{1-r\cos(\theta-\pi)}\right).$$

用恒等式 $\sin(\theta-\pi)=-\sin\theta$；$\cos(\theta-\pi)=-\cos\theta$；$\tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}x$，便得

$$u(r,\theta) = 50 + \frac{100}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{r\sin\theta}{1-r\cos\theta}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right)\right].$$

利用 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 过渡到直角坐标便得(7)．■

当处理稳态问题时，经常对确定具有相同温度的那些点感兴趣．这些点位于叫做等温线的

曲线上．我们求解例 1 的等温线来说明这个概念．

例 3 **等温线或恒温线**

例 1 中两条极端的等温线容易猜到：对应于温度 100 度的上半圆周和对应于 0 度的下半圆周．所有其他的等温线显然介于这两个值之间．令 $0<T<100$．我们的目的是确定这样的一些点(x, y)，使得 $u(x, y)=T$．令(7)的右边等于 T 并化简，得

$$\frac{\pi(T-50)}{100}=\tan^{-1}\left(\frac{y}{1-x}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{y}{1+x}\right). \tag{8}$$

当 $T=50$ 时，左边等于 0，这时解是 $y=0$(x 是任意的)．这对应于 x 轴上的点集．直观上看，这个答案是显然的．你明白原因吗？当 $T\neq 50$，(8)式两边取正切并用恒等式

220

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b},$$

便得到

$$\frac{\left(\frac{y}{1-x}\right)+\left(\frac{y}{1+x}\right)}{1-\left(\frac{y}{1-x}\right)\left(\frac{y}{1+x}\right)}=\tan\left(\frac{\pi T}{100}-\frac{\pi}{2}\right)=-\cot\left(\frac{\pi T}{100}\right).$$

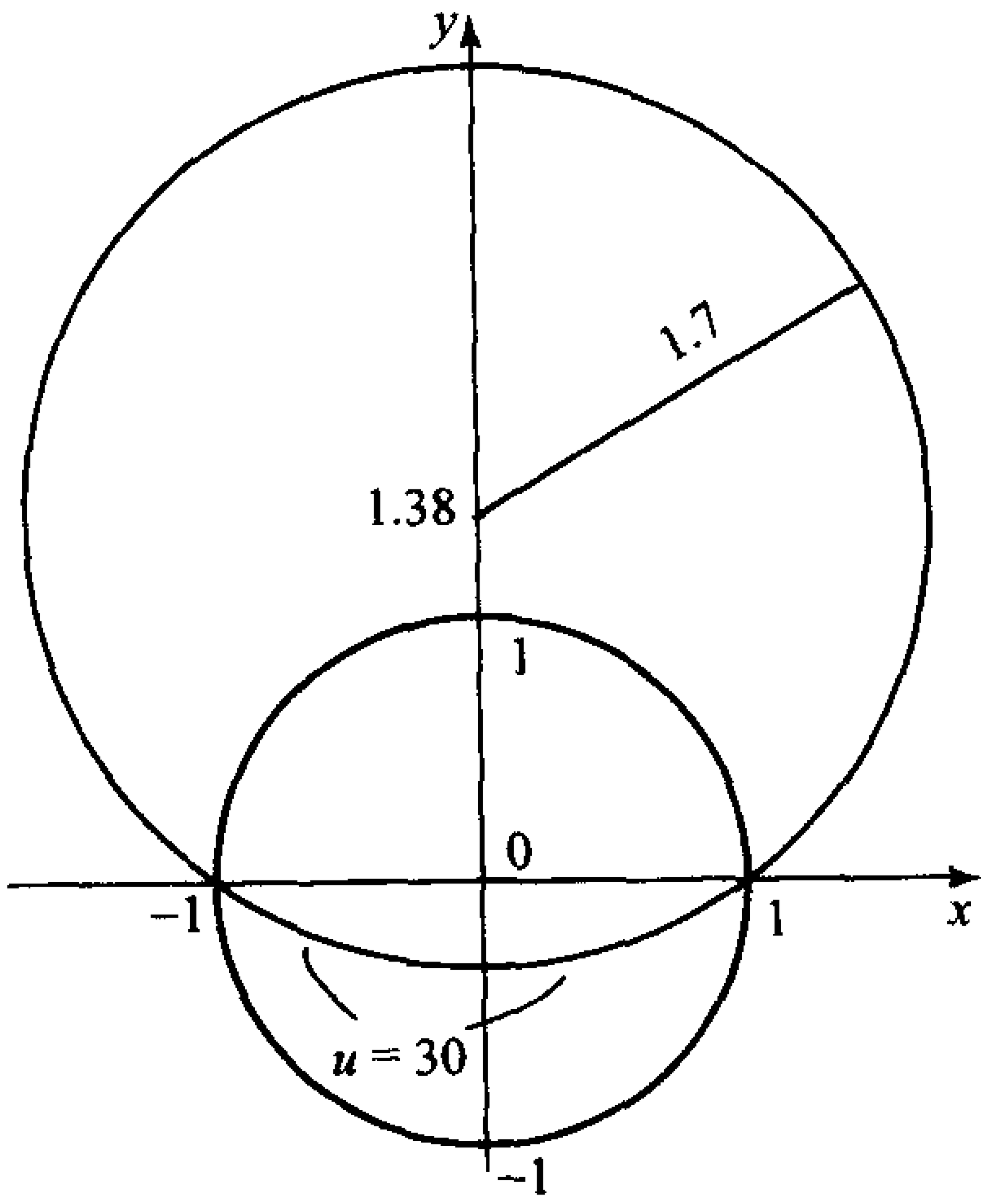
直接计算可得

$$x^2+y^2-1-2y\tan\left(\frac{\pi T}{100}\right)=0.$$

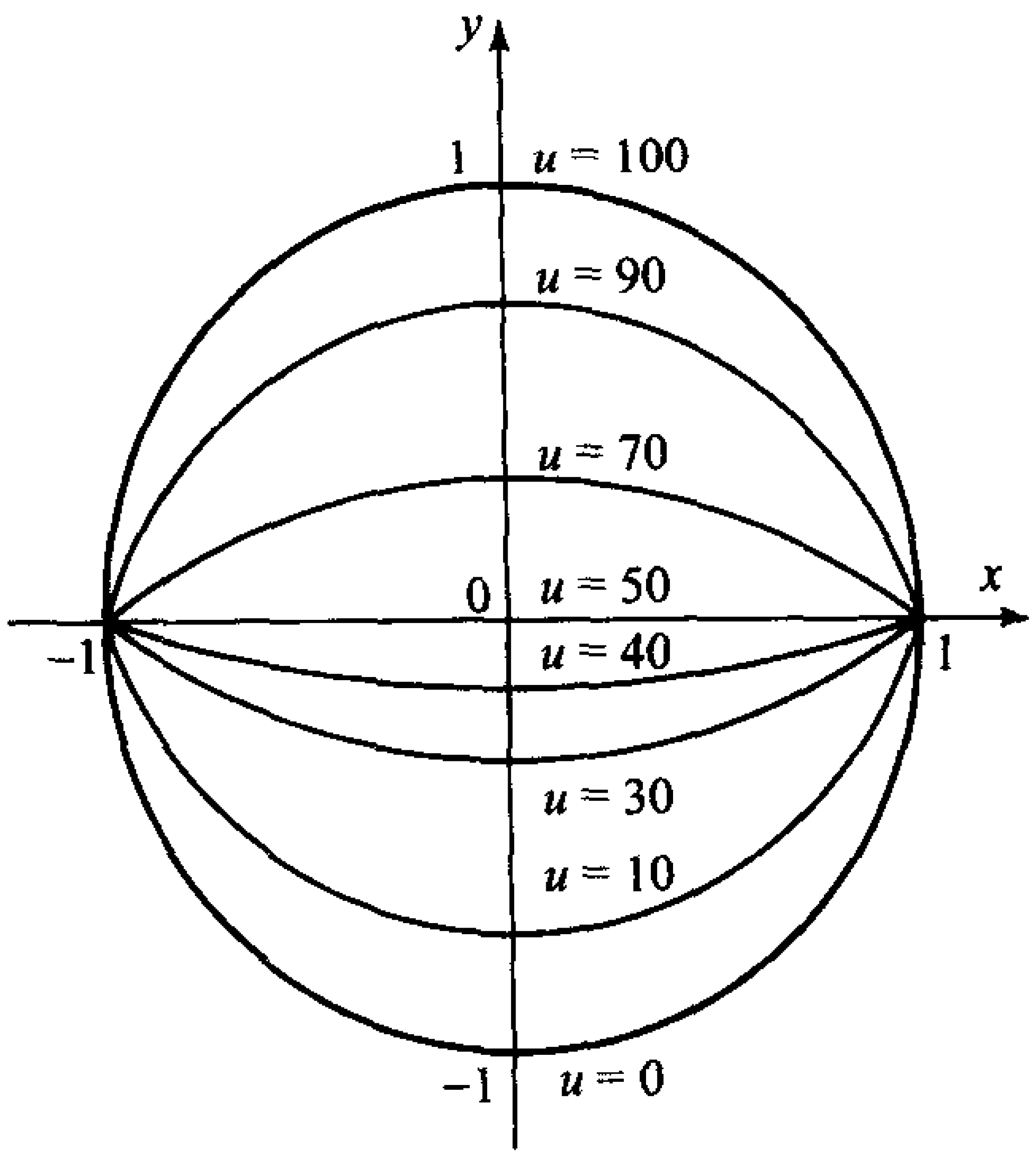
写成平方式为

$$x^2+\left[y-\tan\left(\frac{\pi T}{100}\right)\right]^2=1+\tan^2\left(\frac{\pi T}{100}\right).$$

因此，对应于 T 值的等温线是一条圆弧，它的圆心在$\left(0, \tan\left(\frac{\pi T}{100}\right)\right)$，半径是$\sqrt{1+\tan^2\left(\frac{\pi T}{100}\right)}=\left|\sec\frac{\pi T}{100}\right|$．图 3a 画出了等温线 $T=30$，图 3b 画出了其他各等温线．



a)



b)

图 3

图 3a 中较大的圆确定了在单位圆盘中的等温线 $u(r,\theta)=30$. 它的圆心在$\left(0,\tan\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right)$，半径为 $\sec\left(\frac{3\pi}{10}\right)$. 我们有 $\tan\left(\frac{3\pi}{10}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}(5-\sqrt{5})}\approx 1.38$ 和 $\sec\left(\frac{3\pi}{10}\right)\approx 1.7$. 图 3b 画出了单位圆盘内的各等温线. ■

各种区域和边界条件

我们可以用本节的方法求解不是圆盘的平面区域上的问题. 这些区域便于用极坐标刻画，例如，楔形域、圆环或者圆的外部区域. 进而，我们可以改变边界条件考虑诺伊曼条件和罗宾条件. 回忆一下这些条件，它们是涉及边界上函数 u 及其法向导数的线性条件. 在极坐标中，在以原点为圆心的圆周上的点处，u 的法向导数就是 u 关于 r 的偏导数(图 4). 因此，对于位于以原点为心的圆周上的边界，诺伊曼条件是指定 $u_r(r,\theta)$的值；罗宾条件是指定 $u_r(r,\theta)+a(\theta)u(r,\theta)$的值，这里 a 是 θ 的函数. 下面的例子说明，我们怎样去解这样的问题.

221

例 4　楔形域上的罗宾条件

在图 5 所示的楔形域上求解拉普拉斯方程(1)，给定边界条件：对 $0<r<1$ 和 $0<\theta<\alpha$ 有

$$u(r,0)=0,\quad u(r,\alpha)=0,\quad \frac{\partial}{\partial r}u(1,\theta)=-u(1,\theta)-\theta.$$

这个边界条件表示：一个其边界位于射线 $\theta=0$ 和 $\theta=\alpha$ 上的楔子，边界上温度是 0，而楔子沿圆周边界进行热交换，交换速率由罗宾条件 $u_r(1,\theta)=-u(1,\theta)-\theta$ 给出. 合理的假设是：沿着圆周边界，θ 越小楔子的绝热性越好，这是因为热流失的速率随着 θ 趋于 0 而变小.

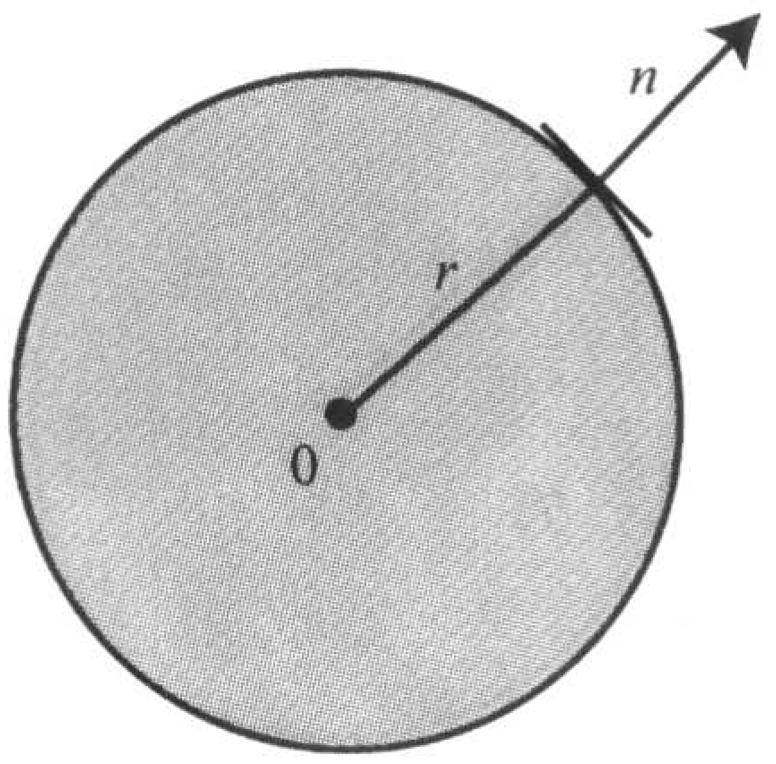


图 4　u 的法向导数$\frac{\partial u}{\partial n}$是$\frac{\partial u}{\partial r}$

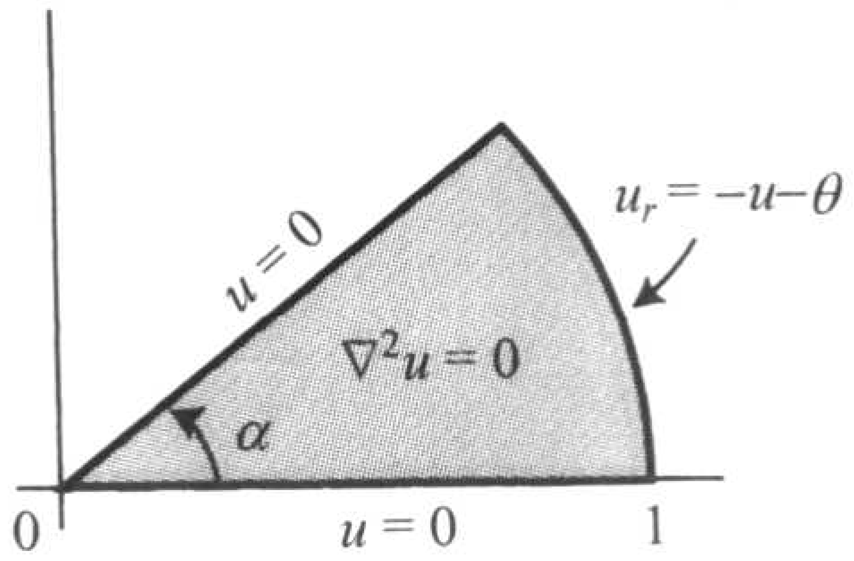


图 5　由射线 $\theta=0$ 和 $\theta=\alpha$ 以及圆周 $r=1$ 所界定的楔形域

解　在着手求解之前，注意到在极坐标中用不等式 $0<r<1$ 和 $0<\theta<\alpha$ 表示楔形域中的点(r,θ)是多么方便. 如我们在本节开始所做的，用分离变量法得到方程

$$\Theta''+\lambda\Theta=0,\quad \Theta(0)=0,\quad \Theta(\alpha)=0;$$
$$r^2R''+rR'-\lambda R=0,$$

其中，λ 是分离常数. 由边界条件 $u(r,0)=0$ 和 $u(r,\alpha)=0$ 得到关于 Θ 的新条件. 例如，由 $u(r,\alpha)=0$ 得到 $R(r)\Theta(\alpha)=0$，于是 $\Theta(\alpha)=0$. 关于 θ 的初值问题与本节开始所遇到初值问题不同，不过这是一个与 3.3 节解决的问题相类似的问题，那里用变量 x 取代了 θ. 非零解是

$$\Theta_n(\theta) = \sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta \quad (n = 1,2,\cdots),$$

它们对应于分离常数 $\lambda=\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2$. 把 λ 的值代入径向方程就得到欧拉方程

$$r^2R'' + rR' - \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 R = 0.$$

这个欧拉方程的指标方程是 $\rho^2-\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2=0$，指标根是 $\rho=\pm\frac{n\pi}{\alpha}$. 因此，对 $0\leqslant r<a$，有界解是 $R(r)=R_n(r)=r^{\frac{n\pi}{\alpha}}$. 由此得到乘积解

$$b_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta,$$

由叠加原理得到下面形式的解：

[222]

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta, \quad 0<r<1, \quad 0<\theta<\alpha. \tag{9}$$

现在可以验证这个解对所有 b_n 满足边界条件 $u(r,\ 0)=0$ 和 $u(r,\ \alpha)=0$. 然后，选取 b_n 使满足给定的罗宾条件. 在 $u(r,\ \theta)$ 中令 $r=1$，得到 $u(1,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta$. 关于 r 微分 $u(r,\theta)$，然后令 $r = 1$，得

$$\begin{aligned} u_r(1,\theta) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\theta\right)\right)\Bigg|_{r=1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\theta\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\Bigg|_{r=1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{\alpha}b_n\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\theta\right). \end{aligned}$$

条件 $u_r(1,\ \theta)=-u(1,\ \theta)-\theta$ 对所有的 $0<\theta<\alpha$ 蕴涵

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{\alpha}b_n\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\theta\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\theta\right) - \theta;$$

等价地，

$$-\theta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(1+\frac{n\pi}{\alpha}\right)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta, \quad 0<\theta<\alpha.$$

视此级数为函数 $f(\theta)=-\theta$ 在区间 $(0,\ \alpha)$ 上的半幅正弦傅里叶级数展开式，其中 $b_n\left(1+\frac{n\pi}{\alpha}\right)$ 是第 n 个正弦系数：

$$\begin{aligned} b_n\left(1+\frac{n\pi}{\alpha}\right) &= -\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}\theta\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{2}{\alpha}\left[-\theta\left(\frac{\alpha}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi}{\alpha}\theta\Bigg|_0^{\alpha} + \frac{\alpha}{n\pi}\int_0^{\alpha}\cos\frac{n\pi}{\alpha}\theta\,\mathrm{d}\theta\right] \\ &= \frac{2\alpha(-1)^n}{n\pi}. \end{aligned}$$

解出 b_n 并将其代入(9)，得解

$$u(r,\theta)=\frac{2\alpha^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\alpha+n\pi)}r^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta,\quad 0<r<1,\quad 0<\theta<\alpha.$$ ■

习题 4.4

在习题 1～5 中，用给定的边界数据求解单位圆盘上的狄利克雷问题.

1. $f(\theta)=\cos\theta$.

2. $f(\theta)=\sin 2\theta$.

3. $f(\theta)=\frac{1}{2}(\pi-\theta)$，$0<\theta<2\pi$.

4. $f(\theta)=\begin{cases}\pi-\theta & 若\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\\ 0 & 若\quad \pi\leqslant\theta<2\pi\end{cases}$

5. $f(\theta)=\begin{cases}100 & 若\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi/4,\\ 0 & 若\quad \pi/4<\theta<2\pi.\end{cases}$

6. 验证

$$u(r,\theta)=\tan^{-1}\left(\frac{r\sin\theta}{1-r\cos\theta}\right)$$

223

是(1)的解. [提示：变到笛卡儿坐标.]

7. 确定习题 3 的等温线.

8. 证明习题 1 的等温线位于一条竖直直线上.

9. 证明习题 2 的等温线位于以原点为心的双曲线的分支上.

10. (a)求解狄利克雷问题

$$\nabla^2 u(r,\theta)=0,\quad 0<r<1,\quad 0<\theta<2\pi,$$
$$u(1,\theta)=1+\sin 2\theta.$$

(b)确定等温线. [提示：$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$.]

11. **不依赖于** r.

(a)设 $u(r,\theta)$是拉普拉斯方程的与 r 无关的解. 证明 $u(r,\theta)=a\theta+b$，其中 a 和 b 是常数.

(b)确定 a 和 b 使 $u(r,\theta)$是楔形域 $0<r<1$，$0<\theta<\alpha$ 上的拉普拉斯方程的解，边界条件是：$\theta=0$ 时 $u=T_1$，$\theta=\alpha$ 时 $u=T_2$. 当 $r=1$ 时，u 在楔形域的圆周边界上的值是什么?

12. **不依赖于** θ.

(a)设 $u(r,\theta)$是拉普拉斯方程的不依赖于 θ 的解. 证明：$u(r,\theta)=a\ln r+b$，其中 a 和 b 是常数.

(b)在图 6 所示的环域上求解拉普拉斯方程，使满足 $r=\frac{1}{2}$时 $u=2$，$r=1$ 时 $u=2$.

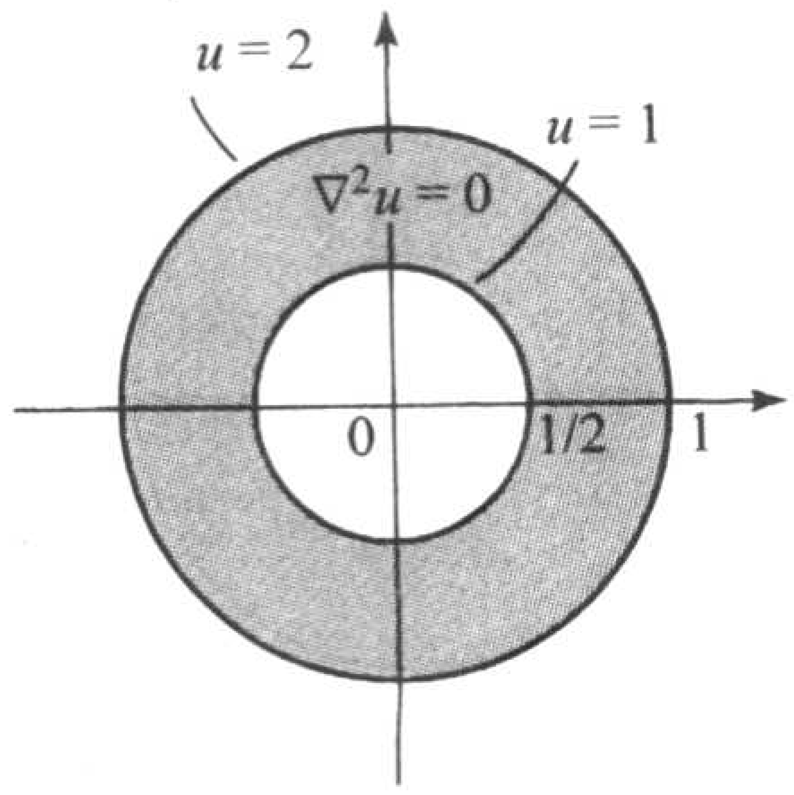


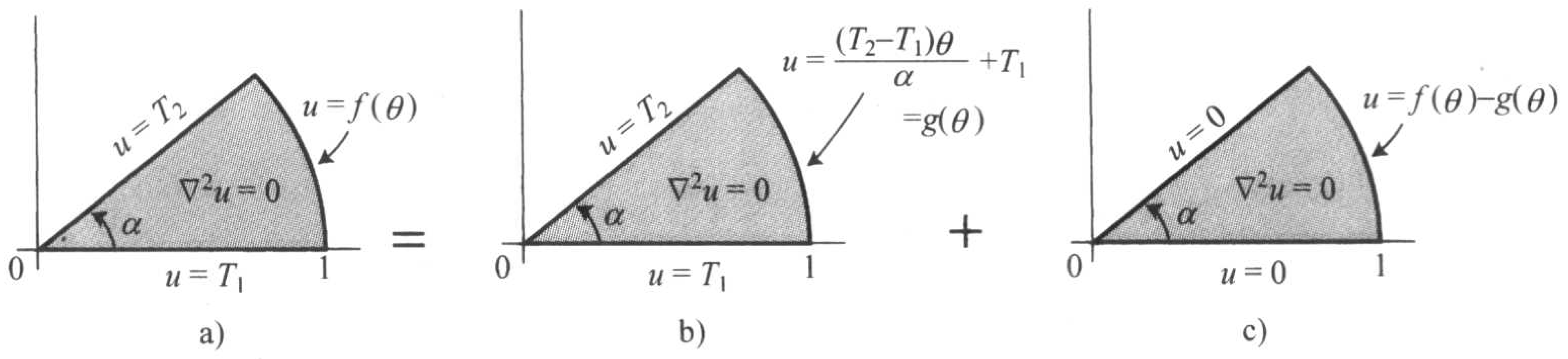
图 6　习题 12(b)

13. 求楔形域 $0<r<1$，$0<\theta<\frac{\pi}{4}$上的拉普拉斯方程的解，使满足边界条件：当 $\theta=0$ 时，$u=0$；当 $\theta=\frac{\pi}{4}$时，$u=0$；以及$\frac{\partial u}{\partial r}(\theta,1)=\sin\theta$.

14. 求楔形域 $0<r<1$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$上的拉普拉斯方程的解，使满足边界条件：当 $\theta=0$ 时，$u=0$；当 $\theta=\frac{\pi}{2}$时，$u=0$；以及$\frac{\partial u}{\partial r}(\theta,1)=\theta$.

15. 考虑图 7a 所示的楔形域上的问题. 证明这个问题可以分解为如图 7 所示的两个子问题. 即证明：如果 u_1 是图 7b 中问题的解，u_2 是图 7c 中问题的解，则 $u=u_1+u_2$ 是图 7a 中问题的解.

16. 考虑图 7a 所示的楔形域上的问题. 取 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，求解问题：边界条件为 $\theta=0$ 时 $u=0$，$\theta=\frac{\pi}{4}$ 时 $u=1$ 和 $u(1,\theta)=3\sin 4\theta$. [提示：对图 7b 中的问题，参见习题 11.]



224

图 7

17. **圆盘上的诺伊曼问题**. 求解诺伊曼问题 $\nabla^2 u=0$，$0\leqslant r<a$，边界条件是 $u_r(a,\theta)=f(\theta)$，这里 $f(\theta)$ 确定了圆周 $r=a$ 上的法向导数. 为了该问题有解，需要相容性条件

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

请解释为什么这个条件对我们的解是必要的.

18. **罗宾条件**. 求解单位圆盘上的拉普拉斯方程，罗宾条件是 $u_r(1,\theta)+2u(1,\theta)=100-2\cos 2\theta$.

19. **(6)式的证明**. 令 z 是一个复数且 $|z|<1$. 把 z 写为 $z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$. 考虑级数展开式

$$\log[(1-z)^{-1}] = z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3+\cdots,$$

它对 $|z|<1$ 成立. 计算这个级数的虚部并推出(6). [提示：如果 $w=re^{i\theta}=x+iy$，$-\pi<\theta<\pi$，则 $\mathrm{Re}(\log(w))=\ln r$，$\mathrm{Im}(\log(w))=\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$.]

20. **进一步的恒等式**. 在下面的级数中取实部和虚部

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}, \quad |z|<1,$$

对 $0\leqslant r<1$，$0<\theta<2\pi$ 推导恒等式：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n\theta}{n}r^n = \tan^{-1}\left(\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right); \tag{a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos n\theta}{n}r^n = \frac{1}{2}\ln(1+2r\cos\theta+r^2). \tag{b}$$

21. **圆盘外的狄利克雷问题**. 证明圆盘 $r=a$ 外(图 8)的狄利克雷问题的有界解由级数

$$u(r,\theta) = a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta), \quad r>a$$

给出. 其中，系数由(5)给出. [提示：如同在圆盘内求解狄利克雷问题进行推导，从(3)选取有界解.]

22. 用例 1 中的边界值求解单位圆盘外的狄利克雷问题. 此时等温线是什么？

23. (a)用习题 5 中的边界值求解单位圆盘外的狄利克雷问题.

225

(b)证明：等温线是通过点(1，0)和 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 的一些圆周.

24. **专题问题：环域上的狄利克雷问题**.

(a)证明图 9 所示的环形区域中的稳态解是

$$u(r,\theta)=a_0\frac{\ln r-\ln R_2}{\ln R_1-\ln R_2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta]\left(\frac{R_1}{r}\right)^n\left(\frac{R_2^{2n}-r^{2n}}{R_2^{2n}-R_1^{2n}}\right)(R_1<r<R_2),$$

其中，a_0，a_n 和 b_n 是 $f_1(\theta)$的傅里叶系数.［提示：如在本节所推导解的过程，应用条件 $R(R_2)=0$.］

(b)若边界条件：对所有的 θ，$u(R_1,\theta)=0$ 和 $u(R_2,\theta)=f_2(\theta)$，稳态解是什么？

(c)结合(a)和(b)，求环形区域中的稳态解，已知对任意 θ 由 $u(R_1,\theta)=f_1(\theta)$，$u(R_2,\theta)=f_2(\theta)$.

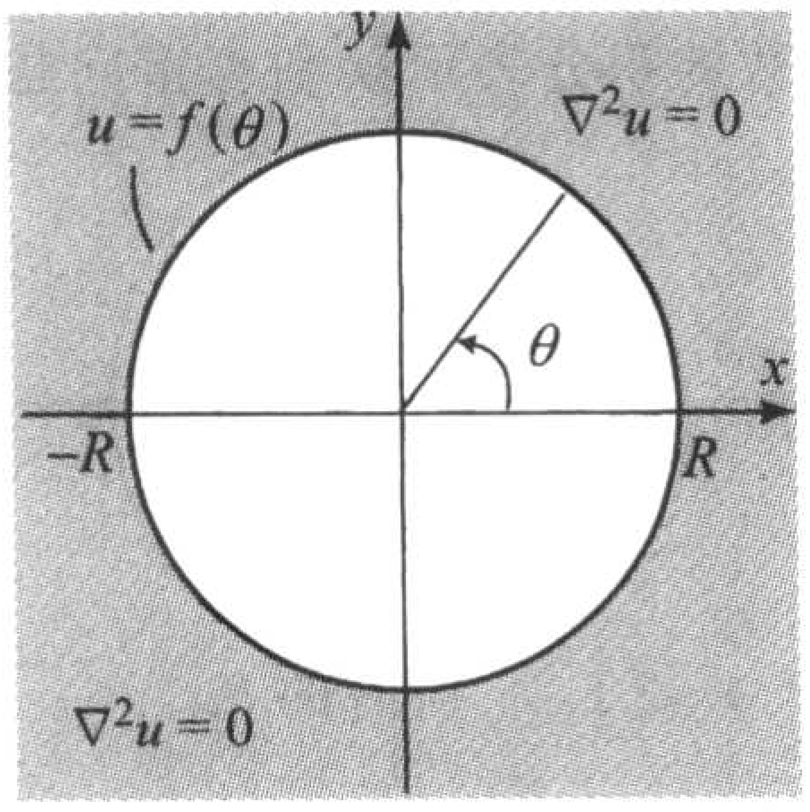


图 8 习题 21

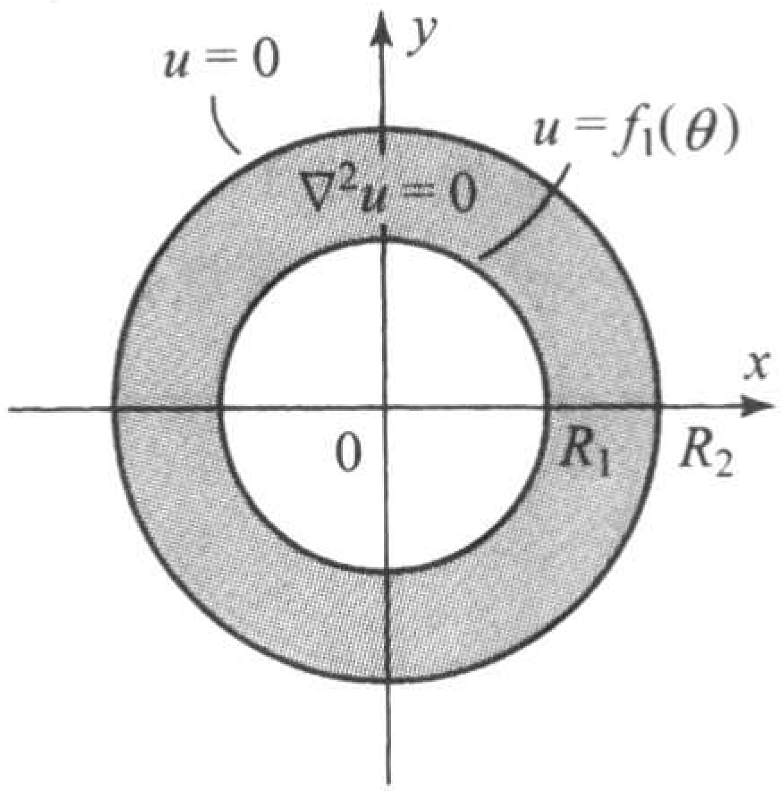


图 9 习题 24

25. **专题问题：带有非齐次边界条件的二维热传导方程.** 已知二维热传导方程

$$u_t=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right),\quad 0<r<a,\quad 0<\theta<2\pi,\quad t>0,$$

带有**非齐次边界条件**

$$u(a,\theta,t)=G(\theta),\quad 0<\theta<2\pi,\quad t>0$$

和**初始条件**

$$u(r,\theta,0)=F(r,\theta),\quad 0<\theta<2\pi,\quad 0\leqslant r<a,$$

证明它的解是

$$u(r,\theta,t)=a_0+\sum_{m=1}^{\infty}[a_m\cos m\theta+b_m\sin m\theta]\left(\frac{r}{a}\right)^m$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_m(\lambda_{mn}r)(a_{mn}\cos m\theta+b_{mn}\sin m\theta)e^{-c^2\lambda_{mn}^2 t}$$

其中，系数 a_0，a_m，b_m 是 2π-周期函数 $G(\theta)$的傅里叶系数；$\lambda_{mn}=\frac{\alpha_{mn}}{a}$，其中 α_{mn} 是 m 阶贝塞尔函数 J_m 的第 n 个正零点；a_{mn}，b_{mn} 由 4.3 节的(12)～(14)给出，那里的 $f(r,\theta)=F(r,\theta)-u_1(r,\theta)$，而 u_1 表示稳态解.［提示：考虑两个单独的问题.第一个问题(稳态解)：$\nabla^2u_1=0$，$0<r<a$，θ 任意，边界条件是 $u_1(a,\theta)=G(\theta)$，$\forall\theta$.第二个问题：$v_t=c^2\nabla^2 v$，$0<r<a$，$\forall\theta$，$t>0$，边界条件是 $v(a,\theta,t)=0$，$\forall\theta$ 和$t>0$，初始条件是 $v(r,\theta,0)=F(r,\theta)-u_1(r,\theta)$，$\forall\theta$ 和 $0\leqslant r<a$.把 4.3 节的习题 11 的解与狄利克雷问题的解结合.］

26. 一个半径是 1 的圆盘置于冰箱中，它的温度变为 0 度.然后圆盘被绝热并从冰箱中取出.圆盘边缘的温度按照公式 $f(\theta)=50(1-\cos\theta)(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$在 0～100 度之间变化.

(a)描绘边界的温度为 θ 的函数，并求它的傅里叶级数.

(b)求稳态温度.

(c)描绘出稳态温度的图，并根据图形确定圆盘上温度分别为 0 度和 100 度的点.

(d)确定并描绘出等温线.确认(c)中的答案.

(e)求解圆盘上的热传导问题，已知热导率 $c=1$ 及初始温度分布是 0.

(f)在 $t>0$ 的各时刻描绘温度分布图，估计将中心的温度提升到 25 度要用多长时间.中心温度的极限值

226

是多少？用(b)验证你的答案.

27. (a)用下面的数据求解习题 26 中的热传导问题：$a=c=1$，$F(r,\theta)=(1-r^2)r\sin\theta$，$G(\theta)=\sin 2\theta$，$0<\theta<2\pi$. [提示：参见 4.3 节例 2.]

(b)此时的稳态解是什么？

(c)在 t 的几个时刻绘出解的图形，与(b)中答案的图形相比较.

专题问题：圆盘上的泊松积分公式. 这个重要的公式是用边界数据函数的积分表示狄利克雷问题(4)的解. 按照习题 28 和 29 的步骤导出这个公式.

28. **泊松核**. 令 $z=re^{i\theta}$，考虑幂级数

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\quad |z|<1.$$

(a)证明

$$1+2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}-1\right)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos n\theta,\quad 0<r<1,\quad \text{所有的 }\theta.$$

(b)求出恒等式

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos n\theta=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2},\quad 0<r<1,\quad \text{所有的 }\theta.$$

函数 $P(r,\theta)=\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$ 叫做**圆盘上的泊松核**. 它在偏微分方程理论、复分析和调和分析中占有重要的地位.

29. **圆盘上的泊松积分公式**. 在这个习题中，我们推导狄利克雷问题(1)～(2)的解(4)的积分形式，它叫做**泊松积分公式**：对 $0<r<a$ 和所有的 θ，

227

$$\begin{aligned}u(r,\theta)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\phi)P\left(\frac{r}{a},\theta-\phi\right)\mathrm{d}\phi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\phi)\,\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\theta-\phi)+r^2}\mathrm{d}\phi.\end{aligned}$$

因此，这个公式是级数解(4)的另一种书写方式.

(a)将系数(5)代入级数解(4)得

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\phi)\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos[n(\theta-\phi)]\left(\frac{r}{a}\right)^n\right\}\mathrm{d}\phi.$$

[提示：代入前，用 ϕ 代换(5)中的哑变量 θ.]

(b) 用(a)和习题 28 导出泊松公式.

4.5 圆柱体中的拉普拉斯方程

本节处理圆柱域中某些径向对称狄利克雷问题. 在柱面坐标中不依赖于 ϕ 的拉普拉斯方程是

$$\boxed{\nabla^2u=\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0}\tag{1}$$

(见 4.1 节(4)). 我们将要考虑的第一个问题是模拟圆柱体内的稳态温度分布，在柱面和底面上保持 0 度，在顶面上具有径向对称的温度分布，如图 1 所示.

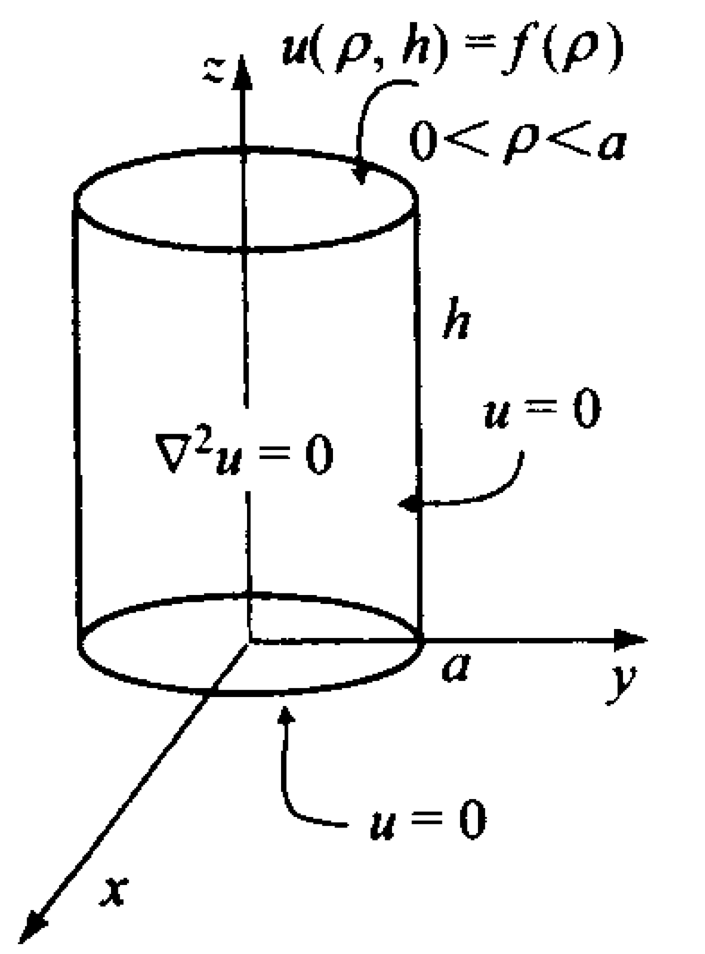


图 1

柱面上具有零温度的圆柱体中的狄利克雷问题 具有边界条件

$$u(\rho,0)=0,\quad 0<\rho<a,$$

$$u(a,z)=0,\quad 0<z<h,$$
$$u(\rho,h)=f(\rho),\quad 0<\rho<a$$

的拉普拉斯方程(1)的解是

$$u(\rho,z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0(\lambda_n\rho)\sinh\lambda_n z,\tag{2}$$

其中,

$$A_n=\frac{2}{\sinh(\lambda_n h)a^2J_1^2(\alpha_n)}\int_0^a f(\rho)J_0(\lambda_n\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho,\quad \lambda_n=\frac{\alpha_n}{a},\tag{3}$$

α_n 是 J_0 的第 n 个正零点,贝塞尔函数是零阶的.

证明 用分离变量法并令 $u(\rho,z)=R(\rho)Z(z)$,得到方程 $\rho^2R''+\rho R'-k\rho^2R=0$,$R(a)=0$,$Z''+kZ=0$,$Z(0)=0$,其中,$k$ 是分离常数. 由于我们求解的是圆柱体内的温度,所以也要求 R 在 $\rho=0$ 有界. 如果 $k=0$,直接验证只有解 $R=0$. 如果 $k>0$,例如 $k=\lambda^2$,就得到习题 7(也见 4.7 节的习题 29 和习题 30)中所定义的**修正的零阶贝塞尔方程的参数形式**. 在此情况下,通解是**修正的第一类和第二类贝塞尔函数**的线性组合,这两类函数分别记为 I_0 和 K_0,如图 2 所示(见习题 7).

[228]

因为第一类函数是正的且对 $\rho>0$ 是严格增的,而第二类函数在零点附近无界,所以这些函数的非平凡的有界线性组合都不满足 R 的边界条件. 从而只剩下唯一的可能性 $k=-\lambda^2<0$. 在此情况下,有

$$\rho^2R''+\rho R'+\lambda^2\rho^2R=0,\quad R(a)=0,$$
$$Z''-\lambda^2Z=0,\quad Z(0)=0.$$

应用 4.8 节的定理 3,得到 $R=R_n(\rho)=J_0(\lambda_n\rho)$,其中,$\lambda_n=\alpha_n/a$,$n=1,2,\cdots$. 以 λ_n 代替 λ 解 Z 的方程,得

$$Z_n(z)=\sinh\lambda_n z\quad n=1,2,\cdots.$$

叠加乘积解就得到解(2). 为确定未知系数 A_n,令 $Z=h$,得到贝塞尔级数展开式

$$f(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0(\lambda_n\rho)\sinh\lambda_n h.$$

因此,$A_n\sinh\lambda_n h$ 必定是 $f(\rho)$ 的第 n 个贝塞尔系数,于是由 4.8 节的定理 2 便得(3). ■

作为第二个示范,我们考虑在圆柱侧面上具有非零边界条件的边值问题(见图 3).

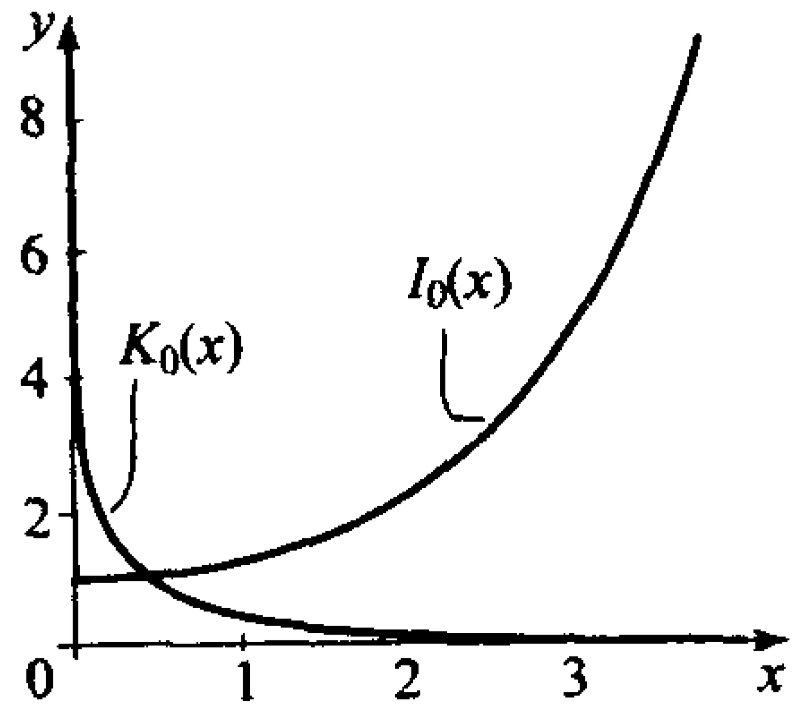


图 2 修正的贝塞尔函数

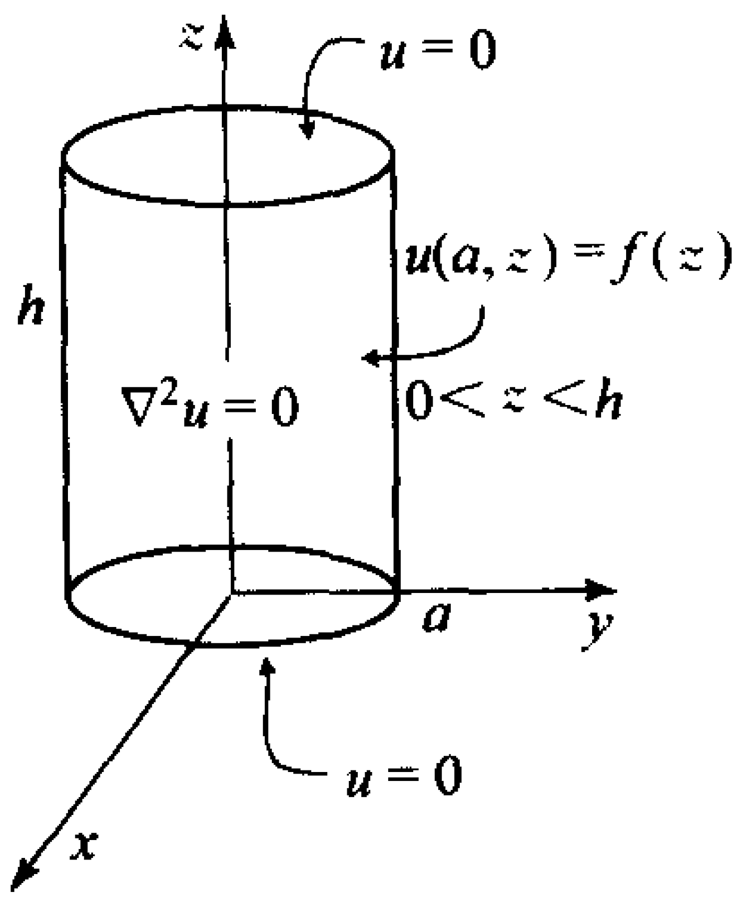


图 3

柱面上具有非零温度的圆柱体中的狄利克雷问题 具有边界条件

$$u(\rho,0)=u(\rho,h)=0,\quad 0<\rho<a,$$
$$u(a,z)=f(z),\quad 0<z<h$$

的拉普拉斯方程(1)的解是

$$u(\rho,z)=\sum_{n=1}^{\infty}B_nI_0\left(\frac{n\pi}{h}\rho\right)\sin\frac{n\pi}{h}z,\tag{4}$$

其中，I_0 是零阶第一类修正的贝塞尔函数，

229

$$B_n=\frac{2}{I_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right)h}\int_0^h f(z)\sin\frac{n\pi}{h}z\,dz.\tag{5}$$

解的推导非常类似于刚刚做过的推导，只是现在有意义的分离常数是 $k=\nu^2>0$. 推导细节留作习题 8.

习题 4.5

在习题 1～4 中，求图 1 所示的圆柱体中的稳态温度，已知它的顶部的温度分布，取 $a=1$，$h=2$.

1. $f(\rho)=100$.
2. $f(\rho)=100-\rho^2$.
3. $f(\rho)=\begin{cases}100 & 若\quad 0<\rho<\frac{1}{2},\\ 0 & 若\quad \frac{1}{2}<\rho<1.\end{cases}$
4. $f(\rho)=70J_0(\rho)$.
5. (a)求圆柱体中的稳态温度，边界值如图 4 所示.

   (b)用下列边界条件求解(1)：

$$u(\rho,0)=f_1(\rho),\quad 0<\rho<a,$$
$$u(a,z)=0,\quad 0<z<h,$$
$$u(\rho,h)=f_2(\rho),\quad 0<\rho<a.$$

   [提示：结合(a)与本节的解.]

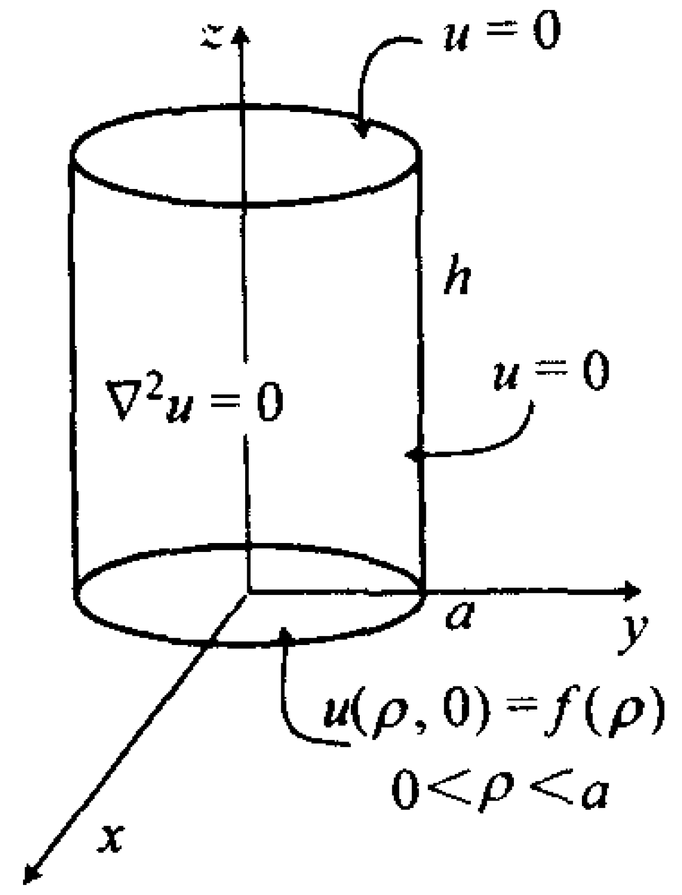


图 4 习题 5

6. 用下列边界条件求解(1)：

$$u(\rho,0)=100,\quad 0<\rho<1,$$
$$u(1,z)=0,\quad 0<z<2,$$
$$u(\rho,2)=100,\quad 0<\rho<1.$$

7. 在**修正的贝塞尔方程的参数形式** $\rho^2R''+\rho R'-\lambda^2\rho^2R=0$ 中作代换 $x=\lambda\rho(\lambda>0)$，得到它的通解是 $y=c_1I_0(\lambda\rho)+c_2K_0(\lambda\rho)$，其中 I_0 和 K_0 分别是第一类和第二类修正的贝塞尔函数. [提示：用 4.7 节的习题 29 和习题 30.]

专题问题：具有非零温度的柱面. 作习题 8～9.

8. 在本题中，推导(4)和(5).

   (a)参看圆柱体中的狄利克雷问题，其边界条件列在(4)式的上面. 用分离变量法得

$$Z''+\nu^2Z=0,\quad Z(0)=0\quad 和\quad Z(h)=0,$$

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \nu^2 \rho^2 R = 0.$$

(b)证明第一个方程唯一可能的解是对应于 $\nu_n = \frac{n\pi}{h}$ 的解，因此是

$$Z_n(z) = \sin\frac{n\pi}{h}z,\quad n = 1,2,\cdots.$$

(c)导出(4)和(5). [提示：用习题 7.]

9. 用下列边界条件求解(1).

$$u(\rho,0) = u(\rho,2) = 0,\quad 0 < \rho < 1,$$
$$u(1,z) = 10z,\quad 0 < z < 2.$$

230

10. 用下列条件求解(1).

$$u(\rho,0) = 100,\quad 0 < \rho < 1,$$
$$u(1,z) = 10z,\quad 0 < z < 2,$$
$$u(\rho,2) = 100,\quad 0 < \rho < 1.$$

[提示：结合习题 6 和习题 9 的解.]

11. 一个如图 5 所示的漂浮在水中的圆柱形桶，求它的的稳态温度.

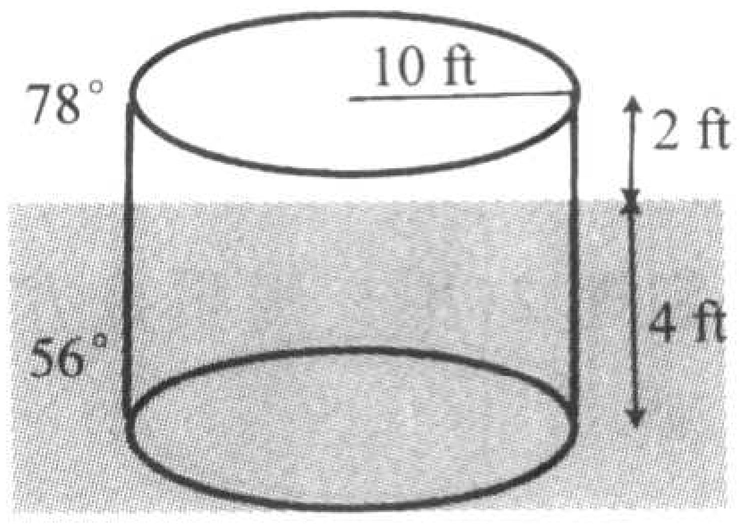


图 5　习题 11

4.6　亥姆霍兹方程和泊松方程

由 3.9 节我们知道，几个重要的边值问题可以应用特征函数展开法求解. 本节我们将给出这个方法在圆盘上的一些应用. 为此，我们从解一个**特征值**问题开始，它由定义在一个半径为 a 的圆盘上的**亥姆霍兹方程**

$$\boxed{\nabla^2\phi(r,\theta) = -k\phi(r,\theta),\quad 0 < r < a,\quad 0 < \theta < 2\pi} \tag{1}$$

和边界条件

$$\phi(a,\theta) = 0,\quad 0 < \theta < 2\pi \tag{2}$$

组成. 求解这个问题是指确定 k 的值(或**特征值**)，使得问题有非平凡解并求出这些解(或**特征函数**).

把 $\phi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ 代入(1)，分离变量并用 Θ 是 2π-周期函数这一事实，就可得到方程

$$\Theta'' + m^2\Theta = 0,\quad m = 0,1,2,\cdots, \tag{3}$$

$$r^2R'' + rR' + (kr^2 - m^2)R = 0,\quad R(a) = 0. \tag{4}$$

(3)的解是

$$\cos m\theta\quad 和\quad \sin m\theta,\quad m = 0,1,2,\cdots.$$

如果 $k<0$，方程(4)变为 m 阶修正的贝塞尔方程，可以证明此时满足 $R(a)=0$ 的仅有的有界解是零解. 所以取 $k\geqslant 0$，此时的(4)变为 m 阶贝塞尔方程的参数形式. 由 4.8 节的定理 3 知(4)的非平凡解是任意常数乘 $J_m(\lambda_{mn}r)$，它是对应于特征值 $k=\lambda_{mn}^2$ 的解. 把乘积解组成一体就得到下面的重要结论.

231

定理 1(圆盘中的亥姆霍兹方程)　问题(1)～(2)的特征值是

$$k = \lambda_{mn}^2 = (\alpha_{mn}/a)^2,\quad m = 0,1,2,\cdots,\quad n = 1,2,\cdots, \tag{5}$$

其中，α_{mn} 是贝塞尔函数 J_m 的第 n 个正零点. 每一个特征值对应于特征函数

$$\cos m\theta J_m(\lambda_{mn}r)\quad 及\quad \sin m\theta J_m(\lambda_{mn}r). \tag{6}$$

(注意当 $m=1, 2, \cdots$，对每个给定的特征值有两个不同的特征函数.)

换言之，如果 $\phi_{mn}(r, \theta)=\cos m\theta J_m(\lambda_{mn}r)$ 或 $\phi_{mn}(r, \theta)=\sin m\theta J_m(\lambda_{mn}r)$，则 $\nabla^2\phi_{mn}=-\lambda_{mn}^2\phi_{mn}$ 和 $\phi(a, \theta)=0$.

正如你将看到的，特征函数满足正交性关系，这可以用来展开定义在圆盘上的函数，很像我们经常用 $\cos nx$ 和 $\sin nx$ 把函数展成傅里叶级数. 这里的正交性是贝塞尔函数和三角系的正交性的一个结果. 因为贝塞尔函数的正交性是关于一个权函数 r 表示的(4.8节的定理1)，所以(6)中特征函数的正交性将用一个在圆盘上关于 $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ 的积分来表示. 例如，我们有

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \sin m\theta J_m(\lambda_{mn}r)\cos m\theta J_m(\lambda_{mn}r)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 0. \tag{7}$$

综合这些事实，我们得到下面的展开定理，它已经用在4.3节的(8)式中.

定理2(用亥姆霍兹方程的特征函数展开) 设 $f(r, \theta)$ 对所有的 $0<r<a$ 和 $0<\theta<2\pi$ 有定义，则

$$f(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn}r)(a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta), \tag{8}$$

其中(广义傅里叶系数) a_{mn} 和 b_{mn} 由4.3节的(12)～(14)得出.

在4.3节，我们把(8)式作为傅里叶级数和贝塞尔-傅里叶级数的一个结果而建立的. 一个更简单更直接的推导可以利用特征函数(6)的正交性而得到(习题4).

例1 特征函数展开法

232

在单位圆盘中求解 $\nabla^2 u(r, \theta)=u(r, \theta)+3r^2\cos 2\theta$，已知在边界上 $u=0$.

解 我们寻找一个如下的特征函数展开形式的解

$$u(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(\alpha_{mn}r)(A_{mn}\cos m\theta + B_{mn}\sin m\theta).$$

因为每个特征函数满足边界条件，所以上述形式的解 $u(r, \theta)$ 也满足边界条件. 将 u 代入方程并用如下事实：特征函数 ϕ_{mn} 满足 $\nabla^2\phi_{mn}=-\alpha_{mn}^2\phi_{mn}$，便可得到

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} -\alpha_{mn}^2 J_m(\alpha_{mn}r)(A_{mn}\cos m\theta + B_{mn}\sin m\theta)\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(\alpha_{mn}r)(A_{mn}\cos m\theta + B_{mn}\sin m\theta) + 3r^2\cos 2\theta;\end{aligned}$$

于是，

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1-\alpha_{mn}^2)J_m(\alpha_{mn}r)(A_{mn}\cos m\theta + B_{mn}\sin m\theta) = 3r^2\cos 2\theta.$$

因此，$(-1-\alpha_{mn}^2)A_{mn}$ 和 $(-1-\alpha_{mn}^2)B_{mn}$ 是函数 $f(r, \theta)=3r^2\cos 2\theta$ 的广义傅里叶系数. 注意到三角系的正交性，只有 A_{2n} 非零，所有其他系数为零. 借用4.3节中 $m=2$ 时的(13)式得到

$$\begin{aligned}(-1-\alpha_{2n}^2)A_{2n} &= \frac{2}{\pi J_3^2(\alpha_{2n})}\int_0^1\int_0^{2\pi} 3\cos^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta r^2 J_2(\alpha_{2n}r)r\mathrm{d}r\\ &= \frac{6}{J_3^2(\alpha_{2n})}\int_0^1 r^3 J_2(\alpha_{2n}r)\mathrm{d}r \quad \left(\int_0^{2\pi}\cos^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \pi\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{6}{J_3^2(\alpha_{2n})} \frac{J_3(\alpha_{2n})}{\alpha_{2n}} \quad (\text{由 4.2 节的(11)})$$

$$= \frac{6}{\alpha_{2n} J_3(\alpha_{2n})}.$$

解出 A_{2n}并代入 u 的特征函数展开式，得

$$u(r,\theta) = \cos 2\theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-6}{(1+\alpha_{2n}^2)\alpha_{2n} J_3(\alpha_{2n})} J_2(\alpha_{2n} r).$$

由于这里只有含 $\cos 2\theta$ 的一项，所以(8)式中的双求和号变为一个求和号，通常是双求和号. ■

圆盘中的泊松方程

考虑泊松问题

$$\nabla^2 u = f(r,\theta), \quad 0 < r < a, \quad 0 < \theta < 2\pi, \tag{9}$$

$$u(a,\theta) = g(\theta), \quad 0 < \theta < 2\pi. \tag{10}$$

233

第一步是分解此问题为如图 1 所示的两个子问题.

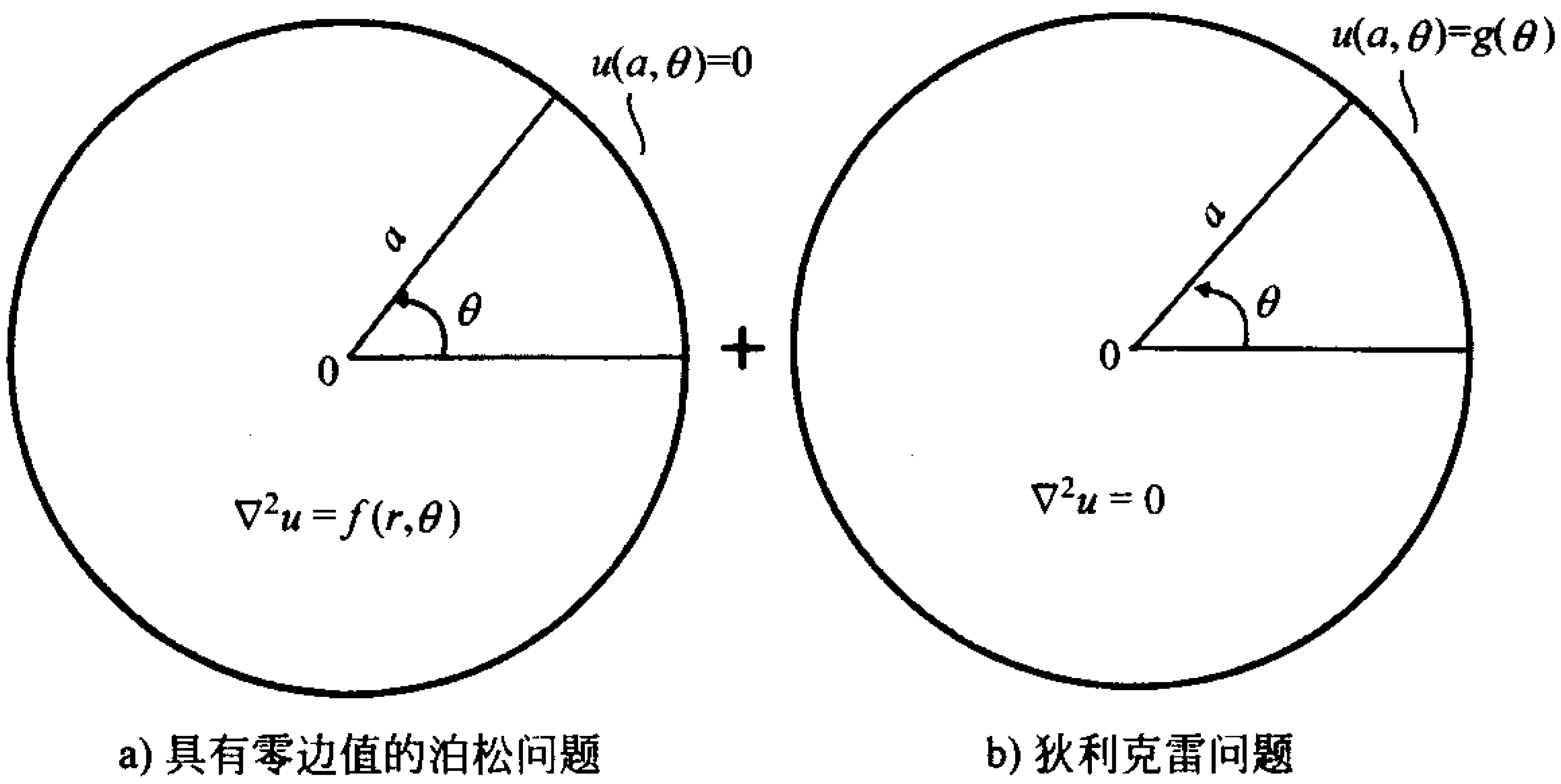


图 1 泊松问题的分解

图 1b 中的狄利克雷问题可由 4.4 节的方法求解. 故只需求解具有零边值的泊松方程(图 1a)便可完成求解过程. 我们将使用特征函数展开法. 这个方法告诉我们要去寻找一个形如

$$\boxed{u(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r)(A_{mn}\cos m\theta + B_{mn}\sin m\theta)} \tag{11}$$

的(9)(具有零边值)的解. 把它代入(9)并用每个特征函数满足(1)这一事实，就得到

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -\lambda_{mn}^2 J_m(\lambda_{mn} r)(A_{mn}\cos m\theta + B_{mn}\sin m\theta) = f(r,\theta).$$

这是 $f(r, \theta)$的特征函数展开式，用定理 2 求解 A_{mn} 和 B_{mn} $(m, n=1, 2, \cdots)$得

$$A_{0n}=\frac{-1}{\pi\alpha_{0n}^2J_1^2(\alpha_{0n})}\int_0^a\int_0^{2\pi}f(r,\theta)J_0(\lambda_{0n}r)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r, \tag{12}$$

$$A_{mn}=\frac{-2}{\pi\alpha_{mn}^2J_{m+1}^2(\alpha_{mn})}\int_0^a\int_0^{2\pi}f(r,\theta)\cos m\theta J_m(\lambda_{mn}r)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r, \tag{13}$$

234

$$B_{mn}=\frac{-2}{\pi\alpha_{mn}^2J_{m+1}^2(\alpha_{mn})}\int_0^a\int_0^{2\pi}f(r,\theta)\sin m\theta J_m(\lambda_{mn}r)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r. \tag{14}$$

这就完全确定了图 1a 中问题的解. 结果总结如下.

圆盘中泊松问题的解 泊松问题(9)～(10)的解是

$$u(r,\theta)=u_1(r,\theta)+u_2(r,\theta), \tag{15}$$

其中，u_1 是图 1a 中具有零边值的泊松问题的解，u_2 是图 1b 中狄利克雷问题的解. 函数 u_1 由(11)～(14)给出，函数 u_2 由 4.4 节的(4)～(5)给出.

例 2 具有零边值的泊松问题

在单位圆盘内求解$\nabla^2u=1$，已知在边界上 $u=0$.

解 在此情况下，(15)中的 $u_2=0$. 函数 u_1 由(11)给出. 因为整个问题与 θ 无关，我们期望解也是与 θ 无关的. 事实上，把 $f(r,\theta)=1$ 代入(13)和(14)，由于有关于 θ 的积分，积分值为 0. 由(12)得

$$A_{0n}=\frac{-2}{\alpha_{0n}^2J_1^2(\alpha_{0n})}\int_0^1J_0(\alpha_{0n}r)r\mathrm{d}r.$$

用 4.2 节(11)式计算这个积分并化简，得 $A_{0n}=\dfrac{-2}{\alpha_{0n}^3J_1(\alpha_{0n})}$. 将它代入(11)得

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{\alpha_{0n}^3J_1(\alpha_{0n})}J_0(\alpha_{0n}r).$$ ■

在习题中提供了特征函数展开法的一些有趣的应用.

习题 4.6

1. 从(1)和(2)导出(3)和(4).
2. 关于亥姆霍兹问题(1)和(2)的特征函数，叙述并证明它们的正交性关系((7)是其中之一).
3. 令 $\phi_{mn}(r,\theta)$是(6)中的一个特征函数，计算

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a\phi_{mn}^2(r,\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

   $m=0$ 的情况单独处理. [提示：用 4.8 节(12)式.]
4. 用(6)中特征函数的正交性推导定理 2 中的系数. [提示：在(8)式两边乘一个特征函数，交换积分和求和号，然后在圆盘上关于 $r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$ 积分.]

235

在 5～12 题中，用特征函数展开法求解在单位圆盘中给出的问题.

5. $\nabla^2u=-u+1$，$u(1,\theta)=0$.
6. $\nabla^2u=3u+r\sin\theta$，$u(1,\theta)=0$.
7. $\nabla^2u=2+r^3\cos3\theta$，$u(1,\theta)=0$.
8. $\nabla^2u=r^2$，$u(1,\theta)=0$.

9. $\nabla^2 u=\begin{cases} r\sin\theta & 若\ 0<r<\frac{1}{2}, \\ 0 & 若\ \frac{1}{2}<r<1, \end{cases}$

10. $\nabla^2 u=r^m \sin m\theta$，$u(1, \theta)=0$.

11. $\nabla^2 u=1$，$u(1, \theta)=\sin 2\theta$.

12. $\nabla^2 u=1+r\cos\theta$，$u(1, \theta)=1$.

13. **热传导问题**．用特征函数展开法做 11 题．

14. **专题问题：非齐次热传导问题**．在这一组问题中，用特征函数展开法求解具有依赖于时间的热源的非齐次热边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)+q(r,\theta,t),$$
$$u(a,\theta,t)=0,$$
$$u(r,\theta,0)=f(r,\theta),$$

其中，$0<r<a$，$0<\theta<2\pi$ 和 $t>0$．按照下面的步骤．

(a)令

$$u(r,\theta,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_m(\lambda_{mn}r)(A_{mn}(t)\cos m\theta+B_{mn}(t)\sin m\theta),$$

$$f(r,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_m(\lambda_{mn}r)(a_{mn}\cos m\theta+b_{mn}\sin m\theta),$$

$$q(r,\theta,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_m(\lambda_{mn}r)(c_{mn}(t)\cos m\theta+d_{mn}(t)\sin m\theta).$$

（为什么这是解决本题的出发点?）f 和 q 中的 a_{mn}，b_{mn}，$c_{mn}(t)$ 和 $d_{mn}(t)$ 是什么?

(b)证明 A_{mn} 和 B_{mn} 是下列初值问题的解：

$$A'_{mn}(t)+\lambda_{mn}^2 A_{mn}(t)=c_{mn}(t),\quad A_{mn}(0)=a_{mn};$$
$$B'_{mn}(t)+\lambda_{mn}^2 B_{mn}(t)=d_{mn}(t),\quad B_{mn}(0)=b_{mn}.$$

(c)证明下式以完成求解：

$$A_{mn}(t)=\mathrm{e}^{-\lambda_{mn}^2 t}\left(a_{mn}+\int_0^t \mathrm{e}^{\lambda_{mn}^2 s}c_{mn}(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

和

$$B_{mn}(t)=\mathrm{e}^{-\lambda_{mn}^2 t}\left(b_{mn}+\int_0^t \mathrm{e}^{\lambda_{mn}^2 s}d_{mn}(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

15. (a)具体求解 14 题，其中，$c=1$，$f=1$ 及 $q(r, \theta, t)=\mathrm{e}^{-t}$.

(b) 描绘中心的温度图，并描述当 $t\to\infty$ 时将发生什么．

16. (a)具体求解 14 题，其中，$c=1$，$f=r\sin\theta$ 及 $q=1$.

(b) 描绘中心的温度图，并描述当 $t\to\infty$ 时将发生什么．

236

4.7 贝塞尔方程和贝塞尔函数

在本章我们已经遇到过 $p\geqslant 0$ 阶的贝塞尔方程

$$\boxed{x^2 y''+xy'+(x^2-p^2)y=0,\quad x>0,} \tag{1}$$

在极坐标和柱面坐标中求解有关拉普拉斯的偏微分方程时，出现过这个方程. 注意，贝塞尔方程是一族微分方程，每个 p 的值对应一族. 遗憾的是，这里的术语有点重叠，即 p 阶贝塞尔方程是一个二阶的微分方程.

贝塞尔方程也出现在求解各种其他经典的问题中. 历史上，$p=0$ 时的贝塞尔方程首先被丹尼尔·伯努利于 1732 年研究悬链问题时发现并求解(见 6.3 节). 其后的 1770 年，拉格朗日在研究天文学的工作中也发现了类似的方程. 在 1824 年，伟大的德国天文学家贝塞尔研究行星运动的椭圆轨道时，遇到了方程(1)的一个特殊形式. 受到傅里叶于 1822 年发表的不朽的工作的影响(见第 2 章)，贝塞尔对方程(1)做了系统的研究.

贝塞尔方程的解

我们将使用附录 A.6 中的弗罗贝尼乌斯方法. 容易证明 $x=0$ 是贝塞尔方程的一个正则奇点. 所以，正如弗罗贝尼乌斯方法所提示，我们寻求形如

$$y=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{r+m} \tag{2}$$

的解，这里 $a_0\neq 0$. 把它代入(1)得

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_m(r+m)(r+m-1)x^{r+m}+\sum_{m=0}^{\infty}a_m(r+m)x^{r+m}$$
$$+\sum_{m=2}^{\infty}a_{m-2}x^{r+m}-p^2\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{r+m}=0.$$

我们将第三个级数的求和改为从下标 2 开始，以使每个级数的通项都用 x^{r+m} 表示. 分别写出对应于 $m=0$ 和 $m=1$ 的项如下：

[237]

$$a_0(r^2-p^2)x^r+a_1[(r+1)^2-p^2]x^{r+1}$$
$$+\sum_{m=2}^{\infty}(a_m[(r+m)^2-p^2]+a_{m-2})x^{r+m}=0.$$

令级数的系数等于 0 得到

$$a_0(r^2-p^2)=0\quad (m=0); \tag{3}$$
$$a_1[(r+1)^2-p^2]=0\quad (m=1); \tag{4}$$
$$a_m[(r+m)^2-p^2]+a_{m-2}=0\quad (m\geqslant 2). \tag{5}$$

因为 $a_0\neq 0$，由(3)得**指标方程**，

$$(r+p)(r-p)=0,$$

其**指标根**是 $r=p$ 和 $r=-p$.

贝塞尔方程的第一个解

在(5)中令 $r=p$ 得到递归关系式

$$\boxed{a_m=\frac{-1}{m(m+2p)}a_{m-2},\quad m\geqslant 2.}$$

这是一个两步递归关系式，所以偶指标项和奇指标项要分别确定. 首先求奇指标项. 在(4)中

令 $r=p$ 得 $a_1[(p+1)^2-p^2]=0$，它蕴涵 $a_1=0$（注意(1)中的 $p\geqslant 0$），于是，$a_3=a_5=\cdots=0$. 为了更容易地求出偶指标项，重写对 $m=2k$ 的递归关系式，有

$$a_{2k}=\frac{-1}{2^2k(k+p)}a_{2(k-1)},\quad k\geqslant 1.$$

由此得

$$a_2=\frac{-1}{2^2(1+p)}a_0;$$

$$a_4=\frac{-1}{2^2 2(2+p)}a_2=\frac{1}{2^4 2!(1+p)(2+p)}a_0;$$

$$a_6=\frac{-1}{2^2 3(3+p)}a_4=\frac{-1}{2^6 3!(1+p)(2+p)(3+p)}a_0;$$

等等. 把这些系数代入(2)就得到贝塞尔方程的一个解

$$\boxed{y=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(1+p)(2+p)\cdots(k+p)}x^{2k+p},}\tag{6}$$

238

其中 $a_0\neq 0$ 是任意常数. 利用伽马函数可以把这个解写成更漂亮的样子(若你先前尚未见过此函数，本节末尾对它有介绍). 我们取

$$\boxed{a_0=\frac{1}{2^p\Gamma(p+1)},}$$

利用伽马函数的基本性质 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$，如下简化级数:

$$\begin{aligned}\Gamma(1+p)[(1+p)(2+p)\cdots(k+p)]&=\Gamma(2+p)[(2+p)\cdots(k+p)]\\&=\Gamma(3+p)[\cdots(k+p)]\\&=\cdots=\Gamma(k+p+1).\end{aligned}$$

简化后，由(6)得到第一个解，记为 J_p，称它为 **p 阶贝塞尔函数**.

$$\boxed{J_p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}.}\tag{7}$$

当 $p=n$，我们有 $\Gamma(k+p+1)=(k+n)!$（见下面(14)），于是得 **n 阶贝塞尔函数**

$$\boxed{J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.}$$

为了得到关于贝塞尔函数的性质的思想，我们在图 1 中勾画出 J_0，$J_{\frac{1}{2}}$，J_1，J_2 和 J_7 的图形. 注意到 $J_0(0)=1$，$J_p(0)=0$，当 $p>0$ 时，因此，J_p 在 0 点处有界. 我们将很快看到，第二个线性无关解不具有这个性质. 239

贝塞尔方程的第二个解

若在(2)中用第二个指标根 $-p$ 代替 r，如前面所推导，得到解

$$J_{-p}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}.\tag{8}$$

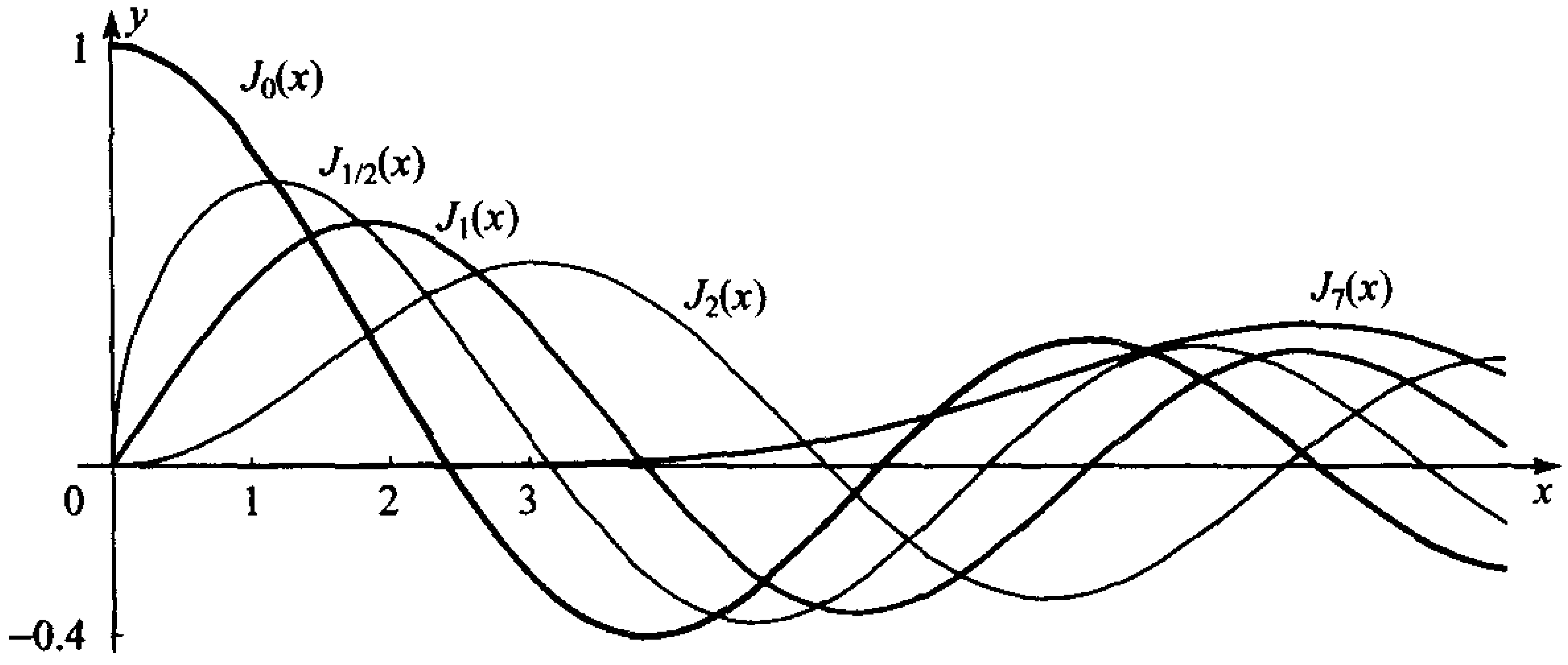


图 1 $J_p(x)$的图形，$p=0$，$\frac{1}{2}$，1，2，7

由此式知道，若 p 不是整数，则(8)与 J_p 线性无关. 因此，若 p 不是整数，则(7)与(8)就确定了 p 阶贝塞尔方程的基本解集. 在讨论 p 是整数的情况之前，我们计算函数 J_p 和 J_{-p}在 $p=\frac{1}{2}$ 的值.

例 1　$p=\pm\frac{1}{2}$阶的贝塞尔函数

证明

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \quad 及 \quad J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

解　把 $p=\frac{1}{2}$代入(7)得

$$J_{1/2}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(k+\frac{1}{2}+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}.$$

为化简此式，我们用习题 44(b)的结果，由此结果知

240

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}+1\right)=\frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}k!}\sqrt{\pi}.$$

因此

$$J_{1/2}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2^{2k+1}k!}{k!(2k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

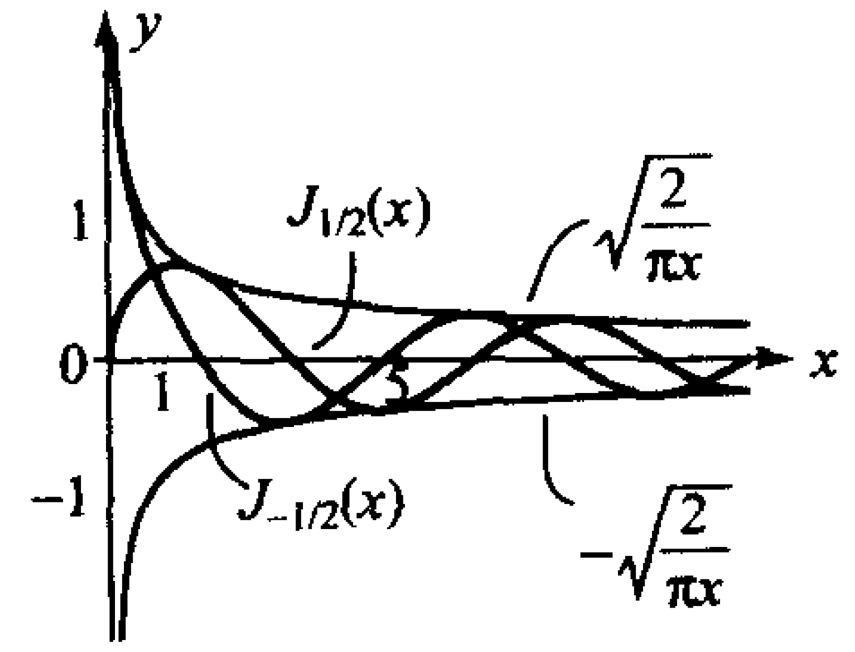


图 2　$J_{\frac{1}{2}}$，$J_{-\frac{1}{2}}$的图形和它们的包络线 $y=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi x}}$

只要把 $p=-\frac{1}{2}$代入(8)，其他部分的证明就可类似地进行并用习题 44(a)(见习题 21)化简. 在图 2 中，我们画出了 $J_{\frac{1}{2}}$和 $J_{-\frac{1}{2}}$. 显然这两个函数线性无关，因为第一个有界而第二个无界. ■

记住下述重要事实：仅当 p 不是整数时，J_p 和 J_{-p}才是线性无关的. 事实上，当 p 是正整数，我们得到$k-p+1\leqslant 0$，$k=0$，1，…，$p-1$，于是(8)中的系数对$k=0$，1，…，$p-1$ 根本

没有定义，因为伽马函数对 0 和负整数没有定义. 然而，对 $J_{-n}(n=1, 2, \cdots)$有定义是有用的. 习题 16 给出了这个函数的一个简单的构造方法. 这就得到了第二个线性相关解，它满足

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (n \text{ 整数} \geqslant 0). \tag{9}$$

我们可以用弗罗贝尼乌斯方法推导第二个线性无关解. 然而，我们要介绍一个在应用数学中常用的方法. 我们还是从 p 不是整数开始，定义

$$Y_p(x) = \frac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} (p \text{ 不是整数}). \tag{10}$$

在这种情况下，因为 J_p 和 J_{-p}是贝塞尔方程的线性无关解，故由(10)得到 Y_p 也是贝塞尔方程的一个与J_p 线性无关的解. 函数 Y_p 叫做 p **阶的第二类贝塞尔函数**. 这个函数通过求如下非整值函数的极限来构造：

$$Y_p = \lim_{\nu \to p} Y_\nu. \tag{11}$$

可以证明这个极限的存在性(见图 3 所示)，它定义了 p 阶贝塞尔方程的一个与 J_p 也线性无关的解. 如图 4 所示，我们有

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} Y_p(x) = -\infty.} \tag{12}$$

241

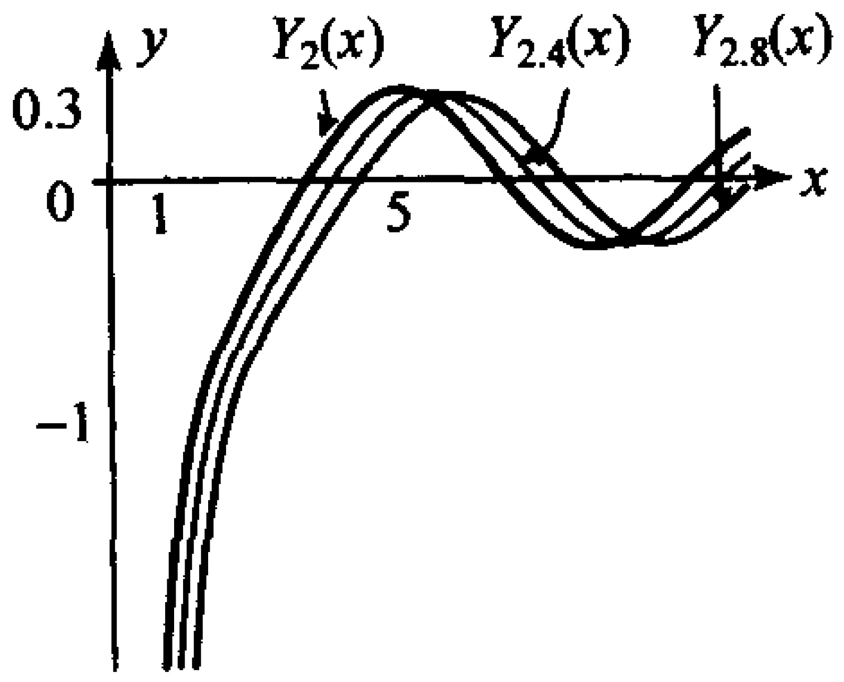


图 3 Y_2 的近似

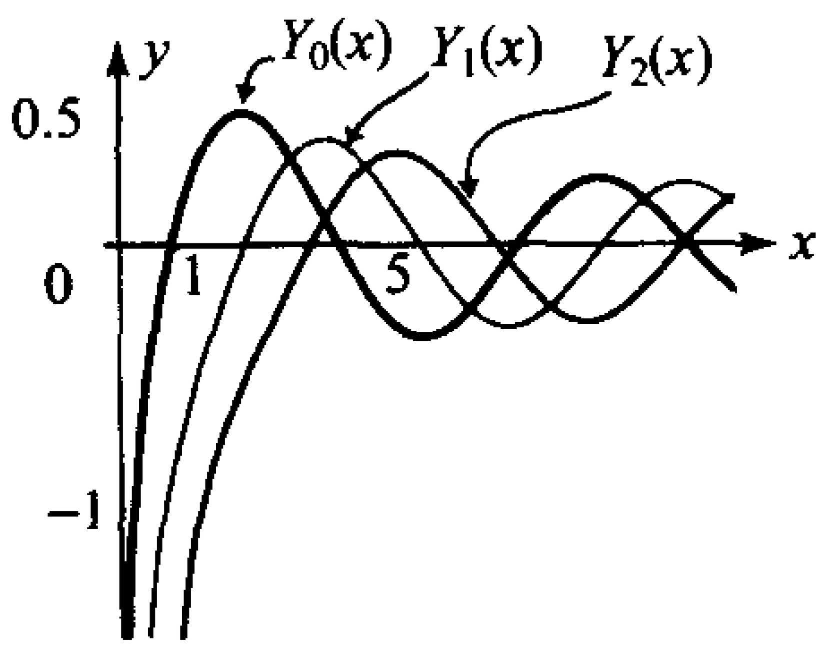


图 4 Y_0，Y_1，Y_2

特别地，第二类贝塞尔函数在 0 点附近无界. 对(1)的分析总结如下.

p 阶贝塞尔方程的通解 p 阶贝塞尔方程(1)的通解是

$$y(x) = c_1 J_p(x) + c_2 Y_p(x),$$

其中，J_p 由(7)给出，而 Y_p 由(10)或(11)给出. 当 p 不是整数，通解由下式给出：

$$y(x) = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x),$$

其中，J_p 由(7)给出，而 J_{-p}由(8)给出.

习题中给出了贝塞尔函数的显式表示及其计算方法. 下面，考察伽马函数.

伽马函数

伽马函数对 $x>0$ 定义为

$$\boxed{\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.} \tag{13}$$

这个积分是广义积分，对所有的 $x>0$ 收敛. 伽马函数的**基本性质**是

$$\boxed{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x).}$$

用分部积分法证明此式如下：

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty t^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=-t^x\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^\infty+x\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=x\Gamma(x),$$

其中，在第一个积分中令 $u(t)=t^x$，$\mathrm{d}v=\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}u=xt^{x-1}\mathrm{d}t$，$v(t)=-\mathrm{e}^{-t}$.

可以容易地求出伽马函数在正整数点上的值. 例如，

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1.$$

由基本性质知

242

$$\Gamma(2)=1\Gamma(1)=1!,\quad \Gamma(3)=2\Gamma(2)=2!,\quad \Gamma(4)=3\Gamma(3)=3!,\cdots.$$

依此类推，有

$$\Gamma(n+1)=n!,\tag{14}$$

其中 $n=0$，1，2，3，…，规定 0! =1. 由于这个原因，有时称伽马函数是**广义阶乘函数**. 伽马函数的其他值可以通过具有各种难度的计算与推导获得. 由

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}}\tag{15}$$

(习题 34)和基本性质，求得

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\quad 及\quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

虽然只对 $x>0$ 定义了伽马函数，但可以推广它的定义到除去 0，−1，−2，−3，…以外的全体实数上，并且使基本性质仍然成立. 为此，将基本性质写为

$$\boxed{\Gamma(x)=\frac{1}{x}\Gamma(x+1).}$$

然后，由伽马函数在 $x+1$ 的值定义它在 x 的值. 例如，我们有

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}\quad 及\quad \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{2}{3}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}\sqrt{\pi}.$$

这就很清楚地把伽马函数的定义推广到不包括−1，−2，−3，…的负数上. 图 5 勾画出伽马

243

函数的图形. 注意在 $x=0$，−1，−2，…处的竖直渐近线. 也要注意到伽马函数在负区间上

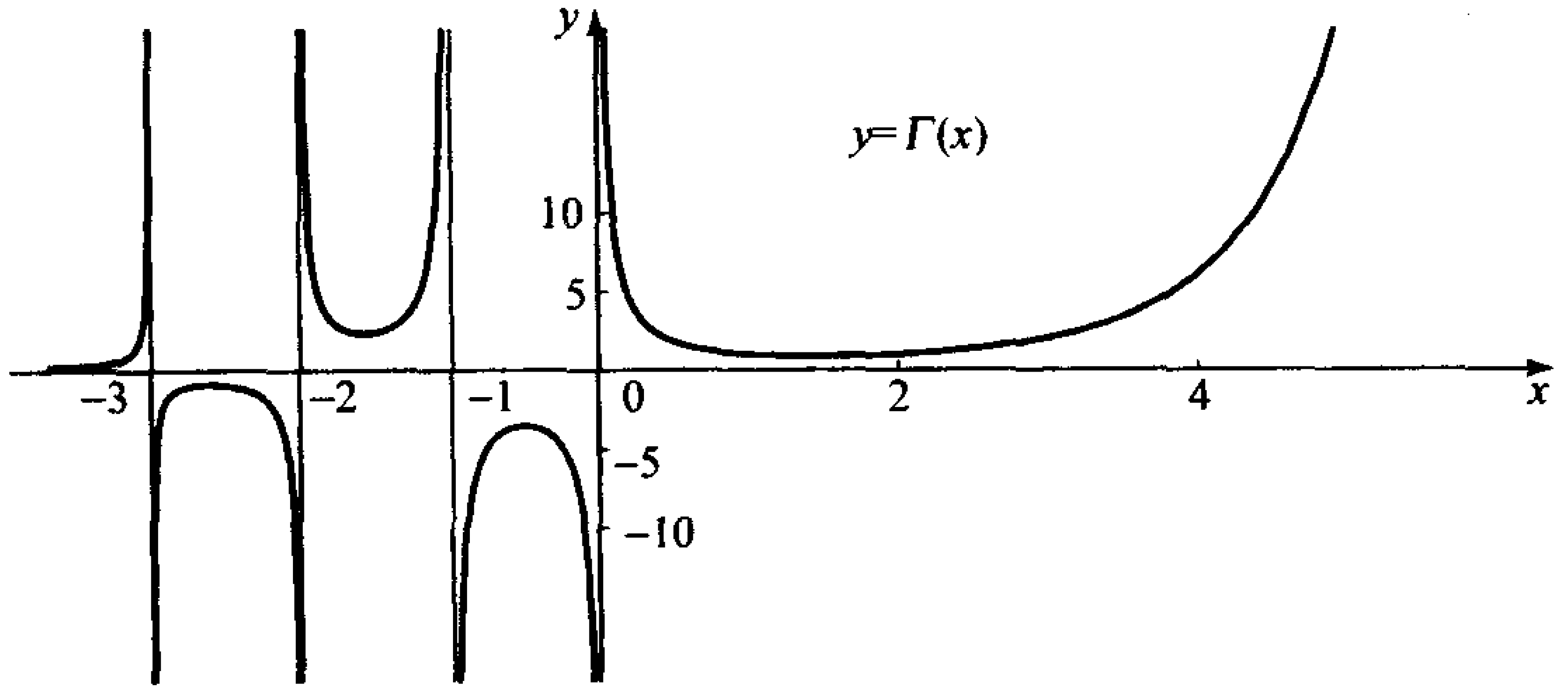


图 5　$\Gamma(x)$，广义阶乘函数

符号的交替改变. 对 $n=0$, 1, 2, …, $\Gamma(n+1)=n!$, $\Gamma(1)=0!=1$, $\Gamma(-n)$没有定义, 当 $x>0$, $\Gamma(x)>0$, $\Gamma(x)$在负轴上交替变号.

习题 4.7

在习题 1～4 中, 确定已知贝塞尔函数的阶 p. 用(7)写出第一个级数解的三项.

1. $x^2y''+xy'+(x^2-9)y=0$.
2. $x^2y''+xy'+x^2y=0$.
3. $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$.
4. $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{9}\right)y=0$.

在习题 5～8 中, 对在$(0, \infty)$上给出的微分方程求它的通解. 写出解的每一部分的级数展开式的两项. [提示: 用(8).]

5. $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{9}{4}\right)y=0$.
6. $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{25}{4}\right)y=0$.
7. $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{16}\right)y=0$.
8. $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{25}\right)y=0$.
9. 用弗罗贝尼乌斯方法, 对第 1 题中方程的第二个线性无关解, 至少求出它的三项. (第一个解由(7)给出.)
10. 验证 $y_1=x^pJ_p(x)$和 $y_2=x^pY_p(x)$是方程

$$xy''+(1-2p)y'+xy=0, \quad x>0$$

的线性无关解.

在 11～14 题中, 利用第 10 题的结果对 $x>0$, 求解给定的方程.

11. $xy''-y'+xy=0$.
12. $y''+y=0$.
13. $xy''-2y'+xy=0$.
14. $xy''-3y'+xy=0$.
15. 建立下述性质:

(a) $J_0(0)=1$, $J_p(0)=0$, 若 $p>0$.

(b) 当 n 是偶数时 $J_n(x)$是偶函数, 当 n 是奇数时是奇函数.

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{J_p(x)}{x^p}=\frac{1}{2^p\Gamma(p+1)}$.

244

16. 设在(7)中用负整数 $-n$ 代替 p.

(a) 基于伽马函数的性质, 请解释为什么令$\frac{1}{\Gamma(k-p+1)}=0$ $(k=0, 1, 2, \cdots, p-1)$是有意义的. [提示: 见下面 32 题.]

(b) 重新标记得到的级数的标号, 证明: $J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$.

在 17～20 题中, 首先把已知方程化为贝塞尔方程, 而后求解. 用题中给出的变量代换, 取 $x>0$.

17. $xy''+(1+2p)y'+xy=0$, $\quad y=x^{-p}u$.
18. $xy''+y'+\frac{1}{4}y=0$, $\quad z=\sqrt{x}$.

19. $y''+e^{-x}y=0$,　$z=2e^{-\frac{x}{2}}$.

20. $x^2y''+xy'+\left(4x^4-\dfrac{1}{4}\right)y=0$,　$z=x^2$.

21. 证明：$J_{-1/2}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos x$.

22. 建立不等式：

(a) $J_{3/2}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\left[\dfrac{\sin x}{x}-\cos x\right]$.　　(b) $J_{-3/2}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\left[-\dfrac{\cos x}{x}-\sin x\right]$.

23. **零阶贝塞尔方程的通解.**

(a)用(7)推导贝塞尔方程 $x^2y''+xy'+x^2y=0$ 的级数解 J_0 的前六项.

(b)用(a)和降阶公式求第二个级数解 y_2 的六项. [提示：见例 5，附录 A.6]

(c)把你的解答描绘出来，并在 $x=0$ 附近，例如 $0<x<4$，与 J_0 和 Y_0 的图形相比较. 请问你有什么发现?

(d)解释为什么必有 $Y_0=aJ_0+by_2$，这里 a 和 b 是某些常数. 计算这些函数在区间 $0<x<4$ 中两点例如 $x=0.2$ 和 $x=0.3$ 的值，这样就得到关于未知系数 a 和 b 的两个方程. 求解方程以确定 a 和 b，然后画出图形并与 Y_0 和 aJ_0+by_2 的图形比较.

24. 对一阶贝塞尔方程重做 23 题.

25. **专题问题：衰减弦振动的问题.** 方程

$$y''(t)+e^{-at+b}y(t)=0\quad(a>0),\quad t>0$$

模拟这样一条弦的振动，它的弹簧常数随时间的增加而趋于 0.

(a)证明：变量代换 $u=\dfrac{2}{a}e^{-\frac{1}{2}(at-b)}$ 把微分方程变为零阶贝塞尔方程(关于新变量 u). [提示：令

$$Y(u)=y(t),e^{-at+b}=\frac{a^2}{4}u^2;\frac{dy}{dt}=-\frac{a}{2}u\frac{dY}{du};\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{a^2}{4}u\left[\frac{dY}{du}+u\frac{d^2Y}{du^2}\right].]$$

(b)得到微分方程的形如

$$y(t)=c_1J_0\left(\frac{2}{a}e^{-\frac{1}{2}(at-b)}\right)+c_2Y_0\left(\frac{2}{a}e^{-\frac{1}{2}(at-b)}\right)$$

的通解，其中，c_1 和 c_2 是任意常数，J_0 是零阶贝塞尔函数，Y_0 是第二类的零阶贝塞尔函数.

(c)在下述三种情况下，讨论当 $t\to\infty$ 时解的性质：$c_1=0$，$c_2\neq0$；$c_1\neq0$，$c_2=0$；$c_1\neq0$，$c_2\neq0$. 微分方程的无界解有意义吗? [提示：$t\to\infty$ 时，微分方程有什么变化?]

245

在 26～27 题中，求解给定的衰减弦振动问题. 求在每种情况下，当 $t\to\infty$ 时，解是否有界或无界.

26. $y''(t)+e^{-2t}y(t)=0$，$y(0)=J_0(1)\approx0.765$，$y'(0)=-J'_0(1)\approx0.440$.

27. $y''(t)+e^{-2t}y(t)=0$，$y(0)=0.1$，$y'(0)=0$. [用 $J_0(1)\approx0.765$；$J'_0(1)\approx-0.440$；$Y_0(1)\approx0.088$；$Y'_0(1)\approx0.781$.]

28. **零阶第二类贝塞尔函数.** 零阶第二类贝塞尔函数由下面的公式显式给出：

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}\left[J_0(x)(\ln x+\gamma)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}h_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}\right],$$

其中，$h_m=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{m}$，$\gamma$ 是**欧拉常数**：

$$\gamma=\lim_{m\to\infty}(h_m-\ln m)\approx0.577\,216.$$

(a)求欧拉常数的近似数值.

(b)验证性质 $\lim\limits_{x\to0^+}Y_0(x)=-\infty$.

29. **修正的贝塞尔函数**. 在一些应用中，贝塞尔函数 J_p 作为纯虚数 $\mathrm{i}x$ 的函数出现.

(a)证明：$J_p(\mathrm{i}x)=\mathrm{i}^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2k+p}}{k!\Gamma(k+p+1)}$. 因此，除因子 i^p 外，我们得到的函数是实值的. 这个函数定义了一个所谓**修正的 p 阶贝塞尔函数**

$$I_p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2k+p}}{k!\Gamma(k+p+1)}.$$

(b)验证修正的 p 阶贝塞尔函数满足**修正的贝塞尔微分方程**

$$x^2y''+xy'-(x^2+p^2)y=0.$$

(c)描绘修正的零阶贝塞尔函数的图形，注意到它对 $x>0$ 是正的并且是递增的.

30. **第二类修正的贝塞尔函数**.

(a)证明 $K_p(x)=\frac{\pi}{2\sin p\pi}[I_{-p}(x)-I_p(x)]$也是 29 题中修正的贝塞尔方程的一个解. 这个函数叫做**第二类修正的贝塞尔函数**(有时叫第三类).

(b)证明：当 p 不是整数时，$I_p(x)$和 $K_p(x)$线性无关.

(c)当 p 是整数时，你将如何构造 $K_p(x)$?

伽马函数

31. (a)由(13)出发计算 $\Gamma(1)$和 $\Gamma(2)$的数值.

(b)应用(15)和伽马函数的基本性质计算 $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$和 $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$的值.

32. **伽马函数的倒数**.

(a)证明：当 x 趋向一个负整数或 0 时，$\frac{1}{\Gamma(x)}\to 0$. 由于这个原因，我们定义 $\frac{1}{\Gamma(x)}=0$，$x=0$，-1，$-2,\cdots$.

(b)描绘$\frac{1}{\Gamma(x)}$的图形并证明它对所有 x 连续.　　246

33. 对 x，$y>0$，

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

如下推导这个有用的公式

(a)在(13)中作变量代换 $u^2=t$ 并得到

$$\Gamma(x)=2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-u^2}u^{2x-1}\mathrm{d}u,\quad x>0.$$

(b)用(a)证明：对 x，$y>0$，

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

(c)在(b)中变换到极坐标($u=r\cos\theta$，$v=r\sin\theta$，$\mathrm{d}u\mathrm{d}v=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$)，得到对 x，$y>0$，

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=2\Gamma(x+y)\int_0^{\pi/2}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

[提示：变换了坐标系之后，当关于 r 积分时要记住(a).]

34. 用 33 题的结果去获得(15).

35. 推导公式

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=1.$$

[**提示：用(15)和习题 33(a).**]

在 36～39 题中，用 33 题的结果计算下述积分.

36. $\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$.

37. $\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta$.

38. $\int_0^{\pi/2}\cos^5\theta\sin^6\theta\,\mathrm{d}\theta$.

39. $\int_0^{\pi/2}\cos^8\theta\,\mathrm{d}\theta$.

用 33 题的结果建立下面的沃利斯公式.

40. $\int_0^{\pi/2}\sin^{2k}\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2},\quad k=0,1,2,\cdots.$

41. $\int_0^{\pi/2}\sin^{2k+1}\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!},\quad k=0,1,2,\cdots.$

42. (a)借助图形解释为什么下述等式成立.

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2k}\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi/2}\sin^{2k}\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2k+1}\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi/2}\sin^{2k+1}\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

(b)用(a)和 40 题，41 题证明：对 $k=0$，1，2，…，有

247

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2k}\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\quad 及\quad \int_0^{\pi/2}\cos^{2k+1}\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}.$$

43. 用 42 题推导下面的公式：对 $k=0$，1，2，…，有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^{2k}\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\quad 及\quad \int_0^{\pi}\cos^{2k+1}\theta\,\mathrm{d}\theta=0.$$

44. 证明

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi},\tag{a}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+1\right)=\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}.\tag{b}$$

45. (a)用 33 题的结果证明双纽线 $r^2=2\cos 2\theta$ 的弧长是 $2\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$. [提示：在极坐标中的弧长公式是 $L=\int_a^b\sqrt{r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta.$]

(b)求(a)中弧长的近似值.

46. 对 r，$s>0$ 定义 β 函数为

$$\beta(r,s)=\int_0^1 t^{r-1}(1-t)^{s-1}\,\mathrm{d}t.$$

(a)用变量代换 $t=\sin^2\theta$ 证明

$$\beta(r,s)=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2s-1}\theta\sin\theta^{2r-1}\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

(b)由 33 题导出

$$\beta(r,s)=\frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}.$$

4.8 贝塞尔级数展开

本节我们阐述一些递推关系式、贝塞尔函数的正交性、函数展开为贝塞尔级数. 很多性质在本章及全书用于边值问题的求解.

涉及贝塞尔函数的恒等式

我们从两个基本恒等式开始. 对任意 $p \geqslant 0$,

$$\frac{d}{dx}[x^p J_p(x)] = x^p J_{p-1}(x), \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-p} J_p(x)] = -x^{-p} J_{p+1}(x). \tag{2}$$

248

注意, 对 $p=0$, 第二个恒等式为

$$\frac{d}{dx}[J_0(x)] = -J_1(x).$$

为证明(1), 由 4.7 节中 J_p 的定义(7), 有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x^p J_p(x)] &= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^p}{k!\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2p} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^p (k+p)}{k!\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2p-1} \\ &= x^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p-1} \\ &= x^p J_{p-1}(x).\end{aligned}$$

在上面的倒数第二步, 用了伽马函数的基本性质 $\Gamma(k+p+1)=(p+k)\Gamma(p+k)$. 第二个恒等式类似可证(习题 1(a)).

从(1)和(2)可以得到许多其他有用的恒等式. 我们列出一些最常用的恒等式如下:

$$xJ'_p(x) + pJ_p(x) = xJ_{p-1}(x), \tag{3}$$

$$xJ'_p(x) - pJ_p(x) = -xJ_{p+1}(x), \tag{4}$$

$$J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) = 2J'_p(x), \tag{5}$$

$$J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x}J_p(x). \tag{6}$$

(注意: 第二类贝塞尔函数对应的公式也成立.) 为证明(3), 用乘积法则展开(1)的左边, 得

$$x^p J'_p(x) + px^{p-1}J_p(x) = x^p J_{p-1}(x).$$

用 x^{p-1} 除以上式便得(3). 类似地, 由(2)出发, 用乘积法则展开可证得恒等式(4). (3)与(4)相加并化简即得(5). 由(3)减去(4)并化简即得(6).

249

涉及贝塞尔函数的积分式有类似的恒等式. 例如, 恒等式

$$\int x^{p+1}J_p(x)\,dx = x^{p+1}J_{p+1}(x) + C \tag{7}$$

和

$$\boxed{\int x^{-p+1}J_p(x)\mathrm{d}x = -x^{-p+1}J_{p-1}(x)+C} \tag{8}$$

由在(1)和(2)的两边积分易得(习题 1).

贝塞尔函数的正交性

为理解贝塞尔函数的正交性关系式，首先回忆我们所熟悉的函数 $\sin n\pi x(n=1, 2, 3, \cdots)$. 我们知道这些函数在下述意义下在[0, 1]上是正交的，即 $\int_0^1 \sin n\pi x \sin m\pi x \mathrm{d}x = 0, n \neq m$. 这里的关键是注意函数 $\sin n\pi x$ 是从一个单一函数(即 $\sin x$) 构造出来的，它的正零点为 $n\pi(n = 1,2,3,\cdots)$.

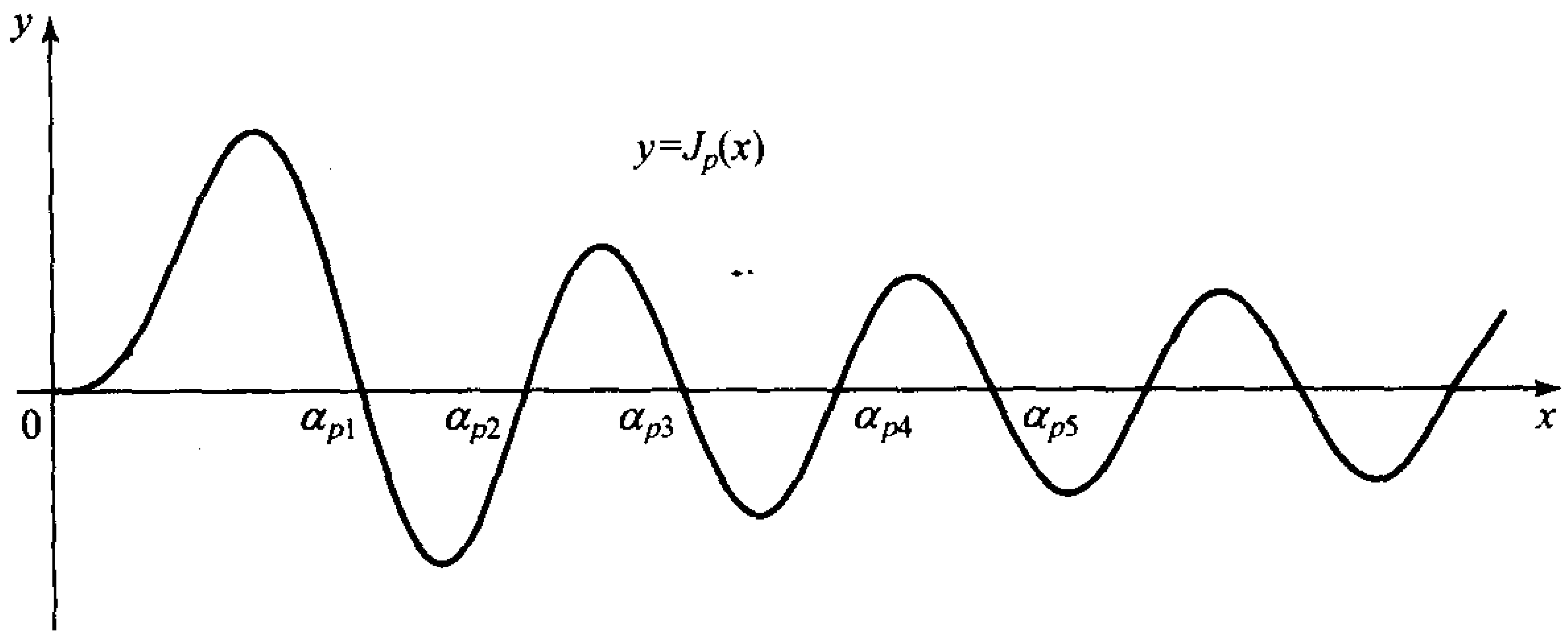


图 1 贝塞尔函数 $J_p(x)$具有无穷多个正零点

利用单个贝塞尔函数及其零点，我们将类似地构造正交贝塞尔函数系. 固定 $p\geqslant 0$，考虑 $J_p(x)(x>0)$的图形，$x>0$. 图 1 画出了贝塞尔函数典型的图形. 由图可见，贝塞尔函数 J_p 在正半轴 $x>0$ 上有无穷多个零点(就像 $\sin x$ 那样). 这个重要的事实在下一节证明(对 $p=0$, ± 1, ± 2, $\cdots$和$\frac{1}{2}$的情况，见 14 题和 35 题). 我们以增大的顺序记这些零点

$$0<\alpha_{p1}<\alpha_{p2}<\cdots<\alpha_{pj}<\cdots,$$

[250] 其中，α_{pj}是 J_p 第 j 个正零点(有时用符号 $\alpha_{p,j}$). 不像正弦函数的情况那样，用 $n\pi$ 就很容易确定零点，没有用来确定贝塞尔函数正零点的公式。由于这些零点的数值在应用中的重要性，在大多数的数学表和计算机系统中可以找到这些值. 为后文的应用，在表 1 中列出了 J_0，J_1 和 J_2 的前五个正零点.

表 1 J_0，J_1 和 J_2 的正零点

j	1	2	3	4	5
α_{0j}	2.404 83	5.520 08	8.653 73	11.791 5	14.930 9
α_{1j}	3.831 71	7.015 59	10.173 5	13.323 7	16.470 6
α_{2j}	5.135 62	8.417 24	11.619 8	14.796	18.980 1

令 a 是一个正数．要在$[0, a]$上从 J_p 生成正交函数，如同处理正弦函数那样，要利用贝塞尔函数的零点 α_{pj}．我们得到

$$J_p\left(\frac{\alpha_{pj}}{a}x\right), \quad j=1,2,3,\cdots. \tag{9}$$

对应 $p=0$ 的前四个函数如图 2 所示．

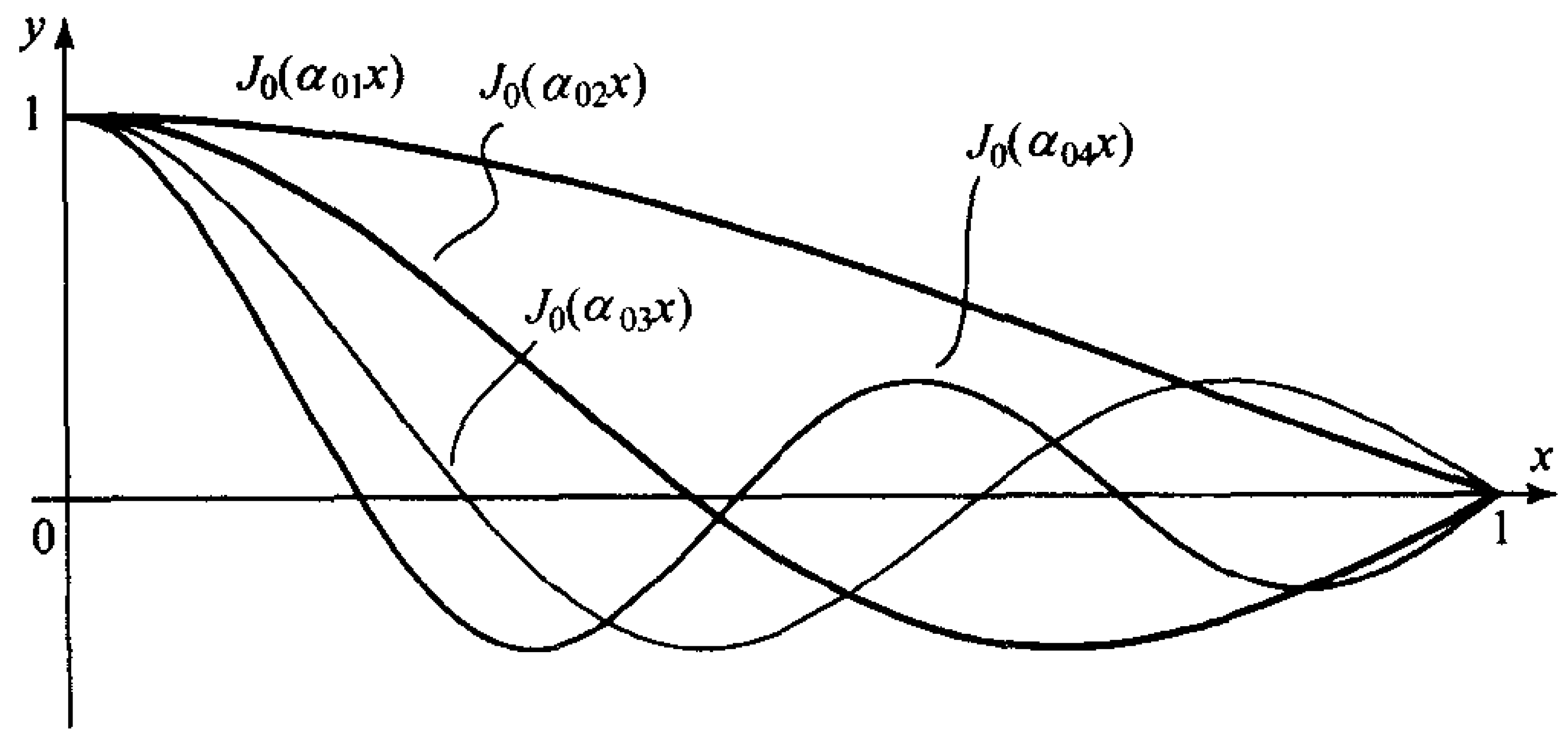


图 2　用 $J_0(x)$生成的正交函数：$J_0(\alpha_{01}x)$，$J_0(\alpha_{02}x)$，…

注意图 2 中有趣的事实：所有这些函数以 1 为界，它们零点的个数在(0，1)中递增．前文中碰到的正交函数系也有这些性质，特别是三角系．

为简化记号，令

$$\lambda_{pj}=\frac{\alpha_{pj}}{a} \quad j=1,2,3,\cdots. \tag{10}$$

于是，λ_{pj} 是 J_p 的第 j 个正零点的值的 $1/a$ 倍．现在我们要叙述几个基本的恒等式．

251

定理 1(贝塞尔函数带权正交性)　固定 $p\geqslant 0$，$a>0$，令 $J_p(\lambda_{pj}x)(j=1, 2, \cdots)$如(9)和(10)所述．则

$$\int_0^a J_p(\lambda_{pj}x)J_p(\lambda_{pk}x)x\,dx=0 \quad 对 \quad j\neq k \tag{11}$$

和

$$\int_0^a J_p^2(\lambda_{pj}x)x\,dx=\frac{a^2}{2}J_{p+1}^2(\alpha_{pj}) \quad 对 \quad j=1,2,\cdots. \tag{12}$$

注意(12)式含有 λ_{pj} 和 α_{pj}．性质(11)被说成是函数 $J_p(\lambda_{pj}x)(j=1, 2, \cdots)$**在区间**$[0, a]$**上带权 x 正交**．“带权 x”表示函数 x 在(11)式的被积式中出现．在区间$[0, 1]$上，即 $a=1$，公式(11)和(12)具有简单的形式

$$\int_0^1 J_p(\alpha_{pj}x)J_p(\alpha_{pk}x)x\,dx=0 \quad 对 \quad j\neq k, \tag{13}$$

$$\int_0^1 J_p^2(\alpha_{pj}x)x\,dx=\frac{1}{2}J_{p+1}^2(\alpha_{pj}) \quad 对 \quad j=1,2,\cdots. \tag{14}$$

(11)式的证明可在定理 3 的证明中发现．(12)的简略证明见习题 36．

贝塞尔级数和贝塞尔-傅里叶系数

就像我们用函数 $\sin\pi x$ 把函数展开为正弦傅里叶级数那样，现在将看到如何用贝塞尔级数展开函数．具体地说，一个在区间$[0, a]$上的已知函数可以表为一个级数

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}A_jJ_p(\lambda_{pj}x),\tag{15}$$

叫做 f 的 p 阶贝塞尔级数. 撇开收敛性的问题，设(15)式成立，进而求级数中的系数. 用 $J_p(\lambda_{pk}x)$乘(15)两边，并在区间[0，a]上逐项积分得

252

$$\int_0^a f(x)J_p(\lambda_{pk}x)x\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^{\infty}A_j\overbrace{\int_0^a J_p(\lambda_{pj}x)J_p(\lambda_{pk}x)x\mathrm{d}x}^{=0\text{除了当}j=k\text{时}}.\tag{16}$$

由正交性质(11)知(16)式的右边各项除 $j=k$ 外都是 0. 去掉零项后用(12)得

$$\boxed{A_j=\frac{\int_0^a f(x)J_p(\lambda_{pj}x)x\mathrm{d}x}{\int_0^a J_p^2(\lambda_{pj}x)x\mathrm{d}x}=\frac{2}{a^2J_{p+1}^2(\alpha_{pj})}\int_0^a f(x)J_p(\lambda_{pj}x)x\mathrm{d}x.}\tag{17}$$

数 A_j 叫做第 j 个贝塞尔傅里叶系数或简称函数 f 的贝塞尔系数.

下述定理给出一个函数的贝塞尔级数展开式成立的条件. 关于分段光滑的定义请见2.2节.

定理 2(p 阶贝塞尔级数) 若 f 在[0，a]上分段光滑，则 f 在(0，a)上有 p 阶的贝塞尔级数展开如下：

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}A_jJ_p(\lambda_{pj}x),$$

其中，λ_{p1}，λ_{p2}，…是由(10)给出的贝塞尔函数 J_p 的经缩放的正零点，A_j 由(17)给出. 在区间(0，a)中，在 f 的连续点处，级数收敛到 $f(x)$，而在间断点 x，它收敛到平均值$\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

注意与傅里叶级数相似的是. 在间断点贝塞尔级数收敛到函数平均值. 在给出一个贝塞尔级数的例子之前，我们先作一个关于符号的注记. 符号 α_{pj} 和 λ_{pj} 分别用来表示 p 阶贝塞尔函数的零点和缩放后的零点，但使用起来不方便. 由于这个原因，当知道阶数及不会有混淆的情况下，我们将省掉下标 p，记 α_{pj} 和 λ_{pj} 分别为 α_j 和 λ_j.

例 1 区间[0，1]上的贝塞尔级数

求函数 $f(x)=1(0<x<1)$的零阶贝塞尔级数展开式.

解 用定理 2 得

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}A_jJ_0(\alpha_jx),$$

253

其中，α_j 是 J_0 的第 j 个正零点，且

$$\begin{aligned}A_j&=\frac{2}{J_1^2(\alpha_j)}\int_0^1 f(x)J_0(\alpha_jx)x\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{J_1^2(\alpha_j)}\int_0^1 J_0(\alpha_jx)x\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\alpha_j^2J_1^2(\alpha_j)}\int_0^{\alpha_j}J_0(t)t\mathrm{d}t\quad(t=\alpha_jx)\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\alpha_j^2 J_1^2(\alpha_j)} J_1(t)t\Big|_0^{\alpha_j} \quad ((7)\text{ 中取 } p=0)$$
$$= \frac{2}{\alpha_j J_1(\alpha_j)}.$$

定理 2 断言，贝塞尔级数在区间的所有点上收敛到 $f(x)$. 因此

$$1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha_j J_1(\alpha_j)} J_0(\alpha_j x) \quad 0 < x < 1.$$

表 2 例 1 中的数值数据

j	1	2	3	4	5
α_j	2.404 8	5.520 1	8.653 7	11.791 5	14.930 9
$J_1(\alpha_j)$	0.519 1	−0.340 3	0.271 4	−0.232 5	0.206 5
$\frac{2}{\alpha_j J_1(\alpha_j)}$	1.602 0	−1.064 8	0.851 4	−0.729 5	0.648 7

用表 1 和表 2 中提供的数值数据，可以明显地写出级数的前几项：

$$1 = 1.602\,0 J_0(2.404\,8x) - 1.064\,8 J_0(5.520\,1x) + 0.851\,4 J_0(8.653\,7x)$$
$$- 0.729\,5 J_0(11.791\,5x) + 0.648\,7 J_0(14.930\,9x) + \cdots.$$

有必要指出，当 $j\to\infty$ 时贝塞尔系数趋于 0. 这是一般都成立的性质.

注意到定理 2 没有给出贝塞尔级数在区间端点的性质. 在本例中，如果在级数中取 $x=1$，则所有的项变为零，这是因为我们在 J_0 的零点计算它的值. 这一点也可以由图 3 中部分和的图形清楚地看出来. 所以，本例的贝塞尔级数在两个端点之一并不收敛到函数本身. ■

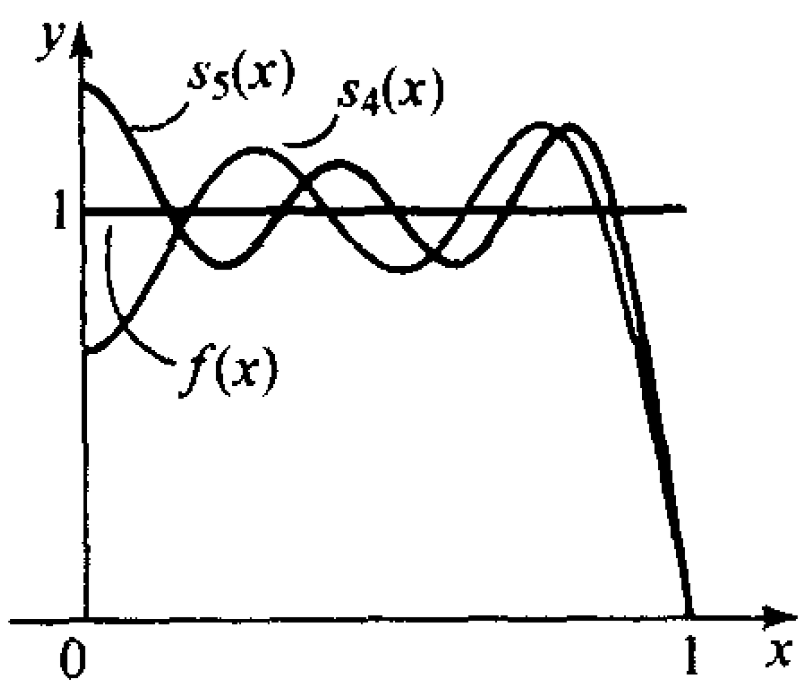


图 3 贝塞尔级数的部分和

贝塞尔方程的参数形式

在本节最后，我们阐述两个与贝塞尔方程紧密相关的重要的微分方程. [254]

定理 3(贝塞尔方程的参数形式) 令 $p\geqslant 0$，$a>0$，α_{pj} 是 $J_p(x)$ 的第 j 个正零点. 对 $j=1$，2，…，函数 $J_p\left(\frac{\alpha_{pj}}{a}x\right)$ 是 p 阶贝塞尔方程的参数形式

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (\lambda^2 x^2 - p^2)y(x) = 0, \tag{18}$$

带有边界条件

$$y(0)\text{ 有限}, \quad y(a) = 0 \tag{19}$$

的解，当 $\lambda=\lambda_{pj}=\frac{\alpha_{pj}}{a}$ 时，除去常数因子，这是方程(18)仅有的具有这些性质的解. 此外，这些解满足(11)和(12)，从而它们在区间 $[0, a]$ 上关于权函数 x 正交.

$y(0)$ 有限的条件是关于 y 的第二个有效边界条件.

证明 在(18)中做变量代换把它化为贝塞尔方程如下. 令 $u=\lambda x$，$du=\lambda dx$，并令 $y(x)=$

$y\left(\frac{u}{\lambda}\right)=Y(u)$. 由链式法则，$y'(x)=Y'(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\lambda Y'(u)$，类似地，$y''(x)=\lambda^2 Y''(u)$. 代入(18)，得到关于 $Y(u)$的 p 阶贝塞尔方程

$$u^2Y''(u)+uY'(u)+(u^2-p^2)Y(u)=0.$$

因此，通解是

$$Y(u)=c_1J_p(u)+c_2Y_p(u)=c_1J_p(\lambda x)+c_2Y_p(\lambda x)=y(x).$$

因为 $y(0)$是有限的，而 Y_p 在 0 爆破，故必须令 $c_2=0$. 于是 $y(x)=c_1J_p(\lambda x)$，边界条件 $y(a)=0$（对 $c_1\neq 0$）成立的充分必要条件是 $\lambda a=\alpha_{pj}$. 因此，

$$\lambda=\lambda_{pj}=\frac{\alpha_{pj}}{a}$$

是仅有的正 λ 值，使得问题具有非平凡解. 所以，(18)和(19)的解如定理所言.

现在证明(11). 为简化记号，把 λ_{pj} 记为 λ_j，把 $J_{pj}(\lambda_{pj}x)$记为 $\phi_j(x)$. 要证明：对 $j\neq k$，

$$\int_0^a\phi_j(x)\phi_k(x)x\mathrm{d}x=0.$$

把(18)写为$(xy')'=-\frac{(\lambda^2x^2-p^2)}{x}y$. 因为各 ϕ 与其对应的各 λ 满足这个方程，故有

$$(x\phi_j')'=-\frac{(\lambda_j^2x^2-p^2)}{x}\phi_j$$

和

$$(x\phi_k')'=-\frac{(\lambda_k^2x^2-p^2)}{x}\phi_k.$$

用 ϕ_k 乘第一个方程减去用 ϕ_j 乘第二个方程，将结果化简得

255

$$(\lambda_k^2-\lambda_j^2)\phi_j\phi_kx=\phi_k(x\phi_j')'-\phi_j(x\phi_k')'.$$

注意到

$$\phi_k(x\phi_j')'-\phi_j(x\phi_k')'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\phi_kx\phi_j'-\phi_jx\phi_k'].$$

因此，由 $\phi_j(a)=\phi_k(a)=0$ 知

$$(\lambda_k^2-\lambda_j^2)\int_0^a\phi_j(x)\phi_k(x)x\mathrm{d}x=\phi_kx\phi_j'-\phi_jx\phi_k'\Big|_0^a=0,$$

因为 $\lambda_k^2-\lambda_j^2\neq 0$，便得(11). (12)的证明见 36 题. ■

我们最后一个例题是给出另一类重要函数族的微分方程.

例 2 球面贝塞尔函数

方程

$$x^2y''+2xy'+(kx^2-n(n+1))y=0,\quad 0<x<a,\quad y(a)=0 \tag{20}$$

出现在第 5 章许多重要的应用中. 在这个方程中，k 是非负实数，$n=0$，1，2，…. 我们在区间 $0\leqslant x\leqslant a$ 上寻找有界解. 可以验证，代换

$$y=x^{-1/2}w, \tag{21}$$

把(20)变为下述贝塞尔方程的参数形式：

$$x^2w''+xw'+\left(kx^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)w=0,\quad w(a)=0$$

(37 题). 由定理 3($p=n+1/2$)知仅当

$$k=\lambda^2$$

和

$$\lambda=\lambda_{n,j}=\frac{\alpha_{n+1/2,j}}{a}$$

时才有有界解，其中，$\alpha_{n+1/2,j}$是$J_{n+\frac{1}{2}}$的第j个正零点. 对应的解是下列函数乘常数因子：

$$w_{n,j}(x)=J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{n,j}x),\quad n=0,1,2,\cdots,\quad j=1,2,\cdots.$$

由此，应用(21)得到(20)的解y_{nj}为下列函数的常数倍：

$$x^{-1/2}J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_{n,j}x),\quad n=0,1,2,\cdots,\quad j=1,2,\cdots. \tag{22}$$

通常将解表示为**第一类球面贝塞尔函数**(见图 4)：

$$j_n(x)=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2}J_{n+\frac{1}{2}}(x),\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{23}$$

选择一个具体的因子乘(22)中的函数，我们就得到形如球面贝塞尔函数(20)的解

$$y_{n,j}(x)=j_n(\lambda_{n,j}x),\quad n=0,1,2,\cdots,\quad j=1,2,\cdots. \tag{24}$$

■

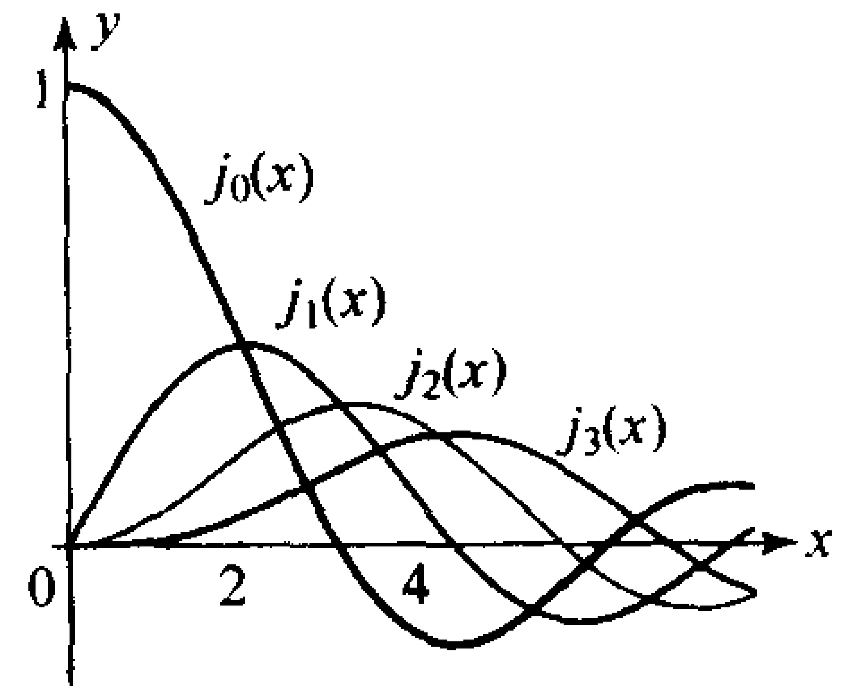


图 4　球面贝塞尔函数 j_0，j_1，j_2，j_3

256

在本节的习题中，要求读者学习球面贝塞尔函数，包括它们的正交性. 在大多数情况下，有关球面贝塞尔函数的结果是贝塞尔函数的性质和(23)的简单推论.

习题 4.8

1. (a)补上(2)、(7)和(8)各式证明的细节. [提示：证明(2)式须证明导数是$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2k}{k!\Gamma(k+p+1)2^{2k+p}}x^{2k-1}$. 然后，将$k$改为$k+1$，从 0 开始求和.]

   (b)补上(4)、(5)和(6)各式证明的细节.

2. (a)在 4.7 节的图 1 中J_0和J_1的图形上，注意到J_0的最大最小值都在J_1的零点上达到，请证明这个事实.

   (b)证明J_p的最大最小值在下列点上达到：

$$x=\frac{pJ_p(x)}{J_{p+1}(x)}\quad 或\quad x=\frac{pJ_p(x)}{J_{p-1}(x)}\quad 或\quad J_{p-1}(x)=J_{p+1}(x).$$

   (c)当$p=2$时，画出(b)的图形.

   (d)证明：在J_p，J_{p-1}和J_{p+1}的零点，它们的绝对值相等但符号相反.

计算 3～10 题中的积分.

3. $\int xJ_0(x)\mathrm{d}x$.

4. $\int x^4J_3(x)\mathrm{d}x$.

5. $\int J_1(x)\mathrm{d}x$.

6. $\int x^{-2}J_3(x)\mathrm{d}x$.

7. $\int x^3 J_2(x)\mathrm{d}x$.

8. $\int x^3 J_0(x)\mathrm{d}x$.

9. $\int J_3(x)\mathrm{d}x$.

10. $\int_0^\infty J_1(x)[J_0(x)]^n\mathrm{d}x$. [提示:令 $u = J_0(x)$.]

11. 用(2)和 4.7 节例 1 推导公式

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\frac{\sin x}{x} - \cos x\right].$$

12. 用(2)和习题 11 推导

$$J_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\left(\frac{3}{x_2} - 1\right)\sin x - \frac{3}{x}\cos x\right].$$

13. 用 J_0 和 J_1 表示 J_5.

14. 用 4.7 节例 1 中给出的 $J_{1/2}$ 的显式公式，证明 $J_{1/2}$ 在区间 $0<x<\infty$ 上由无穷多个正零点. 这些正零点是什么?

15. (a)在一张图中画出 $\frac{\sin x}{x}$ 和 $\cos x$ 的图形，说明如下事实：它们在无穷多个点上相交. 证明论断：函数 $J_{3/2}(x)$ 在$(0, \infty)$上有无穷多个零点.

(b)求方程 $\frac{\sin x}{x} = \cos x$ 的前三个根的近似值.

16. (a)令 $0<\alpha_{p1}<\alpha_{p2}<\cdots<\alpha_{pj}<\cdots$ 是 J_p 的正零点. 试问：函数 $J_p\left(\frac{\alpha_{pj}}{a}x\right)$ 在区间 $0<x<a$ 上有多少根? 验证你的解答.

257

(b)画出你的解答在 $p=2$, $a=1$ 和 $j=5$ 时的图形.

17. 令 $0<c<1$ 及

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 若\ 0 < x < c, \\ 0 & 若\ c < x < 1. \end{cases}$$

(a)推导 f 的零阶贝塞尔级数

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2cJ_1(c\alpha_j)}{\alpha_j J_1(\alpha_j)^2} J_0(\alpha_j x), \quad 0 < x < 1.$$

(b)讨论级数在区间 $0<x<1$ 上的收敛性.

(c)取 $c=\frac{1}{2}$. 从数值上考察在 $x=0$ 和 $x=1$ 处级数的收敛性. 这级数似乎在其中一个点或两个点上收敛吗? 收敛到何值?(注意：定理 2 不包含这两个点上的收敛性.)

18. 在 17 题中取 $a=\frac{1}{3}$，显式写出此时级数的前五项. 画出几个部分和的图形并描述它们在点 $x=\frac{1}{3}$ 及其附近的性质. 注意不管部分和中的项数如何增加，部分和怎样偏离它们的极限值. 这说明了在贝塞尔展开式中在一个间断点上的吉布斯现象.

19. (a)导出贝塞尔级数展开式

$$x^4 = 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j J_5(\alpha_j)} J_4(\alpha_j x), \quad 0 < x < 1,$$

其中，各 α_j 是 J_4 的正零点.

(b)画出几个部分和的图形并讨论它们在区间 $0<x<1$ 上的性质.

20. **m 阶贝塞尔级数**. 固定 $m\geqslant 0$ 并令 $0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_j<\cdots$ 为 J_m 的正零点的序列. 导出贝塞尔级数展开式

$$x^m = 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j J_{m+1}(\alpha_j)} J_m(\alpha_j x), \quad 0 < x < 1.$$

21. 参考习题 20.

(a)取 $m=\frac{1}{2}$，确定各 α_j 此时的精确值. [提示：4.7 节例 1.]

(b)显式计算 $f(x)=\sqrt{x}$，$0<x<1$ 的贝塞尔级数展开式中的系数.

(c)回顾 $J_{\frac{1}{2}}$ 用 $\sin x$ 表示的公式，并证明：(b)中的展开式实际上就是 x 的正弦傅里叶级数展开式.

(d)画出贝塞尔级数的几个部分和，并讨论在区间 $0<x<1$ 上的收敛性.

22. 考察当 $m=\frac{3}{2}$ 时，习题 20 中贝塞尔级数部分和的性质. 求它们在区间 $0<x<1$ 上收敛的极限.

在习题 23～30 中，已知贝塞尔函数的阶 p，求给定函数的近似值. 描绘级数的几个部分和的图形，并讨论它们在给定区间上的收敛性.

258

23. $f(x)=x^2$；$0<x<1$；$p=2$.

24. $f(x)=x^3$；$0<x<1$；$p=3$.

25. $f(x)=\begin{cases} 0 & 若 \quad 0<x<\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{x} & 若 \quad \frac{1}{2}<x<1; \end{cases} \quad p=1.$

26. $f(x)=x^2$，$0<x<1$，$p=0$.

27. $f(x)=\begin{cases} 0 & 若 \quad 0<x<\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{x^2} & 若 \quad \frac{1}{2}<x<1; \end{cases} \quad p=2.$

28. $f(x)=\begin{cases} 0 & 若 \quad 0<x<\frac{1}{30}, \\ \frac{1}{x^3} & 若 \quad \frac{1}{30}<x<1; \end{cases} \quad p=3.$

29. $f(x)=1$；$0<x<2$；$p=1$.

30. $f(x)=J_0(x)$；$0<x<\alpha_{01}$；$p=0$.

在 31～34 题中，求所有的 $\lambda>0$ 使已知贝塞尔方程的参数形式有解，它在 $x=0$ 处取有限值，并且满足已知边界条件.

31. $x^2y''(x)+xy'(x)+(\lambda^2x^2-1)y(x)=0, \quad y(1)=0.$

32. $x^2y''(x)+xy'(x)+\lambda^2x^2y(x)=0, \quad y(2)=0.$

33. $x^2y''(x)+xy'(x)+\left(\lambda^2x^2-\frac{1}{4}\right)y(x)=0, \quad y(\pi)=0.$

34. $x^2y''(x)+xy'(x)+(\lambda^2x^2-1)y(x)=0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

35. **专题问题：J_n 的零点.** 我们将证明 $J_n(x)$，$(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$的正零点形成一个增加的序列

$$0<\alpha_{n1}<\alpha_{n2}<\cdots<\alpha_{nk}<\cdots\to\infty.$$

(a)～(g)部分处理 $n=0$ 的情形.

(a)描绘 $J_0(x)$的图形，并注意到它有无穷多个正零点，按升序记为 $0<\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\cdots$.

(b)证明：变换 $y(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}u(x)$把零阶贝塞尔方程变为

$$u''+\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)u=0.$$

证明论断：$u(x)=\sqrt{x}J_0(x)$是这个微分方程的解.

(c)令 $v(x)=\sin x$. 验证

$$-(u''+u)v(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv'-u'v).$$

(d)用(b)证明：$-(u''+u)=\frac{u}{4x^2}$.

(e)证明：$\int\frac{u(x)v(x)}{4x^2}\mathrm{d}x=uv'-u'v+C$,因此

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{u(x)\sin x}{4x^2}\mathrm{d}x=-[u(2k\pi)+u(2k\pi+\pi)].$$

(f)由(e)得出结论：$u(x)$在$[2k\pi, (2k+1)\pi]$中至少有一个零点. [提示：反证，设对区间上所有的 x 有 $u(x)>0$，考察(e)中最后一个等式两边项的符号得到矛盾.]

(g)证明论断：$J_0(x)$有无穷多个正零点.

(h)设 f 和 g 是可微函数且$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=g(x)$. 证明：在 f 的任何两个零点之间至少有 g 的一个零点.

259

(i)用 $p=0$ 的(2)式证明：J_1 有无穷多个零点，它们趋于∞.

(j)用(2)及归纳法证明：$J_n(n>0)$有无穷多个零点，它们趋于∞. 进而对所有整数 n 证明这个结论.

36. **专题问题：(12)的证明.** 令 $0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_k<\cdots$ 为 J_p 在$(0, \infty)$上的零点序列，$\lambda_k=\frac{\alpha_k}{a}$.

(a)重写(18)为

$$(xy')'+\left(\lambda^2x-\frac{p^2}{x}\right)y=0,\quad y(a)=0.$$

方程两边同乘 xy'后写为

$$[(xy')^2]'+(\lambda^2x^2-p^2)(y^2)'=0.$$

(b)取 $y=J_p(\lambda_k x)$和 $\lambda=\lambda_k$，在 $0<x<a$ 上积分(a)中的方程得

$$[ay'(a)]^2+(\lambda^2a^2-p^2)y(a)^2-2\lambda^2\int_0^a y(x)^2x\mathrm{d}x=0.$$

[提示：对(a)中第二项分部积分. 验证等式 $py(0)=0$.]

(c)对 $y=J_p(\lambda_k x)$和 $\lambda=\lambda_k$，验证 $y(a)=0$，得到

$$[y'(a)]^2=\frac{2\lambda^2}{a^2}\int_0^a x[y(x)]^2\mathrm{d}x.$$

(d)对 $y=J_p(\lambda_k x)$，用(4)证明：$y'(a)=-\lambda_k J_{p+1}(\alpha_k)$. 由(c)推导(12).

球面贝塞尔函数

37. 用(21)把(20)变换为形如(18)的方程之一.

38. 用(23)和贝塞尔函数的显式公式证明

$$j_0(x)=\frac{\sin x}{x},$$

$$j_1(x)=\frac{\sin x - x\cos x}{x^2},$$

$$j_2(x)=\frac{(3-x^2)\sin x - 3x\cos x}{x^3}.$$

[提示：见习题 11 和 12.]

推导习题 39～42 中所列的球面贝塞尔函数的递推关系式. [提示：利用(23)及相应的贝塞尔函数公式.]

39. $\frac{d}{dx}[x^{n+1}j_n(x)]=x^{n+1}j_{n-1}(x)$.

40. $\frac{d}{dx}[x^{-n}j_n(x)]=-x^{-n}j_{n+1}(x)$.

41. $\int x^{n+2}j_n(x)dx = x^{n+2}j_{n+1}(x)+C$.

42. $\int x^{-n+1}j_n(x)dx =-x^{-n+1}j_{n-1}(x)+C$.

260

43. **递推关系.** 用习题 39 和 40 的结果证明：

$$j_{n-1}(x)+j_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{x}j_n(x)$$

和

$$nj_{n-1}(x)-(n+1)j_{n+1}(x)=(2n+1)j_n'(x).$$

44. 用 43 和 38 题的结果证明：

$$j_3(x)=\frac{(15-6x^2)\sin x-(15x-x^3)\cos x}{x^4}.$$

45. **球面贝塞尔函数的正交性.** 用(11)和(12)证明

$$\int_0^a j_n(\lambda_{n,j}x)j_n(\lambda_{n,j'}x)x^2\,dx=0,\quad 对\ j\neq j'$$

和

$$\int_0^a j_n^2(\lambda_{n,j}x)x^2\,dx=\frac{a^3}{2}j_{n+1}^2(\alpha_{n+\frac{1}{2},j}),$$

其中，$\alpha_{n+\frac{1}{2},j}$是 j_n 的第 j 个正零点(等价地，$J_{n+\frac{1}{2}}$的). 因此，球面贝塞尔函数在区间$[0,a]$上带权函数 x^2 正交.

4.9 贝塞尔函数的积分公式和渐近式

因为贝塞尔函数是很多重要应用的核心，所以它被广泛地用在数学，工程和物理学中. 因此，熟悉它的基本性质是十分重要的. 为了彻底搞清楚贝塞尔函数的理论，我们将用更熟悉的函数，例如余弦和正弦函数，所组成的公式和积分来表示贝塞尔函数. 我们先推导贝塞尔函数的一个重要的积分表示，然后用它证明它与傅里叶级数的一个令人吃惊的连接关系.

定理 1(积分表示) 令 $n=0$，±1，±2，…，则对所有的 x 有

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(n\theta-x\sin\theta)\,d\theta. \tag{1}$$

证明 我们在 $n\geqslant0$ 的情况下证明，在习题中读者可以证明这种情况蕴涵 $n<0$ 时的公式. 令 x 和 θ 是实数，并记 $\zeta=e^{i\theta}$. 对所有的 θ，有 $|\zeta|=|e^{i\theta}|=1$. 故 ζ 位于单位圆周上. 函数 $e^{-\frac{x}{2\zeta}}$在 0 点附近有一个关于$-\frac{x}{2\zeta}$的级数展开，这可以在级数 $e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$ 的展开式中用$-\frac{x}{2\zeta}$代替

z 而得到. 因此,

261

$$e^{\frac{x}{2}(\zeta-\frac{1}{\zeta})}=e^{\frac{x}{2}\zeta}e^{-\frac{x}{2\zeta}}=e^{\frac{x}{2}\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{x}{2\zeta}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!2^k}x^k\frac{e^{\frac{x}{2}\zeta}}{\zeta^k}.$$

对固定的 x,这个级数关于所有的 θ(记住 $\zeta=e^{i\theta}$)绝对收敛. 于是我们可以在两边同乘 ζ^{-n},然后逐项积分,得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\frac{x}{2}(\zeta-\frac{1}{\zeta})}\zeta^{-n}d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!2^k}x^k\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{\frac{x}{2}\zeta}}{\zeta^{k+n}}d\theta.\tag{2}$$

我们断言:对 $n\geqslant0$,上式左边等于$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta-x\sin\theta)d\theta$,而右边等于 $J_n(x)$. 显然,一旦此断言得证就证明了定理. 我们需要恒等式

$$\zeta-\frac{1}{\zeta}=e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin\theta\quad 及\quad \zeta^{-n}=e^{-in\theta}.$$

第一个断言的证明 对任意整数 n,

$$e^{\frac{x}{2}(\zeta-\frac{1}{\zeta})}\zeta^{-n}=e^{i(x\sin\theta-n\theta)}=\cos(x\sin\theta-n\theta)+i\sin(x\sin\theta-n\theta).$$

右边的项是 θ 的 2π-周期函数;另外,右边的第一项是偶函数,第二项是奇函数. 用 2.1 节的定理 1 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\frac{x}{2}(\zeta-\frac{1}{\zeta})}\zeta^{-n}d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)d\theta+i\overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x\sin\theta-n\theta)d\theta}^{=0}\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)d\theta.\end{aligned}$$

第二个断言的证明 取 $n\geqslant0$. 只需证明

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{\frac{x}{2}\zeta}}{\zeta^{k+n}}d\theta=\left(\frac{x}{2}\right)^{k+n}\frac{1}{(k+n)!}.\tag{3}$$

然后把这个积分值代入(2)式的右边,就得到 $J_n(x)$的级数展开(见 4.7 节(7)式后面的公式),这就完成了证明. 为证明(3),我们用 e^z 的泰勒级数展开,像以前所做,逐项积分(记住 $\zeta=e^{i\theta}$):

$$\begin{aligned}\frac{e^{\frac{x}{2}\zeta}}{\zeta^{k+n}}&=\zeta^{-(k+n)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{x}{2}\zeta\right)^j=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{x}{2}\right)^j\zeta^{j-k-n}\\&=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{x}{2}\right)^je^{i(j-k-n)\theta};\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{\frac{x}{2}\zeta}}{\zeta^{k+n}}d\theta=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{x}{2}\right)^j\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(j-k-n)\theta}d\theta.$$

但是$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(j-k-n)\theta}d\theta=0$,若 $j-k-n\neq0$; 1,若 $j=k+n$(见 2.6 节). 所以级数中只有一

262

项非零(当 $j=k+n$ 时),(3) 得证. ■

例 1 J_0 **被 1 界定**

证明:对所有的 x, $|J_0(x)|\leqslant1$(因为 $J_0(0)=1$,故这个不等式是最可能的不等式).

解　用 $n=0$ 的(1)式，得

$$|J_0(x)|=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \overbrace{|\cos(x\sin\theta)|}^{\leqslant 1}\,\mathrm{d}\theta\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta=1.$$ ■

现在我们导出一个令人惊奇的与傅里叶级数的连接关系. 考虑函数 $f(\theta)=e^{\frac{x}{2}(\zeta-\frac{1}{\zeta})}=e^{ix\sin\theta}$，它出现在(2)中的积分中(记住 $\zeta=e^{i\theta}$). 用余弦和正弦函数表示复指数，如前面在定理 1 的证明中所做的，得到

$$f(\theta)=\cos(x\sin\theta)+i\sin(x\sin\theta).$$

对固定的 x，$f(\theta)$的实部和虚部是以 2π 为周期且光滑的. 因此，f 有傅里叶级数表示，它具有下列复傅里叶系数

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

这个积分就是出现在(1)中的那个积分(见定理 1 的证明中第一个论断). 则由定理 1，

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta=c_n.$$

代入傅里叶级数表示 $f(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\theta}$(2.6 节定理 1)，我们得到下面有趣的结果，它提供了一个生成贝塞尔函数的傅里叶级数.

定理 2(生成贝塞尔函数的傅里叶级数)　*对所有的 x 和所有的 θ，我们有*

$$e^{ix\sin\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)e^{in\theta}. \tag{4}$$

公式(4)有很多有趣的推论，它们可以简单地由计算级数在一些 θ 的特殊值而得到(见习题). 我们用一个例子说明.　263

例 2　**与 $\cos x$ 和 $\sin x$ 相关的贝塞尔函数**

推导下面的恒等式：对所有的 x，

$$\cos x=J_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(x);$$

$$\sin x=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(x).$$

解　在(4)中令 $\theta=\frac{\pi}{2}$. 则对所有的 x，

$$e^{ix\sin\frac{\pi}{2}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)e^{in\frac{\pi}{2}};$$

$$\cos x+i\sin x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right).$$

取实部，用下列事实：当 n 是奇数时，$\cos\frac{n\pi}{2}=0$，当 $n=2m$ 时，它等于$(-1)^m$，还有 $J_{-2n}(x)=(-1)^{2n}J_{2n}(x)=J_{2n}(x)$，我们得到

$$\cos x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) J_n(x)$$

$$= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(x) + \sum_{n=-1}^{-\infty}(-1)^n J_{2n}(x)$$

$$= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n (J_{2n}(x) + J_{-2n}(x)) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(x).$$

这就证明了关于余弦的恒等式．关于正弦的恒等式类似可得，留作习题．级数图示在图 1 中．■

在区间[-2π，2π]上两个图形几乎不可区分．

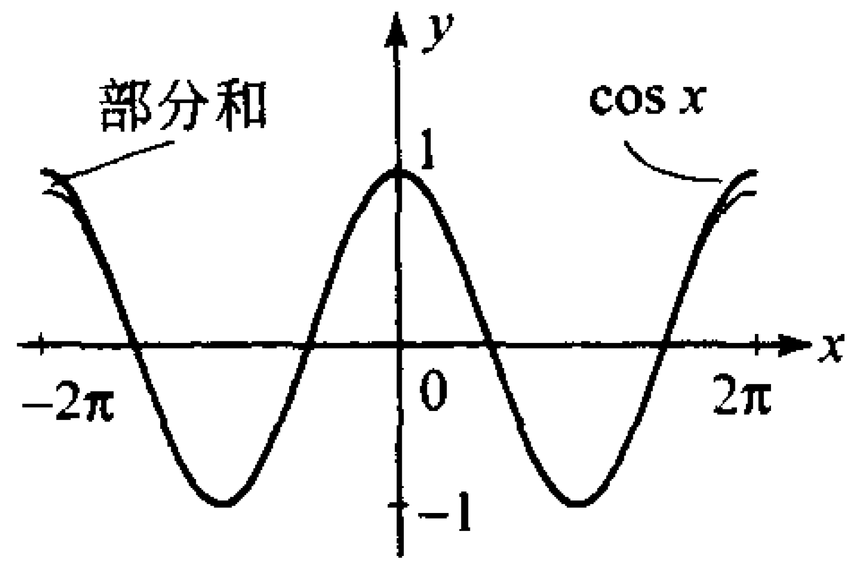


图 1　用部分和 $J_0(x)+2(-J_2(x)+J_4(x)-J_6(x))$ 近似 $\cos x$

贝塞尔函数的渐近式

观看贝塞尔函数的图形，例如 $J_0(x)$，我们发现两个特征：当 x 趋向∞时，它的图形像余弦和正弦函数那样振荡，而振幅像 x 的负幂函数那样衰减．图 2 画出了 $J_0(x)$和$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的图形．这两个图形当 x 很大时几乎是一样的．实际上，更细致的分析发现，它们的差以函数 $1/x^{3/2}$ 的速率趋于 0．我们记为 $J_0(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，或更确切地，

$$J_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),$$

264 因此，我们就说 $J_0(x)$**渐近**于$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$加上大$\mathcal{O}(1/x^{3/2})$．“大$\mathcal{O}(1/x^{3/2})$”的意思是：存在一个常数 $C>0$ 使得对所有充分大的 x，都有 $\left|J_0(x)-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant C/x^{3/2}$．因此，近似式的误差像 $1/x^{3/2}$ 一样趋于零．这个渐近公式有很多重要的推论．例如，由它直接得到 $J_0(x)$有无穷多个零点，而且这些零点与 $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的零点很近似(图 2)．

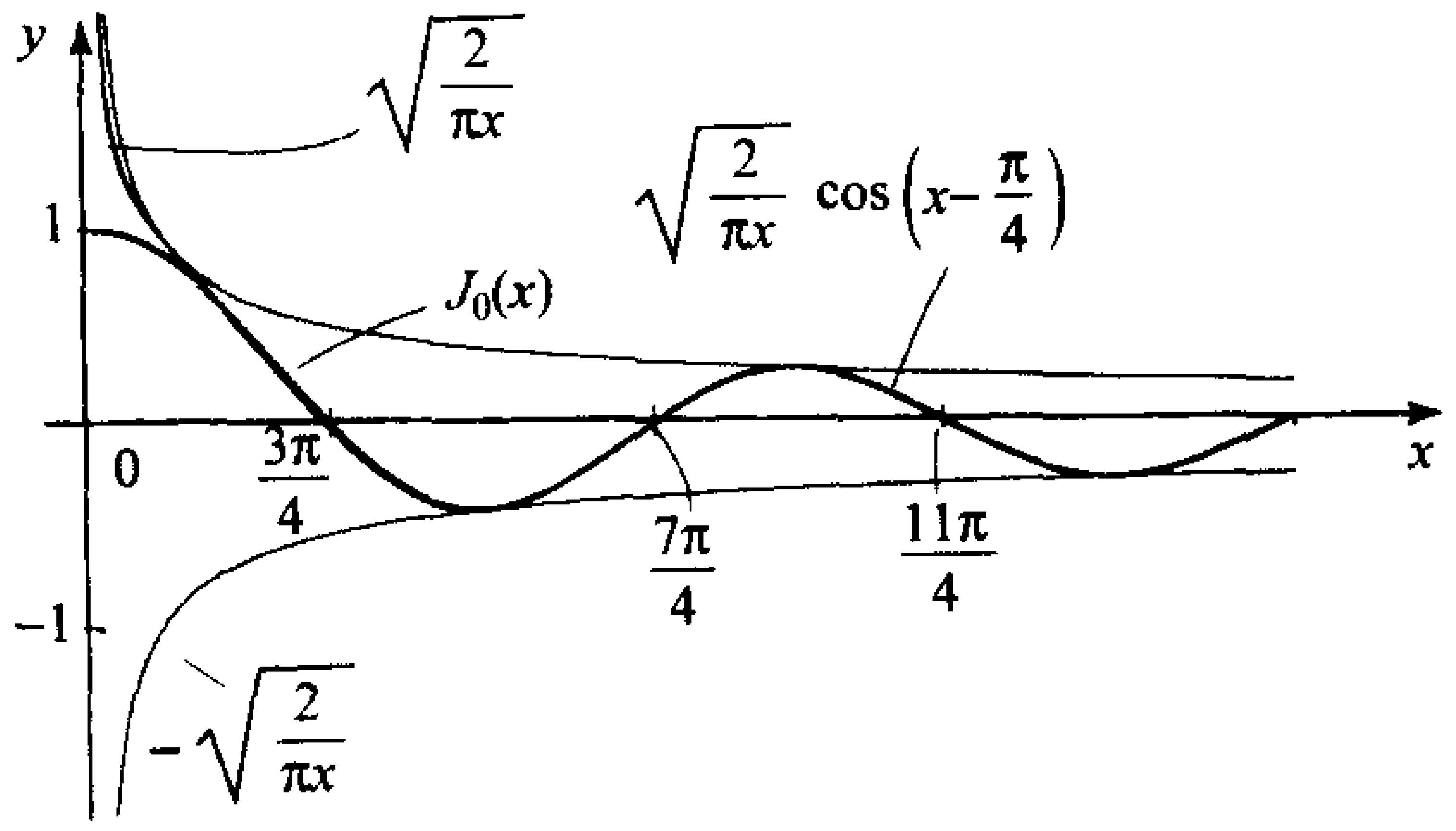


图 2　渐近公式表示 $J_0(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，误差的阶为 $1/x^{3/2}$

从图 2 可以看出 $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的零点逼近 $J_0(x)$ 的零点的程度，前者的零点是 $\frac{3\pi}{4}\approx 2.356\ 19$，$\frac{7\pi}{4}\approx 5.497\ 79$，$\frac{11\pi}{4}\approx 8.639\ 38$，…. 与前一节 $J_0(x)$ 的零点表格相比较.

一般地，我们有下面的渐近公式.

定理 3(渐近公式) 令 $n\geqslant 0$ 是整数，则对所有充分大的 x，有

$$J_n(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \tag{5}$$

其中，大 $\mathcal{O}$ 记号表示逼近的阶是 $\frac{1}{x^{3/2}}$.

渐近公式可以用定常相的方法导出，其结果如下.

引理 1(定常相方法) 设 $f(t)$ 是实值函数，它有在区间 $[a,b]$ 上一点 t_0 展开的泰勒级数，使得 $f'(t_0)=0$，当 $t\neq t_0$ 时 $f'(t)\neq 0$，$f''(t_0)\neq 0$. 令 $g(t)$ 是 $[a,b]$ 上任意光滑复值函数. 则使得对充分大的 x，有

$$\int_a^b e^{\mathrm{i}xf(t)}g(t)\,\mathrm{d}t\sim\sqrt{\frac{2\pi}{x}}g(t_0)\,\frac{e^{\mathrm{i}\left(xf(t_0)\pm\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{|f''(t_0)|}}, \tag{6}$$

其中，当 $f''(t_0)>0$ 时用加号，而当 $f''(t_0)<0$ 时用减号.

函数 $f(t)$ 叫**相位函数**而点 t_0 叫**平稳点**. 引理指出，对积分的大部分贡献来自函数在平稳点附近的部分. 若知其中原因，请看图 3 中的图形，其中我们画出了函数 $e^t\cos(40(t-1/2)^2)$ 的图形，它是函数 $e^te^{40\mathrm{i}(t-1/2)^2}$ 的实部.

265

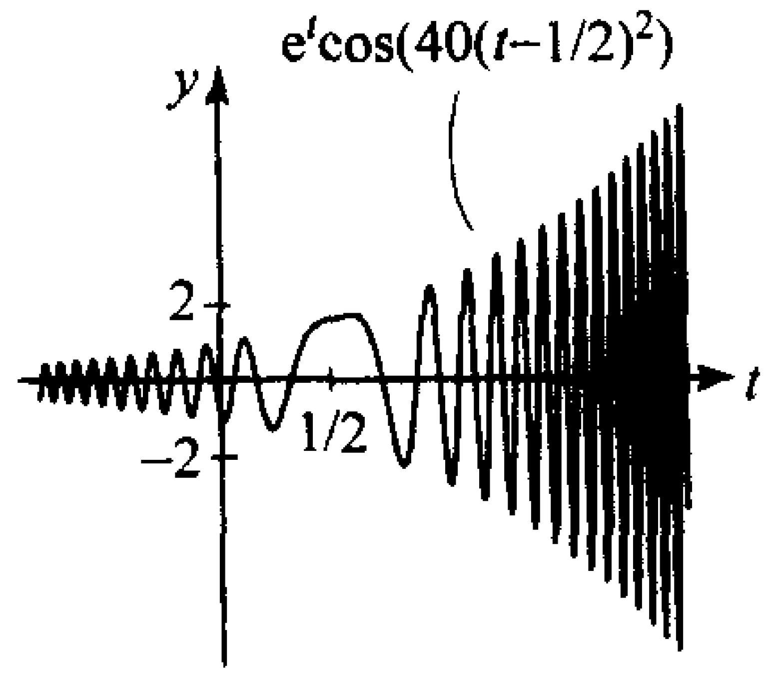


图 3 面积集中在平稳点 $t=1/2$ 的附近

这种情形的相位函数是 $(t-1/2)^2$. 它的导数值在其平稳点 $t=1/2$ 是零. 在含有 $t_0=1/2$ 的任意区间 $[a,b]$ 上，由图形和 t 轴所界定的面积等于积分 $\int_a^b e^t\cos(40(t-1/2)^2)\,\mathrm{d}t$. 由图 3 清楚可见，面积集中在平稳点 $t=1/2$ 附近. 远离平稳点，图形愈加振动面积愈加变小. 这基本上就是引理所言，只是针对复指数函数而不是余弦函数. 然而因为相位函数 $f(t)$ 是实值的，$e^{\mathrm{i}xf(t)}$ 是余弦和正弦之和，于是它的积分就是我们刚刚叙述的那样的两个积分之和.

我们将给出引理的简略证明. 在开始证明之前，先看这个引理如何用于定理 3 的证明.

定理 3 的证明 为了搞清楚(5)式如何从引理 1 得到，回忆在证明定理 1 的第一个断言时导出的积分表示：

$$\begin{aligned}
J_n(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\frac{x}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)}\zeta^{-n}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\mathrm{i}x\sin\theta}\,e^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\mathrm{i}x\sin\theta}e^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{\mathrm{i}x\sin\theta}e^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{-\mathrm{i}x\sin\theta}e^{\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}$$

其中，最后一个积分是将$[-\pi,0]$上的变量θ变为$-\theta$而得到．考虑这个表示中的第一个积分：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{ix\sin\theta}e^{-in\theta}d\theta.$$

在引理 1 中，取$f(\theta)=\sin\theta$和$g(\theta)=e^{-in\theta}$．显然，在区间$[0,\pi]$上仅在$\theta=\frac{\pi}{2}$处有$f'(\theta)=0$，及$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1\neq0$．由引理 1 得到积分的渐近式是

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}e^{-in\frac{\pi}{2}}e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}-n\frac{\pi}{2}\right)}.$$

类似地，第二个积分的渐近式是

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{-ix\sin\theta}e^{in\theta}d\theta\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-i\left(x-\frac{\pi}{4}-n\frac{\pi}{2}\right)},$$

将两个式子相加并用下式化简就得到(5)：

$$e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}-n\frac{\pi}{2}\right)}+e^{-i\left(x-\frac{\pi}{4}-n\frac{\pi}{2}\right)}=2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-n\frac{\pi}{2}\right).$$ ■

引理 1 的简略证明 (6)式左边的积分记为I，并设$f''(t_0)>0$．在t_0展开$f(t)$为泰勒级数：

266

$$f(t)=f(t_0)+f'(t_0)(t-t_0)+\frac{f''(t_0)}{2}(t-t_0)^2+\cdots.$$

因为$f'(t_0)=0$，用$f(t_0)+\frac{f''(t_0)}{2}(t-t_0)^2$近似$f(t)$，用常数$g(t_0)$近似$g(t)$．则有

$$\begin{aligned}I&\approx\int_a^b e^{ix\left(f(t_0)+\frac{f''(t_0)}{2}(t-t_0)^2\right)}g(t_0)dt\\&=g(t_0)e^{ixf(t_0)}\int_a^b e^{ix\left(\frac{f''(t_0)}{2}(t-t_0)^2\right)}dt=g(t_0)e^{ixf(t_0)}\int_a^b e^{i\left(\left[\frac{xf''(t_0)}{2}\right]^{1/2}(t-t_0)\right)^2}dt\\&=\sqrt{\frac{2}{x}}g(t_0)\frac{e^{ixf(t_0)}}{\sqrt{f''(t_0)}}\int_A^B e^{iu^2}du,\end{aligned}$$

其中，在最后一步中我们用了变量代换$u=\left[\frac{xf''(t_0)}{2}\right]^{1/2}(t-t_0)$，$du=\left[\frac{xf''(t_0)}{2}\right]^{1/2}dt$，$A=\left[\frac{xf''(t_0)}{2}\right]^{1/2}(a-t_0)$，以及$B=\left[\frac{xf''(t_0)}{2}\right]^{1/2}(b-t_0)$．当$x\to\infty$，$A\to-\infty$，$B\to\infty$时，积分收敛到

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{iu^2}du=\int_{-\infty}^{\infty}\cos(u^2)du+i\int_{-\infty}^{\infty}\sin(u^2)du=\sqrt{\pi}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

最后演示的这些积分叫做非涅耳积分．它们的计算见[1]．这就在$f''(t_0)>0$情形下证明了渐近公式(6)．$f''(t_0)<0$的情形类似可证． ■

习题 4.9

1. 用积分表示(1)证明：$J_0(0)=1$及$J_n(0)=0$对所有整数$n\neq0$成立．
2. 用积分表示(1)证明：$|J_n(x)|\leqslant1$对所有整数n和所有x成立．(当$n\neq0$时，一个更好的界由第 5 题给出)．

3. 对例 2 中的 $\sin x$，推导它的级数展开式.
4. (a)证明：对所有的实数 x 和 θ，有 $|e^{ix\sin\theta}|=1$.

   (b)用帕塞瓦尔等式(2.6 节)和傅里叶级数(4)证明

$$1=|J_0(x)|^2+2\sum_{n=1}^{\infty}|J_n(x)|^2$$

   对所有 x 成立.

   (c)对任意固定的 x，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}J_n(x)=0$.

5. 用习题 4(b)证明：$|J_0(x)|\leqslant 1$ 和 $|J_n(x)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$，对所有 x 成立.
6. 在(4)的两边取实部和虚部，证明：对所有的 x 和 θ 有

$$\cos(x\sin\theta)=J_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(x)\cos(2n\theta);$$

$$\sin(x\sin\theta)=2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n+1}(x)\sin(2n+1)\theta.$$

7. **一个有用的事实.** 设 $f(t)$和 $g(t)$是 $0\leqslant t\leqslant\pi$ 上的连续函数，且 $f(t)=f(\pi-t)$(f 关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$对称)，$g(t)=-g(\pi-t)$(g 关于点$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$对称). 证明：

267

$$\int_0^{\pi}f(t)g(t)\,dt=0.$$

   [提示：把积分拆为在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$和$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上的积分之和.]

8. 用第 7 题的结果证明：

$$\int_0^{\pi}\cos\theta\cos(x\sin\theta)\,d\theta=0; \tag{a}$$

$$\int_0^{\pi}\sin(n\theta)\sin(x\sin\theta)\,d\theta=0\quad(n\text{ 是偶数}). \tag{b}$$

9. 用积分表示(1)证明：$\frac{d}{dx}J_0(x)=-J_1(x)$. [提示：在积分号下求导并用第 8(a)题的结果.]
10. **完成定理 1 的证明.** 令$\mathcal{I}_n(x)$为(1)式的右边. 在本节中证明了对 $n\geqslant 0$，$\mathcal{I}_n(x)=J_n(x)$. 我们还定义了 $J_{-n}(x)$是$(-1)^nJ_n(x)$. 因此，要证明(1)对 $n<0$ 成立，只须证明$\mathcal{I}_{-n}(x)=(-1)^n\mathcal{I}_n(x)$.

    (a)证明：$\mathcal{I}_{-n}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta+x\sin\theta)\,d\theta.$

    (b)用余弦函数的加法公式展开$\mathcal{I}_n$和$\mathcal{I}_{-n}$中的被积式. 然后，用第 7 题的结果证明：$\mathcal{I}_{-n}=(-1)^n\mathcal{I}_n$.

在 11～12 题中，对给定的函数，求当 $x\to\infty$时的渐近公式. 如果积分区间包含多于一个的平稳点，将积分写为几个积分的和，其中每个积分仅含一个平稳点.

11. $\int_{-1}^{1}e^{ix^2\cos t}\,dt.$
12. $\int_{-10}^{10}e^{ix\cos t}\sin^2t\,dt.$
13. **专题问题：贝塞尔函数的零点.** 渐近公式(5)表明：对所有充分大的 x，存在一个常数 C，使得

$$\left|J_n(x)-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right)\right|\leqslant\frac{C}{x^{3/2}}.$$

(a)证明：对所有充分大的 x，$\left|\sqrt{x}J_n(x)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right)\right|\leqslant\frac{C}{x}$.

(b)证明：函数 $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right)$ 等于±1，其中 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$，$k=0, 1, 2, \cdots$.

(c)证明：对充分大的 x，函数 $\sqrt{x}J_n(x)$ 在区间 $I_k=\left[k\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}, (k+1)\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\right]$ 上至少有一个零点. 证明论断：$J_n(x)$ 有无穷多个零点；对充分大的 k，在每个区间 I_k 上至少有一个.

(d)证明：函数 $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right)$ 在点 $x=\alpha_k=\frac{\pi}{4}+\frac{(n+1)\pi}{2}+k\pi$，$k=0, 1, 2, \cdots$ 上等于 0. 事实上，可以证明：$J_n(x)$ 的零点由这些 α_k 逼近. 因此，对充分大的 x，$J_n(x)$ 的零点近似等于 $\alpha_k=\frac{\pi}{4}+\frac{(n+1)\pi}{2}+k\pi$，$k=0, 1, 2, \cdots$.

(e)对上面的论断进行验证：计算 $J_0(x)$，$J_1(x)$ 和 $J_2(x)$ 的前十个零点，然后与数列 $\frac{\pi}{4}+\frac{(n+1)\pi}{2}+k\pi$ $(k=0, 1, 2, \cdots, n=0, 1, 2)$ 进行比较.

268

(f)用(d)中的结果证明：如果 $\lambda_{n,j}<\lambda_{n,j+1}$ 是 J_n 的两个相邻的正零点，则 $\lim\limits_{j\to\infty}(\lambda_{n,j+1}-\lambda_{n,j})=\pi$.

第5章 球面坐标中的偏微分方程

问题是数学的心脏，攻克问题的方法是：自己提出问题，自己分析问题，自己解决问题.

——保尔·哈莫斯

综述 如前一章一样，分离变量法是很关键的. 根据需要发展出其他一些基本方法. 5.1 节是自封的. 5.2 节参考 5.1 节，5.5 节和 5.6 节. 5.3 节和 5.4 节参考 5.1 节和 5.5～5.7 节. 另外，在 5.4 节将重提贝塞尔函数，并将再一次使用 4.8 节的材料. 前文中有关特征函数展开法的知识(3.9 节和 4.6 节)，对 5.4 节的学习是有帮助的，但并不必要. 补充材料(5.5～5.7 节)是自封的，可以在本章开始前阅读. 为学习 5.5 节，需要复习附录 A.4 中的幂级数方法.

导读 勒让德多项式和与其有关的勒让德函数以及它们的展开定理经常出现在物理、工程、应用数学和数值分析中. 在 5.3 节阐述和应用的球面调和函数理论在这些领域也是很有用的. 它们的构造同时需要傅里叶级数和有关的勒让德函数. 正如在本章将要看到的，对定义在球面上的函数，球面调和函数是傅里叶级数自然的类似物. 读者在本章将要遇到的所有新的函数，在大多数计算机系统中可以获得. 为了熟悉它们的许多新的特色，强烈建议读者在计算机上描绘它们的图形并进行数值计算.

在本章，我们考虑球面上的问题和其他区域上的问题，例如两个球面之间的区域或球面的外部区域，用球面坐标处理这类区域上的问题是自然的. 例如，求一个金属球中的稳态温度，它在球面上保持已知的温度分布，这需要解一个球内的拉普拉斯方程，并在球面上取已知边值. 这些问题及其有关的问题可以用前两章中同样的方法来处理；特别地，可以用分离变量法和特征函数展开法.

回忆前几章的介绍，当对极坐标中的拉普拉斯方程及其他方程使用分离变量法求解时，傅里叶级数和贝塞尔级数是如何出现的. 这里，当使用分离变量法求解球面坐标中的拉普拉斯方程和其他方程时，我们将遇到其他的特殊函数. 本章最后三节提供了本章所需要的全面的知识. 详细地涵盖了勒让德多项式及与其有关的勒让德函数，以及相应的展开定理. 在本章开始之前，没有必要叙述这些材料；需要时将参考它们.

5.1 问题和方法概述

在本章，我们求解包括球面坐标中拉普拉斯算子的边值问题. 在本节中，我们将考虑求解所需要的方法和其他的手段. 正如所料的，这些方法将涉及求解某些常微分方程，形成广义傅里叶级数，用这些级数表示边界或初始数据. 例如，在笛卡儿坐标中(第 3 章)，问题的解涉及包含傅里叶正弦级数的一些内容. 在第 4 章，当我们考虑极坐标中的问题时，导出了贝塞尔级数展开. 在本节将遇到新型的展开式(勒让德级数、球面调和函数展开式以及其他展开式)，当

在球面坐标中求解问题时会自然地出现这些展开式.

这里，xy 平面上的极角记为 ϕ，而在二维情况(第 4 章)时记为 θ.

考虑**球面坐标中的拉普拉斯方程**

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\cot\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}+\csc^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\right)=0, \tag{1}$$

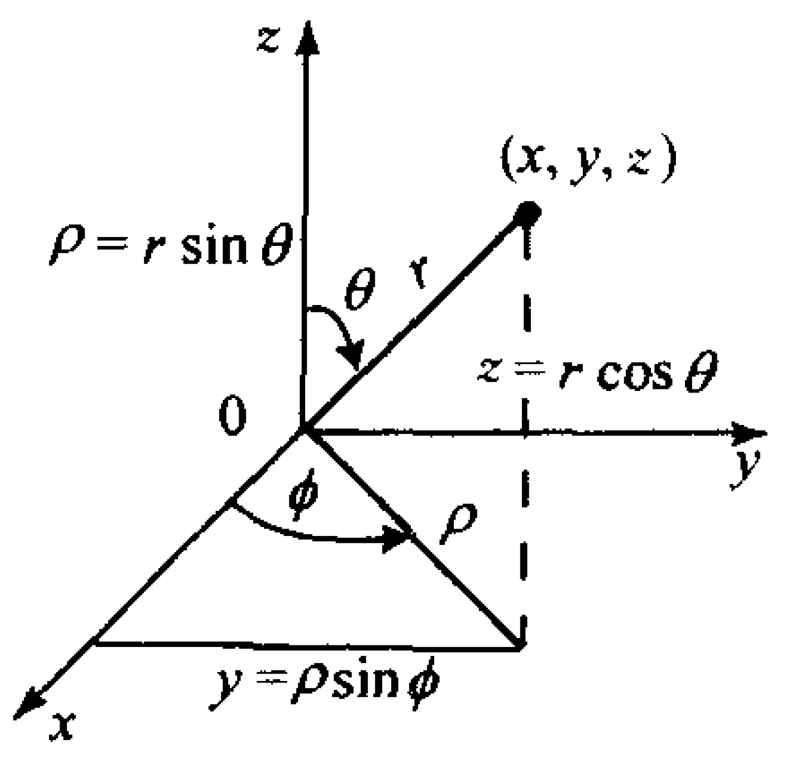


图 1 球面坐标

其中，$0<r<a$，$0<\phi<2\pi$ 和 $0<\theta<\pi$(见 4.1 节). 很多场合涉及这个方程的解. 为叙述清楚起见，我们将同时处理一种较简单的情况，即当 u 关于 z 轴对称或轴对称的情况. 此时 u 与方位角 ϕ 无关，故关于 ϕ 的偏微商都是 0，于是(1)简化为**径向对称拉普拉斯方程**

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\cot\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)=0, \tag{2}$$

其中，$0<r<a$，$0<\theta<\pi$.

在拉普拉斯方程中分离变量

令

$$u(r,\theta,\phi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi).$$

微分，代入(1)，除以 $R\Theta\Phi$，并分离变量，得到**欧拉方程**

270

$$r^2R''+2rR'-\mu R=0,\quad 0<r<a \tag{3}$$

和

$$\frac{\Theta''}{\Theta}+\cot\theta\frac{\Theta'}{\Theta}+\csc^2\theta\frac{\Phi''}{\Phi}=-\mu, \tag{4}$$

其中，μ 是一个分离常数. 分离变量的细节留作习题 1. 回忆在极坐标(4.4 节)中对拉普拉斯方程分离变量时，我们也得到一个关于 R 的欧拉方程. 在(4)中分离变量，得到方程

$$\Phi''+m^2\Phi=0,\quad m=0,1,2,\cdots \tag{5}$$

和

$$\Theta''+\cot\theta\Theta'+(\mu-m^2\csc^2\theta)\Theta=0. \tag{6}$$

由于 ϕ 是极角，故期望解关于 Φ 是以 2π 为周期的，所以，在(5)中我们已经确定了分离常数为 m^2. 现在已经把(1)中变量分离并得到三个方程(3)，(5)和(6). 这三个方程中，只有(6)是新的. 我们很快就会看到，它与称为相伴勒让德微分方程的一族微分方程有关.

在对称的情况下，解不依赖于 ϕ，从(2)出发，用类似的方法得到(3)和下面的方程

$$\Theta''+\cot\theta\Theta'+\mu\Theta=0. \tag{7}$$

注意，(7)是(6)式当 $m=0$ 时的特殊情况. 我们很快会发现，它与所谓的勒让德微分方程有关.

拉普拉斯方程的乘积解

我们现在描述(3)，(5)和(6)的解，并推导(1)的乘积解. 方程(5)易解，解为

$$\boxed{\Phi(\phi) = e^{im\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.} \tag{8}$$

271

为使记号紧凑，我们用了解的复形式. 由 $e^{im\phi} = \cos m\phi + i\sin m\phi$，故可以用 $\cos m\phi$ 和 $\sin m\phi$ 代替它.

为解(6)，作变量代换

$$s = \cos\theta; \quad \frac{ds}{d\theta} = -\sin\theta. \tag{9}$$

因此，由链式法则

$$\Theta' = \frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d\Theta}{ds}\frac{ds}{d\theta} = -\frac{d\Theta}{ds}\sin\theta; \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} &= -\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\Theta}{ds}\sin\theta\right) = -\frac{d^2\Theta}{ds^2}\frac{ds}{d\theta}\sin\theta - \cos\theta\frac{d\Theta}{ds} \\ &= \sin^2\theta\frac{d^2\Theta}{ds^2} - \cos\theta\frac{d\Theta}{ds} = (1-s^2)\frac{d^2\Theta}{ds^2} - s\frac{d\Theta}{ds}.\end{aligned} \tag{11}$$

代入(6)并化简，得

$$\boxed{(1-s^2)\frac{d^2\Theta}{ds^2} - 2s\frac{d\Theta}{ds} + \left(\mu - \frac{m^2}{1-s^2}\right)\Theta = 0, \quad -1 < s < 1.} \tag{12}$$

这个二阶线性常微分方程叫做**相伴勒让德微分方程**(5.7 节). 求解这个微分方程的困难在于方程的系数是 s 的非平凡函数. 在对称的情况下，回到方程(7)，做变换 $s = \cos\theta$ 并化简，得到方程

$$\boxed{(1-s^2)\frac{d^2\Theta}{ds^2} - 2s\frac{d\Theta}{ds} + \mu\Theta = 0, \quad -1 < s < 1.} \tag{13}$$

这就是**勒让德微分方程**(5.5 节). 它是(12)式当 $m=0$ 时的特例. 在 5.5 和 5.6 节将详细讨论勒让德微分方程. 事实上，(12)和(13)在区间[−1, 1]上有有界解的充分必要条件是分离常数具有特殊的形式

$$\boxed{\mu = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \cdots.} \tag{14}$$

272

由于实际的原因，我们仅对有界解感兴趣，故今后取 μ 如(14)所示. 对应的(12)的有界解，适当正规化后，记为 $P_n^m(s)$ 并叫做**相伴勒让德函数**. 代回 $s=\cos\theta$，求得(6)的有界解是

$$P_n^m(\cos\theta).$$

在对称的情况下，当 $m=0$ 时，P_n^0 化为 n **阶勒让德多项式**，记它为 P_n. 由此得

$$P_n(\cos\theta),$$

它是(7)的解. 至此已得到关于 Θ 和 Φ 的解. 下面求解 R. 把 $\mu = n(n+1)$ 代入(3)，得到欧拉方程

$$r^2R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0, \quad 0 < r < a. \tag{15}$$

为了解这个方程，我们引用附录 A.3 的结果．它的指标方程是

$$\upsilon^2+\upsilon-n(n+1)=0,$$

指标根是 $\upsilon=n$ 和 $\upsilon=-(n+1)$．由于指标根不同，属于欧拉方程的第一种情况，因此解是

$$\boxed{R_n(r)=r^n \quad 和 \quad R_n^*(r)=r^{-(n+1)}, \quad n=0,1,2\cdots.} \tag{16}$$

对球内 $0<r<a$ 的问题，我们从(16)中选取有界解 $R_n(r)=r^n$ 而舍弃其他解．对球外 $r>a$ 的问题，我们从(16)中取 $R_n^*(r)=r^{-(n+1)}$，而舍弃 $R_n(r)=r^n$，这个解当 $r\to\infty$时无界．

综上所述，我们求得了(1)的下述乘积解：

$$\boxed{u(r,\theta,\phi)=r^n e^{im\phi}P_n^m(\cos\theta),} \tag{17}$$

其中，P_n^m 是相伴勒让德函数．

函数 $e^{im\phi}P_n^m(\cos\theta)$在应用中是非常重要的．适当正规化后，记它们为 $Y_{n,m}(\theta,\ \phi)$并叫做**球面调和函数**(见 5.3 节的(4))．

我们也求得了(2)的下述乘积解：

$$\boxed{u(r,\theta)=r^nP_n(\cos\theta),} \tag{18}$$

273 其中，P_n 是 n 次勒让德多项式，$n=0,\ 1,\ \cdots$.

关于拉普拉斯方程的边值问题的解将用乘积解(17)的无穷级数来表示(叠加原理)．为了确定这些级数中的系数，我们将用边界条件并引用相伴勒让德函数(和勒让德多项式)的各种性质．更具体地说，我们需要关于相伴勒让德函数(和勒让德多项式)的展开定理，它们类似于贝塞尔级数表示和傅里叶级数．这些必要的材料在 5.5～5.7 节详细论述．需要时将参考它们．

习题 5.1

1. 写出用分离变量法由(1)导出(3)、(5)和(6)的详细过程．
2. 写出用分离变量法由(2)导出(3)和(7)的详细过程．
3. 参考 5.5 节列出的勒让德多项式表．用这个表计算 $P_n(\cos\theta)(n=0,\ 1,\ 2)$的显式表示．验证这些函数是所对应的 μ 值的(7)的解．
4. 参考 5.7 节中的相伴勒让德函数表．用这个表计算 $P_1{}^m(\cos\theta)(m=-1,\ 0,\ 1)$的显式表示．验证这些函数是所对应的 μ 和 m 值的(6)的解．
5. 写出当 $n=1$ 时(18)式的显式表示，并验证它是(2)的一个解．
6. 写出当 $m=n=1$ 时(17)式的显式表示，并验证它是(1)的一个解．

5.2 对称狄利克雷问题

本节我们求解在一个半径 $a>0$ 的球内的拉普拉斯方程，在球面 $r=a$ 上(见图 1)满足预先指定的边值．在本节都假设该问题与角 ϕ 无关．于是，我们将处理径向对称拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\cot\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)=0, \tag{1}$$

其中，$0<r<a$，$0<\theta<\pi$(见 5.1 节的(2))．边界条件也是径

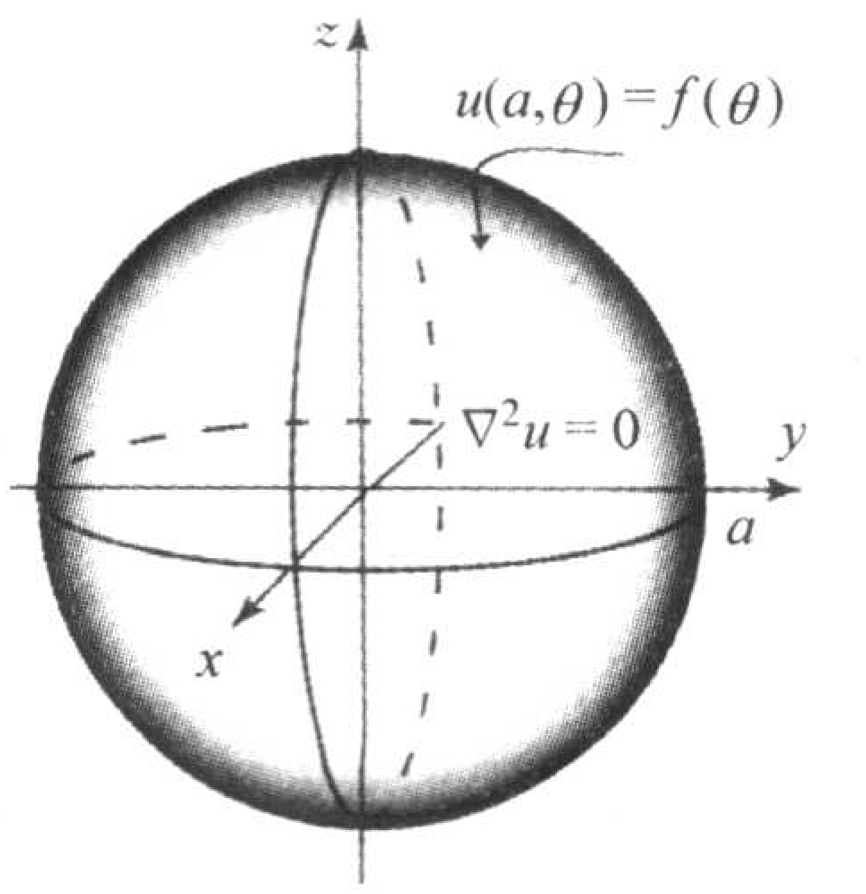


图 1 对称狄利克雷问题

向对称的：

$$u(a,\theta) = f(\theta). \tag{2}$$

先回忆前一节的一些事实．应用分离变量法，令 $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，代入(1)得到变量分离后的方程 274

$$r^2R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0,\quad 0<r<a,$$
$$\Theta'' + \cot\theta\Theta' + n(n+1)\Theta = 0,\quad 0<\theta<\pi,$$

其中分离常数是 $n(n+1)$，$n=0,1,2,\cdots$(所有其他的分离常数将导致无界解，因此，从物理上考虑舍弃它们.)关于 R 的方程是欧拉方程，具有有界解 r^n．在第二个方程做变量代换 $s=\cos\theta$，得到 n 阶勒让德微分方程：

$$(1-s^2)\Theta'' - 2s\Theta' + n(n+1)\Theta = 0,\quad -1<s<1$$

(见 5.1 节的(9)～(11)和(13))．对每个 n，这个方程有一个 n 阶多项式解，记它为 $P_n(s)$ 并称为 n 次勒让德多项式．代回 $s=\cos\theta$，得到 $r^nP_n(\cos\theta)$，作为(1)的乘积解．因为这些函数与任何标量因子的积仍然是(1)的解，因此把乘积解记为

$$A_n\left(\frac{r}{a}\right)^nP_n(\cos\theta) \tag{3}$$

是很方便的．其中，A_n 是一个任意常数，a 是球的半径．为了完成狄利克雷问题(1)～(2)的求解，叠加所有的乘积解(3)为一个无穷级数，作为可选择的解，然后确定级数中诸系数 A_n 使满足边界条件(2)．在最后一步，使用了 5.6 节中提到的勒让德多项式的正交性．我们有下述重要结果．

定理 1　球中的狄利克雷问题　*狄利克雷问题(1)～(2)的解由*

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(\frac{r}{a}\right)^nP_n(\cos\theta) \tag{4}$$

给出，其中 P_n 是 n 次勒让德多项式(5.5 节)，

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta,\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{5}$$

证明　叠加乘积解(3)得(4)．在(4)中令 $r=a$ 并用边界条件(2)得

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}A_nP_n(\cos\theta),\quad 0<\theta<\pi.$$ 275

为了确定系数 A_n，我们形式上如下进行：用 $P_m(\cos\theta)\sin\theta$ 乘方程两边，然后关于 θ 变量逐项积分，得到

$$\int_0^\pi f(\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}A_n\int_0^\pi P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}A_n\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)\,dx,$$

这里的最后一个等式是作了变换 $x=\cos\theta$，$dx=-\sin\theta\,d\theta$ 之后得到的．使用勒让德多项式的正交性，5.6 节的定理 1，我们发现级数中除去 $m=n$ 的一项，所有的项都是零，$m=n$ 的一项为 $A_m\int_{-1}^1[P_m(x)]^2dx = A_m\frac{2}{2m+1}$．因此，

$$\int_0^{\pi} f(\theta) P_m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta = A_m \frac{2}{2m+1},$$

此式蕴涵(5). ■

由定理 1 显见，函数 $P_n(\cos\theta)$在球面内狄利克雷问题的求解中占有重要的地位. 为了对这些函数的大小有直观的认识，我们在图 2 中画出了 $r = |P_n(\cos\theta)|$ 的图形，其中 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$n=0, 1, 2, 3$. 这些图形关于绕 z 轴的旋转是对称的，并且随着 n 的增加会有更多的花瓣出现. 这后一个性质是由于勒让德多项式在区间$[-1, 1]$中的零点个数增加的缘故.

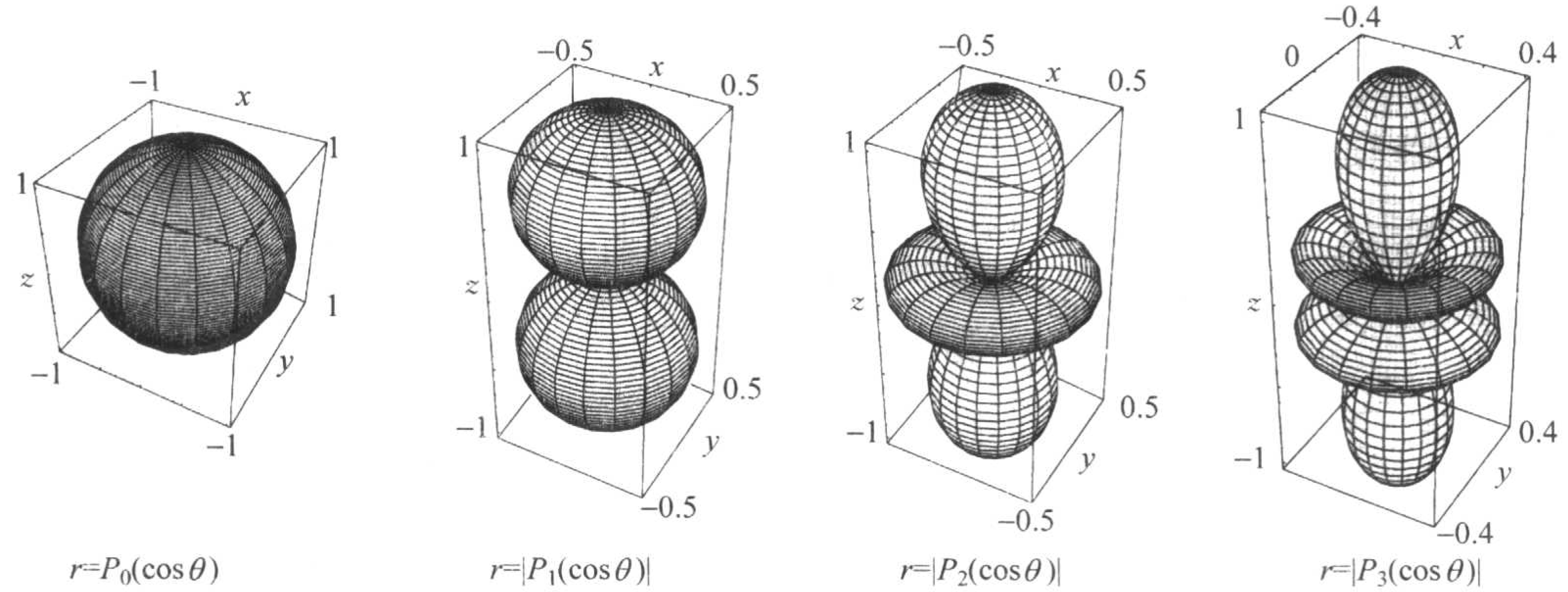


图 2　$r = |P_n(\cos\theta)|$ 的图形，$n=0, 1, 3$. 在球面坐标中，这些图形表示了点 $(|P_n(\cos\theta)|, \theta, \phi)$，$0<\theta<\pi$，$0<\phi<2\pi$. 由于 r 不依赖于 ϕ，图形关于 z 轴对称. 当 n 增加时，它们的花瓣增加，这是因为 $P_n(x)$在 $0<x<1$ 上的零点数增加之故.

276

例 1　球面内的狄利克雷问题

求具有单位半径的球面内的稳态温度，已知上半球面温度 100 度，下半球面温度零度(图 3).

解　边界函数是

$$f(\theta) = \begin{cases} 100 & 若\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & 若\ \dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi. \end{cases}$$

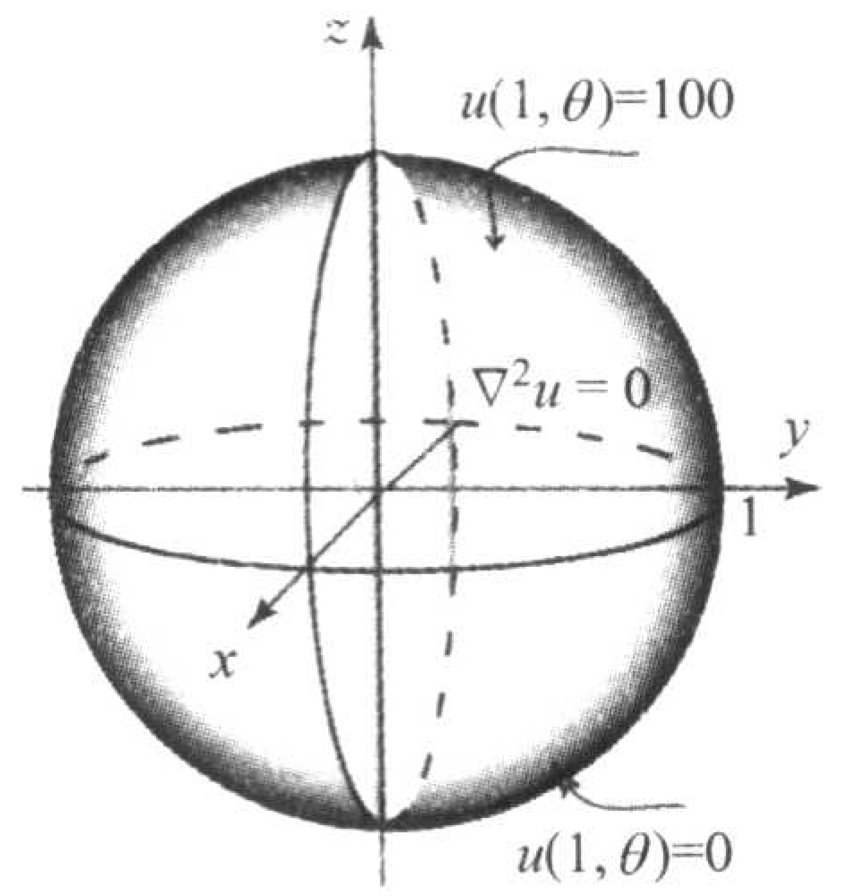


图 3　狄利克雷问题

因为 f 与 ϕ 无关，问题属于定理 1 所述类型. 因此，我们有

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta),$$

其中，

$$A_n = 50(2n+1)\int_0^{\pi/2} P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta = 50(2n+1)\int_0^1 P_n(x)\,dx. \tag{6}$$

由此，用各 P_n 的显式表达式，可以想计算出多少项系数就计算出多少项来. 例如，因为 $P_0(x)=1$，故得 $A_0=50\int_0^1 dx=50$. 另外，用 $P_1(x)=x$，得到 $A_1=150\int_0^1 x\,dx=\frac{150}{2}=75$. 用

P_n 的显式表达式，进行类似计算，可得

$$A_0 = 50, \quad A_1 = 75, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -\frac{175}{4}, \quad A_4 = 0.$$

因此，球面内温度是

$$u(r,\theta) = 50 + 75rP_1(\cos\theta) - \frac{175}{4}r^3P_3(\cos\theta) + \cdots.$$

在表 1 中，我们用级数解的前三个非零项近似球面内的温度在指定点的值.

表 1　球内温度的近似值

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$u(1/4, \theta)$	68.1	63.4	50	36.6	32
$u(1/2, \theta)$	82	77.5	50	22.5	18
$u(3/4, \theta)$	87.8	93	50	7	12.2

对固定的 r，当 θ 从 0 到 π 变化时，这些点从北极向南极运动. 注意当 θ 增加时温度是如何减小的. 从已知的边界条件可知，这是所预料的一个结果. 另外，当 r 趋于 1 时，上半球内点的温度接近于 100 度. 若从级数解中取更多的项，会得到稳态温度的更好的近似值.

很快就会发现，利用 5.5 节和 5.6 节中勒让德多项式的性质，对问题的解会有更多的了解. 例如，我们将演示如何直接计算各 A_n 的值，由此可以得到一个令人更满意的解的形式. [277] 由 5.6 节的习题 10，我们有

$$\int_0^1 P_0(x)\mathrm{d}x = 1, \quad \int_0^1 P_{2n}(x)\mathrm{d}x = 0, n = 1,2,\cdots,$$

$$\int_0^1 P_{2n+1}(x)\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2(n+1)}, n = 0,1,2,\cdots.$$

这些恒等式的证明较难，不过，如果读者愿意尝试，可以按照 5.6 节习题 10 的证明纲要去证明它们. 在(6)中应用这些恒等式，得到

$$A_0 = 50, \quad A_{2n} = 0, n = 1,2,3,\cdots,$$

$$A_{2n+1} = 50(4n+3)\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2(n+1)}, n = 1,2,\cdots. \tag{7}$$

因此，

$$u(r,\theta) = 50 + 25\sum_{n=0}^{\infty}(4n+3)\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(n+1)}r^{2n+1}P_{2n+1}(\cos\theta). \tag{8}$$

关于解的进一步性质，请见习题 7. ■

例 2　在球面上的多项式温度分布

当从北极向南极运动时，单位半径球面上的温度按照下述公式从 0 度变化到 100 度：

$$f(\theta) = 50(1-\cos\theta), \quad 0 < \theta < \pi.$$

(因此，f 是 $\cos\theta$ 的一次多项式.) 求球内的稳态温度.

解　按照(4)，温度由

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}A_nP_n(\cos\theta)r^n$$

给出，其中，

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} 50(1-\cos\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta \tag{9}$$

$$= 25(2n+1)\int_{-1}^{1}(1-x)P_n(x)dx \quad (x=\cos\theta, dx=-\sin\theta d\theta).$$

用各 P_n 的显式表达式容易验证

$$A_0 = 50,\quad A_1 = -50,\quad A_2 = 0,\quad A_3 = 0,\quad A_4 = 0.$$

实际上，借助计算机可以验证，当 $n\geqslant 2$ 时 $A_n=0$. 于是，

278

$$u(r,\theta) = 50P_0(\cos\theta) - 50rP_1(\cos\theta) = 50 - 50r\cos\theta.$$

肯定有原因使得当 $n\geqslant 2$ 时 $A_n=0$. 要全面搞懂这个事实，还得从理解勒让德多项式和勒让德级数的基本性质入手. 按照(9)，A_n 是多项式 $50-50x$ 的第 n 个勒让德系数(勒让德系数的定义见 5.6 节的(7)). 因此，寻找 A_n 使得

$$50 - 50x = A_0P_0(x) + A_1P_1(x) + A_2P_2(x) + A_3P_3(x) + \cdots.$$

由于 $P_0(x)=1$，$P_1(x)=x$，则 $50-50x=50P_0(x)-50P_1(x)$；因此，$A_0=50$，$A_1=-50$，并且由勒让德多项式的正交性，我们断言：对所有的 $n\geqslant 2$ 有 $A_n=0$. 这个论证可用于任何 k 次多项式 $P(x)$. 在此情况下，在 $P(x)$的勒让德级数展开式中，所有满足 $n>k$ 的第 n 个系数是零(见 5.6 节的习题 44). ■

下一节将处理非对称的拉普拉斯方程的一般情况. 这个情况需要比勒让德多项式更多的知识，即相伴勒让德函数.

习题 5.2

在习题 1～6，求解单位球面内的拉普拉斯方程(1)，且满足给定的边界条件. (a)计算勒让德级数解的至少两个非零系数. (b)求级数解的系数的一般形式. 当需要 5.6 节的结果时，就会给出提示.

1. $f(\theta)=20(\cos\theta+1)$.

2. $f(\theta)=\cos^2\theta+2$.

3. $f(\theta)=\begin{cases}100 & 若\ 0<\theta<\pi/2, \\ 20 & 若\ \pi/2<\theta<\pi.\end{cases}$

4. $f(\theta)=\begin{cases}100 & 若\ 0<\theta<\pi/3, \\ 0 & 若\ \pi/3<\theta<\pi.\end{cases}$

   [提示：5.6 节习题 10.]

5. $f(\theta)=\begin{cases}\cos\theta & 若\ 0<\theta<\pi/2, \\ 0 & 若\ \pi/2<\theta<\pi.\end{cases}$

   [提示：5.6 节习题 11.]

6. $f(\theta)=|\cos\theta|$.

   [提示：5.6 节习题 27.]

7. **考虑例 1 的解.** 在这个习题中，用 5.5 节和 5.6 节中勒让德多项式的各种性质推导例 1 中解的性质. 在本习题中，$u(r,\theta)$指(8)式.

   (a)用(8)证明 $u(r,\pi/2)=50$. 这和你的预料一致吗?

   (b)如果在(8)中取 $r=1$，应该得到边界函数 f. 通过对解的几个部分和的描绘确认这个事实. 把部分和作

为区间$[0, \pi]$上θ的函数描绘出来.

(c)如果在(8)中取$\theta=0$，应该得到上半球中z轴上各点的稳态温度. 对$\theta=0$，$0<r<1$画出(8)式并对图形进行评述.

(d)证明：当$0<r<1$时，有$\dfrac{u(r, 0)+u(r, \pi)}{2}=50$. 试问：这有物理意义吗？

8. 对例1中球面内的温度和表1中列出的各点的温度求更好的近似值. 至少要用(8)中10项.

9. 图4所示是一个漂浮在海面上的浮标，求浮标内的稳态温度. [提示：5.6节习题9.]

279

专题问题：球面外的狄利克雷问题. 习题10和11处理球面外区域$r>a$上的拉普拉斯方程，附加边界条件为$u(a, \theta)=f(\theta)$. 这样的方程出现在势论中，例如，当研究一个球形电容器外部的电势时. 我们将附加另外一个条件$\lim\limits_{r\to\infty}u(r, \theta)=0$，它表示当远离球面而去时，势函数趋于零.

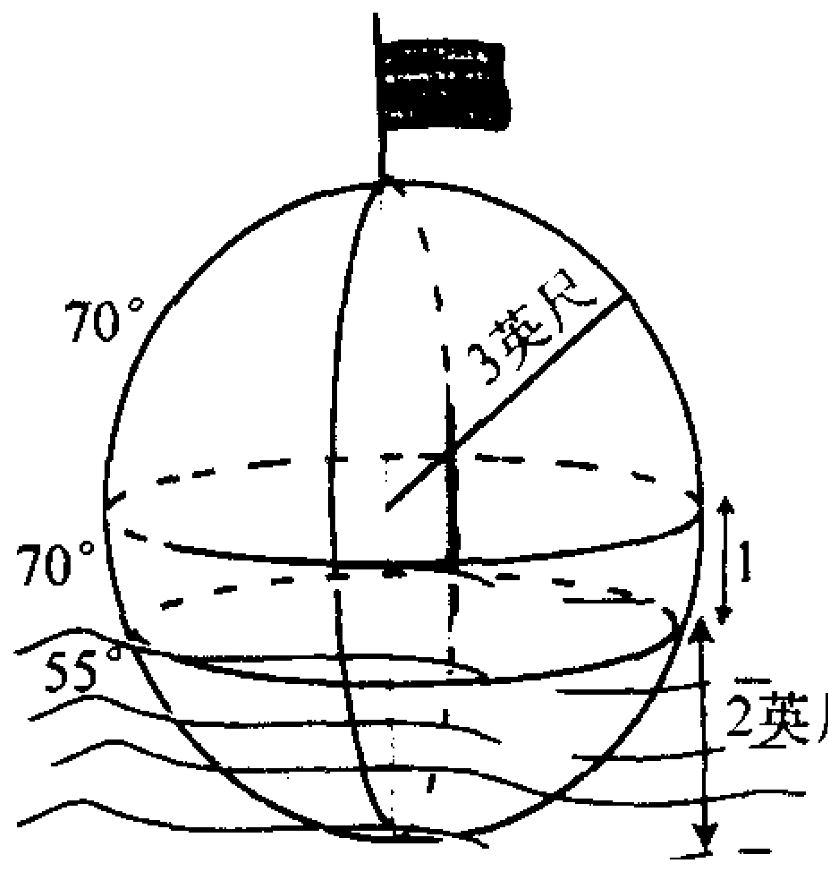


图4　第9题图

10. 证明：满足条件$u(a, \theta)=f(\theta)$和$\lim\limits_{r\to\infty}u(r, \theta)=0$，(1)在球面$r=a$外部的解是

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(\frac{r}{a}\right)^{-(n+1)}P_n(\cos\theta),\quad (r>a),$$

其中，A_n如(5)所示. [提示：用解R_n^*代替5.1节(16)中的R_n重复定理1的证明. 请问：这个变换的原因何在？]

11. 证明单位球面外的狄利克雷问题，边值同习题3.

专题问题：两个同心球面所界定区域上的狄利克雷问题. 在习题12，要求解在内球面上具有非零数据而在外球面上具有零数据的问题. 习题13是处理相反的情况. 习题14要求结合上述两个结果求解在内外球面上都具有非零数据的狄利克雷问题.

12. 考虑由(1)和图5中给出的边界条件所组成的狄利克雷问题.

(a)用5.1节(16)中的两个函数并附加条件$R(r_2)=0$，求解

$$u_1(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^*\left[\left(\frac{r}{r_2}\right)^n-\left(\frac{r_2}{r}\right)^{n+1}\right]P_n(\cos\theta),$$

其中，$r_1<r<r_2$，$0<\theta<\pi$，A_n^*待定. 验证解满足边界条件$u_1(r_2, \theta)=0$.

(b)另一个边界条件蕴涵

$$u_1(r_1,\theta)=f_1(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^*\left[\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1}\right]P_n(\cos\theta).$$

证明论断：

$$A_n^*\left[\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1}\right]=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}f_1(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta.$$

确定A_n^*以求得解.

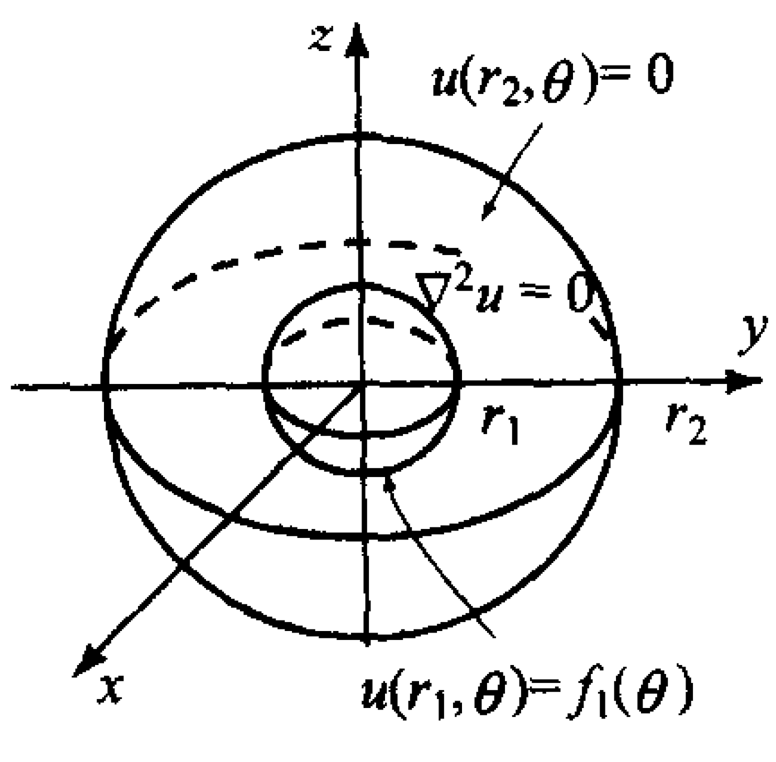


图5　第12题图

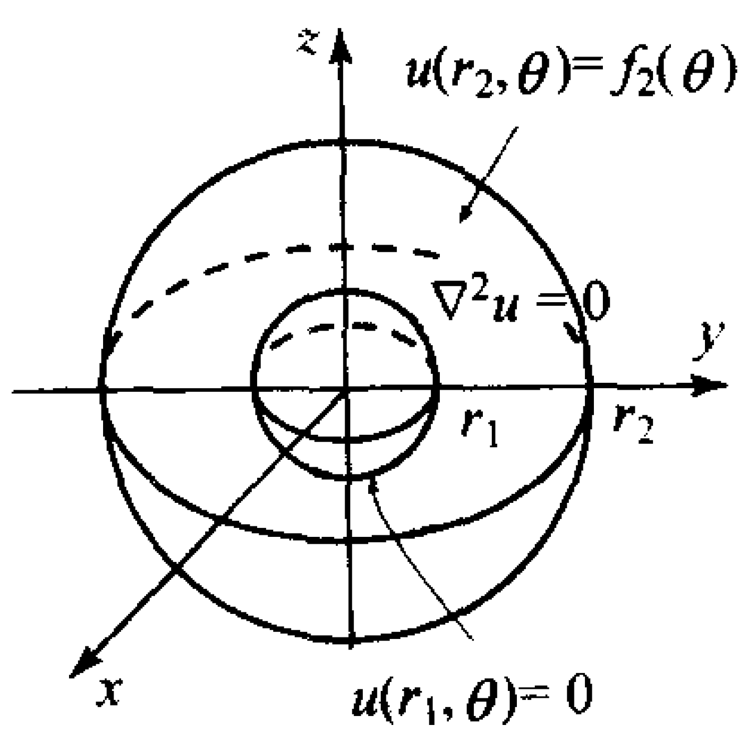


图6　第13题图

13. 如图 6 所示，证明两个同心球面所界定区域上的稳态温度是

[280]

$$u_2(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^*\left[\left(\frac{r}{r_1}\right)^n-\left(\frac{r_1}{r}\right)^{n+1}\right]P_n(\cos\theta),$$

其中，$r_1<r<r_2$，$0<\theta<\pi$，以及

$$B_n^*\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1}\right]=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}f_2(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

14. 在两个同心球面所界定的区域 $r_1<r<r_2$ 上，已知边界条件 $u(r_1,\theta)=f_1(\theta)$，$u(r_2,\theta)=f_2(\theta)$. 证明：由(1)和已知边界条件组成的狄利克雷问题的解是 $u(r,\theta)=u_1(r,\theta)+u_2(r,\theta)$，其中，$u_1$ 和 u_2 分别由 12 和 13 题给出.

5.3 球面调和函数和一般狄利克雷问题

回忆 4.4 节，圆盘中狄利克雷问题的解是由定义在圆周上的边界函数的傅里叶级数来表示的. 球内的狄利克雷问题的解具有同样的性质：解由定义在球面上的边界函数的“傅里叶级数”来表示. 因此，求解球面上的狄利克雷问题，将需要对定义在球面上的函数建立一个类似于傅里叶级数展开的式子，即所谓球面调和展开式. 如傅里叶级数那样，这些展开式是非常有用的，特别是处理球形域上的边值问题，例如热传导、波动、狄利克雷和泊松问题. 随着球面调和函数在狄利克雷问题的解中出现，我们将阐述它的理论.

从回忆 5.1 节的几个事实开始本节的内容. 我们曾在球面坐标中考虑了拉普拉斯方程

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}+\csc^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\right)=0,}\tag{1}$$

其中，$0<r<a$，$0<\theta<\pi$，及 $0<\phi<2\pi$，边界条件是

$$u(a,\theta,\phi)=f(\theta,\phi),\quad 0<\theta<\pi,\quad 0<\phi<2\pi.\tag{2}$$

在 5.1 节用分离变量法时，我们令 $u(r,\theta,\phi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$，代入(1)，按常规步骤进行演算，得到三个方程

$$r^2R''+2rR'-n(n+1)R=0,\quad 0<r<a,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

$$\Phi''+m^2\Phi=0,\quad m=0,1,2,\cdots$$

和

$$\Theta''+\cot\theta\Theta'+(n(n+1)-m^2\csc^2\theta)\Theta=0.$$

[281] 在最后一个方程中作变量代换 $s=\cos\theta$，$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}=-\sin\theta$ 并化简，得到**相伴勒让德微分方程**

$$(1-s^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}s^2}-2s\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}s}+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-s^2}\right)\Theta=0,\quad -1<s<1.$$

关于 R 的方程是欧拉方程，它有有界解 $R(r)=r^n$，$0<r<a$. 关于 Φ 的方程的解是 2π-周期函数 $\cos m\phi$ 和 $\sin m\phi$，把它们联合在一起，写为复形式 $\Phi(\phi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$. 相伴勒让德微分方程将在 5.7 节详细阐述. 它的解是**相伴勒让德函数** $P_n^m(s)$. 因此，我们得到(1) 的下述乘积解：

$$u(r,\theta,\phi)=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}P_n^m(\cos\theta).$$

函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}P_n^m(\cos)$ 出现在许多其他重要应用的求解中. 很快会看到，适当正规化后，这些乘积叫做**球面调和函数**. 由于它们的重要性，我们将叙述它们的定义及其基本性质. 然后，返回狄

利克雷问题并把它的解用球面调和函数来表示.

球面调和函数

我们从回忆 5.7 节的事实开始. 对 $n=0, 1, 2, \cdots$ 和 $m=0, 1, 2, \cdots$, 相伴勒让德函数 $P_n^m(x)$ 是用 n 次勒让德多项式的 m 阶导数来定义的, 为

$$\boxed{P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^m P_n(x)}{\mathrm{d}x^m}} \tag{3}$$

(见 5.7 节的(1)). 因为 P_n 是 n 次多项式, 若使 P_n^m 非零, 必须取 $0 \leqslant m \leqslant n$. 对负的 m 值, 在 5.7 节的(2)定义为

$$P_n^m(x) = (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!} P_n^{-m}(x).$$

这个式子推广了相伴勒让德函数的定义, 使得 $n=0, 1, 2, \cdots$ 和 $m=-n, -(n-1), \cdots, n-1, n$. 现在, 定义**球面调和函数** $Y_{n,m}(\theta, \phi)$ 为

$$\boxed{Y_{n,m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi},} \tag{4}$$

其中, $n=0, 1, 2, \cdots$ 和 $m=-n, -(n+1), \cdots, n-1, n$. 选择(4)中的系数, 使得所有球面调和函数, 当使用曲面面元 $\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$ 时, 形成球面上的规范正交集. 更精确地说, 有下面的正交性关系. 282

定理 1(球面调和函数的正交性关系) *令 $n=0, 1, 2, \cdots$ 及 $m=-n, -n+1, \cdots, n-1, n$, 并令 $Y_{n,m}$ 如(4)所述. 则*

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_{n,m}(\theta,\phi) \overline{Y}_{n',m'}(\theta,\phi) \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi = 0 \quad \text{如果 } n \neq n' \text{ 或 } m \neq m', \tag{5}$$

其中, $\overline{Y}_{n',m'}$ 是 $Y_{n',m'}$ 的复共轭, 并且

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} | Y_{n,m}(\theta,\phi) |^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi = 1. \tag{6}$$

定理的证明基于相伴勒让德函数的正交性(5.7 节的定理 1)和复指数函数的正交性(2.6 节(11)). 只须用(4)把被积分式用 $P_n^m(\cos\theta)$ 重写, 然后作变量代换 $s=\cos\theta$, $\mathrm{d}s=-\sin\theta\mathrm{d}\theta$. 证明细节无困难, 留作习题 3.

在图 1 中, 用球面坐标画出了曲面

$$r = | Y_{n,m}(\theta,\phi) | \quad \text{其中 } 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \phi < 2\pi.$$

这些曲面表示点 $(|Y_{n,m}(\theta, \phi)|, \theta, \phi)$, 它们表示球面调和函数在以原点为球心的球面上的大小, 其意义如下. 在球面(以原点为圆心, $a>0$ 为半径)上取一点, 记它的球面坐标为 (a, θ_0, ϕ_0). 过点 $(0, 0, 0)$ 和点 (a, θ_0, ϕ_0) 的射线与曲面 $r=|Y_{n,m}(\theta, \phi)|$ 在点 $(|Y_{n,m}(\theta_0, \phi_0)|, \theta_0, \phi_0)$ 处相交. 从原点到交点的距离显然是 $|Y_{n,m}(\theta_0, \phi_0)|$, 这就是球面调和函数在点 (a, θ_0, ϕ_0) 的大小. 由(4)和 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}|=1$, 便得 $|Y_{n,m}(\theta, \phi)|$ 与 ϕ 无关. 这就是曲面 $r=|Y_{n,m}(\theta, \phi)|$ 关于 z 轴对称的原因.

下一个定理指出球面调和函数可以用来展开定义在球面上的函数, 很像用傅里叶级数和其

他正交级数展开一样.

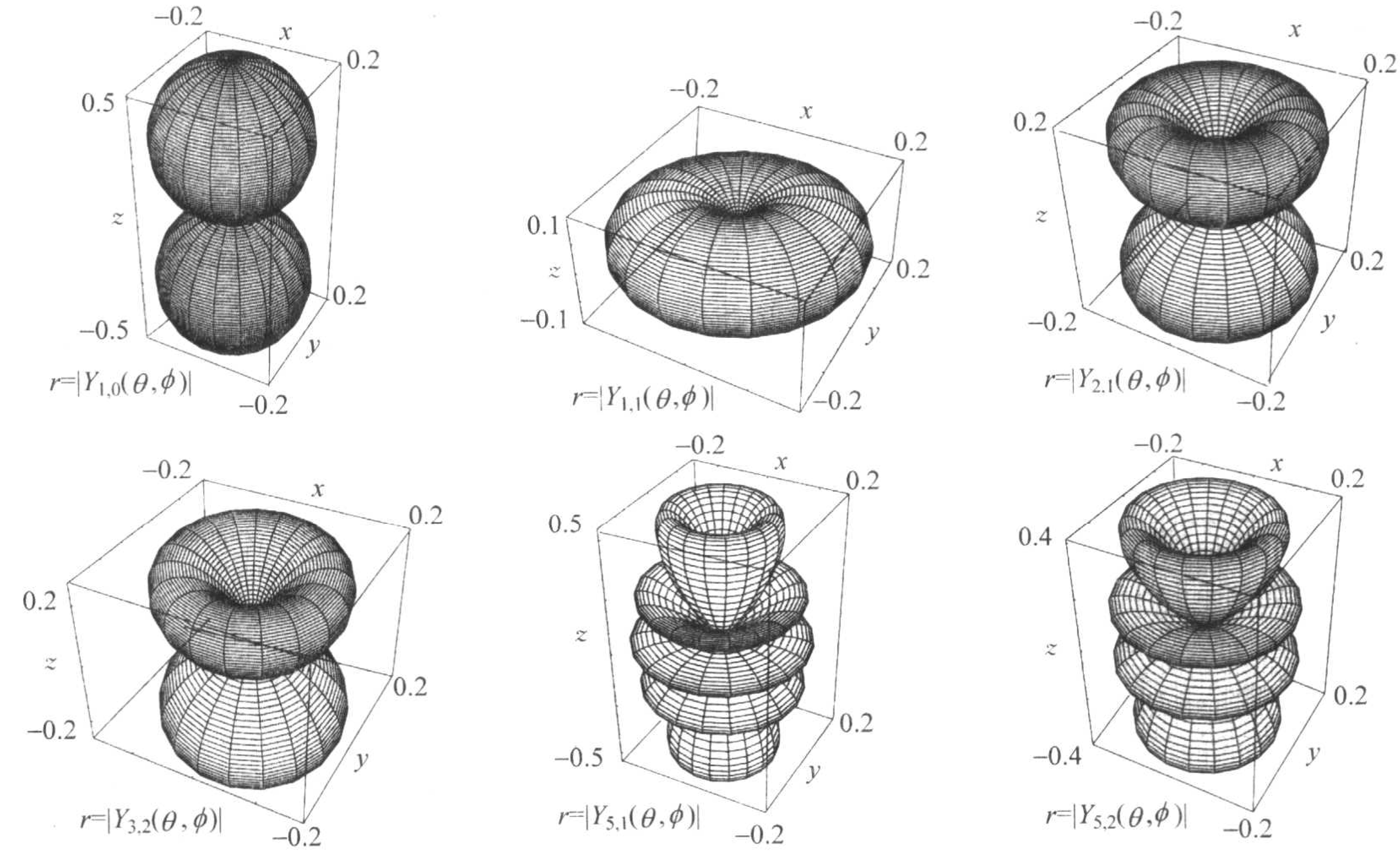


图 1　在球面坐标中的 $r=|Y_{n,m}(\theta,\ \phi)|$ 图形，因为 r 与 ϕ 无关，图形关于 z 轴对称

定理 2(球面调和函数级数展开式)　令 $f(\theta,\ \phi)$ 对所有的 $0<\phi<2\pi$，$0<\theta<\pi$ 有定义，并设 f 关于 ϕ 是 2π-周期的. 则有**球面调和函数级数展开**

$$f(\theta,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_{n,m}Y_{n,m}(\theta,\phi), \tag{7}$$

其中，**球面调和函数系数**由

$$A_{nm}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\phi)\overline{Y}_{n,m}(\theta,\phi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{8}$$

给出.

用正交性关系式(5)和(6)可以证明(8)是正确的，正如我们以前对其他正交级数展开式做过的那样. 定理 2 中的 f 是平方可积的；即 $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}|f(\theta,\phi)|^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi<\infty$. 级数逐点收敛的充分条件叙述起来是相当复杂的.（见 *Orthogonal Functions*，G. Sansone 著，Interscience Publishers，1959.）

把傅里叶级数的复形式与定理 1 和 2 比较. 在(8)中定义球面调和函数系数时，我们用了球面调和函数的复共轭，并在球面上关于曲面面元 $\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ 积分. 在 2.6 节定理 1 中，把 $f(\theta)$ 看作定义在单位圆上的一个 2π-周期函数，并用 θ 把圆上的点参数化，这里，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$. 于是，$f(\theta)$ 的傅里叶系数就可以通过在圆周上对弧元 $\mathrm{d}\theta$ 积分而得到. 因此，对定义在单位球面上的函数来说，球面调和函数级数展开就是傅里叶级数的自然的类似物.

283 ~ 284

例 1　一个球面调和级数展开式

考虑函数 $f(\theta, \phi)=\frac{1}{2\pi}\phi$，$0<\theta<\pi$，$0<\phi<2\pi$，这里，$f$ 是 ϕ 的 2π-周期函数．曲面 $r=f(\theta, \phi)$ 如图 2 所示．当 ϕ 从 0 增加到 2π，f 从 0 增加到 1．注意到图形在 $\phi=0$ 或 $\phi=2\pi$ 的间断性．为了把 f 展开为一个球面调和函数级数，我们使用定理 2．用(8)和(4)可知

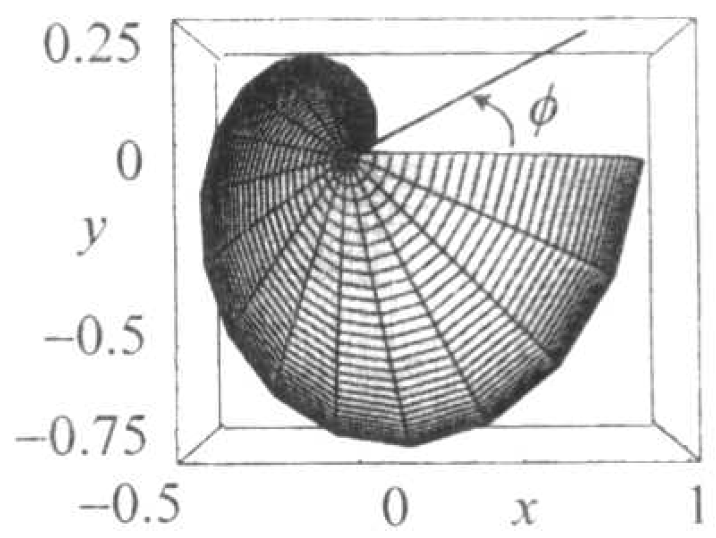


图 2　从曲面 $r=f(\theta, \phi)$ 上方看．当 ϕ 从 0 增加到 2π，r 从 0 增加到 1

$$
\begin{aligned}
A_{nm} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\phi)\overline{Y}_{n,m}(\theta,\phi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\int_0^{2\pi}\phi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}\,\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

第一个积分用分部积分易得(见习题 5)．用变量代换 $\cos\theta=s$ 把第二个积分变为

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(s)\,\mathrm{d}s.$$

这个积分的具体值可以用相伴勒让德函数的性质(见习题 6)来计算．例如，从 5.7 节知道，若 $n+m$ 是奇数，$P_n^m(s)$ 就是奇的，因此当 s 从 -1 变到 1 时，它关于 s 的积分为零．因此，当 $n+m$ 是奇数时，$A_{nm}=0$．表 1 列出了对应于 $n=0$，1，2 和 $m=-n$，…，n 时的系数值．球面调和函数级数(7)的部分和现在可以用表 1 中的系数形成．通过使用习题 1 中 $Y_{n,m}$ 的显式表达式并化简，得到

$$f(\theta,\phi)\approx\sum_{n=0}^{2}\sum_{m=-n}^{n}A_{nm}Y_{n,m}(\theta,\phi)=\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\sin\phi\sin\theta-\frac{5}{8\pi}\sin2\phi\sin^2\theta.$$

表 1　球面调和函数系数 A_{nm}

n/m	-2	-1	0	1	2
0			$\sqrt{\pi}$		
1		$\frac{-\mathrm{i}}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{2}}$	0	$\frac{-\mathrm{i}}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{2}}$	
2	$\frac{-\mathrm{i}}{2}\sqrt{\frac{5}{6\pi}}$	0	0	0	$\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\frac{5}{6\pi}}$

285

我们用计算机来计算球面调和函数系数，让 n 从 0 变化到 10 而 $-n\leqslant m\leqslant n$．用这些系数，我们做成球面调和函数展开式的部分和，并在图 3 中画出了对应的曲面．注意它与图 2 中的曲面相似性．在图 4 中，对固定的 θ 画出了部分和．图 3 和图 4 都表示了当 θ 在 $(0, \pi)$ 间变化和 ϕ 在 $(0, 2\pi)$ 间变化时，球面调和函数级数展开式的部分和逼近 f．

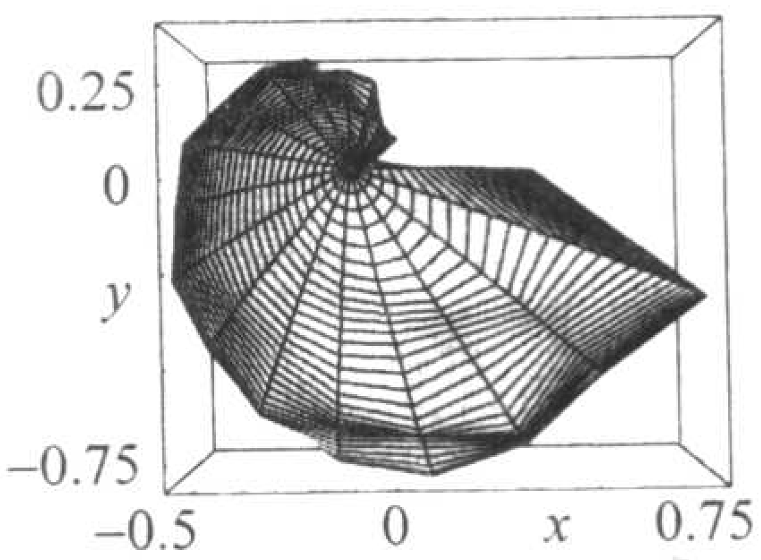


图 3　用例 1 中的狄利克雷级数的部分和的图形逼近图 1 中的曲面

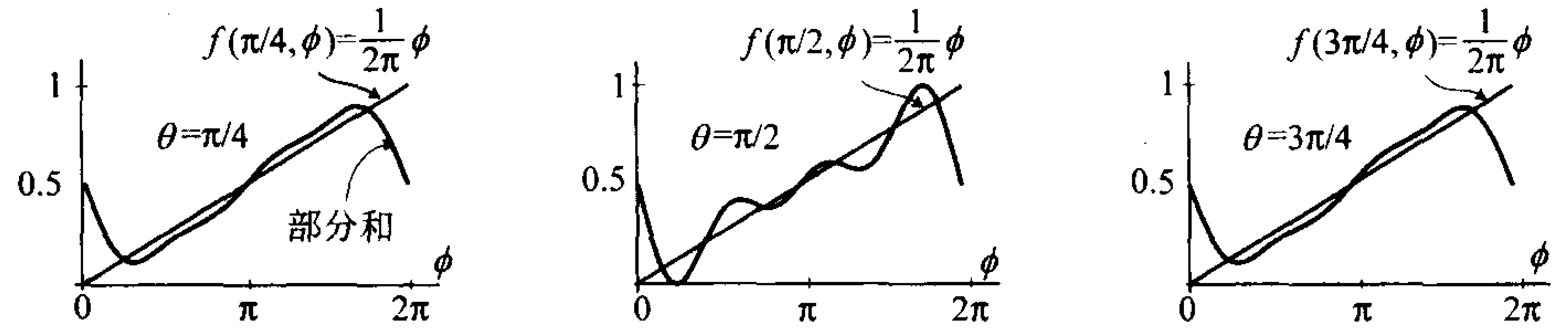


图 4

球中狄利克雷问题的解

现在求图 5 所示的狄利克雷问题(1)～(2)的整体解．回忆(1)的乘积解

$$r^n e^{im\phi} P_n^m(\cos\theta), \quad n = 0,1,2,\cdots, \ |m| \leqslant n.$$

因为拉普拉斯方程是齐次的，故可以选用这些函数的任何标量积．特别地，由(4)，可以用球面调和函数 $Y_{n,m}(\theta, \phi)$代替 $e^{im\phi}P_n^m(\cos\theta)$，从而取下面的乘积解

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n Y_{n,m}(\theta,\phi). \tag{10}$$

这些解乘任意常数，而后叠加得

$$\boxed{u(r,\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{nm}\left(\frac{r}{a}\right)^n Y_{n,m}(\theta,\phi),} \tag{11}$$

其中，系数 A_{nm}将由边界条件(2)确定．在(11)中令 $r=a$ 并用(2)，得

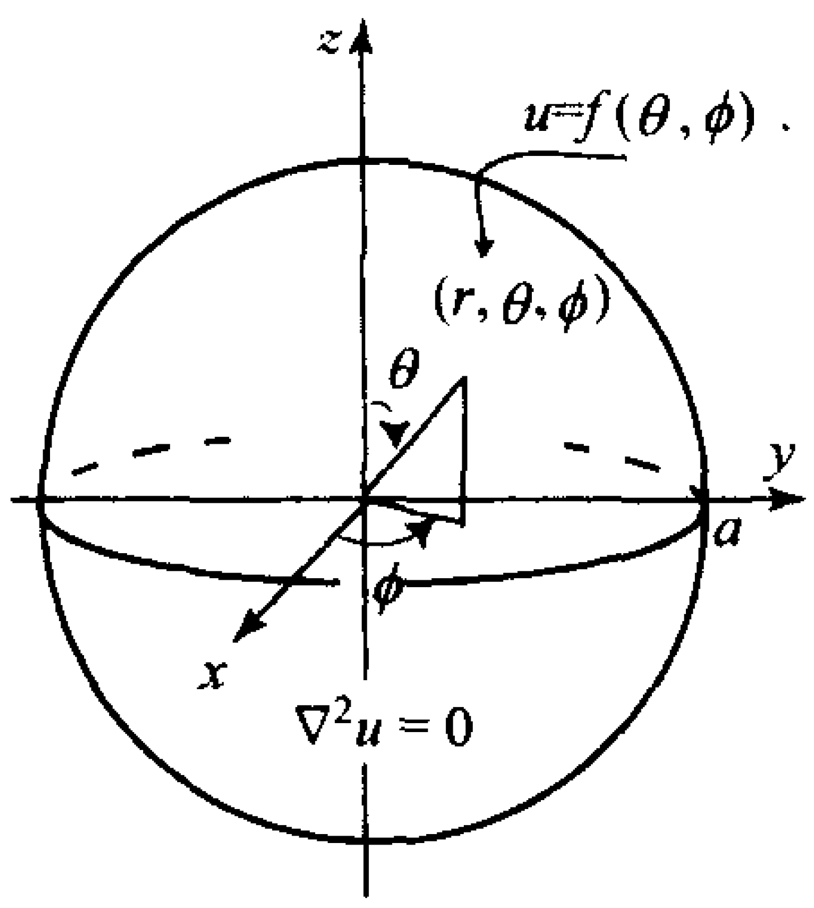


图 5 球中的狄利克雷问题

$$f(\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{nm} Y_{n,m}(\theta,\phi),$$

这就是 f 的球面调和函数展开式．因此，A_{nm} 由(8)给出．总结我们的结果如下．

定理 3(球中的狄利克雷问题)　*满足边界条件(2)的方程(1)的解由(11)给出，其中，A_{nm} 是由(8)给出的边界函数 f 的球面调和函数系数．*

把球中狄利克雷问题的解(11)与 4.4 节圆盘上的狄利克雷问题的解(4)相比较，发现两种情况下，解都是用边界函数的"傅里叶系数"完美地表示出来．

286

例 2　单位球内的狄利克雷问题

求解以例 1 中的函数 f 为边值的单位球内的狄利克雷问题，可以借助定理 3，得到解

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{nm} r^n Y_{n,m}(\theta,\phi),$$

其中，A_{nm} 由(9)式给出．用例 1 的数据，得到下面的解的部分和近似：

$$u(r,\theta,\phi) \approx \sum_{n=0}^{2}\sum_{m=-n}^{n} A_{nm} r^n Y_{n,m}(\theta,\phi)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{8} r\sin\phi\sin\theta - \frac{5}{8\pi} r^2 \sin 2\phi \sin^2\theta.$$

如果 $u(r, \theta, \phi)$ 表示球内的稳态温度分布，则可以用这个部分和近似球内各点的温度值. ■

球面调和函数的微分方程

为进一步的应用，我们需要知道球面调和函数的微分方程. 推导这个方程的过程，要从拉普拉斯方程(1)的解开始. 已经知道拉普拉斯方程的乘积解具有形式 $u(r, \theta, \phi)=r^n Y_{n,m}(\theta, \phi)$，其中，$n=0, 1, 2, \cdots$ 及 $|m|\leqslant n$. 并知径向部分，r^n，满足欧拉方程. 我们的兴趣在于确定球面调和函数的微分方程. 为此，在(1)中分离变量，令

$$u(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi),$$

使得 θ 和 ϕ 同时变化. 代入(1)，进行通常的分离变量具体计算，正如所期望的，得到 R 的欧拉方程和下面的关于 Y 的方程

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \csc^2\theta\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + \mu Y = 0, \tag{12}$$

其中，μ 是分离常数. 由拉普拉斯方程解的性质，我们又可以断言：当 $\mu=\mu_n=n(n+1)$，$n=0, 1, 2, 3, \cdots$，(12)有非平凡解. 对每个 $\mu=n(n+1)$，对应有 $2n+1$ 个球面调和函数解 $Y(\theta, \phi)=Y_{n,m}(\theta, \phi)$，$|m|\leqslant n$. 总结这些结果如下. 287

定理 4(球面调和函数的微分方程) *方程*

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \csc^2\theta\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + \mu Y = 0,$$

其中，$0<\theta<\pi$，$0<\phi<2\pi$，具有非平凡有界解，并且当

$$\mu = n(n+1), \quad n = 0,1,2,3,\cdots$$

时，它们关于 ϕ 是以 2π 为周期的. 对每个这样的值 μ(或叫特征值)，有 $2n+1$ 个非平凡解(或叫特征函数)，它们由下面的球面调和函数给出：

$$Y(\theta,\phi) = Y_{n,m}(\theta,\phi), \quad |m|\leqslant n.$$

这些特征函数的显式表达式由(4)给出，并满足定理 1 的正交性关系.

习题 5.3

1. **球面调和函数**. 用(4)和 5.7 节例 1 中的相伴勒让德函数列表，推导下面的球面调和函数的列表，取 $n=0, 1, 2, 3$ 及 $m=-n, \cdots, n$.

(a) $(n=0)Y_{0,0}(\theta, \phi)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

(b) $(n=1)Y_{1,-1}(\theta, \phi)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2\pi}}\sin\theta e^{-i\phi}$； $Y_{1,0}(\theta, \phi)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{\pi}}\cos\theta$；

$Y_{1,1}(\theta, \phi)=-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2\pi}}\sin\theta e^{i\phi}$.

(c) $(n=2)Y_{2,-2}(\theta, \phi)=\dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{5}{6\pi}}\sin^2\theta e^{-2i\phi}$； $Y_{2,-1}(\theta, \phi)=\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{5}{6\pi}}\cos\theta\sin\theta e^{-i\phi}$；

$Y_{2,0}(\theta, \phi)=\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{5}{\pi}}(-1+3\cos^2\theta)$；

$$Y_{2,1}(\theta,\phi)=-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{6\pi}}\cos\theta\sin\theta e^{i\phi};\ Y_{2,2}(\theta,\phi)=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{6\pi}}\sin^2\theta e^{2i\phi}.$$

(d) $(n=3)$ $Y_{3,-3}(\theta,\phi)=\frac{1}{8}\sqrt{\frac{35}{\pi}}\sin^3\theta e^{-3i\phi}$; $Y_{3,-2}(\theta,\phi)=\frac{15}{4}\sqrt{\frac{7}{30\pi}}\cos\theta\sin^2\theta e^{-2i\phi}$;

$$Y_{3,-1}(\theta,\phi)=\frac{1}{8}\sqrt{\frac{21}{\pi}}(-1+5\cos^2\theta)\sin\theta e^{-i\phi};\ Y_{3,0}(\theta,\phi)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{\pi}}(-3\cos\theta+5\cos^3\theta);$$

$$Y_{3,1}(\theta,\phi)=\frac{1}{8}\sqrt{\frac{21}{\pi}}(1-5\cos^2\theta)\sin\theta e^{i\phi};\ Y_{3,2}(\theta,\phi)=\frac{15}{4}\sqrt{\frac{7}{30\pi}}\cos\theta\sin^2\theta e^{2i\phi};$$

288

$$Y_{3,3}(\theta,\phi)=-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{35}{\pi}}\sin^3\theta e^{3i\phi}.$$

2. 对 $n=0$，1 和 $m=-n$，…，n，利用习题 1 中的显式表达式，检验正交性关系式(5)和(6).
3. 用 5.7 节中相伴勒让德函数的正交性证明正交性关系式(5)和(6).
4. (a)证明：$\overline{Y}_{n,m}(\theta,\phi)=(-1)^m Y_{n,-m}(\theta,\phi)$.

   (b)证明：$Y_{n,m}$关于 ϕ 是以 2π 为周期的.
5. **关于例 1 的更多问题.**

   (a)计算出现在(9)式中的积分 $\int_0^{2\pi}\phi e^{-im\phi}d\phi$.

   (b)手算表 1 中前两行的值.

   (c)利用勒让德多项式的性质解释 $A_{n0}=0(n=1,2,\cdots)$的原因.

   (d)对 $n=3$，4 和 $-n\leqslant m\leqslant n$，计算 A_{nm}. 做出 f 的球面调和函数级数的部分和，取 $n=0,1,\cdots,4$ 及 $-n\leqslant m\leqslant n$. 利用图形说明级数收敛于 f.
6. **专题问题**：在计算(9)中的系数时，遇到积分

$$I_{nm}=\int_{-1}^{1}P_n^m(s)ds.$$

事实上，这个积分的直接计算是相当困难的. 证明下述性质.

(a)若 $n+m$ 是奇数，则 $I_{nm}=0$.

(b)$I_{00}=2$ 及 $I_{n0}=0$，当 $n=1,2,3,\cdots$.

(c)斯蒂芬·蒙哥马利-史密斯教授对 I_{nm} 给出了下面的公式：

$$I_{nm}=c_{nm}\frac{4m\left[\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\right]^2(-1+m+n)!}{n(1+n)!\,\Gamma\left(1+\frac{-m+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)},$$

其中，

$$c_{nm}=\left\{\frac{-1+(-1)^n}{2}+\frac{1+(-1)^m}{2}\operatorname{sgn}m\right\}\frac{1+(-1)^{n+m}}{2},$$

并且分别按照 m 是负值，0 或正值，令 $sgn=-1$，0，或 1. 用前两题(a)和(b)，检验这个公式，取 $n=1,2,\cdots,10$ 并令 m 从 $-n$ 变化到 n. 当 $m=-n$ 时，按这个公式的写法就有问题了. 在此情况下，应该计算 $\lim\limits_{s\to-n}I_{ns}$. 可以验证

$$\lim_{s\to-n}\frac{(-1+s+n)!}{\Gamma\left(\frac{s+n}{2}\right)}=\frac{1}{2}.$$

$c_{-n,n}=-1$，于是，可以令

$$I_{n,-n} = \frac{2}{(1+n)!n!}\left[\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\right]^2.$$

这是当 $m=-n$ 时，计算积分 I_{nm} 更快的方法.

(d) 作为这个专题具有挑战性的部分，试证明(c)的结果.

289

7. **球面内的稳态问题.** 按照列出的步骤，计算单位球内的稳态温度，已知球面上介于经线 $\phi=-\frac{\pi}{4}$ 和 $\phi=\frac{\pi}{4}$ 之间的楔形部分保持温度 100 度，球面上其他部分保持 0 度.

(a)令 $u(r, \theta, \phi)$ 为球面内的稳态温度. 断言：u 由(11)给出，其中

$$A_{nm} = 100\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{\pi}\overline{Y}_{n,m}(\theta,\phi)\sin\theta\,d\theta\,d\phi.$$

(b)用例 1 中球面调和函数的显式表达式，获得下面对应于 $n=0$，1，2 和 $m=-n$，…，n 的系数表.

球面调和函数系数 A_{nm}

n/m	-2	-1	0	1	2
0			$50\sqrt{\pi}$		
1		$25\sqrt{3\pi}$	0	$-25\sqrt{3\pi}$	
2	$100\sqrt{\frac{5}{6\pi}}$	0	0	0	$100\sqrt{\frac{5}{6\pi}}$

(c)利用(b)中的系数表和习题 1 中的球面调和函数列表，求解的部分和近似值

$$u(r,\theta,\phi) \approx 25 + 75\frac{\sqrt{2}}{2}r\sin\theta\cos\phi + 125r^2\ \frac{1}{\pi}\sin^2\theta\cos 2\phi.$$

(d)在单位球面内的各个点计算这个部分和的值，从而得到球面内温度分布的一个印象. 这些值与你的直观印象一致否？如例 1 所做，用图形说明当 $r\to 1$ 时，级数解收敛到边界函数.

8. 用 $f(\theta, \phi)=\frac{1}{\pi^2}\phi(2\pi-\phi)$ 重做例 1. 用计算机计算球面调和函数系数. 在你证明这个球面调和函数级数的收敛性时，你会得到更好的图形. 你能验证这个事实吗？

在习题 9～12 中，用给定的边界函数，并遵循习题 7 中的步骤，求解单位球面内的拉普拉斯方程.

9. $f(\theta, \phi)=Y_{0,0}(\theta, \phi)$.

10. $f(\theta, \phi)=Y_{1,0}(\theta, \phi)+3Y_{1,1}(\theta, \phi)$.

11. $f(\theta, \phi)=\begin{cases}50 & \text{如果} \frac{-\pi}{3}<\phi<\frac{\pi}{3},\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$

12. $f(\theta, \phi)=\begin{cases}100 & \text{如果 } 0<\phi<\frac{\pi}{2},\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$

13. **不依赖于 ϕ 时的对称情况.**

(a)如果 f 与 ϕ 无关，定理 2 如何叙述？

(b)用本节的定理 3 证明 5.2 节的定理 1.

14. **作为均值的球心温度.** 因为狄利克雷问题(11)的解表示稳态温度分布，故球心($r=0$)的温度应该等于边界温度的平均值. 把 $r=0$ 代入(11)求球心的温度，并解释你的答案如何作为边界温度的平均值.

290

15. **专题问题：两个同心球面所界定区域上的狄利克雷问题.**

(a)证明：在区域 $a<r$，$0<\theta<\pi$，$0<\phi<2\pi$ 上由(1)和(2)给定的狄利克雷问题的解是

$$u(r,\theta,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_{nm}\left(\frac{r}{a}\right)^{-(n+1)}Y_{n,m}(\theta,\phi),$$

其中，A_{nm} 由(8)确定. [提示：回到 5.1 节(16)，选取在 $r>a$ 上有界的解.]

(b)在区域 $r_1<r<r_2$，$0<\theta<\pi$，$0<\phi<2\pi$ 内求解拉普拉斯方程(1)，已知边界条件 $u(r_1,\theta,\phi)=f_1(\theta,\phi)$，$u(r_2,\theta,\phi)=f_2(\theta,\phi)$. [提示：见 5.2 节的习题 14.]

5.4 亥姆霍兹方程及其对泊松方程、热传导方程和波动方程的应用

本节通过考察亥姆霍兹方程和关于热传导方程，波动方程和泊松方程的边值问题，完成在球面坐标中对问题的处理. 我们从求解亥姆霍兹方程的特征值问题开始. 余下的边值问题将用特征函数展开方法求解. 这就是在 3.9 和 4.6 节采用的方法，那里是在笛卡儿坐标和极坐标中处理类似的问题.

球中的亥姆霍兹方程

考虑特征值问题

$$\nabla^2\Psi(r,\theta,\phi)=-k\Psi(r,\theta,\phi),\tag{1}$$

$$\Psi(a,\theta,\phi)=0,\tag{2}$$

其中，$0<r<a$，$0<\theta<\pi$，$0<\phi<2\pi$，k 是非负常数，$\nabla^2\Psi$ 是 Ψ 在球面坐标中的拉普拉斯算子. 进而，要求 Ψ 有界并且关于 ϕ 是 2π-周期的. 方程(1)是**球面坐标中的亥姆霍兹方程**. 特征值问题(1)～(2)是齐次的，可以用分离变量法求解. 为此，令

$$\Psi(r,\theta,\phi)=R(r)Y(\theta,\phi).\tag{3}$$

我们的记号已经表明，Y 中的解将涉及球面调和函数.

(注意此处不像前面的分离变量法，这里不分离变量 θ 和 ϕ. 其原因当推导 Y 的方程时就明白了). 为了在(1)中分离变量，利用(3)和拉普拉斯算子在球面坐标中的显式表达式(5.1 节的(1))，得到 [291]

$$r^2R''+2rR'+(kr^2-\mu)R=0,\quad R(a)=0\tag{4}$$

和

$$\frac{\partial^2Y}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}+\csc^2\theta\frac{\partial^2Y}{\partial\phi^2}+\mu Y=0,\tag{5}$$

其中，μ 是分离常数而 Y 是 ϕ 的 2π-周期函数. (分离变量的细节留作习题 1.) 借助 5.3 节定理 4，可知(5)是**球面调和函数的微分方程**. 它有非平凡有界解并且当

$$\boxed{\mu=n(n+1),\quad n=0,1,2,\cdots}\tag{6}$$

时，此解关于 ϕ 是 2π-周期的. 对每个 $\mu=n(n+1)$，存在 $2n+1$ 个解，即**球面调和函数**

$$\boxed{Y_{n,m}(\theta,\phi)m=-n,-n+1,\cdots,0,\cdots,n-1,n.}\tag{7}$$

把(6)中 μ 的值代入(4)，并令

$$k=\lambda^2,$$

便得到 R 的**球面贝塞尔方程**

$$\boxed{r^2R''+2rR'+(\lambda^2r^2-n(n+1))R=0,\quad R(a)=0}\tag{8}$$

(见 4.8 节例 2). 对每个 n，有无穷多个非平凡解

$$\boxed{R_{n,j}(r) = j_n(\lambda_{n,j}r), \quad n = 0,1,2,\cdots, j = 1,2,\cdots,} \tag{9}$$

其中，

$$\boxed{\lambda = \lambda_{n,j} = \frac{\alpha_{n+1/2,j}}{a},} \tag{10}$$

292

$\alpha_{n+1/2,j}$是贝塞尔函数 $J_{n+\frac{1}{2}}$ 的第 j 个正零点，而 j_n 是**第一类球面贝塞尔函数**. 它用贝塞尔函数定义如下：

$$\boxed{j_n(r) = \left(\frac{\pi}{2r}\right)^{1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(r).} \tag{11}$$

现在，(1)和(2)的完全解可以用球面调和函数和球面贝塞尔函数的乘积叙述如下.

定理 1(球中的亥姆霍兹方程) 特征值问题(1)～(2)具有特征值 $k=\lambda^2$，其中，$\lambda=\lambda_{n,j}$ 如(10)所示. 每个特征值对应于 $2n+1$ 个特征函数

$$\Psi_{jnm}(r,\theta,\phi) = j_n(\lambda_{n,j}r)Y_{n,m}(\theta,\phi), \tag{12}$$

其中，$|m| \leqslant n$.

特征函数(12)满足正交性关系，我们将用这个性质展开定义在球内的函数. 用球面调和函数的正交性和球面贝塞尔函数的正交性容易验证下面的结果. (见习题 3.)

定理 2(亥姆霍兹方程解的正交性) 当 $j=1, 2, \cdots, n=0, 1, 2, \cdots, |m| \leqslant n$ 时，我们有

$$\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} j_n(\lambda_{n,j}r)Y_{n,m}(\theta,\phi)j_{n'}(\lambda_{n',j'}r)\overline{Y}_{n',m'}(\theta,\phi)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r = 0, \tag{13}$$

这里，$(j, n, m) \neq (j', n', m')$，以及

$$\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} j_n^2(\lambda_{n,j}r)\,|Y_{n,m}(\theta,\phi)|^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r = \frac{a^3}{2}j_{n+1}^2(\alpha_{n+\frac{1}{2},j}), \tag{14}$$

这里，$\alpha_{n+1/2,j}$是 $J_{n+\frac{1}{2}}$ 的第 j 个正零点.

注意，定理 2 中的积分是关于球面坐标中的体积微元 $r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r$ 进行的. 下一个结果，即定理 3 指出：定义在球中的函数可以用定理 1 中的特征函数展开为级数. 这些级数中的系数用球面坐标中的体积微元的积分来确定. 如大家所料，这些级数必须包含所有的特征函数；因此需要对三个下标求和.

本节的定理 2 和定理 3 是 4.6 节定理 1 和定理 2 在高维中的翻版. 在这两种情形，亥姆霍兹方程的特征函数被用来展开定义在圆盘上(4.6 节)和球中(5.4 节)的函数.

293

定理 3(定义在球中的函数的级数展开) 令 $f(r, \theta, \phi)$是定义在 $0<r<a$，$0<\theta<\pi$，$0<\phi<2\pi$ 中的且关于 ϕ 是以 2π 为周期的平方可积函数，则有

$$f(r,\theta,\phi) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{jnm}j_n(\lambda_{n,j}r)Y_{n,m}(\theta,\phi), \tag{15}$$

其中，

$$A_{jnm} = \frac{2}{a^3 j_{n+1}^2(\alpha_{n+\frac{1}{2},j})} \times \int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(r,\theta,\phi)j_n(\lambda_{n,j}r)\overline{Y}_{n,m}(\theta,\phi)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r. \tag{16}$$

现在，我们用特征函数展开法去处理边值问题. 其想法来源于 3.9 节和 4.6 节中对低维问题的处理.

球中的泊松方程

考察在一个球形体内的稳态温度分布，体内具有与时间无关的热源，而表面保持一定的温度分布，这个现象用**泊松方程**

$$\nabla^2 u(r,\theta,\phi) = f(r,\theta,\phi) \tag{17}$$

来模拟，其中，$0<r<a$，$0<\theta<\pi$，$0<\phi<2\pi$，并附有**边界条件**

294

$$u(a,\theta,\phi) = g(\theta,\phi). \tag{18}$$

如低维的情况时所做，第一步是将原问题化为为两个子问题：一个具有边界数据(18)的狄利克雷问题，及一个具有零边界数据的泊松问题(见图 1). 对狄利克雷问题，可参考前一节. 因此，剩下的问题是求解具有齐次边界条件

$$u(a,\theta,\phi) = 0 \tag{19}$$

的(17).

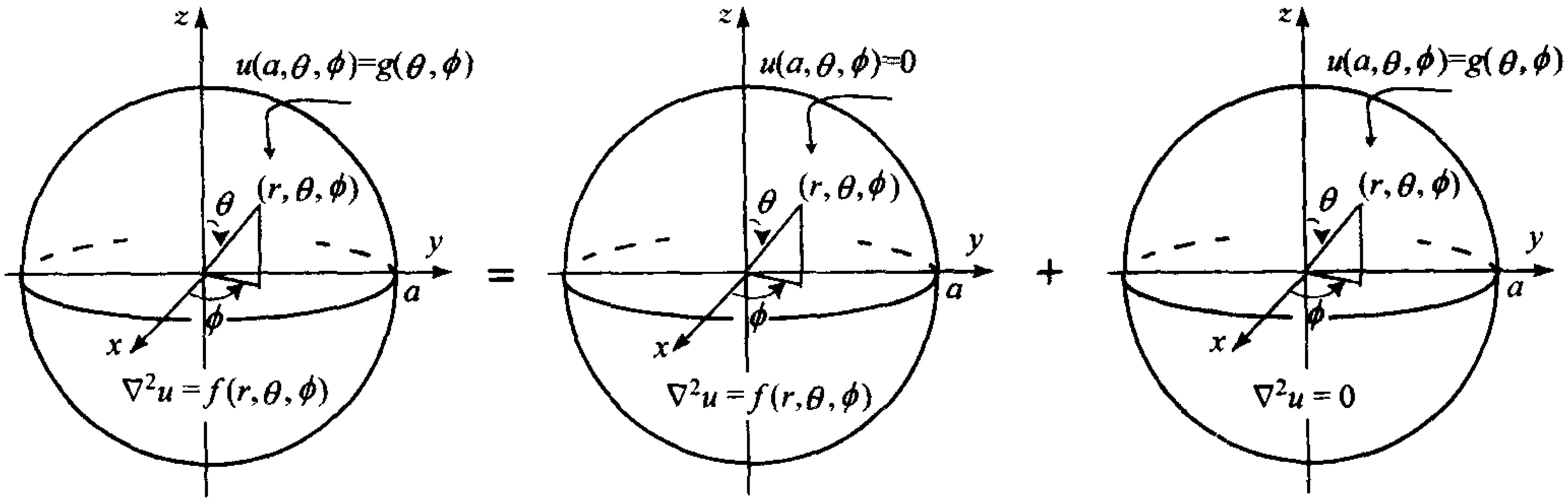


图 1 一般泊松问题的分解

我们用特征函数展开法求解(17)和(19). 因此，开始就设解具有用亥姆霍兹问题(1)和(2)的特征函数展开为级数的形式. 于是，

$$\boxed{u(r,\theta,\phi) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} B_{jnm} j_n(\lambda_{n,j} r) Y_{n,m}(\theta,\phi).} \tag{20}$$

为确定 B_{jnm}，把三重级数代入(17)，由于每一项都满足(1)及 $k=\lambda_{n,j}^2$，便得

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} -\lambda_{n,j}^2 B_{jnm} j_n(\lambda_{n,j} r) Y_{n,m}(\theta,\phi) = f(r,\theta,\phi).$$

把最后的方程看作 f 的特征函数展开式，由定理 3 得

$$\boxed{B_{jnm} = \frac{-1}{\lambda_{n,j}^2} A_{jnm},} \tag{21}$$

此处，A_{jnm} 由(16)给出．这就完全确定了泊松问题的解．总结我们的结果如下．

定理 4(球中的泊松问题)　泊松问题(17)～(18) 的解是

$$u(r,\theta,\phi)=u_1(r,\theta,\phi)+u_2(r,\theta,\phi),$$

其中，u_1 是具有零边界数据的泊松问题的解，而 u_2 是满足边界条件(18)的半径为 a 的球内的狄利克雷问题的解．函数 u_1 由(20)和(21)给出，而函数 u_2 由 5.3 节定理 3 给出．(在 5.3 节级数解(11)中的系数是边界函数 g 的球面调和函数系数.)　[295]

非齐次热传导问题

下一个例子是球内的热传导问题，内部具有与时间无关的热源(非齐次热传导方程)，已知初始温度分布和球面的温度保持为 0 度(齐次边界条件)．更一般的问题涉及非齐次边界条件和依赖于时间的热源，对此可用同样的方法求解，我们将在习题中阐述这部分内容.

考察球面坐标中的非齐次热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}+\csc^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\right)\right\}+q(r,\theta,\phi), \tag{22}$$

其中，$0<r<a$，$0<\theta<\pi$，$0<\phi<2\pi$，$t>0$，**边界条件**是

$$u(a,\theta,\phi,t)=0, \tag{23}$$

初始条件是

$$u(r,\theta,\phi,0)=f(r,\theta,\phi). \tag{24}$$

我们用特征函数展开法求解这个问题，因此，开始就设解具有用亥姆霍兹问题(1)～(2)的特征函数展开为级数的形式．于是，

$$\boxed{u(r,\theta,\phi,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}B_{jnm}(t)j_n(\lambda_{n,j}r)Y_{n,m}(\theta,\phi),} \tag{25}$$

其中，系数 $B_{jnm}(t)$是 t 的函数，及 $\lambda_{n,j}=\frac{\alpha_{n+1/2,j}}{a}$．现在，用定理 3 展开 f 和 q，得

$$\boxed{f(r,\theta,\phi)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}f_{jnm}j_n(\lambda_{n,j}r)Y_{n,m}(\theta,\phi)} \tag{26}$$

和

$$\boxed{q(r,\theta,\phi)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}q_{jnm}j_n(\lambda_{n,j}r)Y_{n,m}(\theta,\phi),} \tag{27}$$

其中，f_{jnm} 和 q_{jnm} 分别用 f 和 q 借助于(16)计算得到．为完成求解，我们必须确定(25)中的系数 $B_{jnm}(t)$．你将看到，这些系数事实上是简单的一阶常微分方程的解．把 u 的表达式(25)代入热传导方程(22)．由于级数的每一项是(1)的解及 $k=\lambda_{n,j}^2$，并用(27)，得到　[296]

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}B'_{jnm}(t)j_n(\lambda_{n,j}r)Y_{n,m}(\theta,\phi)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(-\lambda_{n,j}^2c^2B_{jnm}(t)+q_{jnm})j_n(\lambda_{n,j}r)Y_{n,m}(\theta,\phi).$$

由此得到 $B_{jnm}(t)$ 的微分方程

$$B'_{jnm}(t)+\lambda_{n,j}^2c^2B_{jnm}(t)=q_{jnm}. \tag{28}$$

这个方程的初始条件可用(24)、(25)和(26)得到

$$B_{jnm}(0)=f_{jnm}. \tag{29}$$

可以直接验证初值问题(28)～(29)的解是

$$\boxed{B_{jnm}(t)=\mathrm{e}^{-\lambda_{n,j}^2c^2t}\left(f_{jnm}-\frac{q_{jnm}}{c^2\lambda_{n,j}^2}\right)+\frac{q_{jnm}}{c^2\lambda_{n,j}^2}.} \tag{30}$$

这就确定了(25)中的未知系数，从而完成了热传导问题的求解. 注意，最后的答案包含了 f 和 q 的特征函数展开的系数和熟悉的"热核" $\mathrm{e}^{-\lambda_{n,j}^2c^2t}$.

球中的波动方程

作为最后的应用，我们考虑球面坐标中的波动方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=c^2\left\{\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}+\csc^2\theta\frac{\partial^2u}{\partial\phi^2}\right)\right\}, \tag{31}$$

其中，$0<r<a$，$0<\theta<\pi$，$0<\phi<2\pi$，$t>0$，**边界条件**是

$$u(a,\theta,\phi,t)=0, \tag{32}$$

初始条件是

297

$$u(r,\theta,\phi,0)=f(r,\theta,\phi),\quad u_t(r,\theta,\phi,0)=g(r,\theta,\phi). \tag{33}$$

用特征函数展开法解这个问题，设解 u 是由亥姆霍兹问题(1)～(2)的特征函数表示的级数. 我们得到下面的解.

定理 5(球中的波动方程) 波动方程的边值问题(31)～(33)的解是

$$u(r,\theta,\phi,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}j_n(\lambda_{n,j}r)Y_{n,m}(\theta,\phi)\times(C_{jnm}\cos c\lambda_{n,j}t+D_{jnm}\sin c\lambda_{n,j}t), \tag{34}$$

其中，

$$C_{jnm}=\frac{2}{a^3j_{n+1}^2(\alpha_{n+\frac{1}{2},j})}\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(r,\theta,\phi)j_n(\lambda_{n,j}r)\times\overline{Y}_{n,m}(\theta,\phi)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r \tag{35}$$

和

$$D_{jnm}=\frac{2}{c\lambda_{nj}a^3j_{n+1}^2(\alpha_{n+\frac{1}{2},j})}\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}g(r,\theta,\phi)j_n(\lambda_{n,j}r)\times\overline{Y}_{n,m}(\theta,\phi)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r. \tag{36}$$

有趣的推导细节非常类似于热传导方程的相应的推导，把它留作习题.

习题 5.4

1. 从(1)和(2)推导(5)和(4).
2. 用球面贝塞尔函数和球面调和函数的显式表达式证明(13)和(14)，取 $j=1$，$n=0$，1，及 $m=-1$，0，1.

3. (a)用球面贝塞尔函数(4.8 节习题 45)和球面调和函数(5.3 节)的正交性质证明(13)和(14).

   (b)用定理 2 验证(16).

4. 如果 f 只与 r 有关，试问定理 3 简化为什么?

5. 在单位球内定义函数 $f(r)=1$，$0<r<1$. 对 f 计算级数展开式(15).

6. 在单位球内定义函数 $f(r)=1$，若 $0<r<1/2$；$f(r)=0$，若 $1/2<r<1$. 计算 f 的级数展开式(15). 298

7. 在单位球内定义函数 $f(r)=r^2$. 计算 f 的级数展开式(15).

8. 在单位球内定义函数 $f(r, \phi)=r^2\phi$. 计算 f 的级数展开式(15).

9. 令 $f=1$，$g=0$，求解单位球内的泊松问题(17)、(19).

10. 令 $f=1$，$g=\frac{1}{2\pi}\phi$，求解单位球内的泊松问题(17)、(18).

11. 推导(29)，然后求解(28)～(29)得到(30).

12. 如果 $q=0$，热传导问题(22)～(24)的解是什么?

13. **专题问题：具有依赖于时间的热源的问题.**

    求解热传导问题(22)～(24)，它具有依赖于时间的热源 $q(r, \theta, \phi, t)$. [提示：如下修正(22)～(24)的解. 在(27)中让系数 q_{jmn} 依赖于 t，(28)的右边依赖于 t. 而后仿照 3.9 节习题 18(c)求解(28)～(29).]

14. **一个非齐次热传导问题.** 求解热传导方程(22)，其中，初始条件为(24)，非齐次边界条件为 $u(a, \theta, \phi, t)=g(\theta, \phi)$. [提示：把问题分解为两个子问题. 见 4.4 节习题 17.]

15. **一个对称热传导问题.** 把半径为 $a=1$，温度为 30 度的实心球放入保持常温 0 度的冰箱内.

    (a)取 $c=1$，确定球内的温度 $u(r, \theta, \phi, t)$.

    (b)函数

$$\theta_4(u,q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nu$$

    叫做**椭圆 θ 函数**. 许多计算机系统中都有这个类型的函数. 用 θ_4 表示(a)中球心的温度，然后画出当 $t>0$ 时的温度图.

    (c)用(b)中的图形确定：球心的温度降到 10 度需要多长时间.

16. (a)求解单位球中的热传导问题，取 $c=1$，已知球面的温度是 0 度，初始温度分布是 $f(r, \theta, \phi)=r^2$. 设内部无热源.

    (b)画出当 $t>0$ 时的球心的温度图.

17. (a)求解单位球内的热传导问题(22)～(24). 取 $c=1$，$q=20r^2$，$f(r, \theta, \phi)=100$.

    (b)画出当 $t>0$ 时的球心的温度图.

18. **专题问题：球中的波动方程.** 推导(34)～(36). 299

5.5 勒让德微分方程

附录 A.4 和 A.5 对本节的方法做了全面的评述. 对那些不熟悉用幂级数法解常微分方程的读者，我们极力推荐他们阅读这两个附录.

勒让德微分方程

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \mu y = 0, \quad -1 < x < 1 \tag{1}$$

出现在球面坐标中求解拉普拉斯方程的过程中(见 5.1 节的(13)). 因此它是一个很重要的微分方程. 勒让德微分方程其实是一族微分方程，每一个方程对应一个参数 μ. 除以$(1-x^2)$，方

程变为

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{\mu}{1-x^2}y=0.$$

用几何级数展开，可以验证函数 $p(x)=-\dfrac{2x}{1-x^2}$和 $q(x)=\dfrac{\mu}{1-x^2}$在 0 点都有幂级数展开，其收敛半径都是 1. 由定理 1 和附录 A. 5 可知，(1)有两个线性无关解，它们由在$|x|<1$中收敛的幂级数给出. 为求得这些解，把 $y=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m$ 及其导数代入(1)，得到

$$(1-x^2)\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)a_m x^{m-2}-2x\sum_{m=1}^{\infty}ma_m x^{m-1}+\mu\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=0.$$

展开并重记下标，得

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m-\sum_{m=0}^{\infty}m(m-1)a_m x^m-\sum_{m=0}^{\infty}2ma_m x^m+\sum_{m=0}^{\infty}\mu a_m x^m=0.$$

这里，我们重记第 2 个和第 3 个级数的下标从 $m=0$ 开始，分别取代从 $m=2$ 和 $m=1$ 开始. 这没有造成差别，因为各项相加得 0. 合并这些级数并令系数为 0，得到两步递推关系式

$$(m+2)(m+1)a_{m+2}-[m(m+1)-\mu]a_m=0$$

或

$$a_{m+2}=\frac{m(m+1)-\mu}{(m+2)(m+1)}a_m.$$

因此，a_0 确定 a_2，后者确定 a_4，a_6，…，而 a_1 确定 a_3，后者确定 a_5，a_7，…. 利用这些系数，我们得到两个级数解，称它们是**勒让德函数**，一个级数只有 x 的偶次幂，另一个仅有 x 的奇次幂.

300

勒让德多项式

如果 μ 是形如 $n(n+1)$的非负整数，则递推关系表明 $a_{n+2}=0$，由此得到 $a_{n+4}=a_{n+6}=\cdots=0$. 因此，在这种情况下，其中一个勒让德函数是 n 次多项式，而另外一个是无穷级数，它收敛但是在区间(−1，1)中无界(见习题 25). 对 μ 的所有其他值，勒让德函数都是无穷级数且具有无穷多个非零项. 利用比率检验法和系数的递推公式可以证明，这些无穷级数解的收敛半径等于 1（习题 21). 还有，可以证明：除去(1)的多项式解，任何勒让德函数在一个或者两个端点 $x=\pm1$ 无界(见 N. N. Lebedev，*Special Functions and Their Applications*，Dover Publications，1972). 图 1 画出了当 $\mu=\dfrac{3}{4}$时两个勒让德函数的图形.

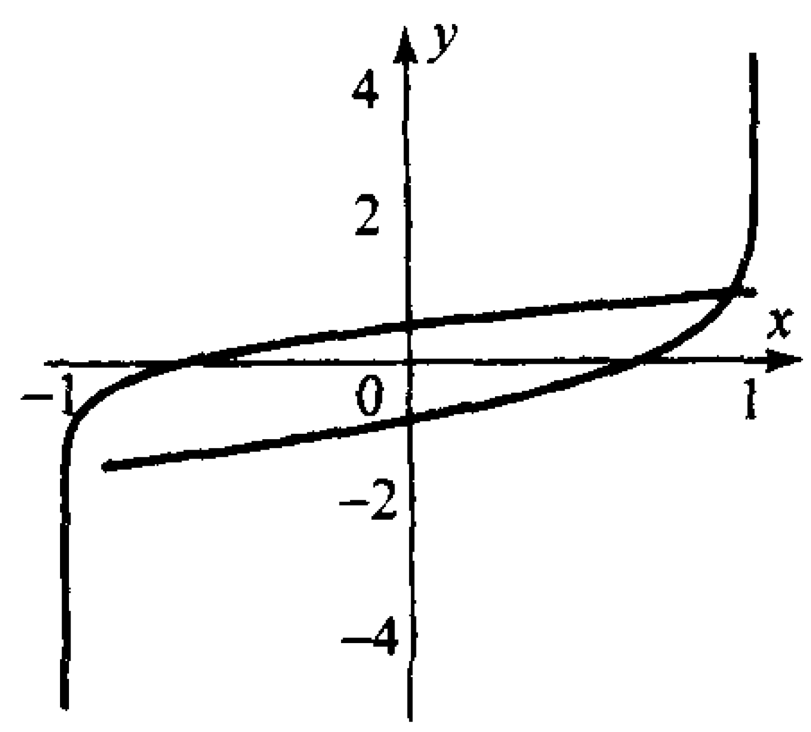


图 1　$\mu=\dfrac{3}{4}$时的勒让德函数

注意，每个函数在[−1，1]的一个端点爆破. 由于实际的原因，我们对(1)的有界解感兴趣. 从现在开始，我们只研究

$$\boxed{\mu=n(n+1),\quad n=0,1,2,\cdots}$$

的情形. 递推关系变为

$$\boxed{a_{m+2}=-\frac{(n-m)(n+m+1)}{(m+2)(m+1)}a_m,}\tag{2}$$

由此得到

$$a_2=-\frac{n(n+1)}{2!}a_0\qquad a_3=-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1$$

$$a_4=\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0\qquad a_5=\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1$$

$$a_6=-\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}=a_0$$

$$a_7=-\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}a_1.$$

因此，(1)的通解是

$$y(x)=a_0y_1(x)+a_1y_2(x),$$

其中，

$$y_1(x)=1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4-\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}x^6+\cdots\tag{3}$$

301

和

$$y_2(x)=x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5-\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}x^7+\cdots.\tag{4}$$

如果 n 是偶整数，于是从(2)可得 $a_{n+2}=0$，因此，$a_{n+4}=a_{n+6}=\cdots=0$. 于是，(3)化为具有偶数阶 n 的 n 次多项式，它只含 x 的偶次幂：

$$y_1=a_0+a_2x^2+\cdots+a_nx^n(n\text{ 为偶数}).\tag{5}$$

类似地，如果 n 是奇整数，(4)化为具有奇数阶 n 的 n 次多项式，它只含 x 的奇次幂：

$$y_2=a_1x+a_3x^3+\cdots+a_nx^n(n\text{ 为奇数}).\tag{6}$$

至此，解差一个常数唯一确定. 习惯上，取

$$\boxed{a_n=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}}\tag{7}$$

使多项式解正规化. 为计算其他的系数，需要一个逆方向的递推关系式，即由 a_m 确定 a_{m-2}. 为此，在(2)中用 a_{m+2} 表示 a_m，然后用 $m-2$ 代换 m，得

$$a_{m-2}=-\frac{m(m-1)}{(n-m+2)(n+m-1)}a_m.\tag{8}$$

用(7)和(8)，由 a_n 计算 a_{n-2}：

$$a_{n-2}=-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}a_n=-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}=-\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!}.$$

类似地，

$$a_{n-4}=-\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)}a_{n-2}=\frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!},$$

一般地，对 $2m\leqslant n$，有

302

$$a_{n-2m}=(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}.$$

具有这些系数的多项式解叫做 n 次**勒让德多项式**并记为 $P_n(x)$. 若 n 是偶数，令 $M=n/2$，若 n 是奇数，令 $M=(n-1)/2$，则 n 次勒让德多项式变为

$$\boxed{P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m}.} \tag{9}$$

前几个勒让德多项式是(见图 2)

$P_0(x)=1$　　$P_1(x)=x$

$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$　　$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$　　$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$

$P_6(x)=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$　　$P_7(x)=\frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x)$

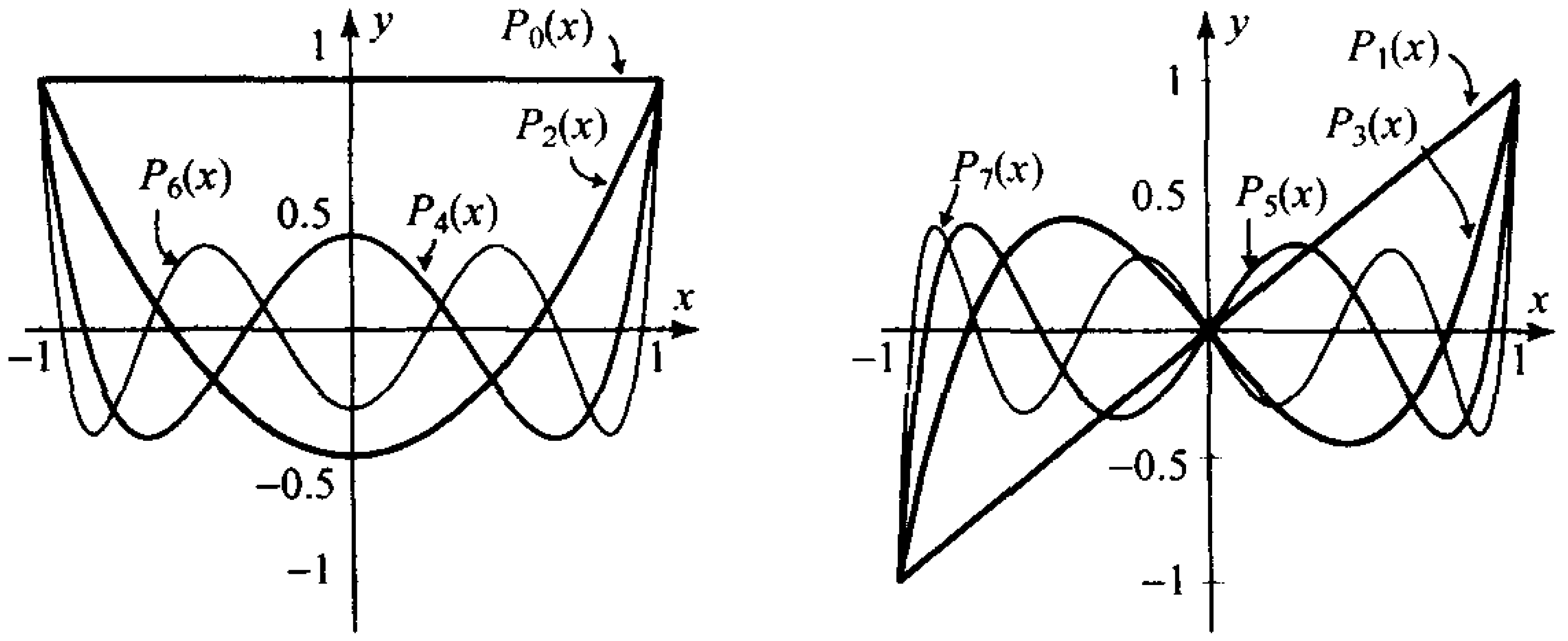


图 2　勒让德多项式

总结和进一步的性质

对 $n=0, 1, 2, \cdots$, n **次勒让德方程**

$$\boxed{(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0,\quad -1<x<1} \tag{10}$$

有两个线性无关解 y_1 和 y_2，它们由(3)和(4)给出. 其中一个是 n 次多项式而另一个是无穷级数解.

如果用(7)正规化多项式解，就得到由(9)给出的 n 次勒让德多项式，$P_n(x)$，(10)的另一个解适当正规化后记为 $Q_n(x)$，叫做**第二类勒让德函数**. 它在 $-1<x<1$ 中收敛，但在$[-1, 1]$上无界(见习题 23～27). 因为 P_n 在$[-1, 1]$上不恒等于 0 且有界，而 Q_n 无界，由此得 P_n 和 Q_n 是线性无关的. 因此，n 阶勒让德方程的通解是

303

$$\boxed{y(x)=c_1P_n(x)+c_2Q_n(x),} \tag{11}$$

其中，c_1 和 c_2 是任意常数.

例 1 勒让德微分方程的解

求微分方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$$

的通解.

解 这是 $n=3$ 的勒让德方程. 由(11)得通解 $y(x)=c_1P_3(x)+c_2Q_3(x)$. 因为 n 是奇数，无穷级数解由(3)给出并正规化. 我们有

$$y=c_1\left(\frac{1}{2}[5x^3-3x]\right)+c_2\left(1-6x^2+3x^4+\frac{4}{5}x^6-\cdots\right).$$ ■

例 2 初值问题

不要推导解，直接确定初值问题

$$(1-x^2)y''-2xy'+6y=0;\quad y(0)=1,y'(0)=1$$

在区间[−1，1]上有一个有界解.

解 此微分方程是 $n=2$ 时的勒让德方程. 由通解(11)得到一个有界解的唯一办法就是令 $c_2=0$. 此时，解是一个常数乘上 $P_2(x)$，故形式为 $y_1(x)=c_1P_2(x)=a_0+a_2x^2$. 容易看出，这个形式的任何多项式不会满足第二个初始条件，因为 $y_1'=2a_2x$，从而 $y_1'(0)=0$. 因此，这个初值问题没有有界解. 解肯定是无穷级数. 为求得这个级数的系数，从 $a_0=1$ 和 $a_1=1$ 开始，用 $n=2$ 时的(2)式生成其余的系数. ■

图 2 中的图形表明了勒让德多项式的许多有趣的性质. 为了易于参考，我们列出其中一些性质. 它们的证明留作习题或在下一节给出.

勒让德多项式进一步的性质

如果 n 是偶数，P_n 是偶函数；如果 n 是奇数，P_n 是奇函数. (12)

对任意 n，$P_n(1)=1$，$P_n(-1)=(-1)^n$. (13)

$|P_n(x)|\leqslant 1$，任意 n 和任意 $x\in[-1,1]$. (14)

$P_n(x)$ 在[−1，1]上有 n 个互不相同的零点. (15)

P_n 的所有相对最大值和最小值都在[−1，1]上出现. (16) 304

这些性质表明，在某种意义下，多项式 P_n 的有趣的性质都在区间[−1，1]上出现.

习题 5.5

1. 利用(9)推导：

 (a) $P_0(x)$，$P_1(x)$，$P_2(x)$.

 (b) $P_3(x)$，$P_4(x)$.

2. 利用(9)证明：

 (a)建立(12).

 (b) $P_{2n}(0)=(-1)^n\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ 及 $P_{2n+1}(0)=0$.

 (c) $P_{2n}'(0)=0$ 及 $P_{2n+1}'(0)=(2n+1)P_{2n}(0)$.

3. 用习题 2(b)获得下面有用的恒等式：

$$P_{2n}(0)-P_{2n+2}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!(4n+3)}{2^{2n+1}(n!)^2(n+1)}\qquad(n=0,1,2,\cdots).$$

4. 对前三个勒让德多项式证明下面的论断.

(a) n 次勒让德多项式是 n 阶勒让德微分方程的解.

(b) $P_n(1)=1$，$P_n(-1)=(-1)^n$.

计算下述积分.

5. $\int_{-1}^{1}P_3(x)\mathrm{d}x$.

6. $\int_{-1}^{1}P_2(x)P_3(x)\mathrm{d}x$.

7. $\int_{0}^{1}P_2(x)\mathrm{d}x$.

8. $\int_{-1}^{1}P_2^2(x)\mathrm{d}x$.

在习题 9～12 中，求已知微分方程的通解. 在每一个答案中至少写出级数展开式的两项.

9. $(1-x^2)y''-2xy'+30y=0$.

10. $(1-x^2)y''-2xy'+42y=0$.

11. $(1-x^2)y''-2xy'=0$.

12. $y''-\frac{2x}{(1-x^2)}y'+\frac{6}{(1-x^2)}y=0$.

在习题 13～16 中，不用求解，直接确定初值问题在区间$[-1，1]$上是否有有界解，如果有界，求其解.

13. $(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$；$y(0)=0$，$y'(0)=1$.

14. $(1-x^2)y''-2xy'+56y=0$；$y(0)=0$，$y'(0)=1$.

15. $(1-x^2)y''-2xy'+56y=0$；$y(0)=1$，$y'(0)=0$.

16. $(1-x^2)y''-2xy'+110y=0$；$y(0)=1$，$y'(0)=1$.

在习题 17～20 中，对给定的初值问题，借助于(2)确定级数解的前四个非零项.

17. $(1-x^2)y''-2xy'+\frac{3}{4}y=0$；$y(0)=1$，$y'(0)=1$.

18. $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$；$y(0)=1$，$y'(0)=0$.

19. $(1-x^2)y''-2xy'+3y=0$；$y(0)=0$，$y'(0)=1$.

20. $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$；$y(0)=1$，$y'(0)=1$.

21. 考虑不是多项式的勒让德函数(勒让德微分方程的解). 用比率检验法和系数的递推公式证明：勒让德函数的收敛半径等于 1.

305

专题问题：第二类勒让德函数. 做习题 22 及习题 23，24 中任一题.

22. (a)用降阶公式(附录 A. 3)对第二类勒让德函数推导下面的公式

$$Q_n(x)=P_n(x)\int\frac{1}{[P_n(x)]^2(1-x^2)}\mathrm{d}x\qquad(n=0,1,2,\cdots).$$

(积分差一个任意常数确定.)

(b)计算朗斯基行列式 $W(P_n(x),Q_n(x))$ 并证明它在 $-1<x<1$ 中任何点不等于零. 断言这两个解是线性无关的.

用习题 22 中的公式导出第二类勒让德函数的下述表示.

23. $Q_0(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

24. $Q_1(x)=-1+\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

25. **专题问题：第二类勒让德函数是无界的.** 这个专题的目的是推导下面的第二类勒让德函数的公式：对 $n=0, 1, 2, \cdots$,

$$Q_n(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+f_n(x),$$

其中 $f_n(x)$是 $n-1$ 次多项式，$n\geqslant 1$，$f_0(x)=0$.

(a)在推导这个公式之前，用它证明：当 $x\to\pm 1$ 时 $|Q_n(x)|\to\infty$；因此，$Q_n(x)$在$[-1, 1]$上无界.

(b)用习题 23 和 24 的结果，对 $n=0$ 和 1 证明这个公式.

(c)对 $n\geqslant 2$，令 $u(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$，$v(x)=u(x)P_n(x)$，及 $\alpha_n=n(n+1)$. 证明：$((1-x^2)u'(x))'=0$；等价的，$(1-x^2)u''(x)-2xu'(x)=0$.

(d)把 $v(x)=u(x)P_n(x)$代入 n 阶勒让德方程，证明：

$$(1-x^2)v''-2xv'+\alpha_n v=2P'_n(x).$$

[提示：用(c)及 P_n 是 n 阶勒让德方程的一个解.]

(e)记 $f_n(x)$是微分方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha_n y=-2P'_n(x)$$

的一个特解. 证明：可以取 $f_n(x)$是 $n-1$ 次多项式. [提示：如果 y 是一个 $n-1$ 次多项式，则$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha_n y$ 也是一个 $n-1$ 次多项式.]

(f)用(d)和(e)证明：$v(x)+f_n(x)$是 n 阶勒让德方程的解.

(g)证明：$v(x)+f_n(x)$在$[-1, 1]$上无界，于是断言：它是勒让德方程的第二个解，且不依赖于 $P_n(x)$. 我们可以取 $Q_n(x)=v(x)+f_n(x)$.

26. 遵循习题 25 中的步骤推导勒让德函数(图 3)

$$Q_2(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}(-1+3x^2)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

[306]

27. 遵循习题 25 中的步骤推导勒让德函数(图 3)

$$Q_3(x)=\frac{1}{6}(4-15x^2)+\frac{1}{4}(-3x+5x^3)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

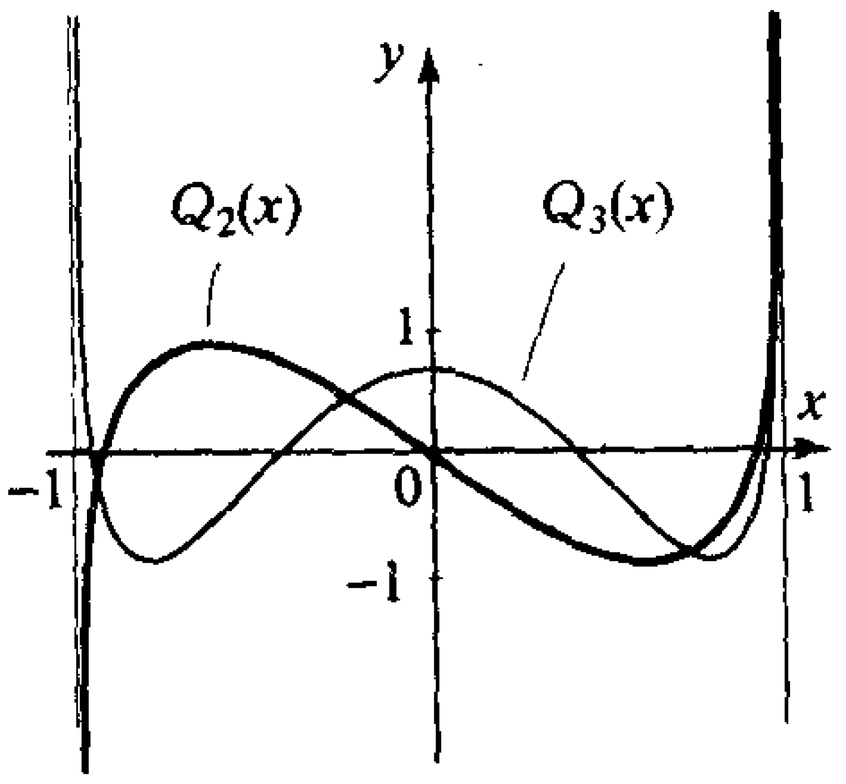


图 3 勒让德函数 $Q_2(x)$和 $Q_3(x)$

公式

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(x+\mathrm{i}\sqrt{1-x^2}\cos\theta)^n\mathrm{d}\theta\quad(n=0,1,2,\cdots)\qquad(17)$$

叫做**勒让德多项式的拉普拉斯积分公式**. 其中，i 像通常那样是复数，满足$(\mathrm{i})^2=-1$. 这个公式有很多有趣的应用，我们将在下面的习题中叙述. 关于它的证明，见 10.5 节的[1].

28. 用(17)推导前三个勒让德多项式.

29. (a)证明：当 $|x|\leqslant 1$ 时，有

$$\left|(x+\mathrm{i}\sqrt{1-x^2}\cos\theta)^n\right|\leqslant 1.$$

[提示：若 $\alpha+\mathrm{i}\beta$是复数，则 $|\alpha+\mathrm{i}\beta|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.]

(b)用(17)和(a)建立(14).

30. (a)用(17)建立(13).

(b)用(17)和 4.7 节的习题 42(沃利斯公式)计算 $P_n(0)$.

31. **专题问题：勒让德多项式的生成函数.**

我们知道，对任意实数 α 和非负整数 k，k 次二项式系数是

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\text{ 对 } k\geqslant 1$$

及 $\binom{\alpha}{0}=1$. 用这个记号，二项式定理是

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^{k},\quad -1<x<1.$$

(a)令 $\alpha=-\frac{1}{2}$，得到

$$\frac{1}{\sqrt{1+v}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^{2}}v^{k},\quad |v|<1.$$

(b)断言

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^{2}}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_{n}(x)u^{n},\quad |x|\leqslant 1,|u|<1.$$

307

这个公式叫做**勒让德多项式的生成函数**. 为证明它，在(a)中令 $v=-2xu+u^2$，展开，整理为 u 的幂级数. 注意到当 $|x|\leqslant 1$ 时，$|P_n(x)|\leqslant 1$(习题 29)，所以级数对所有给出的 x 和 u 的值收敛.

32. **三质点问题.** 考虑平面上三个质点 m_1，m_2 和 m_3 分别位于点 O，P 和 Q(图 4).

按照牛顿的引力定律，两个质点之间的吸引力的值与它们间的距离成反比. 因此，m_1 和 m_3 之间的力是 $F_1=\frac{Gm_1m_3}{r^2}$，这里的 G 是引力常数，$r=|OQ|$. m_2 和 m_3 之间的力用 ρ 可类似表示. 为了把这个力表示为 r 的函数，用三角形的余弦定律可知 $\rho^2=1+r^2-2r\cos\alpha$，便得

$$F_2=\frac{Gm_2m_3}{1+r^2-2r\cos\alpha}.$$

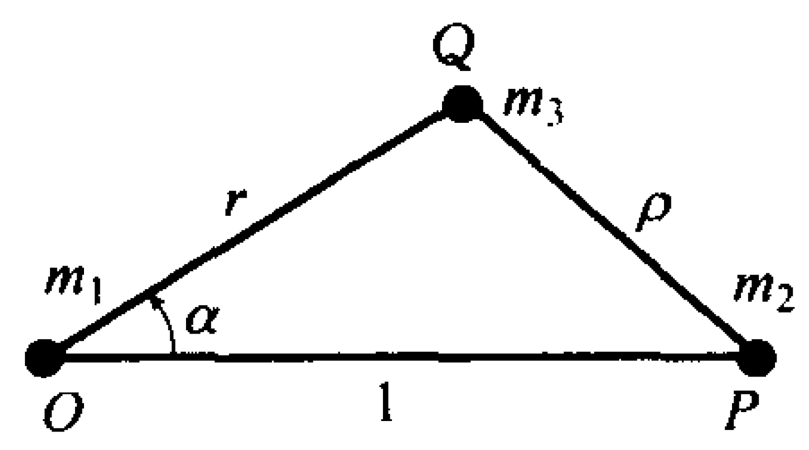


图 4 三个质点

对质点 m_2 用势函数，发现 m_2 的势是

$$\frac{Gm_2}{\rho}=\frac{Gm_2}{\sqrt{1+r^2-2r\cos\alpha}}.$$

用 u 代替 r 并令 $\cos\alpha=x$，我们发现：不管常数因子，这个势就是勒让德多项式的生成函数.

5.6 勒让德多项式和勒让德级数展开

本节的目的是建立勒让德多项式的正交性，并显示如何运用此性质把函数用勒让德多项式展开为级数. 我们从一个有用的公式开始.

罗德里格斯公式 对 $n=0$，1，2，…，有

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n. \tag{1}$$

这个简明的公式可用来作为勒让德多项式的定义. 由此公式显见，勒让德多项式是 n 次多项式. 这种类型的公式将用于确定其他有用的函数(见 5.7 节).

证明 由 5.5 节知

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m}, \tag{2}$$

其中，当 n 是偶数时，$M=n/2$，或者当 n 是奇数时，$M=(n-1)/2$. 对每一个 $0\leqslant m\leqslant M$，有

$$\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2m} = \frac{(2n-2m)!}{(n-2m)!}x^{n-2m},$$

对 $M<m\leqslant n$，有

$$\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2m} = 0.$$

308

于是，可以把(2)写为

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{m=0}^{n}(-1)^m \frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2m},$$

由于微分是线性算子，故有

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\sum_{m=0}^{n}(-1)^m \frac{n!}{m!(n-m)!}(x^2)^{n-m} = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,$$

这里的最后一个等式由二项式公式而得. ■

二项式公式为

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}a^{n-m}b^m.$$

运用罗德里格斯公式得到下面重要的恒等式，它与各种不同的勒让德多项式有关.

博内递推关系 对 $n=0, 1, 2, \cdots$，有

$$(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x). \tag{3}$$

博内关系有几个应用. 例如，只要知道 P_0 和 P_1，希望生成多少勒让德多项式就能生成多少(见习题 1). 下面相关的公式也是有用的：

$$P'_{n+1}(x) = P'_{n-1}(x) + (2n+1)P_n(x). \tag{4}$$

(3)和(4)的证明放在本节的附录中.

例 1 博内关系的一个应用

证明：对所有的 $n=0, 1, 2, \cdots$，有

(a)$P_n(1)=1$；(b)$P_n(-1)=(-1)^n$.

解 (a)我们用两步归纳法. 由于 $P_0(x)=1$ 及 $P_1(x)=x$，故对 $n=0$ 和 $n=1$，结论是显然的. 设结论对 $n-1$ 和 n 成立，即设 $P_{n-1}(1)=1$ 和 $P_n(1)=1$. 则有博内递推关系

$$(n+1)P_{n+1}(1) + nP_{n-1}(1) = (2n+1)P_n(1).$$

用归纳假设并化简得 $P_{n+1}(1)=1$. 因为结论对 $n=0$ 和 $n=1$ 为真，有由归纳法知，对一切 n 为真.

为证明(b)，用到如下事实：当 n 是偶数时，$P_n(x)$是偶函数，而当 n 是奇数时，$P_n(x)$是奇函数. 因此，当 n 是偶数时，有 $P_n(-1)=P_n(1)=1$，当 n 为奇数时，$P_n(-1)=-P_n(1)=-1$. 等价地，$P_n(-1)=(-1)^n$. ■

309

勒让德多项式的正交性

现在，我们可以建立勒让德多项式的正交性. 像贝塞尔函数那样，这个性质也是施图姆和刘维尔一般理论(第 6 章)的一个推论. 这里提供一个独立的叙述，进而说明一般的理论.

定理 1(勒让德多项式的正交性) (i)若 $m\neq n$，则

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(ii)对每个 n，有

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}.$$

特别地，在(i)中取 $m=0$，得

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\mathrm{d}x = 0, \quad 对所有\ n\neq 0.$$

证明[⊖] (i)考虑勒让德微分方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+\lambda(\lambda+1)y=0,$$

把它重写为

$$[(1-x^2)y']'=-\lambda(\lambda+1)y.$$

因为 P_m 和 P_n 分别是这个微分方程当 $\lambda=m$ 和 $\lambda=n$ 时的解，故得

$$-\lambda_m P_m = [(1-x^2)P'_m]', \quad 其中,\lambda_m = m(m+1),$$

$$-\lambda_n P_n = [(1-x^2)P'_n]', \quad 其中,\lambda_n = n(n+1).$$

用 $-P_n$ 乘第一个方程，p_m 乘第二个方程，然后两个方程相加，得

$$(\lambda_m-\lambda_n)P_mP_n = -[(1-x^2)P'_m]'P_n+[(1-x^2)P'_n]'P_m$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)(P_mP'_n-P'_mP_n)].$$

因此，

$$(\lambda_m-\lambda_n)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x$$

[310]

$$=[(1-x^2(P_m(x)P'_n(x)-P'_m(x)P_n(x))]\Big|_{x=-1}^{x=1}=0,$$

因为 $\lambda_m\neq\lambda_n$，(i)得证.

(ii) 对 n 和 $n-1$ 用博内递推关系得

$$(n+1)P_{n+1}+nP_{n-1}=(2n+1)xP_n$$

和

$$nP_n+(n-1)P_{n-2}=(2n-1)xP_{n-1}.$$

用 P_{n-1}乘第一个方程，p_n 乘第二个方程，然后对得到的方程从 $x=-1$ 到 $x=1$ 积分并用(i)，得

$$n\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)\mathrm{d}x=(2n+1)\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)\mathrm{d}x$$

和

$$n\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x=(2n-1)\int_{-1}^{1} xP_{n-1}(x)P_n(x)\mathrm{d}x.$$

比较这些方程的右端可得

⊖ 读者可以将此证明与贝塞尔函数的正交性证明进行比较，并注意两种情形下特殊形式的微分方程的使用.

$$(2n+1)\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,\mathrm{d}x = (2n-1)\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)\,\mathrm{d}x;$$

等价地，

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

由于 $P_0(x)=1$，于是，$\int_{-1}^{1} P_0{}^2(x)\,\mathrm{d}x = 2$．重复使用(5)，得到

$$\int_{-1}^{1} P_1^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(2-1)}{(2+1)}2 = \frac{2}{3};\quad \int_{-1}^{1} P_2^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(4-1)}{(4+1)}\,\frac{2}{3} = \frac{2}{5};$$

等等．简单的归纳论证便得(ii)． ■ [311]

勒让德级数

勒让德多项式的正交性可以用来把已知函数 f 展开为级数

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j P_j(x), \tag{6}$$

它叫做 f 的**勒让德级数展开**．系数 A_j 叫做 f **的第** j **个勒让德系数**．下面的定理在习题中将要用到，它给出一个函数可以展开为勒让德级数的充分条件和第 j 个系数的计算公式．注意这个定理的假设条件和诸如傅里叶展开及贝塞尔展开的假设条件的相似性．关于逐段光滑的定义，请参考 2.2 节．

定理 2(勒让德级数)　*设 f 是在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上逐段光滑的函数．则 f 有勒让德级数展开*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j P_j(x),$$

其中，

$$A_j = \frac{2j+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_j(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

对(开)区间 $(-1,1)$ 中的点 x，若 f 在 x 连续，勒让德级数收敛到 $f(x)$，在其他点收敛到 $(f(x+)+f(x-))/2$．

例 2　勒让德级数

(a)求图 1 中函数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } -1\leqslant x<0 \\ 1 & \text{如果 } 0\leqslant x\leqslant 1 \end{cases}$$

的前八个勒让德系数 A_0，A_1，…，A_7．

(b)在同一个坐标轴上，勾画 f 的图形和下述部分和的图形：$s_n(x) = \sum_{j=0}^{n} A_j P_j(x)$，$n=0$，1，3，7．描述部分和在区间 $[-1,1]$ 上的性质．

解　(a) 用(7)计算勒让德系数并注意到 $\int_{-1}^{1} f(x)P_j(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} P_j(x)\,\mathrm{d}x$．用 5.5 节的勒让德多项式表，我们得到 [312]

$$A_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 P_0(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 1\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

$$A_1 = \frac{3}{2}\int_0^1 P_1(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{3}{4},$$

$$A_2 = \frac{5}{2}\int_0^1 P_2(x)\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\int_0^1 \frac{3x^2-1}{2}\mathrm{d}x = 0,$$

$$A_3 = \frac{7}{2}\int_0^1 P_3(x)\mathrm{d}x = \frac{7}{2}\int_0^1 \frac{5x^3-3x}{2}\mathrm{d}x = -\frac{7}{16}.$$

类似地，可得

$$A_4 = 0, \quad A_5 = \frac{11}{32}, \quad A_6 = 0 \quad 和 \quad A_7 = -\frac{75}{256}.$$

(b)用(a)中得到的系数并化简(最好借助计算机系统)，得到

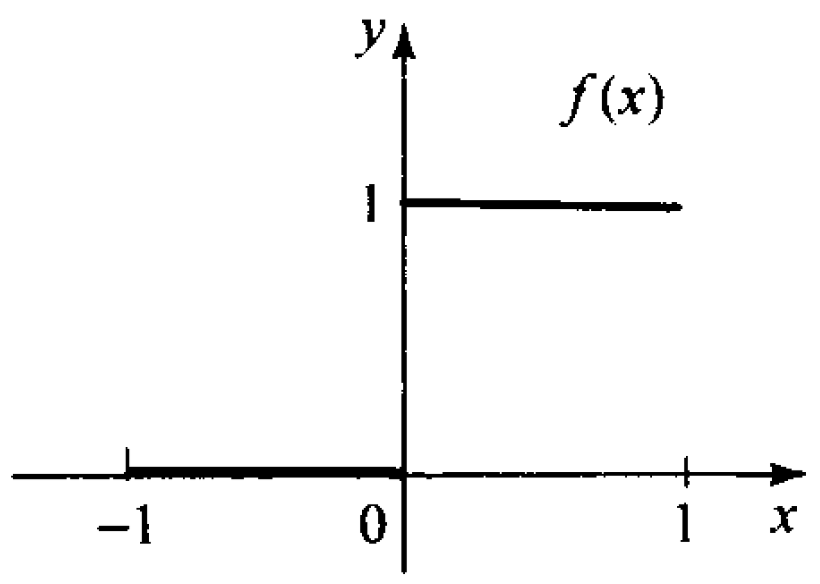


图 1　例 2 中的函数

$$s_0(x) = A_0 = \frac{1}{2},$$

$$s_1(x) = A_0 + A_1P_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x,$$

$$s_2(x) = s_1(x),$$

$$s_3(x) = \sum_{j=0}^{3} A_jP_j(x) = \frac{-35x^3+45x+16}{32},$$

$$s_4(x) = s_3(x),$$

$$s_5(x) = \sum_{j=0}^{5} A_jP_j(x) = \frac{693x^5-1\,050x^3+525x+128}{256},$$

$$s_6(x) = s_5(x),$$

$$s_7(x) = \sum_{j=0}^{7} A_jP_j(x) = \frac{-32\,175x^7+63\,063x^5-40\,425x^3+11\,025x+2\,048}{4\,096}$$

f 以及这些部分和的图形同时描绘在图 2 中. 当部分和中的项数增加时，部分和的图形越接近 f 的图形. 注意到，所有部分和的图形与 y 轴交于$\frac{1}{2}$. 这就验证了定理 2 关于勒让德级数在间断点的极限的论断，因为 0 是间断点，级数极限$(f(0+)+f(0-))/2=\frac{1}{2}$.

313

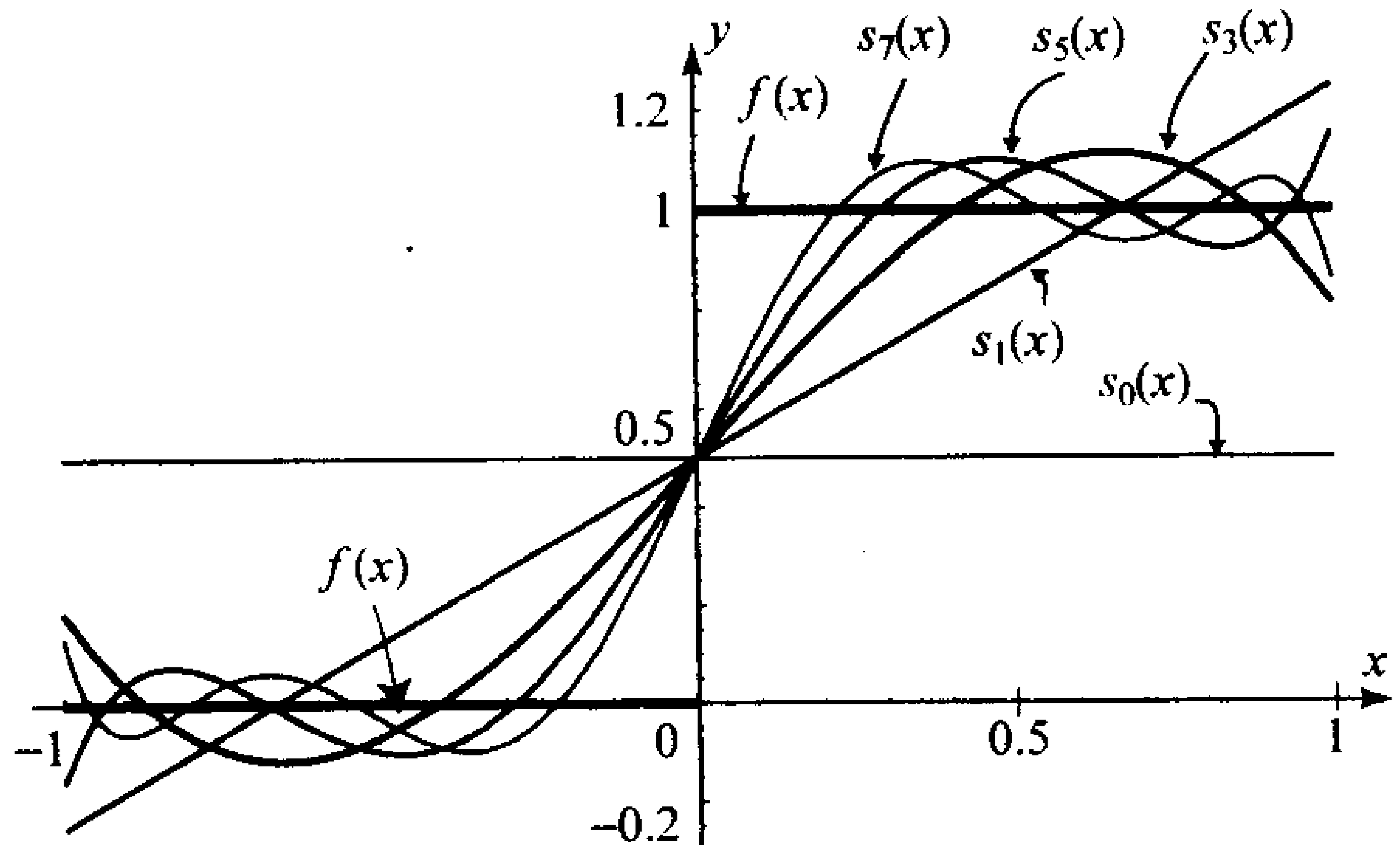


图 2　勒让德级数的部分和，这个部分和在 $0<x<1$ 内收敛到 $f(x)$，在间断点 $x=0$ 它收敛到$(f(0+)+f(0-))/2=\frac{1}{2}$

■

在习题 26 中，要求求出例 2 中的勒让德系数的更紧凑的形式，进一步研究部分和的性质. 将发现，勒让德级数在间断点出现吉布斯现象.

像贝塞尔函数和傅里叶级数那样，勒让德多项式具有丰富的有趣的性质. 在习题中描述了这些性质.

附录：(3)和(4)的证明

令 $u=x^2-1$. 记 D^n 为$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$. 我们有

$$\begin{aligned}D^2u^{n+1} &= D[2(n+1)xu^n] = 2(n+1)[u^n+2x^2nu^{n-1}]\\ &= 2(n+1)[u^n+2(u+1)nu^{n-1}] = 2(n+1)[2nu^{n-1}+(2n+1)u^n].\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}D^{n+1}(u^{n+1}) &= D^{n-1}D^2(u^{n+1})\\ &= 4n(n+1)D^{n-1}u^{n-1}+2(n+1)(2n+1)D^{n-1}u^n.\end{aligned} \tag{8}$$

把罗德里格斯公式(1)写为 $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}D^n u^n$，则由(8)给出

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}D^{n-1}D^2(u^{n+1}) = P_{n-1}(x)+\frac{(2n+1)}{2^n n!}D^{n-1}u^n. \tag{9}$$

回忆关于**微分的莱布尼茨乘积法则**

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(f\cdot g) = \sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{d^m f d^{n-m}g}{\mathrm{d}x^m\mathrm{d}x^{n-m}}.$$

因此，$D^n[xu^n]=xD^n u^n+nD^{n-1}u^n$. 于是，记 $D^{n+1}=D^nD$ 并用罗德里格斯公式，得到

$$\begin{aligned}P_{n+1}(x) &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}D^nD(u^{n+1}) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}D^n[2(n+1)xu^n]\\ &= \frac{1}{2^n n!}D^n[xu^n] = \frac{1}{2^n n!}[xD^n u^n+nD^{n-1}u^n]\\ &= xP_n(x)+\frac{n}{2^n n!}D^{n-1}u^n.\end{aligned} \tag{10}$$

314

现在，如果用(9)和(10)对$\frac{1}{2^n n!}D^{n-1}u^n$ 求解，使这些结果相等并化简，便得到博内递推关系(3). 还需要建立(4). 为此，微分(9)式两边：

$$P'_{n+1}(x) = P'_{n-1}(x)+\frac{(2n+1)}{2^n n!}D^n u^n.$$

用罗德里格斯公式得

$$P'_{n+1}(x) = P'_{n-1}(x)+(2n+1)P_n(x),$$

这就是所需要的. ■

习题 5.6

1. 已知 $P_0(x)=1$，$P_1(x)=x$，试用博内递推关系式求 $P_2(x)$，$P_3(x)$和 $P_4(x)$.
2. 已知 $P_0(0)=1$，$P_1(0)=0$，试用博内递推关系式求 $P_2(0)$，$P_3(0)$和 $P_4(0)$.

用博内关系式和正交性计算下列积分：

3. $\int_{-1}^{1} xP_7(x)\mathrm{d}x$.

4. $\int_{-1}^{1} P_2(x)P_7(x)\mathrm{d}x$.

5. $\int_{-1}^{1} xP_2(x)P_3(x)\mathrm{d}x$.

6. $\int_{-1}^{1} x^2P_4(x)\mathrm{d}x$.

7. $\int_{-1}^{1} x^2P_7(x)\mathrm{d}x$.

8. $\int_{-1}^{1} x^2P_6(x)P_7(x)\mathrm{d}x$.

9. (a)用(4)证明：对 $n=1, 2, \cdots$,

$$\int_{x}^{1} P_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+1}[P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)].$$

(b)推导 $\int_{-1}^{1} P_n(t)\mathrm{d}t = 0$, 当 $n = 1,2,\cdots$

(c)用(a)和(b)证明：当 $n=1, 2, \cdots$, 时

$$\int_{-1}^{x} P_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+1}[P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)].$$

10. 用习题 9 推导下面的恒等式

(a) $\int_{0}^{1} P_{2n}(t)\mathrm{d}t = 0, \quad n = 1,2,\cdots$.

(b) $\int_{0}^{1} P_{2n+1}(t)\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2(n+1)}, \quad n = 0,1,2,\cdots$.

[提示：见 5.5 节习题 3.]

11. 推导下面的恒等式. 对(b) 和(c)，用博内关系式和习题 10.

(a) $\int_{0}^{1} xP_0(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$; $\int_{0}^{1} xP_1(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

315

(b) $\int_{0}^{1} xP_{2n}(x)\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}(2n-2)!}{2^{2n}((n-1)!)^2n(n+1)}, \quad n = 1,2,\cdots$.

(c) $\int_{0}^{1} xP_{2n+1}(x)\mathrm{d}x = 0, \quad n = 1,2,\cdots$.

12. 用罗德里格斯公式和分部积分证明

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f^{(n)}(x)(x^2-1)^n\mathrm{d}x, \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

(作为一个约定，$f^{(0)}(x)=f(x)$.)

在习题 13～24 中，用习题 12 计算积分，取 $n=0, 1, 2, \cdots$.

13. $\int_{-1}^{1} (1-x^2)P_{13}(x)\mathrm{d}x$.

14. $\int_{-1}^{1} x^4P_3(x)\mathrm{d}x$.

15. $\int_{-1}^{1} x^nP_n(x)\mathrm{d}x$.

16. $\int_{-1}^{1} x^{n+1}P_n(x)\mathrm{d}x$.

[提示：在习题 15～16 中，用 4.7 节的沃利斯公式.]

17. $\int_{-1}^{1} \ln(1-x)P_2(x)\mathrm{d}x$.

18. $\int_{-1}^{1} \ln(1+x)P_4(x)\mathrm{d}x$.

19. $\int_{-1}^{1} \ln(1-x)xP_2(x)\mathrm{d}x$.

20. $\int_{-1}^{1} \ln(1+x)xP_2(x)\mathrm{d}x$.

[提示：在习题 19 和 20 中，用博内关系式(3).]

21. $\int_{-1}^{1} \ln(1-x)P_n(x)\mathrm{d}x$.

22. $\int_{-1}^{1} \ln(1+x)P_n(x)\mathrm{d}x$.

23. $\int_{-1}^{1} \ln(1-x)xP_n(x)\mathrm{d}x$.

24. $\int_{-1}^{1} \ln(1+x)xP_n(x)\mathrm{d}x$.

25. 用罗德里格斯公式证明：$P_n(1)=1$，$n=0$，1，2，….[提示：记$(x^2-1)^n=(x-1)^n(x+1)^n$，用莱布尼茨法则.]

26. (a)考虑例 2 中的函数. 推导勒让德级数展开

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{4n+3}{4n+4}\right)\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}P_{2n+1}(x).$$

[提示：习题 10.]

(b)描绘级数的几个部分和的图形，并注意到在函数的间断点 $x=0$，部分和的值不在函数 f 的图形上. 试问：大的部分和的值是否落在 f 的图形上？指出关于勒让德级数的部分和在间断点附近收敛的一个性质或一个原理.

27. 令 $f(x)=|x|$，$-1\leqslant x\leqslant 1$.

(a)计算 f 的前三个非零勒让德系数.

(b)推导勒让德系数 $A_0=\frac{1}{2}$，对所有的 n，$A_{2n+1}=0$，并且

$$A_{2n}=(-1)^{n+1}\frac{n(2n-2)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{4n+1}{n+1}\right),\quad n=1,2,\cdots.$$

316

[提示：习题 11.]

(c)对 $n=1$，2，5 和 20，描绘函数和勒让德级数 $\sum_{j=0}^{n}A_jP_j(x)$ 的部分和的图形.

(d)如果 f 用它的勒让德级数近似，要求在整个区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上误差不超过 0.05，试问：n 应该取多大？

28. (a)求函数

$$f(x)=\begin{cases}0 & 若 -1\leqslant x<0,\\ x & 若 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

的前八个勒让德系数 A_0，A_1，…，A_7.

(b)在同一个坐标轴上描绘 f 及其下列部分和的图形，用以解释定理 2：

$$\sum_{j=0}^{3}A_jP_j(x),\quad \sum_{j=0}^{5}A_jP_j(x),\quad \sum_{j=0}^{7}A_jP_j(x).$$

29. 导出习题 28 中的函数的勒让德级数.［提示：考虑函数$\frac{1}{2}(|x|+P_1(x))$并用习题 27.］

30. (a)求勒让德级数展开式

$$\ln(1-x)=\ln2-1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}P_n(x),\quad -1<x<1.$$

［提示：习题 21.］

(b)画出几个部分和的图形，用以说明勒让德级数的收敛性.（注意这个函数不满足定理 2 的假设条件，是因为它在端点 $x=1$ 的性态，然而勒让德级数的确收敛.试用一个不同的判别法建立这个勒让德级数的收敛性；见下面的习题 39.）

31. (a)在习题 30 的级数展开式中，做适当的变量代换推导函数 $f(x)=\ln(1+x)$)，$-1<x<1$ 的勒让德级数.

(b)画出几个部分和，用以说明勒让德级数的收敛性.

32. (a)把第二类勒让德函数 $Q_0(x)$展开为勒让德级数.Q_0 的显式表达式在 5.5 节习题 23 中给出.［提示：习题 30 和 31.］

(b)画出几个部分和，用以说明勒让德级数的收敛性.

做习题 33 和 34，(a)对给定的函数，至少要计算勒让德级数展开式的八项.(b)在同一个图上，画出函数和几个部分和的图形，用以说明勒让德级数的收敛性.(c)如果函数 f 用它的勒让德级数近似，要求在整个区间 $-1<x<1$ 上的误差不超过 0.1，试问：应该取级数的多少项？

33. $f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$，$-1<x<1$.

34. $f(x)=\sin x$，$-1<x<1$.

专题问题：勒让德级数的狄利克雷判别法. 做习题 35～37，以及 38 或 39.

317 35. 在区间$[-1,1]$上画出几个部分和 $\sum_{k=0}^{n}P_k(x)$ 和函数 $1/(1-x)$的图形.这些图表明了下面的不等式成立：

$$0\leqslant\sum_{k=0}^{n}P_k(x)\leqslant\frac{1}{1-x},\quad -1<x<1.$$

这个非平凡的不等式属于匈牙利数学家费耶(Fejér，L.).

36. **系数递减的勒让德级数的一致收敛判别法.** 证明下述判别法：设$(A_k)_{k=0}^{\infty}$是递减到零的正数序列.令 E 是一个含于$(-1,1)$内的任意闭区间.则级数 $\sum_{k=0}^{\infty}A_kP_k(x)$ 在 E 上一致收敛.［提示：用本节的习题 35 和 2.8 节的定理 1.］

37. **系数递减的勒让德级数的逐点收敛判别法.** 证明下述判别法：设$(A_k)_{k=0}^{\infty}$ 是递减到零的正数序列.则级数 $\sum_{k=0}^{\infty}A_kP_k(x)$ 对区间$(-1,1)$中的所有 x 逐点收敛.［提示：用习题 36，仿照 2.8 节定理 2 的(b)的证明进行.］

38. 已知级数在$[-1,1]$上收敛，确定级数该区间上任一点 x 的值.确认你的答案，不要忘记检查端点上的值.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(x)}{\sqrt{k+1}}$.　　　(b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_k(x)}{k}$.

39. 根据习题 36 和 37 中的收敛判别法，讨论习题 30 中的勒让德级数的一致收敛和逐点收敛.勿忘讨论级数在端点的性态.

40. (a)求函数 $f(x)=x\ln(1-x)$，$-1<x<1$ 的勒让德级数.［提示：习题 23.］

(b)求函数 $f(x)=x\ln(1+x)$，$-1<x<1$ 的勒让德级数.［提示：在(a)中做变量代换.］

41. 求第二类勒让德函数 $Q_1(x)$ 的勒让德级数. 关于 $Q_1(x)$ 的显式表达式，见 5.5 节习题 24. [提示：习题 40.]

42. **$P_n'(x)$ 的正交性.**

(a)验证：当 $m=0$，1，2，…时，有

$$[(1-x^2)P_m'(x)]' = -m(m+1)P_m(x).$$

[提示：利用 $P_m(x)$ 的微分方程.]

(b)证明：如果 m 和 n 是正整数，且 $m\neq n$，则

$$\int_{-1}^{1} P_n'(x)P'_m(x)(1-x^2)\mathrm{d}x = 0.$$

它表明函数 $P_n'(x)(n=1, 2, \cdots)$ 在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上关于权函数 $(1-x^2)$ 正交. 这个结果是 5.7 节定理 1 的特殊情形. [提示：分部积分并用(a).]

43. **第 j 个勒让德系数.** 这个习题要确认(7). 用 $P_j(x)$ 乘(6)的两边，然后从 -1 到 1 积分. 设可以逐项积分，试用定理 1 导出(7).

44. **多项式的勒让德级数.**

(a)用习题 12 证明：如果 $p(x)$ 是 n 次多项式，则对所有 $m>n$ 有 $\int_{-1}^{1} p(x)P_m(x)\mathrm{d}x=0$. [318]

(b)断言：如果 $p(x)$ 是 n 次多项式，则它的勒让德级数只有有限多项.

在 45～48 题中，求给定的多项式的勒让德级数. [提示：把已知多项式写为勒让德多项式的线性组合，而后确定系数.]

45. $p(x)=x^2+2x+1$.

46. $p(x)=63x^5-7x^3+15x$.

47. $p(x)=x^4+2x^3+x^2+x$.

48. $p(x)=x^6$.

5.7 相伴勒让德函数和相伴勒让德级数展开

像勒让德多项式那样，相伴勒让德函数也是从重要问题的解中产生的，这些问题包含球面坐标中的拉普拉斯方程. 记住已经遇到的有关勒让德多项式的大部分概念，以保障理解本节的所有内容.

罗德里格斯公式

对每个 $m=0$，1，2，…，我们用下面的公式定义一族函数，叫做 **m 阶相伴勒让德函数.**

$$\boxed{P_n^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m P_n(x)}{\mathrm{d}x^m},} \tag{1}$$

这里的 $P_n(x)$ 是 n 次勒让德多项式(见 5.5 节). 按照通常的约定：函数的 0 阶导数是函数本身，有

$$P_n^0(x) = P_n(x).$$

因此，相伴勒让德函数是勒让德多项式的推广. 由于这个原因，我们导出的关于相伴勒让德函数的无论什么性质，只要令 $m=0$，就得到勒让德多项式的一个性质.

因为 $P_n(x)$ 是一个 n 次多项式，由(1)可知，为了得到非零函数，必须取 $0\leqslant m\leqslant n$. 为了应用，我们推广勒让德函数的定义对负的 m 成立，定义为

$$\boxed{P_n^m(x) = (-1)^m\frac{(n+m)!}{(n-m)!}P_n^{-m}(x).} \tag{2}$$

[319]

注意，对负的 m，$P_n^m(x)$就是 $P_n^{-m}(x)$乘一个标量因子．于是，对每一个 $n=0$，1，2，…，我们有 $2n+1$ 个相伴勒让德函数 $P_n^m(x)$，此处的 m 取值从 $-n$ 到 n.

例 1 相伴勒让德函数

分别用(1)和(2)，取 $m=-2$，-1，0，1，2，得到

(a) $P_0^0(x)=1=P_0(x)$，　　$P_1^0(x)=x=P_1(x)$，

$P_2^0(x)=\dfrac{3x^2-1}{2}=P_2(x)$，　　$P_3^0(x)=\dfrac{5x^3-3x}{2}=P_3(x)$.

(b) $P_1^1(x)=-\sqrt{1-x^2}$，　　$P_2^1(x)=-3x\sqrt{1-x^2}$，

$P_3^1(x)=-\dfrac{3(5x^2-1)}{2}\sqrt{1-x^2}$，　　$P_4^1(x)=-\dfrac{5(7x^3-3x)}{2}\sqrt{1-x^2}$.

(c) $P_2^2(x)=3(1-x^2)$，　　$P_3^2(x)=15x(1-x^2)$，

$P_4^2(x)=\dfrac{15(7x^2-1)}{2}(1-x^2)$，　　$P_5^2(x)=\dfrac{105(3x^3-x)}{2}(1-x^2)$.

(d) $P_1^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$，　　$P_2^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$，

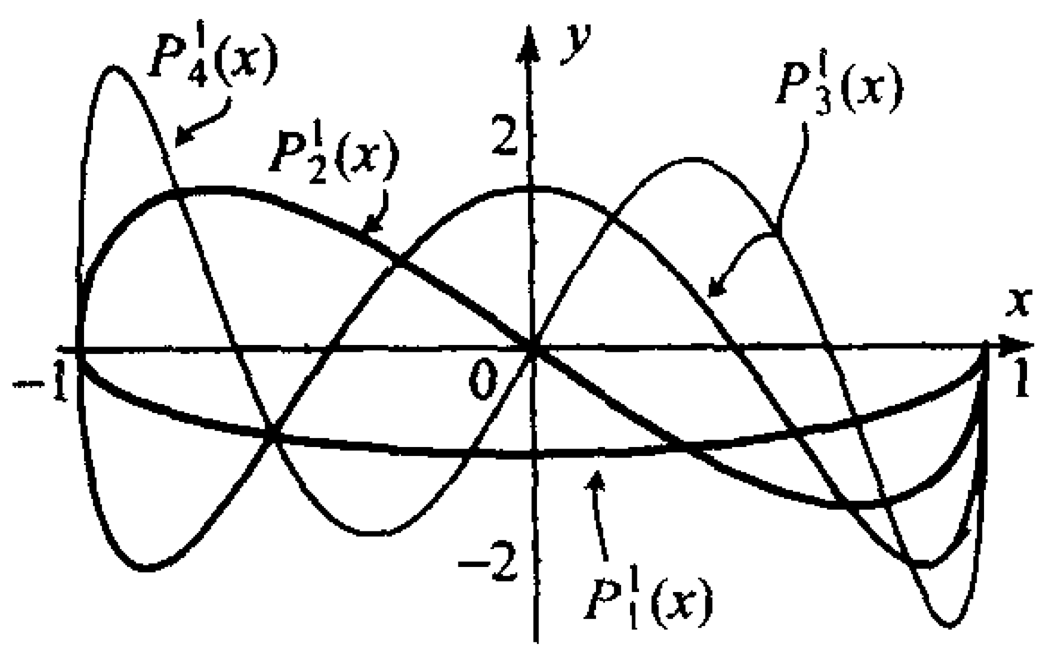
$P_3^{-1}(x)=\dfrac{(5x^2-1)}{8}\sqrt{1-x^2}$，　　$P_4^{-1}(x)=\dfrac{(7x^3-3x)}{8}\sqrt{1-x^2}$.

(e) $P_2^{-2}(x)=\dfrac{1}{8}(1-x^2)$，　　$P_3^{-2}(x)=\dfrac{1}{8}x(1-x^2)$，

$P_4^{-2}(x)=\dfrac{(7x^2-1)}{48}(1-x^2)$，　　$P_5^{-2}(x)=\dfrac{(3x^3-x)}{16}(1-x^2)$. ■

由(1)显见如果 m 是奇的和非零的，由于因子$(1-x^2)^{m/2}$的出现，P_n^m 不是一个多项式．另外，如图 1 所示，当 $n+m$ 是偶数时，P_n^m 是偶的；当 $n+m$ 是奇数时，它是奇的.

320



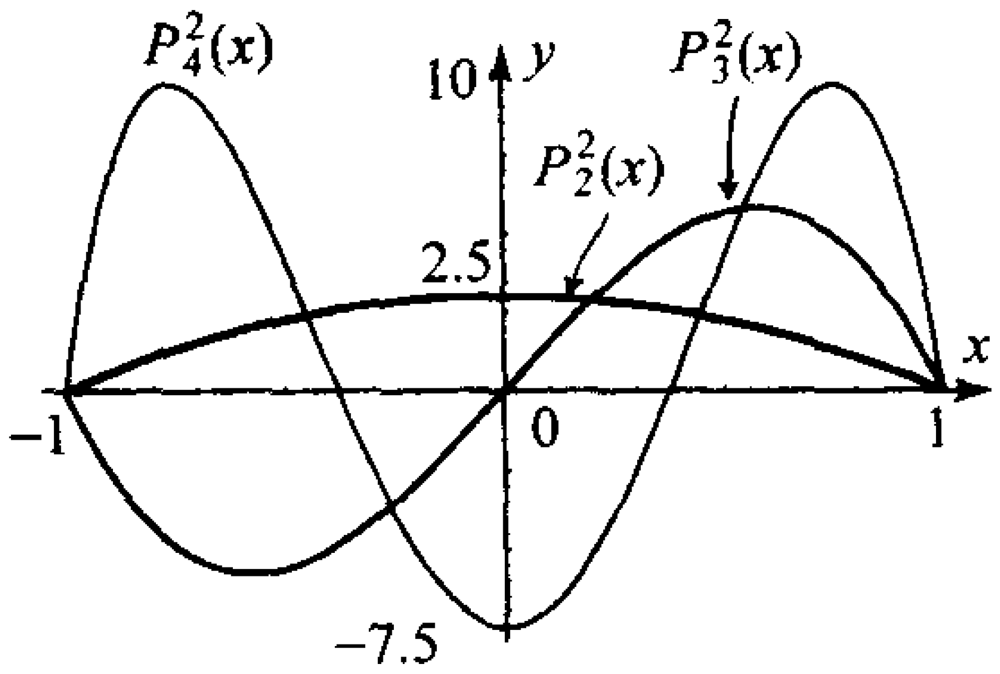


图 1　相伴勒让德函数

相伴勒让德微分方程

从 5.5 节知，勒让德多项式满足(勒让德)微分方程 $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$．现在，我们对相伴勒让德函数要建立一个类似的结果.

对 $n=0$，1，2，…和 $m=0$，±1，±2，…，$\pm n$，**相伴勒让德微分方程**由

$$\boxed{(1-x^2)y''-2xy'+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0,\quad -1<x<1} \tag{3}$$

给出．当 $m=0$ 时，它是勒让德微分方程(5.5 节的(1))，从而勒让德多项式 $P_n=p_n^0$ 满足该方程．因此，要证明相伴勒让德函数是(3)的解，只需考虑 $m\neq 0$ 的情形．另外，因为对负的 m，P_n^m 与 P_n^{-m} 成比例(见(2))，故只须考虑 $m>0$．我们从勒让德方程开始，n 次勒让德多项式 P_n 满足这个方程．用莱布尼茨法则关于 x 微分这个方程 m 次，然后用 P_n 代替 y，得到

$$(1-x^2)P_n^{(m+2)}-2(m+1)xP_n^{(m+1)}+(n-m)(n+m+1)P_n^{(m)}=0 \tag{4}$$

(习题 14)．因此，函数 $P_n^{(m)}$ 满足微分方程

$$(1-x^2)y''-2(m+1)xy'+(n-m)(n+m+1)y=0. \tag{5}$$

如果用代换

$$y=(1-x^2)^{-m/2}v$$

则可以验证，这个方程变为(3)(习题 14)．因此，(3)的一个解是 $(1-x^2)^{m/2}\dfrac{\mathrm{d}^mP_n(x)}{\mathrm{d}x^m}$，由于(3)是齐次的，故 P_n^m 也是一个解．

正交性和级数展开

像勒让德多项式一样，相伴勒让德函数在区间[−1，1]上也有正交性关系．其证明非常类似于勒让德多项式的情况．在习题中将给出证明纲要．

定理 1(相伴勒让德函数的正交性)　*令 $k\leqslant n$ 是非负整数，及 m 是满足 $|m|\leqslant k$ 的整数．则*

$$\int_{-1}^{1}P_k^m(x)P_n^m(x)\mathrm{d}x=0,\quad k\neq n \tag{6}$$

和

$$\int_{-1}^{1}[P_n^m(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!},\quad |m|\leqslant n. \tag{7}$$

321

下面我们给出一个非常有用的关于相伴勒让德函数的展开定理．可以验证，当 $m=0$ 时，这个定理就化为 5.6 节的定理 2.

定理 2(相伴勒让德级数展开)　*固定一个非负整数 m．设 $f(x)$ 在[−1，1]上分段光滑，则有 m* **阶相伴勒让德级数展开**

$$f(x)=\sum_{n=m}^{\infty}A_nP_n^m(x), \tag{8}$$

*其中，***相伴勒让德系数** *A_n 由*

$$A_n=\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_{-1}^{1}f(x)P_n^m(x)\mathrm{d}x,\quad n=m,m+1,m+2,\cdots \tag{9}$$

给出．对开区间(−1，1)中的点 x，若 f 在该点连续，级数收敛到 $f(x)$；在其他点收敛到 $(f(x+)+f(x-))/2$.

定理 2 的证明已超出本书的内容，故省略．读者可以从具体的应用验证结论的有效性．在下述例子中，取 $m=2$，对一个简单函数计算了它的相伴勒让德级数展开．用计算机计算了相伴勒让德系数并画出了相伴勒让德级数的一些部分和．可以想象，这些级数的显式表达式是非常复杂的．

例 2　一个 $m=2$ 阶的相伴勒让德级数展开

考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}0 & 若 -1<x<0,\\ 1 & 若 0<x<1.\end{cases}$$

我们将说明它的 $m=2$ 阶的相伴勒让德级数展开. 为此，将计算系数 A_n，$n=2，3，4，\cdots，10$（注意 $n\geqslant m$）. 然后，用这些系数形成并画出相伴勒让德级数的部分和，n 一直取到 10. 借助计算机，求得的系数如表 1 所示.

表 1　相伴勒让德系数

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_n	$\frac{5}{24}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{1}{40}$	0	$\frac{13}{1\,680}$	$\frac{65}{6\,144}$	$\frac{17}{5\,040}$	$-\frac{19}{30\,720}$	$\frac{7}{3\,960}$

f 及其部分和（n 取到 10）的图形描绘在图 2 中. 注意，当 n 增加时，相伴勒让德系数趋于零. 另外，在函数的间断点，部分和的值偏离函数的图形. 如所期望的那样，这两个事实对一般的相伴勒让德级数也应成立. ■

322

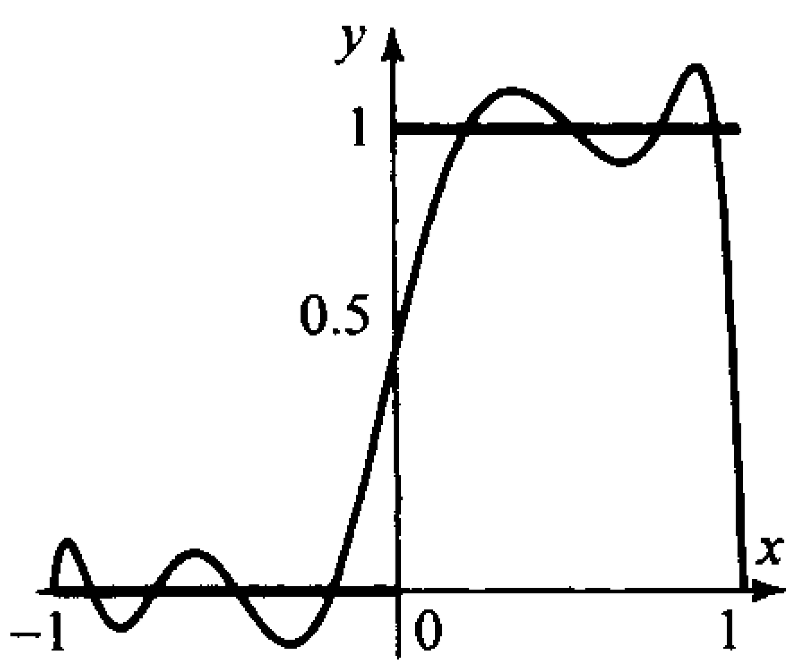


图 2　相伴勒让德级数 $\sum_{n=2}^{\infty}A_nP_n^{\,2}(x)$ 的部分和

习题 5.7

在习题 1～4 中，对给定的 m 和 n 用（1）和（2）推导 P_n^m.

1. $m=\pm1$，$n=2$.
2. $m=1$，$n=1，2，3$.
3. $m=3$，$n=4$.
4. $m=-3$，$n=4$.

在习题 5～8 中，（a）对给出的相伴勒让德微分方程，确定 m 和 n.（b）用例 1 中给出的勒让德函数表求一个解.（c）代回微分方程验证你的答案.

5. $(1-x^2)y''-2xy'+\left(2-\dfrac{1}{1-x^2}\right)y=0.$
6. $(1-x^2)y''-2xy'+\left(6-\dfrac{4}{1-x^2}\right)y=0.$
7. $(1-x^2)y''-2xy'+\left(6-\dfrac{1}{1-x^2}\right)y=0.$
8. $(1-x^2)y''-2xy'+\left(12-\dfrac{4}{1-x^2}\right)y=0.$
9. 取 $m=1$，$n=1，2$，验证（6）和（7）.

在习题 10～15 中，给定阶 m 和定义在区间$[-1，1]$上的函数 $f(x)$.（a）用一台有相伴勒让德函数的计算机系统计算 $f(x)$ 的 m 阶相伴勒让德系数，取 $n=m，m+1，\cdots，m+10$.（b）用（a）中的系数构造 m 阶相伴勒让德级数展开式的几个部分和. 描绘这些部分和以及已知函数的图形，用以说明定理 2.

10. $m=1$，$f(x)=\sin\pi x$.
11. $m=1$，$f(x)=(x-1)(x+1)$.

12. $m=2$，$f(x)=x$.

13. $m=2$，$f(x)=|x|$.

14. (a)用莱布尼茨微分法则证明(4).

(b)借助计算机系统，验证变换 $y=(1-x^2)^{-m/2}v$ 可把(5)转换成(3).

15. 按照证明 5.6 节定理 1(i)的证明步骤证明(6)式.

[提示：证明(3)可以写为下述形式：

$$\left((1-x^2)y'\right)'+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0.]$$

16. **专题问题：证明(7).**

(a)用(1)证明：

$$P_n^{m+1}=-(1-x^2)^{1/2}\frac{\mathrm{d}P_n^m}{\mathrm{d}x}-m(1-x^2)^{-1/2}xP_n^m.$$

(b)(a)中等式两边平方，而后积分获得下式：

$$\int_{-1}^{1}[P_n^{m+1}(x)]^2\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\left[\frac{\mathrm{d}P_n^m}{\mathrm{d}x}\right]^2\mathrm{d}x+2m\int_{-1}^{1}xP_n^m(x)\frac{\mathrm{d}P_n^m}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

$$+\int_{-1}^{1}\frac{m^2x^2}{1-x^2}[P_n^m(x)]^2\mathrm{d}x.$$

323

(c)证明：$[mx[P_n^m(x)]^2]\big|_{-1}^{1}=0$.

(d)用分部积分证明：(b)中方程的右边等于

$$-\int_{-1}^{1}P_n^m(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P_n^m}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x-m\int_{-1}^{1}[P_n^m(x)]^2\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{m^2x^2}{1-x^2}[P_n^m(x)]^2\mathrm{d}x.$$

(e)解释为什么下式成立：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P_n^m}{\mathrm{d}x}\right]=-\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_n^m(x).$$

[提示：见习题 15 的提示.]

(f)合并(d)～(e)导出下式：

$$\int_{-1}^{1}[P_n^{m+1}(x)]^2\mathrm{d}x=(n-m)(n+m+1)\int_{-1}^{1}[P_n^m(x)]^2\mathrm{d}x.$$

(g)用(f)获得下式：

$$\int_{-1}^{1}[P_n^m(x)]^2\mathrm{d}x=(n-m+1)(n-m+2)\cdots n(n+m)(n+m-1)\cdots(n+1)\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\mathrm{d}x.$$

(h)用(g)和 5.6 节定理 1(ii)导出(7)式.

324

第6章　施图姆-刘维尔理论及其在工程技术中的应用

这不是一次或两次，而是无数次，同样的思想使他们出现在世界上.

——亚里士多德

综述　在本章的学习中，要时刻记住几个特殊的正交函数系，以及相应的展开理论. 例如，作为比较的基础，要用到傅里叶级数或贝塞尔展开. 6.1 节、6.2 节和 6.4 节是自封的，6.1 节和 6.2 节建立了相应于二阶线性常微分方程的边值问题的施图姆-刘维尔一般理论. 6.4 节研究了对应于某些四阶问题的相应理论. 6.3 节和 6.5 节关注这些二阶和四阶理论的特殊经典应用.

导读　本章的应用是物理和工程中最优美的部分之一，它们综合了各种不同的理论，利用了我们关于特殊函数展开的几乎所有知识. 虽然这些应用都是经典的，但是它们是以如何利用计算机的方式来介绍，比如，在研究悬链问题中(6.3 节)，其求解是得到一些可以输入计算机而生成描述链运动图像的数据为止. 类似地，计算机也可以用来说明在施图姆-刘维尔理论中所出现的新展开式，特别是那些复杂的四阶展开式及其在梁弹性振动中的应用(6.4 节、6.5 节).

在前面几章中，你可能注意到在求解不同边值问题时的一个共同主题，即每一种情形中，在分离变量之后，我们必须求解一个常微分方程的边值问题. 虽然方程经常是不同的，但是它们的解都具有：是正交的、并有展开定理等共同性质. 然后我们可以将任意函数按这些特殊的正交解展开. 这样，我们得到勒让德、贝塞尔、傅里叶以及其他相应的展开. 这些展开式是相互独立、碰巧具有这些共同性质呢，还是它们是某个统一理论中的一部分?

本章的核心就是发展一个一般性理论，包含前面所考虑的所有特殊展开定理，如傅里叶、傅里叶正弦、傅里叶余弦、贝塞尔和勒让德展开. 这个理论以施图姆和刘维尔命名，因为在 19 世纪初叶，在傅里叶的突破性工作之后不久，是他们俩在研究热传导问题过程中发展了这套理论.

施图姆-刘维尔理论不仅严谨优雅，而且在应用数学、物理、工程中有许多应用. 我们将运用这一理论来得到更多的展开，而不再是一一推导了. 本章介绍了好几个经典应用，如悬链问题(6.3 节)、梁振动(6.5 节)、板理论和双调和算子(6.6～6.7 节).

6.1　正交函数

回顾微分方程的初级课程，线性代数的某些概念在学习微分方程解时起着重要的作用. 例如，为验证二阶线性微分方程的两个解是否可以得到通解，只需验证某个矩阵的行列式(朗斯基)是否为零(参见附录 A.1). 这些以及其他概念，如线性无关和基，对我们理解微分方程的解起着重要的作用. 类似地，本章关于施图姆-刘维尔理论的发展也将需要线性代数的某些概

念，这些概念在有限维向量空间的课程里曾做过抽象而简单的解释．为此，我们首先浏览线性代数的一些基本概念，特别是关于三维向量．

回顾，两个向量 $x=(x_1, x_2, x_3)$和 $y=(y_1, y_2, y_3)$的**内积**是数 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$．两个非零向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 称为是**正交的**，如果 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$．一个非零向量集合称为是**正交的**，如果其中任意两个不同向量都是正交的．一个简单的正交向量集是由向量 $\boldsymbol{e}_1=(1, 0, 0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0, 1, 0)$和 $\boldsymbol{e}_3=(0, 0, 1)$组成的．内积也可以用来定义向量$\boldsymbol{v}$ 的范数：

$$\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}=\left(\sum_{j=1}^{3}v_j^2\right)^{1/2}. \tag{1}$$

对一般函数集合，我们来研究向量集$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$所具有的两个性质：

- 集合$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$是完备的，即如果向量$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 都正交，则 $\boldsymbol{v}=0$．
- 集合$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$是一个生成集，即任意向量$\boldsymbol{v}=(v_1, v_2, v_3)$都可以写成

$$\boldsymbol{v}=\sum_{j=1}^{3}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_j. \tag{2}$$

内积和函数的正交性

在定义两个向量的内积时，我们对它们的分量乘积求和．为定义两个函数的内积，我们将对它们的乘积求积分．令 f 和 g 是定义在区间(a, b)(区间可能是无限的)上的实值函数，f 和 g 的**内积**[记为(f, g)]是数 [326]

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

如果 f 和 g 是复值的，则定义为

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\mathrm{d}x.$$

这个术语与向量的内积是一样的，因为由(3)式定义的函数$(\cdot, \cdot)$与向量的内积满足相同的性质(习题 21)．我们假设函数是实值的，且充分好，以使(3)式中的积分存在．比如，函数是分段连续的，就满足条件．

正交函数 *函数 f 和 g 称为在区间(a, b)上**正交**，如果*

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0.$$

我们定义 f 的**范数**，记为$\|f\|$，为

$$\|f\|=\sqrt{(f,f)}=\left(\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

在定义正交性和范数时，对复值函数要用(f, g)的适当定义．如果$\|f\|<\infty$，我们也称 f 在区间(a, b)上平方可积．如果 f 是实值的，则$|f(x)|^2$ 就简单记为 $f^2(x)$；而如果 f 是复值的，则$|f(x)|^2=f(x)\overline{f(x)}$．注意到，与有限维情形一样的是，正交性和范数的定义都是建立在内积概念的基础之上．(与(2)式比较．)定义在区间(a, b)上的函数集$\{f_1, f_2, f_3, \cdots\}$称为**正交集**，如果对所有的 n，$\|f_n\|\neq 0$，且这集合中任意两个不同函数都是正交的，即当 $n\neq m$ 时，$(f_n, f_m)=0$．另外，如果每个 f_n 的范数都是 1，则这个集合称为**规范正交集**．因此，

如果将正交集中的每个函数除以其自身的范数就得到规范正交集.

例 1　正交函数

试证：函数集 $f_n(x)=\sin nx(n=1, 2, \cdots)$在区间$[-\pi, \pi]$上正交，并求出其相应的规范正交集.

解　我们必须证明 $\|\sin nx\|\neq 0$，并且这集合中任意两个不同函数是正交的. 我们有

$$\|\sin nx\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}\mathrm{d}x=\pi,$$

因此，$\sin nx$ 的范数是 $\|\sin nx\|=\sqrt{\pi}\neq 0$. 对 $m\neq n$，我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x]\mathrm{d}x=0.$$

为得到规范正交集，我们将每个函数除以其自身的范数，从而得到范数为 1 的函数. 相应的规范正交集是

327

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}},\cdots.$$ ■

下个例题处理的是傅里叶级数中的三角系. 注意到，例 1 中的函数集是这个集合的子集.

例 2　三角系

函数集

$$1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\sin 3x,\cos 3x,\cdots$$

在区间$[-\pi, \pi]$上正交(见 2.1 节). 为得到相应的规范正交集，我们计算 $\|\cos nx\|=\|\sin nx\|=\sqrt{\pi}\neq 0$，$n=1, 2, \cdots$；而恒等于 1 的函数在区间$[-\pi, \pi]$上的范数等于$\sqrt{2\pi}$. 因此，规范正交集是

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}},\cdots.$$ ■

例 3　勒让德多项式

5.6 节已经证明了勒让德多项式满足：

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2n+1}\quad 及\quad \int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x=0\quad 对\ m\neq n.$$

因此，勒让德多项式在区间$[-1, 1]$上构成了一个正交集. ■

广义傅里叶级数

令 A 是(a, b)上的一个函数类，比如，A 是(a, b)上的所有连续函数类；或 A 是所有分段光滑函数类；或 A 是(a, b)上的所有平方可积函数 f 所构成的函数类. 假设 f_1，f_2，f_3，$\cdots$是 A 中的正交函数集，类似于有限维情形，有如下问题产生：

1. 函数 f_1，f_2，f_3，$\cdots$是否可以生成 A? 也就是说，对 A 中一个给定函数 f，是否可以将 f 展开成如下形式的级数：

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}a_jf_j(x),\tag{4}$$

其中 a_j 是实数或复数？

2. 如果形如(4)式的展开式是可能的，如何计算系数 a_j？

这些问题的完整处理需要超出本书范围的知识．在不深入触及正交函数的一般理论的前提 [328] 下，我们将通过例题来试图回答这些基本问题．首先从第二个问题开始，受(1)启发，我们猜测(4)式中的系数可能由 f 和 f_1，f_2，f_3，…的内积来给出．为看清楚这点，我们像以前对傅里叶级数所做的那样，将(4)式两边同时乘以 f_k，再在区间(a, b)上逐项积分，得到

$$\int_a^b f(x)f_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \int_a^b f_j(x)f_k(x)\mathrm{d}x.$$

由正交性，上式右端只有第 k 项是非零的，因此，

$$\int_a^b f(x)f_k(x)\mathrm{d}x = a_k \int_a^b f_k^2(x)\mathrm{d}x.$$

左边是 f 和 f_k 的内积，而右端的积分是 f_k 范数的平方，所以$(f, f_k)=a_k\|f_k\|^2$．从而

$$a_k = \frac{(f,f_k)}{\|f_k\|^2} = \frac{1}{\|f_k\|^2}\int_a^b f(x)f_k(x)\mathrm{d}x. \tag{5}$$

这就得到第二个问题的答案．

定理 1(广义傅里叶级数)　如果 f_1，f_2，f_3，…是(a, b)上的正交函数集，且 f 可以展开成形如(4)式的级数，则

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(f,f_j)}{\|f_j\|^2} f_j(x). \tag{6}$$

级数(6)称为**广义傅里叶级数**．这种级数包含前面章节中的傅里叶、勒让德、贝塞尔级数等．

现在，我们回到第一个问题．同样，受三维实向量空间的启发，对于本书中将要考虑的函数类，A 中的正交函数集 f_1，f_2，f_3，…可以生成 A，当且仅当正交函数 f_1，f_2，f_3，…构成一个如下意义下的**完备集**：如果 f 与每一个 f_j，$j=1, 2, 3$，…正交，则 f 必定恒为零．

对于$[-\pi, \pi]$上的傅里叶级数情形，函数 1，$\cos x$，$\cos 2x$，$\cos 3x$，…，$\cos nx$，…，$\sin x$，$\sin 2x$，$\sin 3x$，…，$\sin nx$，…在$[-\pi, \pi]$上构成一个正交函数集．由傅里叶级数表示定理，这个集合可以生成所有 2π-周期的分段光滑函数类 A．在这种情形下，完备性意味着什么？它意味着：如果函数 f 的所有傅里叶系数都为零，则 f 一定恒等于零．这个事实可由傅里 [329] 叶级数表示定理推得，因为如果 f 的傅里叶系数都令为零，则 f 的傅里叶级数必等于零，但是 f 的傅里叶级数收敛到 f，所以 f 恒等于零．

一般而言，建立一个函数集的完备性是很困难的．幸运的是，我们将遇到的绝大多数正交函数集，是源自常微分方程的求解，因而满足所谓的施图姆-刘维尔理论框架．这些函数集的完备性是施图姆-刘维尔理论一般结论的推论．(参见 6.2 节定理 3.)

加权正交性

至今为止，我们所介绍的都可以推广到关于一个权函数正交的函数集情形．在学习贝塞尔级数时，我们已经遇到过这种情形．一般地，f 和 g 是定义在(a, b)上的实值函数，我们定义它们**关于权函数 w 的内积**是数

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)w(x)\mathrm{d}x.$$

我们假设 $w(x)$是$[a, b]$上的非负分段连续函数，在$[a, b]$的任意子区间上都不恒等于 0，相应的正交性定义如下.

加权正交性 函数 f 和 g 称为在区间$[a, b]$上关于权函数 w 是正交的，如果

$$\int_a^b f(x)g(x)w(x)\mathrm{d}x=0.$$

f 关于权函数 w 的范数为

$$\| f \| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}. \tag{7}$$

例 4 加权正交性

(a)函数 $f_n(x)=\cos nx(n=1, 2, \cdots)$满足$\int_{-\pi}^{\pi} f_m(x)f_n(x)\mathrm{d}x=0, m\neq n$. 因此，这些函数关于权函数 $w(x)=1$ 在区间$(-\pi,\pi)$ 上构成一个正交集.

(b) 令 α_1，α_2，α_3，… 表示贝塞尔函数 J_0 的正零点. 由 4.8 节定理 1，我们有 $\int_0^1 J_0(\alpha_m x)J_0(\alpha_n x)x\mathrm{d}x=0, m\neq n$. 因此，函数 $J_0(\alpha_n x)(n=1,2,\cdots)$ 关于权函数 $w(x)=x$ 在区间(0,1) 上构成一个正交集. ■

330 下面的定理与定理 1 的类似，它是加权正交函数的级数展开定理.

定理 2(广义傅里叶级数) 如果 f_1，f_2，f_3，…是$[a, b]$上关于权 w 的正交函数集，且 f 可以展开成形如(4)式的级数，则

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(f,f_j)}{\| f_j \|^2}f_j(x). \tag{8}$$

虽然(8)式看起来与(6)式一样，但是必须记住：在计算(8)式中的内积和范数时，要涉及一个权函数. 在例 4(b)中，我们观察到函数 $J_0(\alpha_n x)$关于权函数 $w(x)=x$ 在区间(0, 1)上是正交的. 在 4.8 节例 1 中，我们推导了函数 $f(x)=1$ 关于这个正交级数的级数展开. 你可以验证那里所得到的级数与(8)式完全一样.

我们以完全正交系的帕塞瓦尔恒等式的叙述来结束本节.

定理 3(帕塞瓦尔恒等式) 如果 f_1，f_2，f_3，…是$[a, b]$上关于权 w 的完备正交函数集，且令 f 的由(7)式给出的范数是有限的(即 f 关于权 w 是平方可积的)，则

$$\int_a^b |f(x)|^2 w(x)\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|(f,f_j)|^2}{\| f_j \|^2}. \tag{9}$$

正如我们在 2.5 节所看到的，对傅里叶级数，帕塞瓦尔恒等式具有许多重要应用. 我们可以如下证明它，由于函数 f_1，f_2，f_3，…在$[a, b]$上构成一个关于权 w 的完备正交函数集，函数 f 可以表示成形如(8)式的广义级数. 如果 f 是实值的，对(8)式两边同乘以 $f(x)w(x)$，然后在区间$[a, b]$上积分. 假设我们可以对级数逐项积分，利用关于权 w 的内积的定义，我们得到(9)式；如果 f 是复值的，我们对(8)式两边同乘以$\overline{f(x)}w(x)$，再重复前面的证明.

习题 6.1

在习题 1～8 中，证明给定函数集在给定的区间上关于给定权是正交的.

1. 1，$\sin\pi x$，$\cos\pi x$，$\sin2\pi x$，$\cos2\pi x$，$\sin3\pi x$，$\cos3\pi x$，…；$w(x)=1$ 在区间[0，2]上.
2. $f(x)$是偶函数，$g(x)$是奇函数；$w(x)=1$ 在任何一个关于 0 点对称的区间上.
3. 1，x，$-1+2x^2$；$w(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$在区间[−1，1]上.（这些是**第一类切比雪夫多项式的例子**，进一步讨论请参见习题 6.2.）
4. $-3x+4x^3$，$1-8x^2+8x^4$；$w(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$在区间[−1，1]上.

331

5. 1，$2x$，$-1+4x^2$；$w(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$在区间[−1，1]上.（这些是**第二类切比雪夫多项式的例子.**）
6. 1，$1-x$，$(2-4x+x^2)/2$；$w(x)=e^{-x}$在区间[0，∞)上.（这些是**勒让德多项式的例子.**）
7. 1，$2x$，$-2+4x^2$；$w(x)=e^{-x^2}$在区间(−∞，∞)上.（这些是**埃尔米特多项式的例子.**）[提示：4.7 节习题 33(a).]
8. $(2-4x+x^2)/2$，$-12x+8x^3$；$w(x)=e^{-x}$在区间[0，∞)上.
9. 确定常数 a 和 b，使得函数 1，x，以及 $a+bx+x^2$ 在区间[−1，1]上是正交的.
10. 如果函数 $f(x)$和 $g(x)$在[0，L]上关于权 $w(x)$是正交的，则对函数 $f(ax)$和 $g(ax)$，$a>0$，我们有什么样的结论?
11. 计算习题 1 中函数的范数.
12. 计算习题 5 中函数的范数.
13. 在区间[−1，1]上的相应于勒让德多项式的规范正交集是什么?
14. 试证：如果函数 f 和 g 在[a，b]上连续，且关于权函数 1 是正交的，则 f 和 g 两者之一必定在(a，b)某处为零.
15. 试证：如果 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…在[0，1]上关于权 x 是正交的，则 $f_1(\sqrt{x})$，$f_2(\sqrt{x})$，…在[0，1]上关于权函数 1 是正交的.
16. **傅里叶级数的帕塞瓦尔恒等式.** 将(9)式化为($2p$－周期的)三角系情形，从而得到 2.5 节的(6)式.
17. **勒让德级数的帕塞瓦尔恒等式.** 利用(9)式，推导恒等式

$$\int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2A_n^2}{2n+1},$$

其中 A_n 是 f 的第 n 项勒让德系数.（见 5.6 节.）

18. **贝塞尔级数的帕塞瓦尔恒等式.** 利用(9)式，推导恒等式

$$\int_{0}^{R} f(x)^2\,x\,dx=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{R^2J_{p+1}^2(\alpha_{pj})}{2}A_j^2,$$

其中 A_j 是 f 的 p 阶贝塞尔级数展开式第 j 项系数，而 α_{pj}是 J_p 的第 j 个正零点.（见 4.8 节.）

19. **贝塞尔函数零点平方的倒数之和.** 推导如下有趣的公式：$\dfrac{1}{4(p+1)}=\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_{pj}^2}$. [提示：将习题 18 应用到 4.8 节习题 20 所得到的贝塞尔级数展开式中，取 $R=1$.]
20. 考虑习题 19 的特殊情形：$p=\dfrac{1}{2}$，推导恒等式：

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}.$$

332

21. 试证：内积满足下列性质：

(a) 对任意数 a，有$(af, g)=a(f, g)$.

(b) $(f+g, h)=(f, h)+(g, h)$.

(c) 对任意函数 f，有$(f, f)\geqslant 0$.

6.2 施图姆-刘维尔理论

本节我们考察正交函数、正交展开以及微分方程之间的相互作用. 我们研究所谓的施图姆-刘维尔问题，它是边值问题中的一般类型，其解集具有相互正交性. 更进一步，一个给定函数可以通过这些正交解集展成广义傅里叶级数.

正则施图姆-刘维尔问题是在一个有限闭区间$[a, b]$上的具有如下形式的边值问题：

正则施图姆-刘维尔问题

$$[p(x)y']'+[q(x)+\lambda r(x)]y=0, \quad a<x<b, \tag{1}$$

$$\begin{array}{l}(\mathrm{a})\\(\mathrm{b})\end{array}\begin{cases}c_1 y(a)+c_2 y'(a)=0,\\ d_1 y(b)+d_2 y'(b)=0.\end{cases} \tag{2}$$

其中至少 c_1 和 c_2 两者之一，以及 d_1 和 d_2 两者之一不为零，λ 是参数. 方程(1)称为具有**施图姆-刘维尔形式**. 进一步，我们假设**正则性条件**：$p(x)$，$p'(x)$，$q(x)$和 $r(x)$在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续，且在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上 $p(x)>0$ 和 $r(x)>0$. 通常不需要明确指出区间 $a<x<b$，因为 a 和 b 可以由边界条件直接得到.

奇异施图姆-刘维尔问题是由方程(1)或者在有限区间上(但至少一个正则性条件不满足)或者在无限区间上所构成的边值问题. 此时，边界条件并不能总是用像(2a)和(2b)形式的方程来描述. 特别地，施图姆-刘维尔问题是奇异的，或者是因为它在无穷区间上，或者是因为一个或更多个系数在区间的一个或两个端点处趋近于 0 或∞. 事实上，为方便起见，我们要求 $p(x)$，$p'(x)$，$q(x)$和 $r(x)$在开区间 $a<x<b$ 上连续，且在 $a<x<b$ 上 $p(x)>0$ 和 $r(x)>0$. 本书中所遇到的所有奇异问题都将满足这个假设，我们以几个例题来说明.

333

例 1 经典奇异施图姆-刘维尔问题

(a) **勒让德方程**$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$ 可以写成施图姆-刘维尔形式

$$[(1-x^2)y']'+n(n+1)y=0, \quad -1<x<1,$$

取 $p(x)=1-x^2$，$q(x)=0$，$r(x)=1$，而 $\lambda=n(n+1)$. 注意 $p(\pm 1)=0$，因此正则性条件之一不满足.

(b) **贝塞尔方程的参数形式**. 参考 4.8 节方程(18)，易证该方程可以写成施图姆-刘维尔形式

$$[xy']'+\left[-\frac{p^2}{x}+\lambda^2 x\right]y=0, \quad 0<x<a, \quad y(a)=0.$$

因此，$p(x)=r(x)=x$，$q(x)=-\dfrac{p^2}{x}$，而参数写成 λ^2. 正则性条件不都满足，因为 $q(x)$在 0 点没有定义，并且 $p(0)=r(0)=0$，所以该问题是一个奇异施图姆-刘维尔问题. ■

显然，$y=0$ 是每个施图姆-刘维尔问题的解，施图姆-刘维尔问题的非零解称为该问题的**特征函数**，那些能够找到非零解的 λ 值称为**特征值**. 在例 2 中，我们将看到如何确定特征值和特征函数.

例 2　正则施图姆-刘维尔问题

寻找相应于施图姆-刘维尔问题

$$y''+\lambda y=0,\quad y(0)=y(\pi)=0$$

的特征值和特征函数.

解　取 $p(x)=1$，$q(x)=0$，以及 $r(x)=1$，这个方程满足形式(1). 在边界条件中，$a=0$ 和 $b=\pi$，且 $c_1=d_1=1$ 和 $c_2=d_2=0$，因此这是一个正则施图姆-刘维尔问题.

我们寻求这个问题的非零解，在施图姆-刘维尔问题中，解的性态通常依赖于 λ 的符号，所以我们分成三种情形.

情形 1：$\lambda<0$. 令 $\lambda=-\alpha^2$，其中 $\alpha>0$，则方程变为 $y''-\alpha^2y=0$，其通解是 $y=c_1\sinh\alpha x+c_2\cosh\alpha x$. 我们要求 $y(0)=0$，代入通解得到 $c_2=0$. 现在，利用条件 $y(\pi)=0$，我们得到 $0=c_1\sinh\alpha\pi$，除非 $x=0$，否则 $\sinh x\neq0$(见图 1)，我们推出 $c_1=0$，因此，此时不存在非零解.

情形 2：$\lambda=0$. 此时微分方程的通解是 $y=c_1x+c_2$，像情形 1 一样，边界条件使得 c_1 和 c_2 必须为零，因此，此时没有非零解.

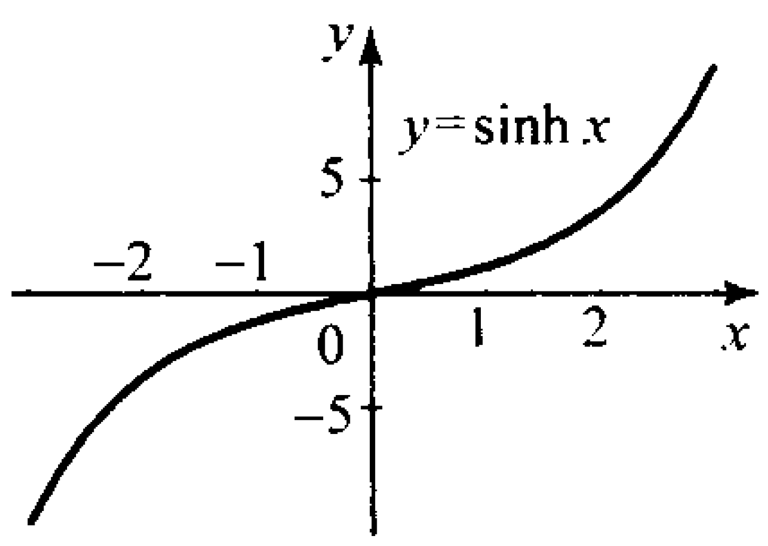


图 1　$\sinh x$ 总是增的

情形 3：$\lambda>0$. 此时令 $\lambda=\alpha^2$，其中 $\alpha>0$，则方程变为 $y''+\alpha^2y=0$，其通解是 $y=c_1\cos\alpha x+c_2\sin\alpha x$. 由 $y(0)=0$，我们得 $0=c_1\cos0+c_2\sin0$，或 $0=c_1$；因此 $y=c_2\sin\alpha x$. 现在，代入另一个边界条件，得到 $0=c_2\sin\alpha\pi$. 由于我们寻求非零解，我们取 $c_2\neq0$，因此我们有 $\sin\alpha\pi=0$，也即 $\alpha=1,2,3,\cdots$. 因为 $\lambda=\alpha^2$，这意味着原问题具有特征值

334

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=4,\quad \lambda_3=9,\cdots$$

以及相应的特征函数

$$y_1=\sin x,\quad y_2=\sin2x,\quad y_3=\sin3x,\cdots.$$

在每一情形中，我们令 c_2 为 1，其他的特征函数是这些函数的非零倍. ■

现在，我们来描述正则施图姆-刘维尔问题的特征值和特征函数的一些基本性质，所有这些都可以用例 2 的解来说明. 在这个例题中，特征值构成一个实数的递增序列；进一步，对应于每个特征值，只有一个线性无关的特征函数. 例如，在例 2 中，当 $\lambda=4$ 时，相应的特征函数都具有 $c_2\sin2x$ 形式，即都是 $\sin2x$ 的倍数. 容易验证：特征函数 $\sin x$，$\sin2x$，$\sin3x$，…在区间 $0<x<\pi$ 上构成一个正交集. 正如下面的定理 1 和 2 所示，这些观察对所有的正则二阶施图姆-刘维尔问题都成立. 这些定理的证明可以在 G. Birkhoff and G. Rota, *Ordinary Differential Equations*, 2nd ed., Wiley, 1969 中找到.

定理 1(正则施图姆-刘维尔问题的特征值)　*正则施图姆-刘维尔问题的特征值都是实的，且构成一个递增序列*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots,$$

其中当 $j \to \infty$ 时，$\lambda_j \to \infty$.

下面一个结果是处理特征函数的正交性的，这个性质不仅对正则施图姆-刘维尔问题成立，对一些奇异的也成立. 为理解正交性成立的原因，我们首先从正则施图姆-刘维尔问题中的边界条件(2)出发，来推导一些推论.

令 λ_j 和 λ_k 是正则施图姆-刘维尔问题(1)～(2)的两个不同的特征值，而 y_j 和 y_k 为相应的特征函数. 由(2a)，我们有

$$c_1 y_j(a) + c_2 y'_j(a) = 0$$
$$c_1 y_k(a) + c_2 y'_k(a) = 0.$$

写成矩阵形式有

335

$$\begin{bmatrix} y_j(a) & y'_j(a) \\ y_k(a) & y'_k(a) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由于 c_1 和 c_2 不全为零，所以我们必有

$$\det\begin{bmatrix} y_j(a) & y'_j(a) \\ y_k(a) & y'_k(a) \end{bmatrix} = 0.$$

或等价地，$y_k(a)y'_j(a) - y_j(a)y'_k(a) = 0$. 类似地，因为特征函数还满足(2b)，我们得到 $y_k(b)y'_j(b) - y_j(b)y'_k(b) = 0$. 联立这两个恒等式，以及 $p(a)$ 和 $p(b)$ 是有限的这个事实，我们得到

$$p(b)(y_k(b)y'_j(b) - y_j(b)y'_k(b)) - p(a)(y_k(a)y'_j(a) - y_j(a)y'_k(a)) = 0. \tag{3}$$

正如你将在定理 2 的证明所看到的，正是这个方程推出了特征函数的正交性.

在奇异问题中，由于我们可能处理的是无穷区间或在端点处无界的函数，我们将要求一个类似于(3)的条件，而不是类似于(2)，即用如下极限形式.

奇异施图姆-刘维尔问题的正交性条件 假设 y_1 和 y_2 是施图姆-刘维尔问题的特征函数，相应的特征值分别为 λ_1 和 λ_2，我们要求

$$\lim_{x \uparrow b} p(x)(y_1(x)y'_2(x) - y_2(x)y'_1(x)) - \lim_{x \downarrow a} p(x)(y_1(x)y'_2(x) - y_2(x)y'_1(x)) = 0. \tag{4}$$

正如我们刚刚注意到的，在正则施图姆-刘维尔问题中，(4)可化为(3)，所以对正则施图姆-刘维尔问题，这个条件成立. 它对许多重要的奇异问题也成立，比如勒让德方程和贝塞尔方程(见下面的例 3).

使得(4)成立的另外一个有趣的例子是：考虑(1)式，其中 a 和 b 都是有限的，且 $p(a) = p(b) > 0$. 我们要求 $y(a) = y(b)$ 和 $y'(a) = y'(b)$，以代替(2)式. 这些条件在许多应用中出现，它们称为**周期边界条件**. 易证在这种情形中(4)成立.

定理 2(特征函数的唯一性和正交性)

(a)对正则施图姆-刘维尔问题的每个特征值，都相应地存在唯一一个线性无关的特征函数.

(b)相应于正则施图姆-刘维尔问题的不同特征值的特征函数关于权函数 $r(x)$ 是正交的. 这一论断对其他满足条件(4)的施图姆-刘维尔问题也成立.

证明 (a)假设 y_1 和 y_2 是施图姆-刘维尔问题相应于特征值 λ 的特征函数. 我们将通过证明朗斯基 $W(y_1, y_2)$ 为 0 来说明 y_1 和 y_2 是线性相关的. 回顾，我们只需证明 $W(y_1, y_2) = 0$

336

在一点成立，即可说明 $W(y_1, y_2)=0$ 恒成立(附录 A.1 定理 7)，所以我们计算在 $x=a$ 点的朗斯基. 我们可以运用朗斯基方法来证明 y_1 和 y_2 的线性相关性，是因为 y_1 和 y_2 是相应于同一个特征值的特征函数，因而是同一个常微分方程的解. 这一方法对相应于不同特征值的特征函数就不适用了. 在 $x=a$ 点，我们有

$$W(y_1,y_2)(a)=\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y'_1(a) & y'_2(a) \end{vmatrix}=y_1(a)y'_2(a)-y_2(a)y'_1(a).$$

由于 y_1 和 y_2 满足(2a)，我们有

$$\begin{cases} c_1y_1(a)+c_2y'_1(a)=0, \\ c_1y_2(a)+c_2y'_2(a)=0. \end{cases}$$

注意到，如果我们取 $c_1=c_2=0$，则方程组成立；而由我们的假设，这个方程组对不全为零的 c_1 和 c_2 也成立，所以这个方程组关于 c_1 和 c_2 有不止一组解，这当且仅当其系数矩阵的行列式为零才有可能，即 $y_1(a)y'_2(a)-y'_1(a)y_2(a)=0$，或等价地，$W(y_1, y_2)(a)=0$.

(b)假设 $\lambda_j\neq\lambda_k$ 是施图姆-刘维尔问题的特征值，相应的特征函数分别是 y_j 和 y_k. 由于 y_j 和 y_k 是(1)的解，我们有

$$[p(x)y'_j]'+[q(x)+\lambda_jr(x)]y_j=0;$$
$$[p(x)y'_k]'+[q(x)+\lambda_kr(x)]y_k=0.$$

对第一个方程乘以 y_k，第二个乘以 y_j，再相减，化简得

$$y_k[p(x)y'_j]'-y_j[p(x)y'_k]'=(\lambda_k-\lambda_j)y_jy_kr(x).$$

由于$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p(x)(y_ky'_j-y_jy'_k))=y_k[p(x)y'_j]'-y_j[p(x)y'_k]'$(利用乘积法则，并化简可得)，我们得到

$$\begin{aligned}(\lambda_k-\lambda_j)\int_a^b y_j(x)y_k(x)r(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p(x)(y_ky'_j-y_jy'_k))\mathrm{d}x \\ &= p(x)(y_ky'_j-y_jy'_k)\big|_a^b \\ &= p(b)[y_k(b)y'_j(b)-y_j(b)y'_k(b)] \\ &\quad -p(a)[y_k(a)y'_j(a)-y_j(a)y'_k(a)].\end{aligned} \tag{5}$$

由(4)式，我们发现(5)式的右端等于 0. 由于 $\lambda_k-\lambda_j\neq0$，我们推得

$$\int_a^b y_j(x)y_k(x)r(x)\mathrm{d}x=0,$$

即 y_j 和 y_k 关于权函数 $r(x)$ 是正交的. ■

注意，定理 2 中的(a)部分对带有周期边界条件的施图姆-刘维尔问题可能不成立，因为这些问题不像证明中所假设的那样满足(2a). 特别地，方程

$$y''+\lambda y=0$$

带有周期边界条件 $y(-\pi)=y(\pi)$，$y'(-\pi)=y'(\pi)$，具有特征值 $\lambda_n=n^2$，$n=0, 1, 2, \cdots$，并且对任意 λ_n，$n\geqslant1$，有两个线性无关的特征函数 $\sin nx$ 和 $\cos nx$(见习题 14). 一般地，如该例所示，在二阶施图姆-刘维尔问题中，每个特征值至多具有两个线性无关相应的特征函数. 这是我们所考虑的方程是二阶这个事实所保证的.

337

例3 **勒让德多项式和贝塞尔函数**

(a)回顾例1(a)，可以发现，将勒让德方程写成施图姆-刘维尔形式时，函数 $p(x)=1-x^2$ 满足 $p(\pm 1)=0$. 因此，(4)式成立，从而由定理2推得：其特征函数，勒让德多项式，$P_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$，在区间 $(-1, 1)$ 上关于权函数 $r(x)\equiv 1$ 是正交的.

(b)在例1(b)中，我们将贝塞尔方程的参数形式写成施图姆-刘维尔形式时，得到函数 $p(x)=x$，$r(x)=x$. 利用 $p(0)=0$ 和 $y(R)=0$ 这个事实，我们知(4)式成立. 因此，由定理2得到方程的解 $J_p\left(\frac{\alpha_{pj}}{R}x\right)$ $(j=1, 2, \cdots)$ 在区间 $(0, R)$ 上关于权函数 $r(x)=x$ 是正交的.

有趣的是，注意我们并不需要在(a)或(b)的奇异点处加上边界条件(除了有界性外)，对于圆柱体问题的贝塞尔函数，我们没有应用 $\rho=0$ 处的边界条件，而对勒让德多项式，没有用 $x=\pm 1$ 的边界条件. ■

特征函数展开

由定理2知，如果 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots$ 是正则施图姆-刘维尔问题的特征值集合，则对应的特征函数集合 $\{y_1, y_2, y_3, \cdots\}$ 关于权函数 $r(x)$ 是正交的. 因而，如6.1节，对适当的函数，我们可以用 y_1，y_2，y_3，…来作正交展开. 更确切地，我们有下面这个施图姆-刘维尔理论中的基本结果. 回顾，关于权 $r(x)$ 的内积 (y_j, y_k) 定义为 $\int_a^b y_j y_k\, r(x)\,\mathrm{d}x$，范数 $\|y_j\|$ 定义为 $\sqrt{(y_j, y_j)}$.

定理3(特征函数展开) *令 y_1，y_2，y_3，…是在区间 $[a, b]$ 上正则施图姆-刘维尔问题的特征函数集. 如果 f 在区间 $[a, b]$ 上是分段光滑的，则我们有 $f(x)=\sum_{j=1}^{\infty} A_j y_j(x)$，其中*

$$A_j=\frac{(f, y_j)}{\|y_j\|^2}=\int_a^b f(x)y_j(x)r(x)\mathrm{d}x\Big/\int_a^b y_j^2(x)r(x)\mathrm{d}x.$$

对于 $a<x<b$，如果 f 在 x 点连续，则级数收敛到 $f(x)$；否则，收敛到 $\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

338

这种级数展开称为函数 f 的**特征函数展开**，而系数 A_j 称为**广义傅里叶系数**. 傅里叶正弦(相应的正则施图姆-刘维尔问题，参看上面的例2)和余弦展开是这个定理的示例. 定理3的完整证明超出本书的范围，但是我们可以由6.1节的定理2来推导 A_j 的公式. 除此之外，显然定理对更广泛的情形成立，我们已经知道：定理的结论对勒让德和贝塞尔级数等奇异情形成立. 因此，勒让德级数和贝塞尔级数都是特征函数展开的例子. 类似地，傅里叶级数的例子表明结论对施加周期边界条件的情形也成立.

特征函数展开法在求解应用问题时自然而然地出现，例如，当我们考察一端有热辐射的棒中热传导问题时(3.6节习题2)，我们就遇到一个正则施图姆-刘维尔问题. 作为进一步的示例，我们将求解一个相关的问题，带有不同的边界条件，这个例子说明边界条件在确定特征值和特征函数中所起的作用.

例 4　特征值和特征函数

求出正则施图姆-刘维尔问题

$$X''+\lambda X=0,\quad X'(0)=0,\quad X(1)+X'(1)=0$$

的特征值和特征函数.

解　如果 $\lambda=0$，微分方程的通解是 $X=ax+b$，易证：满足边界条件的唯一途径就是令 $a=b=0$. 因此，$\lambda=0$ 不是特征值，因为此时不存在非平凡解. 如果 $\lambda<0$，微分方程的通解是 $X=c_1\cosh\sqrt{-\lambda}x+c_2\sinh\sqrt{-\lambda}x$. 可以直接验证：没有如此形式的非平凡解满足边界条件，因此没有负的特征值. 当 $\lambda>0$ 时，为方便计，令 $\lambda=\mu^2$，微分方程的通解是

$$X=A\cos\mu x+B\sin\mu x.$$

现在，应用边界条件：

$$X'(0)=0\ \Rightarrow\ B=0$$

$$X(1)+X'(1)=0\ \Rightarrow\ A(\cos\mu-\mu\sin\mu)=0.$$

为保证得到非零特征函数，我们令 $A=1$，则

$$\cos\mu-\mu\sin\mu=0;$$

等价地，

$$\cot\mu=\mu. \tag{6}$$

因此，对此方程的正根 μ，有特征值 $\lambda=\mu^2$. 如果画出 $y=\cot\mu$ 和 $y=\mu$ 的图像，我们可以发现，这两个图像相交无穷多次(如图 2 所示)，因此，(6)有无穷多个根. 虽然我们不能用一个简单的形式来计算这些根，但是可以求得它们的数值近似，而在随后的计算中应用这些数值近似. 自现在起，我们记这些根为 μ_1，μ_2，μ_3，…，因而得到特征函数为 339

$$X=X_n=\cos\mu_n x,\quad n=1,2,\cdots$$

特征值为 μ_1^2，μ_2^2，…，μ_n^2，….

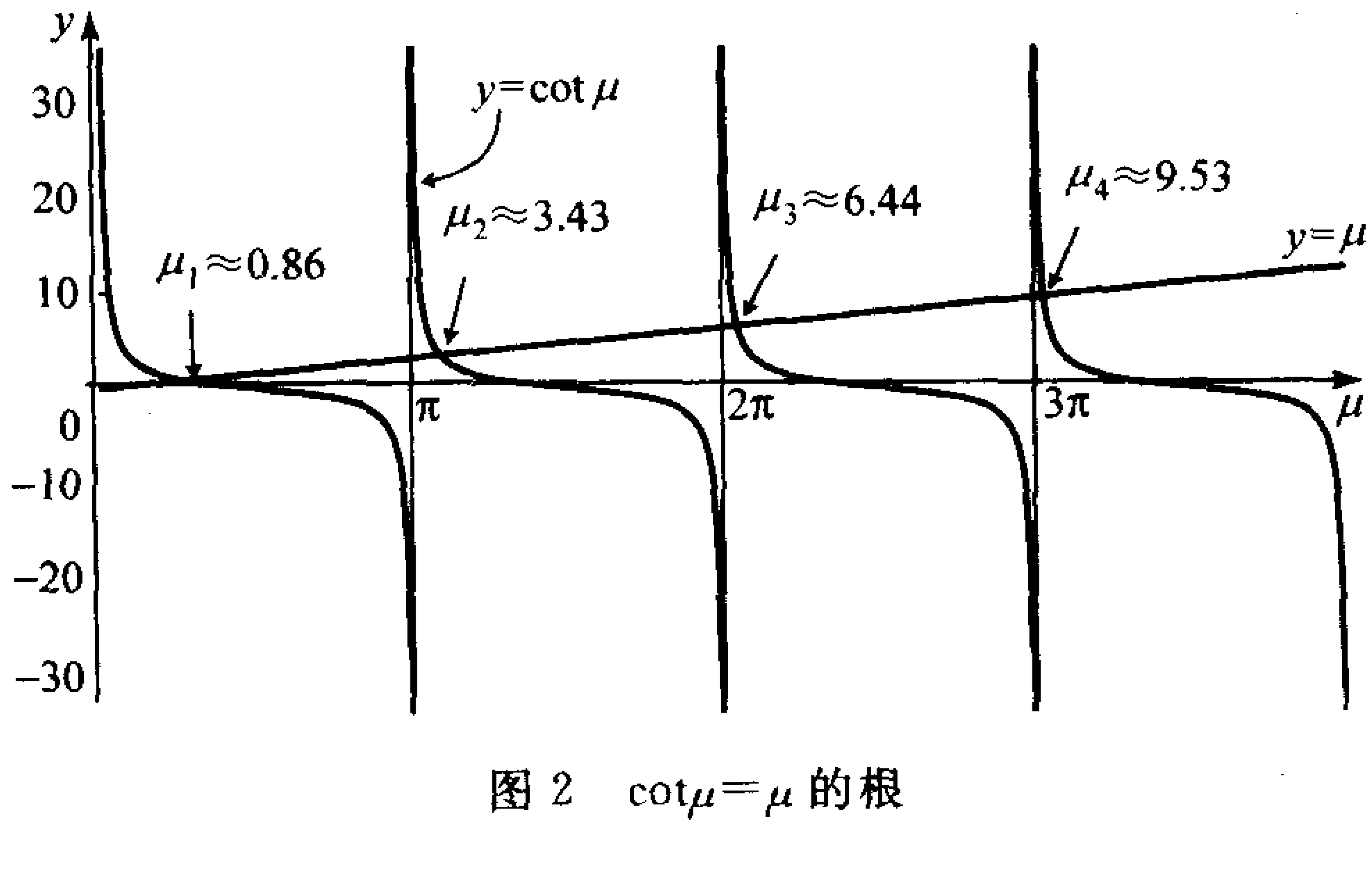


图 2　$\cot\mu=\mu$ 的根　■

例 5　特征函数展开

(a)显式计算例 4 中的前五个特征函数 $X_1(x)$，$X_2(x)$，…，$X_5(x)$.

(b)给定 $f(x)=x(1-x)$，$0<x<1$，f 的特征函数展开式是什么？画出 f 及其特征函数展开式的几个部分和的图像.

解　(a)图 2 描绘了 $y=\cot\mu$ 和 $y=\mu$ 的图像. 按照例 4 的求解过程，为求特征值，我们必

须求解方程 $\cot\mu=\mu$. 利用计算机系统，我们可以求出前五个解的近似值：

$$\mu_1=0.860,\quad \mu_2=3.426,\quad \mu_3=6.437,\quad \mu_4=9.529,\quad \mu_5=12.645.$$

所以，前五个特征函数为

$$X_1(x)=\cos(0.860x),\quad X_2(x)=\cos(3.426x),$$
$$X_3(x)=\cos(6.437x),\quad X_4(x)=\cos(9.529x),\quad X_5(x)=\cos(12.645x).$$

(b)由定理 3，f 的特征函数展开式为

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}A_j\cos\mu_j x,$$

其中

$$A_j=\int_0^1 x(1-x)\cos\mu_j x\,\mathrm{d}x\Big/\int_0^1\cos^2\mu_j x\,\mathrm{d}x.$$

利用(a)中给出的 μ_j 近似值，利用计算机系统来估算这些系数的值，我们得到

340

$$A_1=0.189,\quad A_2=-0.032,\quad A_3=-0.091,\quad A_4=-0.001,\quad A_5=-0.025.$$

因此，f 的特征函数展开式为

$$f(x)=0.189\cos(0.860x)-0.032\cos(3.426x)-0.091\cos(6.437x)$$
$$-0.001\cos(9.529x)-0.025\cos(12.645x)+\cdots.$$

正如定理 3 所保证的，如图 3 所示，特征函数展开的部分和收敛到 $f(x)$.

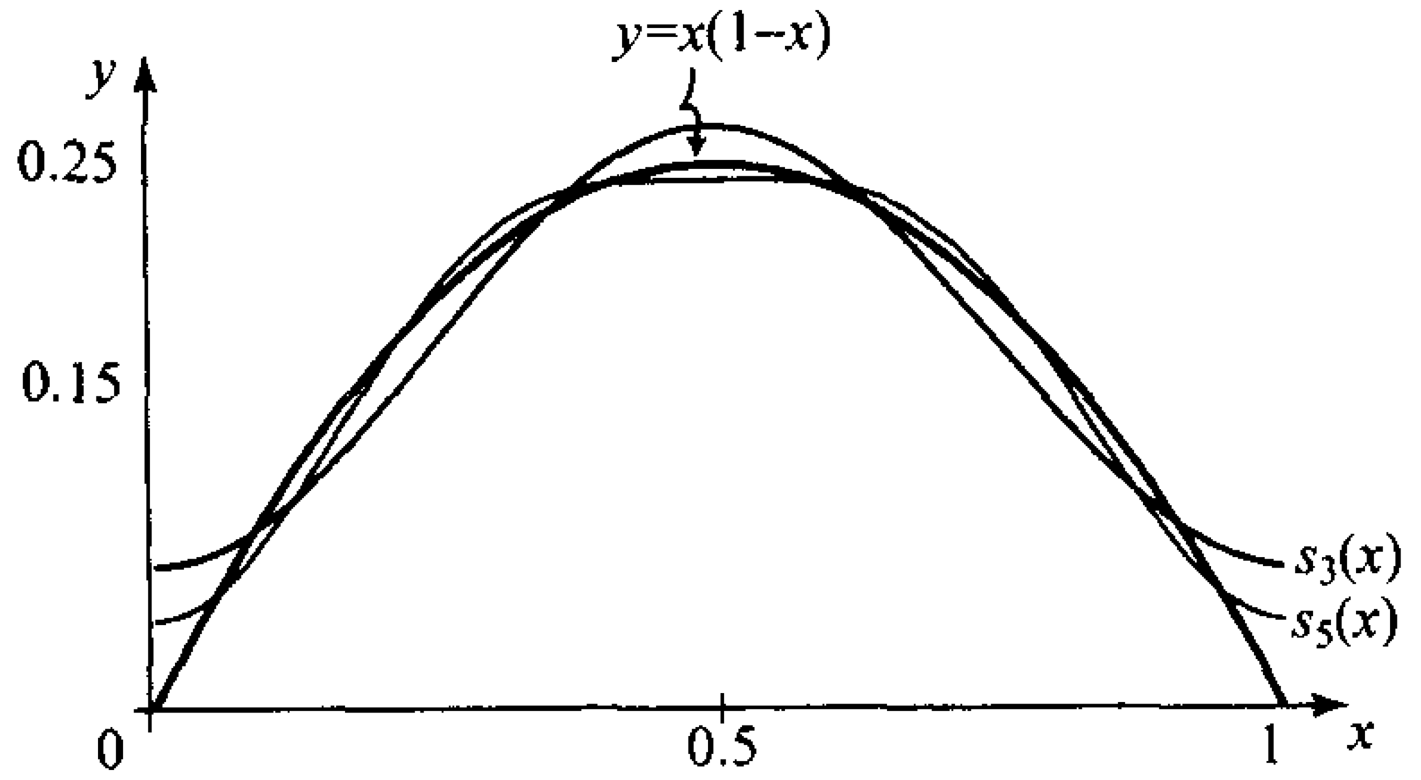


图 3　$f(x)=x(1-x)$的特征函数展开 ■

例 4 和例 5 中特征函数的进一步信息可以由本节的结果得出，例如，定理 2 蕴涵着这些特征函数在区间(0，1)上的正交性.

我们下面所要考虑的问题，出现在圆盘上带有罗宾边界条件的热传导方程中(习题 35)，我们将用一些反映出与热传导方程有联系的记号.

例 6　带有罗宾边界条件的贝塞尔方程

求解奇异施图姆-刘维尔问题

$$rR''+R'+\lambda^2 rR=0\quad(0\leqslant r<a),\quad R'(a)=-\kappa R(a)$$

的特征值和特征函数. 这里，$\kappa>0$ 是热传导常数或系数，而 $a>0$ 是圆盘的半径. 注意到，我们并没有给出在 0 端点处的边界条件，取而代之，我们通常要求解在区间[0，a]上有界.

解　将这个方程看成零阶贝塞尔方程的参数形式(参见 4.8 节定理 3). 在区间[0，a]上的有界解具有形式

$$R(r)=J_0(\lambda r),$$

其中，特征值 λ 由边界条件

$$R'(a)=-\kappa R(a)\quad\Rightarrow\quad \lambda J'_0(\lambda a)=-\kappa J_0(\lambda a)$$

确定. 这个方程是否具有无穷多个解 λ? 利用微积分知识和贝塞尔函数的性质，不难验证答案是肯定的(习题 36). 这里我们将只给出根的近似值. 利用公式 $J'_0(x)=-J_1(x)$(4.8 节(1)式)，方程变为

$$\lambda J_1(a\lambda)=\kappa J_0(a\lambda).\tag{7}$$

图 4 中的图像暗示着：事实上，我们确实得到无穷多个根 $\lambda=\lambda_k$，$k=1, 2, \cdots$，在 $\kappa=a=1$ 情形，前六个根如表 1 所示.

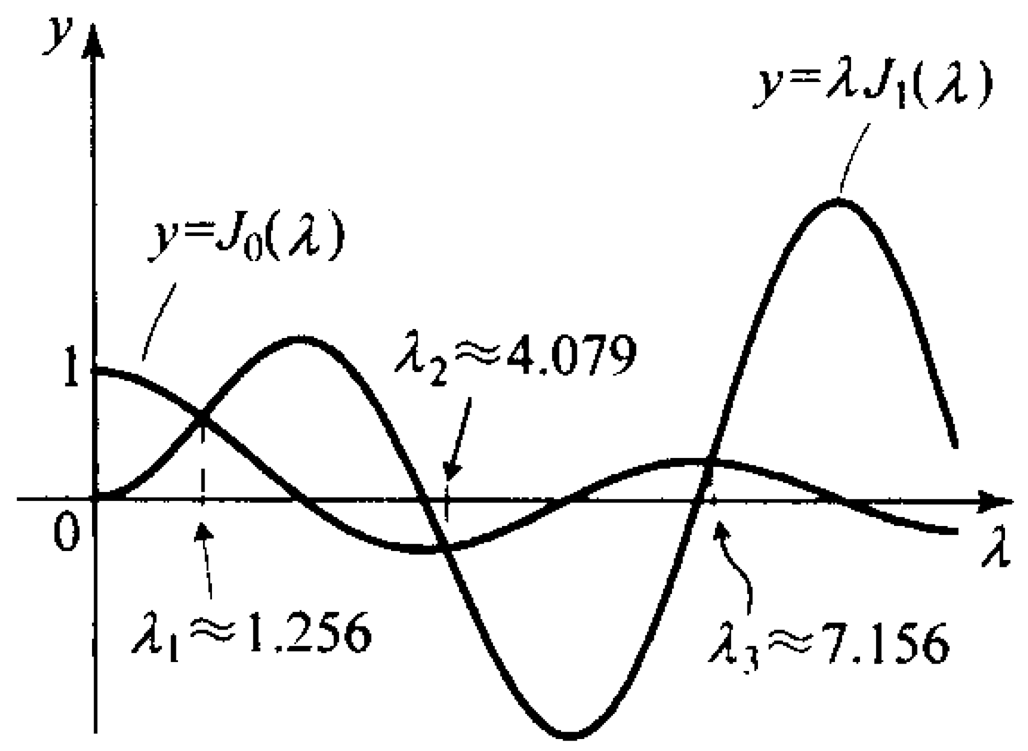


图　4

341

表 1　$\lambda J_1(\lambda)=J_0(\lambda)$ 的正根

k	1	2	3	4	5	6
λ_k	1.255 78	4.079 48	7.155 8	10.271	13.398 4	16.531 2

方程 $J_0(\lambda)=\lambda J_1(\lambda)$ 和 $-\lambda=\tan(\lambda+\pi/4)$ 的根近似相等，这个事实可以用来估计例 6 中的特征值. 例如，考虑正切函数的竖直渐近线，你是否可以验证论断：对充分大的 k，$\lambda_k\approx\frac{\pi}{4}+k\pi$?

对特征值的更精确描述，可以利用贝塞尔函数的渐近公式(4.9 节定理 3)得到. 我们有 $J_0(\lambda)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}\cos\left(\lambda-\frac{\pi}{4}\right)$ 和 $J_1(\lambda)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}\cos\left(\lambda-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)$. 因此，方程 $\lambda J_1(a\lambda)=\kappa J_0(a\lambda)$ 的根可以由方程 $\lambda\cos\left(a\lambda-\frac{3\pi}{4}\right)=\kappa\cos\left(a\lambda-\frac{\pi}{4}\right)$ 的根来近似；由于 $\cos\left(a\lambda-\frac{3\pi}{4}\right)=-\cos\left(a\lambda+\frac{\pi}{4}\right)$ 和 $\cos\left(a\lambda-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(a\lambda+\frac{\pi}{4}\right)$，方程变为

$$-\frac{1}{\kappa}\lambda=\tan\left(a\lambda+\frac{\pi}{4}\right).\tag{8}$$

当 $\kappa=a=1$ 时，该方程的前六个根(记为 α_k)如表 2(图 5)所示，试比较表 2 与表 1(图 4)中的各项.

因为贝塞尔函数的渐近公式在 λ 很大时结果更好，所以对于更大的特征值，表 2 的项就给出了更好的近似. 对每个特征值 λ_k，相应有一个特征函数 $R_k(r)=J_0(\lambda_k r)$. 我们取 $\kappa=a=1$，图 6 画出了 $k=1$，2 和 3 的特征函数. 不要将这些函数与在考虑 0 边界条件的圆盘上热传导方程时所出现的贝塞尔函数混淆，后者在 $r=a$ 时为 0，这与

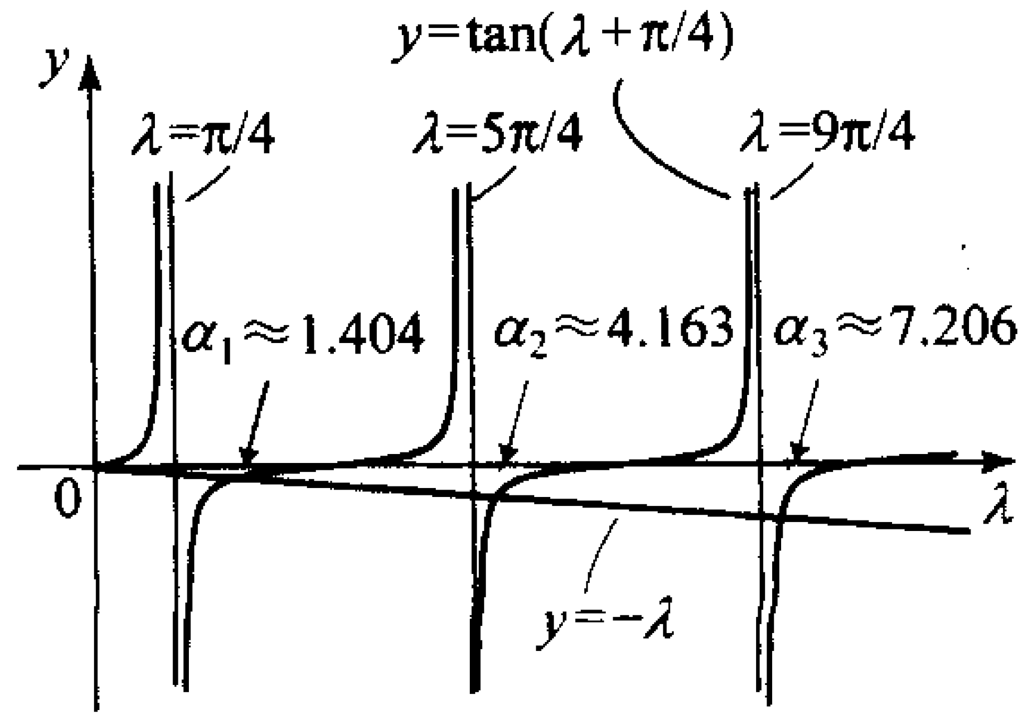


图　5

图 6 所描述的函数不同. ■

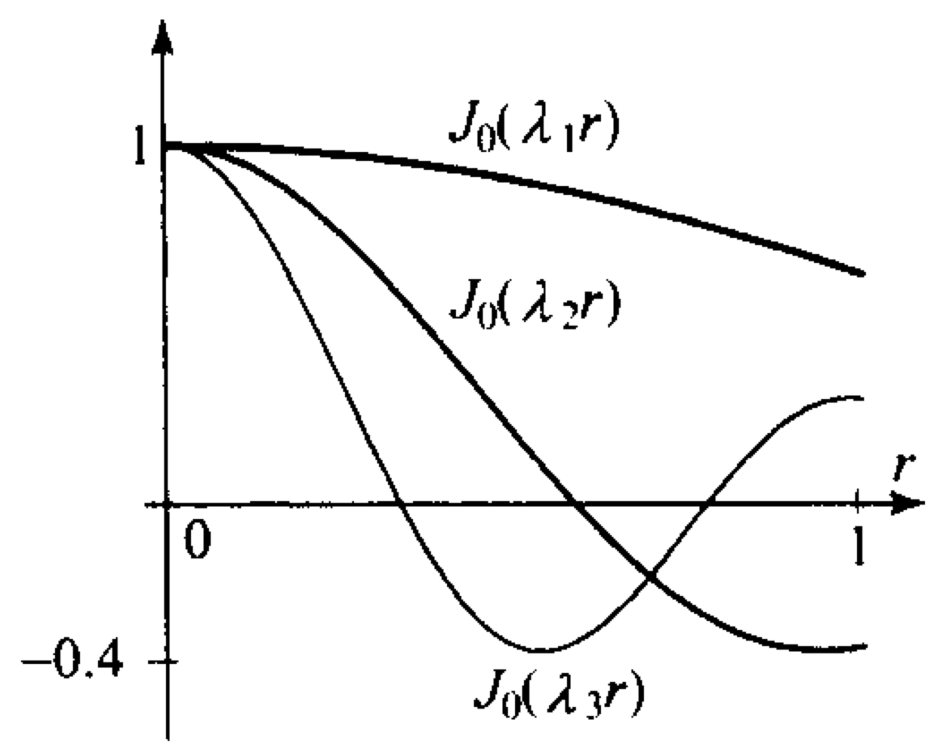


图 6 例 6 和 7 的特征函数

表 2 $-\lambda=\tan\left(\lambda+\frac{\pi}{4}\right)$的正根

342

k	1	2	3	4	5	6
α_k	1.404 22	4.162 75	7.206 47	10.306 9	13.426 1	16.553 7

例 7 **正交性**

试证例 6 中的特征函数在区间$(0, a)$上关于权 r 正交，更具体地，证明

$$\int_0^a J_0(\lambda_j r) J_0(\lambda_k r) r \mathrm{d}r = 0 \quad (j \neq k),$$

其中 $\lambda_k(k=1, 2, \cdots)$是(7)式的正根.

解 只需证明(4)式满足即可. 这个方程的施图姆-刘维尔形式(回顾例 1(b)，阶 $p=0$)为

$$[rR']' + \lambda^2 rR = 0, \quad 0 < r < a, \quad R'(a) = -\kappa R(a).$$

所以在(4)式中，取 $p(r)=r$，并令 y_1 和 y_2 是相应于不同特征值的特征函数. 用我们的记号，(4)式变为

$$\lim_{r\uparrow a} p(r)(y_1(r)y_2'(r) - y_2(r)y_1'(r)) - \lim_{r\downarrow 0} p(r)(y_1(r)y_2'(r) - y_2(r)y_1'(r)) = 0,$$

由于 $p(0)=0$，$p(a)=a$，并且所有函数都连续，条件变为

$$a(y_1(a)y_2'(a) - y_2(a)y_1'(a)) = 0; \text{等价地}, y_1(a)y_2'(a) - y_2(a)y_1'(a) = 0.$$

在端点 $r=a$，我们有 $y_k'(a) = -\kappa y_k(a)$，所以上面条件中的左端变为

$$y_1(a)(-\kappa y_2(a)) - y_2(a)(-\kappa y_1(a)) = 0,$$

这显然是对的. 因此，(4)式满足，而由定理 2，特征函数关于权 r 正交. ■

例 6 和例 7 的特征函数的进一步性质将在习题中研究. 特别地，特征函数的完备性将通过研究特定特征函数展开式的收敛性来研究.

在 6.4 节，我们将学习相应于 4 阶微分方程的施图姆-刘维尔问题. 这个推广是受我们后面要研究的梁振动所启发的，梁振动将涉及这类问题的求解.

习题 6.2

在习题 1～10 中，将给定方程写成施图姆-刘维尔形式，并判断问题是正则的还是奇异的.

1. $xy''+y'+\lambda y=0$，$y(0)=0$，$y(1)=0$.
2. $xy''+y'+\lambda y=0$，$y(1)=0$，$y(2)=0$.
3. $xy''+2y'+\lambda y=0$，$y(1)=0$，$y'(2)=0$. [提示：乘以 x.]

343

4. $y''+(x+\lambda)y=0$，$y(0)=0$，$y(1)=0$.
5. $xy''-y'+\lambda xy=0$，$y(0)=0$，$y(1)=0$. [提示：除以 x^2.]
6. $y''+\left[\frac{1+\lambda x}{x}\right]y=0$，$y(1)=0$，$y(2)=0$.

7. $y''+\lambda xy=0$，$y(-1)=0$，$y(1)=0$.

8. $(1-x^2)y''-2xy'+(1+\lambda x)y=0$，$y(-1)=0$，$y(1)=0$.

9. $(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0$，$y(-1)=0$，$y(1)=0$.

10. $y''-\dfrac{x}{1-x^2}y'+\lambda y=0$，$y(-1)=0$，$y(1)=0$.

在习题 11～20 中，确定给定施图姆-刘维尔问题的特征值和特征函数.

11. $y''+\lambda y=0$，$y(0)=0$，$y(2\pi)=0$.

12. $y''+\lambda y=0$，$y(0)=0$，$y(\pi/2)=0$.

13. $y''+\lambda y=0$，$y(0)=0$，$y'(\pi)=0$.

14. $y''+\lambda y=0$，$y(-\pi)=y(\pi)$，$y'(-\pi)=y'(\pi)$.

15. $y''+\lambda y=0$，$y(0)=0$，$y(\pi)+y'(\pi)=0$.

16. $y''+\lambda y=0$，$y(0)+y'(0)=0$，$y(2\pi)=0$.

17. $y''+\lambda y=0$，$y(0)+y'(0)=0$，$y(1)+y'(1)=0$.

18. $y''+\lambda y=0$，$y(0)+2y'(0)=0$，$y(1)=0$.

19. $xy''+y'+\left[-\dfrac{4}{x}+\lambda x\right]y=0$，$0<x<1$，$y(0)$有限，$y(1)=0$.

20. $xy''+y'+\left[-\dfrac{1}{x}+\lambda x\right]y=0$，$0<x<3$，$y(0)$有限，$y(3)=0$.

21. 试证：边值问题 $y''-\lambda y=0$，$y(0)=0$，$y(1)=0$ 没有正的特征值. 这是否与定理 1 矛盾？

22. 试证：边值问题 $y''-\lambda y=0$，$y(0)+y'(0)=0$，$y(1)+y'(1)=0$ 只有一个正的特征值. 这是否与定理 1 矛盾？

23. (a)利用例 2 中施图姆-刘维尔问题的特征函数，求出函数 $f(x)=x(0<x<\pi)$的特征函数展开.

(b)画出函数及其特征函数展开式的几个部分和的图像，并就图像作出评论.

24. 对函数 $f(x)=1$，$0<x<\pi$，重做习题 23.

25. 对函数 $f(x)=\sin x$，$0<x<\pi$，重做习题 23.

26. (a)求出习题 15 中施图姆-刘维尔问题前八个特征值的数值逼近，并描述相应的特征函数.

(b)求出 $\sin x$ 特征函数展开式的前八个非零项的近似值；画出函数和展开式的几个部分和的图像，描述所得到的图像.

27. 利用习题 26 的特征函数，将函数 $f(x)=1(0<x<\pi)$展开成级数形式；画出函数及其特征函数展开式的几个部分和的图像，并就图像作出评论.

28. 利用习题 5 的特征函数，将函数 $f(x)=\sin\pi x(0<x<1)$展开成级数形式；画出函数及其特征函数展开式的几个部分和的图像，并就图像作出评论.

344

29. 验证习题 11 特征函数的正交性.

30. 利用数值计算来验证例 5 特征函数的正交性.

31. 二阶线性常微分方程

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0,\quad -1<x<1,$$

其中 $n=0, 1, 2, \cdots$，称为**切比雪夫微分方程**. 我们的兴趣是求解这个方程，带有边界条件 $y(1)=1$ 和 $y'(1)$有限.

(a)将方程写成施图姆-刘维尔形式，确定 $p(x)$，$q(x)$和 $r(x)$. [提示：首先，除以$(1-x^2)^{1/2}$.]

(b)就像 5.5 节我们对勒让德方程所做的，利用幂级数方法，证明切比雪夫方程具有一个 n 次多项式的解．满足条件 $y(1)=1$ 的称为 **n 次切比雪夫多项式**，记为 $T_n(x)$．

事实上，所有非多项式解的导数在 $x=1$ 处无界，所以 $T_n(x)$是唯一满足边界条件的解．

(c)利用(4)式，试证：切比雪夫多项式在$(-1, 1)$上关于权函数 $r(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$是正交的．

32. (a)试证：变量代换 $x=\cos\theta$ 将切比雪夫方程变为 $y''+n^2 y=0$，$0<\theta<\pi$.

(b)得出结论：切比雪夫方程的两个线性无关的解是 $y_1(x)=y_1(\cos\theta)=\cos n\theta$ 和 $y_2(x)=y_2(\cos\theta)=\sin n\theta$.

(c)试证：$y_2'(x)$在 $x=1$ 无界，因此 $y_1(x)=\cos n\theta$ 是唯一满足 $y(1)=1$ 和 $y'(1)$有界的解，得出结论：$T_n(x)=\cos n\theta$．正如你所知，$\cos n\theta$ 可以表示成 $\cos\theta$ 的多项式．这个多项式表达式就是 $T_n(x)$．例如，$T_1(x)=\cos\theta=x$；$T_2(x)=\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2x^2-1$ 等．

(d)求出 $T_3(x)$和 $T_4(x)$.

33. (a)试证：例 6 的特征函数满足

$$\int_0^a [J_0(\lambda_k r)]^2 r\mathrm{d}r = \frac{a^2}{2}([J_0(\lambda_k a)]^2+[J_1(\lambda_k a)]^2).$$

[提示：4.8 节习题 36(b).]

(b)假设已知特征函数在区间$(0, a)$上构成一个完备正交函数集．试证：如果

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0(\lambda_k r) \quad (0\leqslant r<a),$$

则

$$A_k = \frac{2}{a^2([J_0(\lambda_k a)]^2+[J_1(\lambda_k a)]^2)}\int_0^a f(r)J_0(\lambda_k r)r\mathrm{d}r.$$

34. 考虑上个习题中的特征函数，取 $a=\kappa=1$.

(a)推导函数 $f(r)=100$，$0\leqslant r<1$ 的如下特征函数展开：

345

$$100 = 200\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1(\lambda_k)}{\lambda_k([J_0(\lambda_k)]^2+[J_1(\lambda_k)]^2)}J_0(\lambda_k r).$$

(b)试证：$J_1(\lambda_k)=\dfrac{J_0(\lambda_k)}{\lambda_k}$，并对 $0\leqslant r<1$，得出结论：

$$100 = 200\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_k)}{(1+\lambda_k^2)[J_0(\lambda_k)]^2}J_0(\lambda_k r).$$

(c)利用表 1 中的数值，推导(b)部分中函数的前六项部分和近似值，画出这个部分和的图像，以说明特征函数展开式的收敛性.

35. **专题问题：带罗宾条件的圆盘上热传导问题**．利用分离变量法，求解单位半径的圆盘上的热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}, \quad 0\leqslant r<1, t>0,$$

带有初始温度分布 $u(r, 0)=100(0\leqslant r<1)$和罗宾边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r,t)\Big|_{r=1} = -u(1,t).$$

该问题描述了侧面绝热的圆盘中的温度分布，其边界与周围介质有热交换，交换速率正比于边界温度．这里热传导常数或对流常数 κ 等于 1.

36. 固定 a，$\kappa>0$，令 $h(\lambda)=\kappa J_0(a\lambda)+\lambda J'_0(a\lambda)$，而 λ_1 和 λ_2 是 $J_0(a\lambda)$的两个不同相邻零点，满足 $0<\lambda_1<\lambda_2$.

(a)试证：$h(\lambda_1)=\lambda_1 J'_0(a\lambda_1)$，$h(\lambda_2)=\lambda_2 J'_0(a\lambda_2)$，并且 $h(\lambda_1)$和 $h(\lambda_2)$具有相反符号. [提示：由于 λ_1，$\lambda_2>0$，只需讨论 J_0 的导数在 J_0 的两个相邻零点处必具有相反符号即可.]

(b)得出结论：对区间(λ_1,λ_2)上某点 λ_3，有 $h(a\lambda)=0$.

(c)利用事实：$J_0(a\lambda)$具有无穷多个正零点，试证：$\kappa J_0(a\lambda)+J'_0(a\lambda)=0$ 具有无穷多个正零点.

6.3　悬链

我们已经学过了二阶方程的施图姆-刘维尔理论，我们以其应用到悬链的振荡来说明这个理论. 这个问题在偏微分方程理论发展中起过重要的作用. 正是在求解这个问题的过程中，丹尼尔·伯努利在 1732 年第一个发现了贝塞尔函数. 虽然这里将求解过程与一般施图姆-刘维尔理论相联系，但是我们的叙述包含了基于 4.8 节贝塞尔函数的性质来求解这个问题的所有必要细节.

为描述控制悬链运动的方程，我们将 x 轴放在竖直的位置，方向向上. 考虑长度为 L 的链子，一端固定在 $x=L$ 处，向下悬挂着(图 1).

346

链的微小横振动由如下边值问题描述：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=g\left[x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\right],\quad 0<x<L,\quad t>0,$$
$$u(L,t)=0,\quad t>0,\qquad (1)$$
$$u(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=v(x).$$

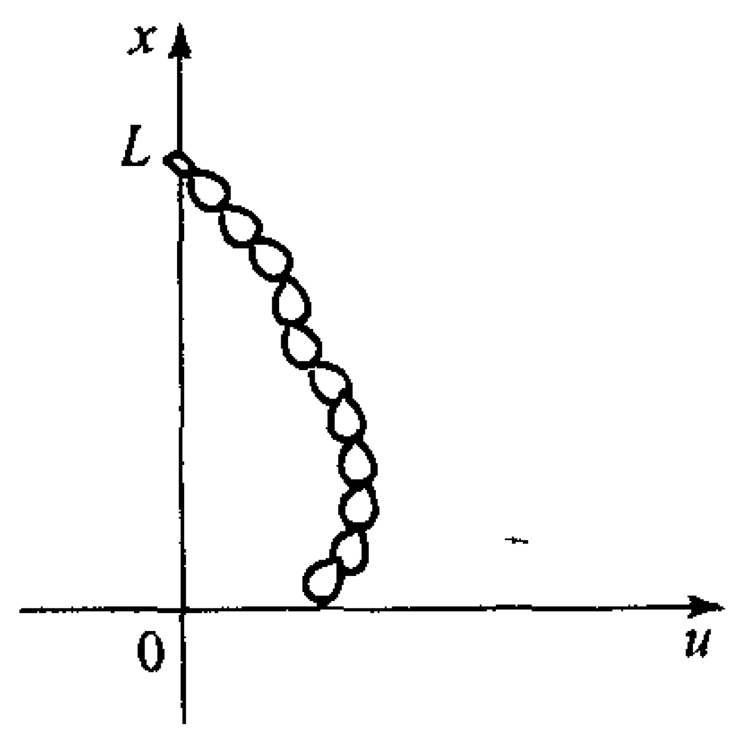


图 1　悬链

这里，g 是重力加速度，$f(x)$是链的初始位移，而 $v(x)$是其初始速度. 物理上，还应该加上另外一个边界条件：对所有 $t>0$，$u(0,t)$有限. 这个条件说明自由端的振动保持有界，可以用来剔除那些无界解. (1)式的推导在 3.2 节习题 6 中给出. 我们将用分离变量法来求解这个边值问题. 这个方法将导出贝塞尔方程，而解将涉及一种贝塞尔级数.

分离变量法

我们假设形如 $u(x,t)=X(x)T(t)$的乘积解，代入(1)式，并分离变量，我们得到

$$XT''=gT(xX''+X'),$$
$$\frac{1}{g}\frac{T''}{T}=\frac{xX''+X'}{X}.$$

由于变量是分离的，为使最后一个等式成立，每一边都应为一个常数，因此

$$\frac{1}{g}\frac{T''}{T}=\lambda \quad 及 \quad \frac{xX''+X'}{X}=\lambda.$$

边界条件蕴涵着：对所有 $t>0$ 有 $T(t)X(L)=0$. 因此，为避免平凡解，我们要求 $X(L)=0$. 从而，我们得到方程

$$T''-\lambda gT=0 \quad 及 \quad xX''+X'-\lambda X=0,\quad X(L)=0.$$

求解变量分离的方程

如果$\lambda \geqslant 0$，含 T 的微分方程的解要么是线性函数，要么是指数函数；由于明显的实用原因，我们剔除这些解，所以λ必是负的. 通常基于物理背景的讨论，只有负分离常数才导出非平凡解. 为简化记号，我们将简单地以$-\lambda^2$来代替λ，得到

$$T'' + \lambda^2 g T = 0 \tag{2}$$

和

347

$$xX'' + X' + \lambda^2 X = 0, \quad X(L) = 0. \tag{3}$$

(2)式的通解是

$$\boxed{T(t) = A\cos(\sqrt{g}\lambda t) + B\sin(\sqrt{g}\lambda t).} \tag{4}$$

下面我们从施图姆-刘维尔理论的角度来考虑含 X 的微分方程. 通过改写(3)式，我们发现这个微分方程可以写成施图姆-刘维尔形式：

$$(xX')' + \lambda^2 X = 0.$$

与 6.2 节(1)式比较，我们发现 $p(x)=x$，$q(x)=0$，且 $r(x)=1$，以及 $a=0$，$b=L$. 由于 $p(0)=0$，这是一个奇异施图姆-刘维尔问题. 我们将证明这个问题具有无穷多个特征值，并且相应的特征函数构成一个完备集，由上节的定理 2(b)，得到这些特征函数关于权函数 $r(x)=1$ 正交. 所以正如前面多次所做，我们可以通过叠加相应的乘积解来构造悬链问题的解$u(x, t)$.

在这个特例中，由于(3)式与贝塞尔方程有着密切联系，我们可以做得更具体. 为看出这点，我们作变量代换 $s=2\sqrt{x}$. 利用链式法则，我们验证

$$X' = \frac{dX}{dx} = \frac{dX}{ds}\frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$X'' = \frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d^2X}{ds^2} - \frac{1}{2x^{3/2}}\frac{dX}{ds}.$$

代入(3)式，并化简得

$$s^2\frac{d^2X}{ds^2} + s\frac{dX}{ds} + \lambda^2 s^2 X = 0 \quad X(2\sqrt{L}) = 0,$$

这就是零阶贝塞尔方程的参数形式(4.8 节定理 3). 由于我们只对方程的有界解感兴趣，我们可以应用 4.8 节定理 3(取 $p=0$)，从而得到

$$\lambda = \lambda_j = \frac{\alpha_j}{2\sqrt{L}}, \quad 及 \quad X(s) = X_j(s) = J_0\left(\frac{\alpha_j}{2\sqrt{L}}s\right), \tag{5}$$

其中 $j=1, 2, 3, \cdots$，而 α_j 表示 J_0 的第 j 个零点. 更进一步，这些函数在区间 $0\leqslant s\leqslant 2\sqrt{L}$上关于权函数 s 是正交的. 4.8 节的(11)和(12)式所表示的正交性关系式(取 $a=2\sqrt{L}$)变为

348

$$\int_0^{2\sqrt{L}} J_0\left(\frac{\alpha_j}{2\sqrt{L}}s\right)J_0\left(\frac{\alpha_k}{2\sqrt{L}}s\right)s\,ds = 0, \quad j \neq k \tag{6}$$

和

$$\int_0^{2\sqrt{L}} J_0^2\left(\frac{\alpha_j}{2\sqrt{L}}s\right)s\,ds = 2LJ_1^2(\alpha_j), \quad j = 1,2,\cdots. \tag{7}$$

将 $s=2\sqrt{x}$ 代回(5)、(6)和(7)式，我们得到解

$$X_j(2\sqrt{x}) = J_0\left(\alpha_j\sqrt{\frac{x}{L}}\right), \quad j=1,2,3,\cdots, \tag{8}$$

及其正交关系式

特征函数的正交性

$$\int_0^L J_0\left(\alpha_j\sqrt{\frac{x}{L}}\right)J_0\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\mathrm{d}x = 0, \quad j\neq k,$$

$$\frac{1}{LJ_1^2(\alpha_j)}\int_0^L J_0^2\left(\alpha_j\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\mathrm{d}x = 1, \quad j=1,2,\cdots.$$

我们求解了含 X 的方程，结合(4)和(8)式，得到(1)式满足所带边界条件的乘积解是

$$u_j(x,t) = J_0\left(\alpha_j\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\left[A_j\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\frac{\alpha_j}{2}t\right)+B_j\sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\frac{\alpha_j}{2}t\right)\right]. \tag{9}$$

函数 $u_j(j=1, 2, \cdots)$ 称为链的**正规波型**. 对 $j=1$，我们得到链的**基本波型**. 由(9)式，我们得到第 j 个正规波型的**频率**

$$v_j = \frac{\alpha_j}{4\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}.$$

整个问题的贝塞尔级数解

通过叠加所有的乘积解，我们得到

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} J_0\left(\alpha_j\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\left[A_j\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\frac{\alpha_j}{2}t\right)+B_j\sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\frac{\alpha_j}{2}t\right)\right]. \tag{10}$$

令 $t=0$，并利用初始条件，我们得到

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_0\left(\alpha_j\sqrt{\frac{x}{L}}\right).$$

349

为确定 A_j，我们在方程两边同乘以 $J_0\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right)$，然后从 0 到 L 求关于 x 的积分. 由正交关系式，所有 $j\neq k$ 的项都是零；而当 $j=k$ 时，我们得到

$$A_j = \frac{1}{LJ_1^2(\alpha_j)}\int_0^L f(x)J_0\left(\alpha_j\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\mathrm{d}x, \quad j=1,2,\cdots. \tag{11}$$

为确定 B_j，利用初始速度 $v(x)$，我们采取类似方法. 对 u 求关于 t 的导数，再令 $t=0$，我们得到

$$v(x) = u_t(x,0) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j\sqrt{\frac{g}{L}}\frac{\alpha_j}{2}J_0\left(\alpha_j\sqrt{\frac{x}{L}}\right).$$

在两边同乘以 $J_0\left(\alpha_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right)$，然后从 0 到 L 求关于 x 的积分，由正交性得

$$B_j = \frac{2}{\alpha_j J_1^2(\alpha_j)}\frac{1}{\sqrt{gL}}\int_0^L v(x)J_0\left(\alpha_j\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\mathrm{d}x, \quad j=1,2,\cdots. \tag{12}$$

这就由初始条件完全确定了解．我们以一个数值例题来说明这个求解过程．

例 1　振动的链

一个长度为 1 米的链自一端悬挂着，链的初始位移是将中心推开 0.005 米、并保持下端固定所得到的(见图 2)．然后，链开始自由振动．

(a)前三个正规波型的频率是多少？(取 $g=9.8$ 米/秒^2.)

(b)画出前三个正规波型 $u_1(x,t)$，$u_2(x,t)$，$u_3(x,t)$在 $t=0$ 时的图像．

(c)通过求解 $u(x,t)$来确定链的运动．

(d)用级数的前三项来逼近解，并画出近似函数在不同 t 值时的图像来说明链的运动．

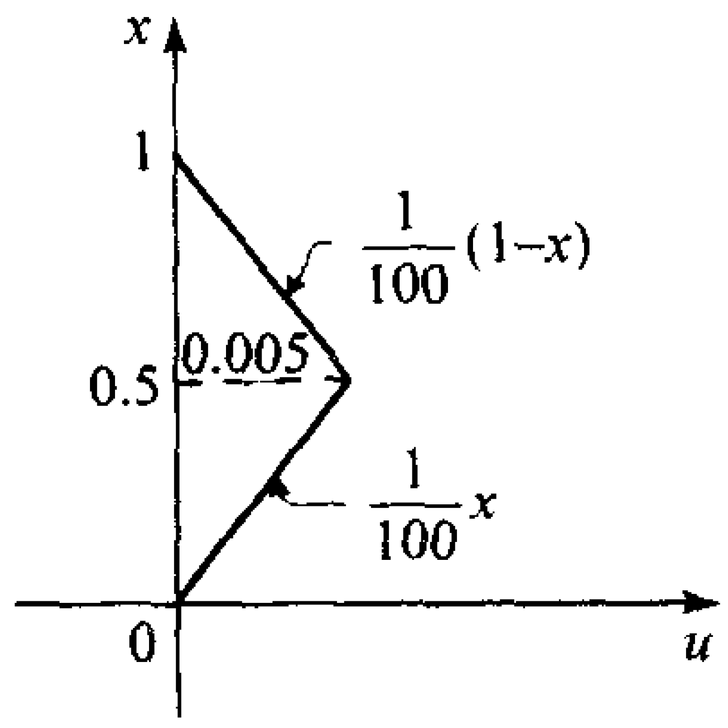


图 2　链的初始形状

解　(a)注意到，因为初始速度为零，所以对所有 j，$B_j=0$．因此，由(9)式，第 j 个正规波型是

$$u_j(x,t)=A_jJ_0(\alpha_j\sqrt{x})\cos\left(\sqrt{9.8}\,\frac{\alpha_j}{2}t\right),$$

其中 α_j 是 J_0 的第 j 个零点．第 j 个正规波型的频率是 $\nu_j=\frac{\alpha_j}{4\pi}\sqrt{g}$．利用下表中 α_j 的数值，我们得到

350

$$\nu_1=0.599\,0,\quad \nu_2=1.375,\quad \nu_3=2.155\,8.$$

(b)在时刻 $t=0$ 时，我们有 $u_1(x,0)=A_1J_0(2.404\,8\sqrt{x})$，$u_2(x,0)=A_2J_0(5.520\,1\sqrt{x})$，以及 $u_3(x,0)=A_3J_0(8.653\,7\sqrt{x})$．为说明正规波型的形状，我们令 A_j 等于 1，并画出相应的图像(图 3)．

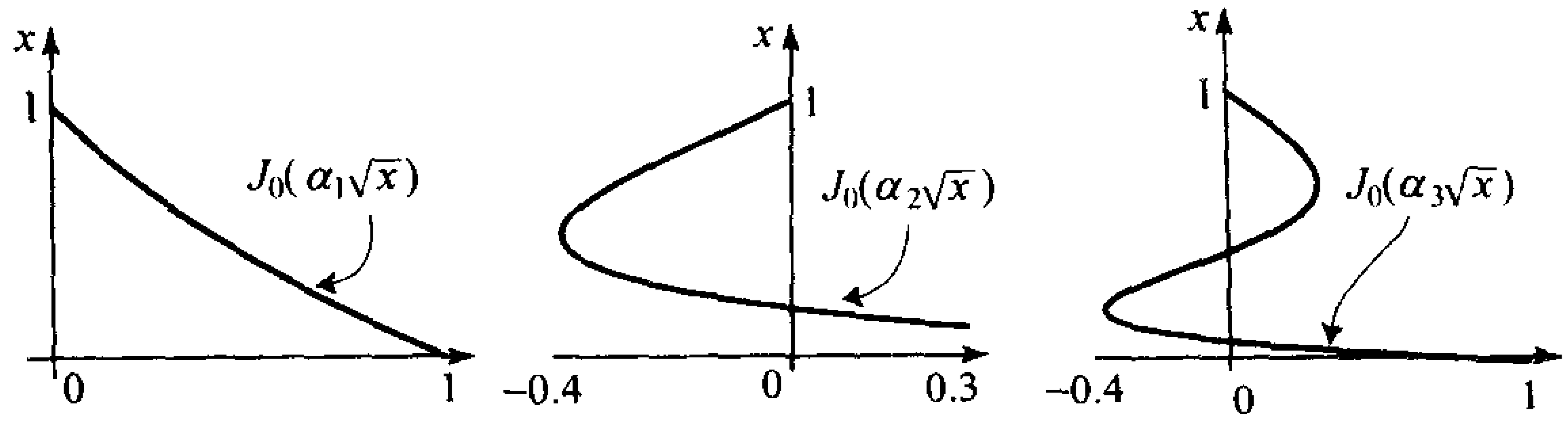


图 3　链的正规波型

注意，基本波型就像自由端偏离其平衡位置的链，而其他波型相应于链的其他可能的简单运动．正如(10)式所示，链的运动可以通过叠加这些振动的特殊波型来得到．

(c)函数 $u(x,t)$由(10)式给出，其中系数 B_j 都等于 0．剩下只需计算 A_j，为此，我们利用(11)式，初始位移 $f(x)$的方程由图 2 给出．我们得到

$$A_j=\frac{1}{J_1^2(\alpha_j)}\left[\int_0^{1/2}\frac{1}{100}xJ_0(\alpha_j\sqrt{x})\,dx+\int_{1/2}^{1}\frac{1}{100}(1-x)J_0(\alpha_j\sqrt{x})\,dx\right].$$

这些积分可以利用下面的等式来计算：

$$\int xJ_0(\alpha_j\sqrt{x})\,dx=\frac{2}{\alpha_j}x^{3/2}J_1(\alpha_j\sqrt{x})-\frac{4}{\alpha_j^2}xJ_2(\alpha_j\sqrt{x})+C;$$

$$\int J_0(\alpha_j\sqrt{x})\mathrm{d}x = \frac{2}{\alpha_j}x^{1/2}J_1(\alpha_j\sqrt{x})+C,$$

这些可以由 4.8 节的(7)式来推得(取 $p=0$)，并作变换 $t=\alpha_j\sqrt{x}$. 应用这些公式并简化，我们得到

$$A_j = \frac{J_2(\alpha_j)-J_2(\alpha_j/\sqrt{2})}{25\alpha_j^2J_1^2(\alpha_j)}.$$

A_j 的数值可以通过计算机来逼近，这些值以及其他相关数值罗列在表 1 中. 将这些数值代入(10)式，我们得到

$$u(x,t) = 0.003\,847J_0(2.404\,8\sqrt{x})\cos(3.764\,15t) - 0.0057\,87J_0(5.520\,08\sqrt{x})$$
$$\times\cos(8.640\,29t) + 0.002\,371J_0(8.653\,73\sqrt{x})\cos(13.545\,2t) - \cdots.$$

表 1 例 1 的数值数据

j	1	2	3
α_j	2.404 83	5.520 08	8.653 73
ν_j	0.599 0	1.375	2.155 8
A_j	0.0038 47	−0.005 787	0.002 371

351

(d)级数解的近似值可以通过(c)部分的级数取前三项得到，图 4 中的图像给出了链在给定时刻的形状.

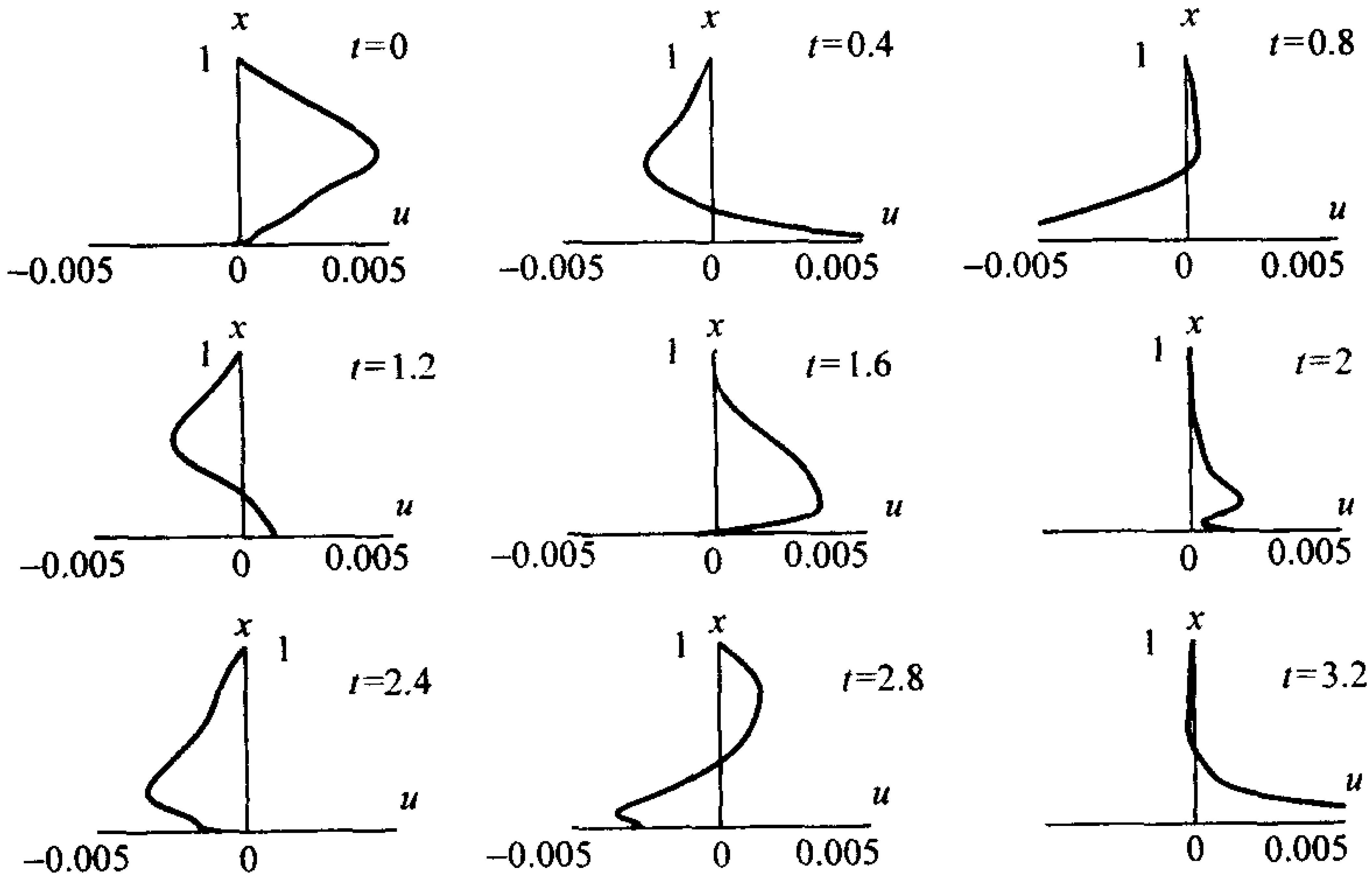


图 4 运动中链的形状，取时刻 $t=k\tau$，其中 $\tau=0.4$ 秒，$k=0, 1, \cdots, 8$ ■

习题 6.3

专题问题：在求解习题 1～4 过程中，按照本节的方法，并利用计算机代数系统来画出解的图形.

1. 一个长度为 0.5 米的链自一端悬挂，链的初始位移是将自由端拉动 0.005 米所得到的，链自静止开始释放.

(a)其前三个正规波型的频率是多少？(取 $g=9.8$ 米/秒^2.)

(b)通过取前六项部分和，得出 $u(x,\ t)$的一个近似值.

(c)对不同时刻 t，画出近似函数的图像，以描述链的运动.

2. 取相同的初始位移，而初始速度由 $v(x)=10(0.5-x)$，$0<x<0.5$ 给出，重做习题 1.

3. 一个长度为 1 米的链自一端悬挂，链的初始位移是由扭动其自由端得到，链的初始形状由函数 $f(x)=0.001J_0(\alpha_5\sqrt{x})$来近似，其中 α_5 是 J_0 的第五个零点. 假设初始速度为 $g(x)=20J_0(\alpha_5\sqrt{x})$.

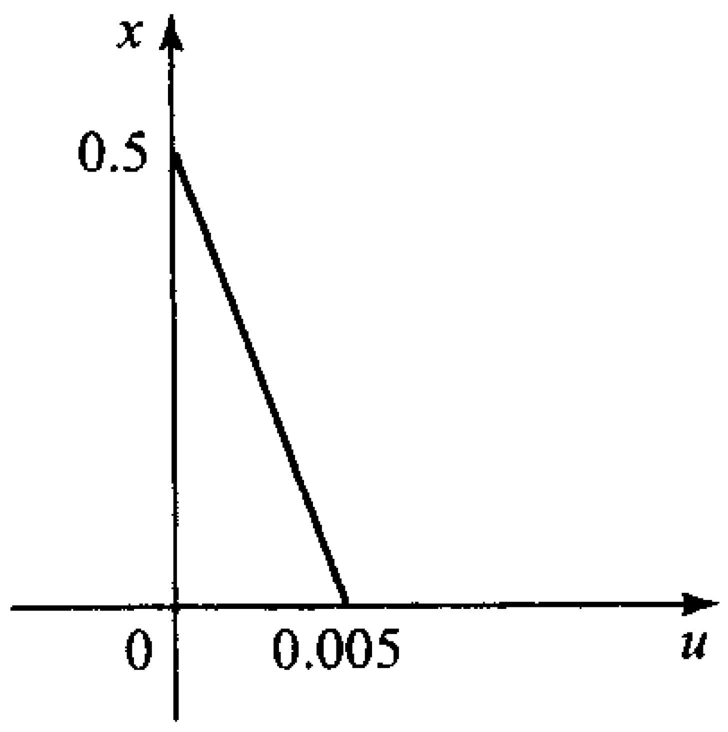
(a)$u(x,\ t)$是多少?

(b)对不同时刻 t，画出 $u(x,\ t)$的图像，以描述链的运动.

4. 一个长度为 1 米的链自一端悬挂，链的初始位移是将其中心拉动 0.005 米，而下面一部分自该点开始竖直悬挂，链自静止开始释放.

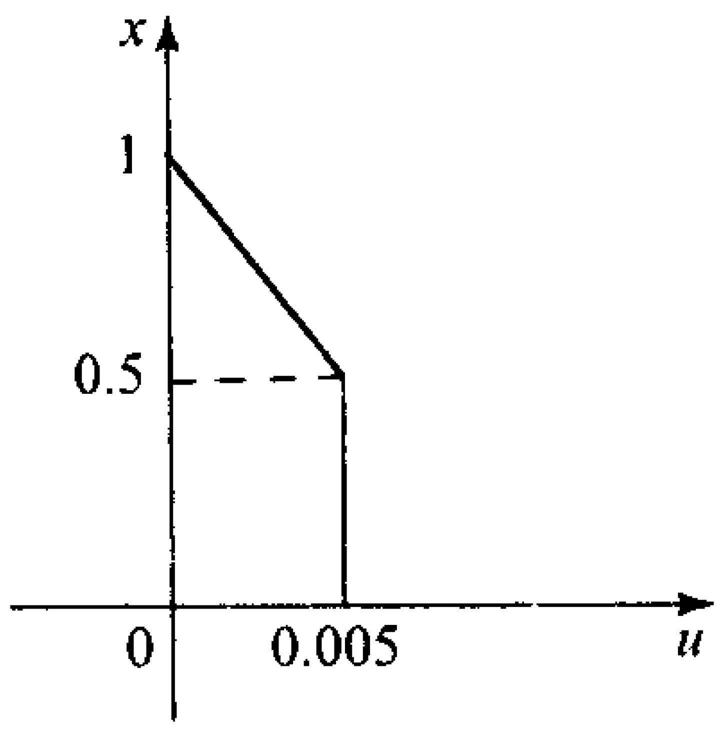
(a)通过取前六项部分和，得出 $u(x,\ t)$的一个近似值.

(b)画出 $u\left(\frac{1}{2},\ t\right)(t>0)$的图像以描述其中心的运动.



352

习题 1 和 2 的图



习题 4 的图

6.4 四阶施图姆-刘维尔理论

施图姆-刘维尔理论可以推广到高阶方程，为后面有关梁振动的应用，我们需要研究与四阶微分方程有关的施图姆-刘维尔问题. 我们将要陈述的结果与 6.2 节的结果相类似，证明思想也是类似的，只是需要更多的技巧.

考虑四阶施图姆-刘维尔问题

$$[p(x)y'']''+[q(x)-\lambda r(x)]y=0,\quad a<x<b, \tag{1}$$

其中 p，q，r 在$[a,\ b]$上连续，并且 p 和 r 是正的，满足条件

$$\begin{cases} c_1y(a)+c_2(py'')'(a)=0, & e_1y'(a)+e_2p(a)y''(a)=0, \\ d_1y(b)+d_2(py'')'(b)=0, & f_1y'(b)+f_2p(b)y''(b)=0, \end{cases} \tag{2}$$

其中(2)式中同一给定方程中的系数不全为零. 下面定理包含了我们所需的有关这个问题的所有信息.

定理 1(四阶施图姆-刘维尔问题) (i)**特征值**. 施图姆-刘维尔问题(1)～(2)的特征值是实的，且构成一个递增序列

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\cdots,\quad 其中当\ j\to\infty\ 时,\lambda_j\to\infty.$$

(ii)**特征函数**. 对每个特征值，存在至多两个线性无关的特征函数满足(1)和(2)式. 当有两个线性无关的特征函数时，我们说相应的特征值是二重的. 在这种情形下，那个特征值在上

面的序列中出现两次.

(iii)**正交性** 相应于不同特征值的特征函数在区间 $a<x<b$ 上关于权函数 $r(x)$ 是正交的. 更进一步，对二重特征值，两个线性无关的特征函数总可以选取是关于权 $r(x)$ 正交的. 所以，在按照其重数重复特征值后，我们总可以得到一列特征函数 X_1，X_2，…，使得 X_j 相应于 λ_j，且

$$\int_a^b X_m(x)X_n(x)r(x)\mathrm{d}x = 0, \quad m \neq n.$$

与二阶正则施图姆-刘维尔问题不同的是，四阶问题会发生重根，例如参考习题 11.

353

定理 2(特征函数展开) 如果 f 在区间 $[a, b]$ 上是分段光滑的，则我们有特征函数展开式

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j X_j(x),$$

其中

$$A_j = \frac{\int_a^b f(x)X_j(x)r(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b X_j^2(x)r(x)\mathrm{d}x}.$$

对 $a<x<b$，在 f 的连续点处，特征函数展开式收敛到 $f(x)$，否则收敛到 $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

例 1 四阶施图姆-刘维尔问题

(a)求出四阶施图姆-刘维尔问题

$$X^{(4)} - \lambda X = 0,$$

$$X(0) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X(L) = 0, \quad X'(L) = 0$$

的特征值和特征函数. (这里，L 是正常数，表示棒的长度.)

(b)取 $L=1$，计算前五个特征函数 $X_1(x)$，$X_2(x)$，$X_3(x)$，$X_4(x)$，$X_5(x)$ 的显式形式.

(c)给定 $f(x)=\sin^2\pi x$，$0<x<1$，求出 f 的特征函数展开式前五项的数值逼近；画出 f 和其特征函数展开式的几个部分和的图像.

解 (a)注意到，这个问题具有形式(1)～(2). 在下面例 2 中，我们将说明这类问题的非平凡解仅仅在 $\lambda>0$ 时出现，所以此时我们只专注于这个情形. 对 $\lambda>0$，我们将参数 λ 写成 α^4，$\alpha>0$，以简化计算. 给定方程的特征方程为

$$r^4 - \alpha^4 = 0 \quad 或 \quad (r^2 - \alpha^2)(r^2 + \alpha^2) = 0.$$

特征根为 $r=\pm\alpha$，$\pm \mathrm{i}\alpha$，因此，微分方程的通解为

$$X = A\cosh\alpha x + B\sinh\alpha x + C\cos\alpha x + D\sin\alpha x. \tag{3}$$

为确定特征值和特征函数，我们必须求出所有满足边界条件、形如(3)式的非零函数. 利用这些条件，我们有

$$A + C = 0, B + D = 0,$$

$$A\cosh\alpha L + B\sinh\alpha L + C\cos\alpha L + D\sin\alpha L = 0,$$

$$A\sinh\alpha L + B\cosh\alpha L - C\sin\alpha L + D\cos\alpha L = 0.$$

前两个方程蕴涵着 $A=-C$，$B=-D$，代入后两个方程，得到

$$\begin{cases} A(\cosh\alpha L - \cos\alpha L) + B(\sinh\alpha L - \sin\alpha L) = 0 \\ A(\sinh\alpha L + \sin\alpha L) + B(\cosh\alpha L - \cos\alpha L) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

354

对这个方程组，为得到非零解 A 和 B，其行列式必为零．此时，可以假设 A 取任意值，且

$$B = -A\frac{\cosh\alpha L - \cos\alpha L}{\sinh\alpha L - \sin\alpha L}.$$

计算行列式，并令其值为零，我们得到方程

$$\cosh\alpha L\cos\alpha L = 1 \quad 或 \quad \cos\alpha L = \frac{1}{\cosh\alpha L}.$$

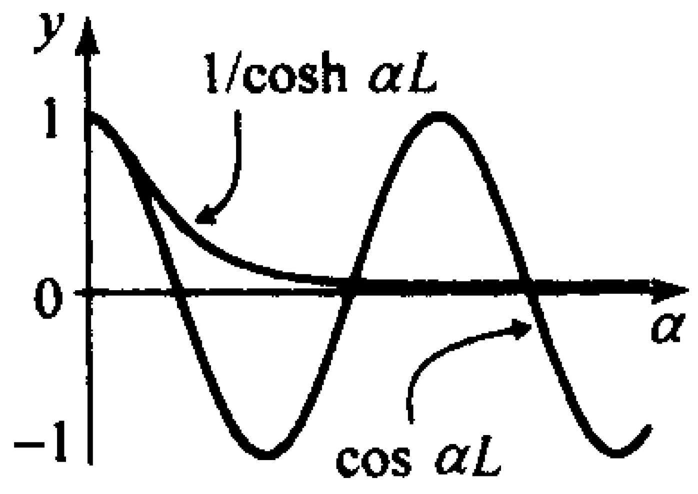


图 1

因此，α 的允许值就是这个方程的根．图 1 中的 $\cos L\alpha$ 和 $1/\cosh L\alpha$ 的图像说明存在无穷多个根 α_1，α_2，…，α_n，….

对每个 α_n，我们取 $A=1$，则得到

$$C = -1, \quad B = -\frac{\cosh\alpha_n L - \cos\alpha_n L}{\sinh\alpha_n L - \sin\alpha_n L}, \quad D = -B.$$

相应的特征函数由(3)得出

$$X_n(x) = \cosh\alpha_n x - \cos\alpha_n x - \frac{\cosh\alpha_n L - \cos\alpha_n L}{\sinh\alpha_n L - \sin\alpha_n L}(\sinh\alpha_n x - \sin\alpha_n x).$$

虽然特征函数的形式较复杂，我们可以简单地运用定理 1 来得到许多有用的信息．比如，特征函数在区间[0，L]上的正交性就由该定理所保证．

(b)我们取 $L=1$，利用计算机代数系统，计算方程

$$\cos\alpha = \frac{1}{\cosh\alpha}$$

的前五个正根．这些值及相关的数值列在表 1 中．

表 1　例 1 的数值数据

n	1	2	3	4	5
α_n	4.730 0	7.853 2	10.995 6	14.137 2	17.278 8
$\frac{\cosh\alpha_n - \cos\alpha_n}{\sinh\alpha_n - \sin\alpha_n}$	0.982 5	1.000 8	1.000 0	1.000 0	1.000 0

因此，前五个特征函数为

$$X_1(x) = \cosh(4.730\,0x) - \cos(4.730\,0x) + 0.982\,5(\sin(4.730\,0x) - \sinh(4.730\,0x)),$$

$$X_2(x) = \cosh(1.000\,8x) - \cos(1.000\,8x) + 1.000\,8(\sin(1.000\,8x) - \sinh(1.000\,8x)),$$

$$X_3(x) = \cosh(10.995\,6x) - \cos(10.995\,6x) + \sin(10.995\,6x) - \sinh(10.995\,6x),$$

$$X_4(x) = \cosh(14.137\,2x) - \cos(14.137\,2x) + \sin(14.137\,2x) - \sinh(14.137\,2x),$$

$$X_5(x) = \cosh(17.278\,8x) - \cos(17.278\,8x) + \sin(17.278\,8x) - \sinh(17.278\,8x).$$

注意，不需计算内积 $\int_0^1 X_m(x)X_n(x),\mathrm{d}x$ 的值，我们可以由定理 1 直接得出当 $m \neq n$ 时其值为 0.

355

(c) 为求出 $f(x) = \sin^2\pi x$ 的特征函数展开式，必须计算出级数 $\sum_{j=1}^{\infty} A_j X_j(x)$ 中系数的数值.

我们将利用(b)中关于 X_j 的显式公式,计算前五项的系数. 利用计算机代数系统,得到

$$A_1=\frac{\int_0^1 \sin^2\pi x X_1(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 X_1^2(x)\mathrm{d}x}=0.612,\quad A_2=\frac{\int_0^1 \sin^2\pi x X_2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 X_2^2(x)\mathrm{d}x}=0.$$

类似地,有

$$A_3=-0.022,\quad A_4=0,\quad A_5=-0.002.$$

因此

$$f(x)=0.612X_1(x)-0.022X_3(x)-0.002X_5(x)+\cdots.$$

在图 2 中,我们画出 f 及其特征函数展开式第五个部分和 $0.612X_1-0.022X_3-0.002X_5$ 的图像. 该图清楚地显示 f 可由特征展开式来逼近.

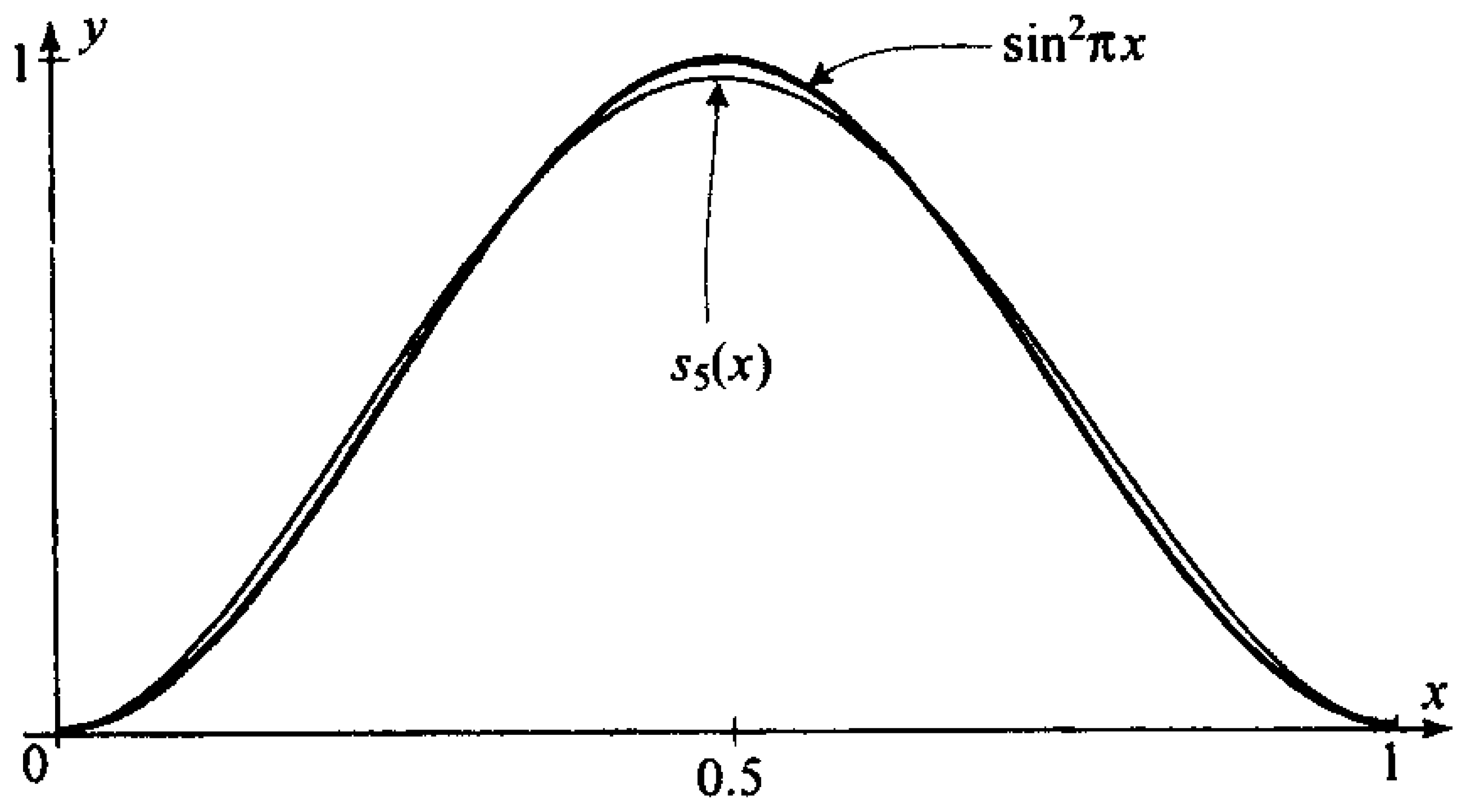


图 2 具有三个非零项的特征函数展开式部分和在区间(0, 1)上很好地逼近 f. 这由图中 f 的图像和部分和的图像非常贴近得到证实 ■

下面,我们说明例 1 中的特征值是正的,必须注意的是,虽然证明中运用了方程及给定的边界条件,但是结果具有一般性,可以运用于其他问题. 为说明这点,我们给出另外一组条件,使得特征值也是正的.

例 具有正特征值的施图姆-刘维尔问题

(a)试证:施图姆-刘维尔问题

$$X^{(4)}-\lambda X=0,$$

$$X(0)=0,\quad X'(0)=0,\quad X(L)=0,\quad X'(L)=0$$

的特征值是正的.

(b)试证:如果将初始条件换成

$$X(0)=0,\quad X''(0)=0,\quad X(L)=0,\quad X''(L)=0,$$

(a)中的结论也成立.

证明 我们同时证明(a)和(b). $\lambda=0$ 情形导出方程 $X^{(4)}=0$,其通解是一个 3 次多项式. 可以直接验证零多项式是唯一满足初始条件的多项式(习题 17);因此,$\lambda=0$ 不是特征值. 下面,我们证明 λ 必定 >0. 假设 X 是相应于特征值 λ 的特征函数,则 356

$$X^{(4)}-\lambda X=0 \quad\Rightarrow\quad X^{(4)}=\lambda X$$

$$\Rightarrow \quad XX^{(4)} = \lambda X^2 \qquad \text{两边乘 } X$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^L X(x)X^{(4)}(x)\mathrm{d}x = \lambda\int_0^L X^2(x)\mathrm{d}x.$$

对最后一式的左边作分部积分，并运用初始条件 $X(0)=0$，$X(L)=0$，我们得到

$$-\int_0^L X'(x)X^{(3)}(x)\mathrm{d}x = \lambda\int_0^L X^2(x)\mathrm{d}x.$$

对上式的左边再次作分部积分，我们得到

$$-X'(x)X''(x)\,\Big|_0^L + \int_0^L X''(x)^2\mathrm{d}x = \lambda\int_0^L X^2(x)\mathrm{d}x.$$

注意到(a)或(b)中的初始条件蕴涵着左边第一项为 0，因此

$$\int_0^L X''(x)^2\mathrm{d}x = \lambda\int_0^L X^2(x)\mathrm{d}x.$$

由于 X 不恒为零(由特征函数的定义)，所以 X^2 是非负的，且在区间$(0, L)$上不恒为零，因此，$\int_0^L X^2(x)\mathrm{d}x > 0$. 同样，$\int_0^L X''(x)^2\mathrm{d}x \geqslant 0$，从而 $\lambda \geqslant 0$. 但是，$\lambda \neq 0$，因此，$\lambda > 0$. ■

习题 6.4

在习题 1～2 中，求出给定施图姆-刘维尔问题的特征值和特征函数.

1. $X^{(4)}-\alpha^4X=0$，$X(0)=0$，$X'(0)=0$，$X(2)=0$，$X'(2)=0$.
2. $X^{(4)}-\alpha^4X=0$，$X(-1)=0$，$X'(-1)=0$，$X(1)=0$，$X'(1)=0$.

   [提示：用变量代换化为习题 1.]

在习题 3～6 中，(a)利用给定特征函数集，求出给定函数的特征函数展开式. (b)画出函数及其特征函数展开式的几个部分和的图像.

3. $f(x)=x(2-x)$，$0<x<2$；利用习题 1 的特征函数.
4. $f(x)=\sin\pi x$，$0<x<2$；利用习题 1 的特征函数.
5. $f(x)=x(1-x)$，$0<x<1$；利用例 1 的特征函数.
6. $f(x)=x^2(1-x)^2$，$0<x<1$；利用例 1 的特征函数.

专题问题：在习题 7 中，求解与例 1 相同的方程、但带有不同边界条件的四阶施图姆-刘维尔问题. 例 1 的这种变形出现在简单支撑的梁的研究中(见 6.5 节). 同时，完成习题 8，以学习与此相关的特征函数展开. 仿照例 1 的求解过程，并利用例 2 的结果.

357

7. (a)试证：

$$X^{(4)} - \lambda X = 0,$$

$$X(0) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X(L) = 0, \quad X''(L) = 0$$

的特征值是 $\lambda_n=\frac{n^4\pi^4}{L^4}$，$n=1, 2, \cdots$.

(b)得出特征函数 $X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{L}x$. 观察到，这个特征函数与在二阶施图姆-刘维尔问题

$$X''+\mu X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0$$

中所得到的完全一样，相应的特征值为 $\lambda=\mu^2$. 下面的习题 9 和 10 将研究这种联系.

8. 在习题 7 中取 $L=1$，求出函数

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<\dfrac{1}{2}, \\ 1-x & \dfrac{1}{2}<x<1 \end{cases}$$

的特征函数展开式.

9. 假设 μ 和 X 是施图姆-刘维尔问题

$$X''+\mu X=0,\quad X(0)=0,\quad X(L)=0$$

的特征值和相应的特征函数. 微分两次可以发现：X 也满足四阶施图姆-刘维尔问题

$$X^{(4)}-\lambda X=0,$$

$$X(0)=0,\quad X''(0)=0,\quad X(L)=0,\quad X''(L)=0.$$

[提示：利用方程 $X''=-\mu X$.]

10. 假设 λ 和 X 是习题 9 中的四阶施图姆-刘维尔问题的特征值和相应的特征函数.
   (a)试证：$Y=X''$也是同一个问题的特征函数. (必须验证边界条件.)
   (b)试证：函数 $u=\alpha^2 X-Y$ 是习题 9 中的二阶施图姆-刘维尔问题关于特征值 α^2 的解，其中 $\lambda=\alpha^4$.
   (c)利用显式形式 $X=\sin\alpha x$，由(b)可得 u 是二阶施图姆-刘维尔问题的特征函数.

专题问题：重数为 2 的特征值. 在习题 11 中，求解一个四阶施图姆-刘维尔问题，其第一特征值具有重数 2. 除习题 11 外，请完成习题 12 或 13 之一，以学习与此相关的特征函数展开. 仿照例 1 的求解过程.

11. (a)试证：

$$X^{(4)}-\lambda X=0,$$

$$X''(0)=0,\quad X'''(0)=0,\quad X''(L)=0,\quad X'''(L)=0$$

的特征值是 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=0$ 以及所有形如 $\lambda=\alpha^4$ 的值，其中 α 是 $\cosh\alpha L\cos\alpha L=1$ 的正根. 注意到，除了特征值 0，其余都是例 1 的特征值. [358]

   (b)对 $n=3, 4, \cdots$，推导特征函数

$$X_1=1,\quad X_2=x-\frac{L}{2},$$

$$X_n(x)=\cosh\alpha_n x+\cos\alpha_n x-\frac{\cosh\alpha_n L-\cos\alpha_n L}{\sinh\alpha_n L-\sin\alpha_n L}\quad(\sin\alpha_n x+\sinh\alpha_n x),$$

其中 α_{n+2}是

$$\cosh\alpha L\cos\alpha L=1$$

的第 n 个正根. (注意，如此选取 X_2，是为了与 X_1 正交. 如选取 $X_2=x$，则不具备此性质.)[提示：可以仿照例 1 来求解此问题；或注意到 X''是例 1 中的施图姆-刘维尔问题的解，所以对 $n\geqslant 3$，特征函数可以通过对例 1 的特征函数积分两次来得到.]

12. (a)在习题 11 中取 $L=1$，显式计算前六个特征函数 $X_1(x)$，…，$X_6(x)$. 可以利用例 1 中的数值数据.
   (b)给定函数 $f(x)=x(1-x)$，$0<x<1$，求出 f 的特征函数展开式前六项的近似数值. 画出函数 f 及其特征函数展开式的几项部分和的图像.

13. 对函数 $f(x)=x^4(1-x)^4$，$0<x<1$，重做习题 12.

专题问题： 在习题 14 中，求解一个出现在一端没有自由的梁振动的施图姆-刘维尔问题(见 6.5 节). 仿照例 1 和 2 的求解过程，完成习题 15 之一，以学习与此相关的特征函数展开.

14. (a)试证：

$$X^{(4)}-\lambda X=0,$$

$$X(0)=0,\quad X'(0)=0,\quad X''(L)=0,\quad X'''(L)=0$$

的特征值 λ 是所有形如 $\lambda=\alpha^4$ 的值，其中 α 是 $\cosh\alpha L\cos\alpha L=-1$ 的正根.

(b)对 $n=1, 2, \cdots$，推导特征函数

$$X_n(x)=\cos\alpha_n x-\cosh\alpha_n x-\frac{\cosh\alpha_n L+\cos\alpha_n L}{\sinh\alpha_n L+\sin\alpha_n L}(\sin\alpha_n x-\sinh\alpha_n x),$$

其中 α_n 是 $\cosh\alpha L\cos\alpha L=-1$ 的第 n 个正根.

15. (a)在习题 14 中，取 $L=1$，显式计算前五个特征函数 $X_1(x), \cdots, X_5(x)$.

(b)给定函数 $f(x)=x(1-x)$，$0<x<1$，求出 f 的特征函数展开式前六项的近似数值. 画出函数 f 及其特征函数展开式的几项部分和的图像.

16. **特征函数的正交性.** 令 $\lambda_j\neq\lambda_k$ 是四阶施图姆-刘维尔问题(1)～(2)的两个特征值，相应的特征函数分别为 y_j 和 y_k.

(a)验证：

359

$$\frac{d}{dx}[y_k(p(x)y_j'')'-y_j(p(x)y_k'')'-y_k'(p(x)y_j'')+y_j'(p(x)y_k'')]=-(\lambda_k-\lambda_j)r(x)y_jy_k.$$

(b)从 a 到 b 积分，并利用边界条件(2)证明：y_j 和 y_k 关于权函数 $r(x)$ 正交.

17. (a)验证：$\lambda=0$ 不是例 2(a)和(b)中问题的特征值.

(b)在例 1 中，证明：每个 $X_n(x)$关于 $x=L/2$ 或者是奇的，或者是偶的. 特别地，$X_n(L-x)=(-1)^{n-1}X_n(x)$.

(c)画出例 1 中前五个特征函数，观察每个函数如(a)部分所确定的关于 $x=L/2$ 的对称性.

(d)基于(b)或(c)部分，你是否可以解释为何例 1(c)中特征函数展开式的第二、四项系数为 0？推广之.

6.5 梁的弹性振动和屈曲

本节所考虑的应用将导出关于空间变量是四阶的偏微分方程. 我们考虑弹性均匀梁在端点处具有不同支撑时的横振动. 同时，我们还考虑了引起竖直柱屈曲的临界负荷问题.

这些问题的模型可以用类似于 3.2 节所用的方法来考虑. 因为梁和柱对弯曲有阻力，所以其方程中的导数更复杂，特别地，涉及位移关于 x 的四阶导数.

梁的横振动：简单支撑情形

长度为 L 的均匀梁的自由竖直振动由方程

$$\boxed{u_{tt}=-c^2u_{xxxx}} \tag{1}$$

来描述，其中 $c^2=\dfrac{EI}{\rho A}$，E=杨氏常数(由梁的材料性质确定)，I=梁的横截面关于过质心并与(x, u)平面垂直的轴的惯性矩，ρ=密度(单位体积的质量)，A=横截面的面积. 假设梁具有均匀密度，横截面是常数，并且在平衡位置横截面的质心落在 x 轴上(见图 1). 变量 $u(x, t)$表示梁上 x 处的点在 t 时刻的位移.

360

在工程上经常遇到一个简单梁一端由销栓固定、另一端放在滚筒上，而不是两端都由销栓固定. 在这种情形下，梁称为静态确定的. 如果梁的两端都由销栓固定，则会发生水平作用，从而变成静态不确定的，这虽然可以接受，但是这不是梁的最简单形式. 当考虑边界条件时，这两种方式都阻止竖直移动(完全)，并且两者都允许旋转(不像固定或者嵌夹支撑，它们没有旋转). 销栓和滚筒的唯一区别是：销栓阻止水平运动，而滚筒没有(它可以水平滚动). 但是

正如前面所说，两者都允许旋转，都阻止竖直移动.

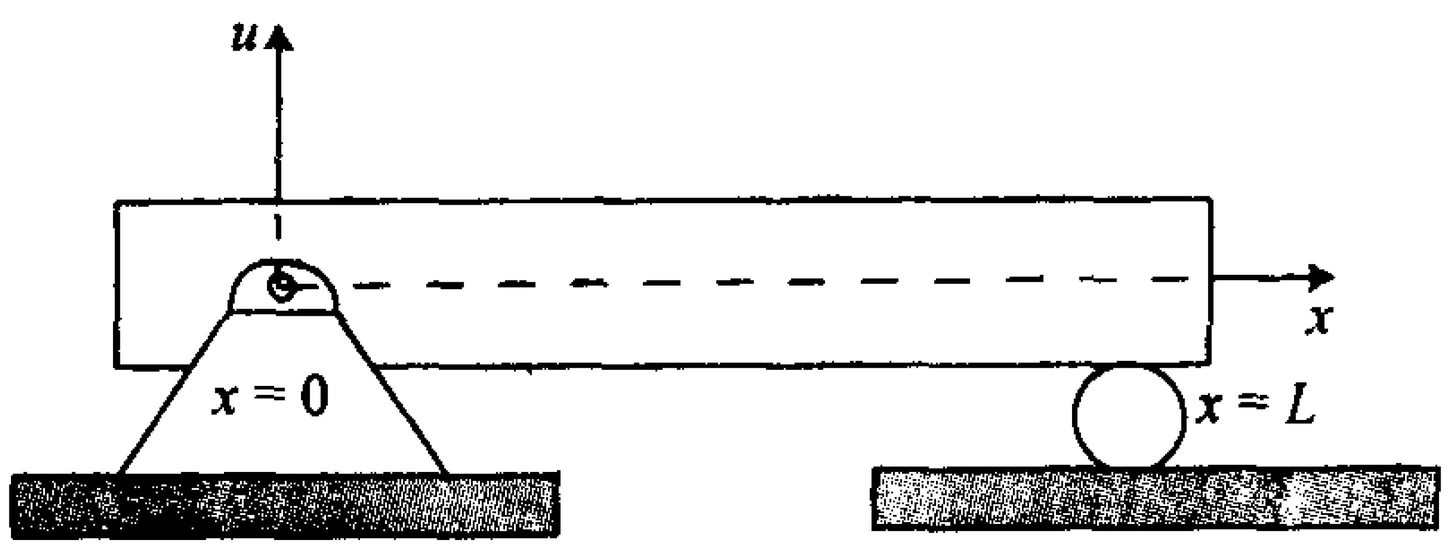


图 1　梁的简单支撑形式就是一端由销栓固定、另一端放在滚筒上. 端点可以旋转，但不能竖直运动

一个结构在平衡态一定是稳定的，简单支撑的梁就是一个简单而稳定的结构. 如果支撑是两个滚筒，则梁是不稳定的(它不能阻止任何水平方向上的扰动). 另一方面，如果两端都由销栓固定，将会有一个另加的(水平)作用，从而超出了稳定结构. 所以，一个销栓、一个滚筒就是平衡而稳定梁最简单的可能支撑.

伴随方程(1)的边界条件依赖于梁端点处的支撑. 对所考虑的情形，即具有简单支撑时，边界条件描述为

$$u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0,\quad u_{xx}(0,t)=0,\quad u_{xx}(L,t)=0. \tag{2}$$

梁在支撑处没有竖直移动由(2)中前两个方程描述. 为理解(2)中剩下的另外两个方程，回顾 $u_{xx}(x,\ t)$表示梁在任意点 x 处的曲率或者凹凸性. 由材料力学理论知：曲率正比于弹性梁的弯曲矩. (2)中最后两个方程说明在支撑处弯曲矩为零，因为在简单支撑梁情形，梁在端点可以旋转.

为完成初值问题的描述，我们确定初始条件

$$u(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=g(x),\quad 0<x<L, \tag{3}$$

这给出了梁的初始位置和速度.

为求解(1)～(3)，我们利用分离变量法，这就导出方程

$$\frac{X^{(4)}}{X}=-\frac{T''}{c^2T}=\alpha^4. \tag{4}$$

[361]

我们已经选取了分离常数是正的，因为我们希望得到关于 t 是周期的，并由于即将变得显而易见的原因，记此常数为 α^4 是方便的. 为完整起见，我们注意到，可以证明边值问题 $X^{(4)}-\lambda X=0$以及由(2)式导出的边界条件只对正分离常数 λ 具有非平凡解(见 6.4 节例 2(a)).

首先，我们考虑含有 X 的边值问题：

$$X^{(4)}-\alpha^4X=0,$$
$$X(0)=0,\quad X(L)=0,\quad X''(0)=0,\quad X''(L)=0. \tag{5}$$

注意到，这就是前一节介绍过的四阶施图姆-刘维尔问题，其中 $\lambda=\alpha^4$，$p(x)=1$，$q(x)=0$，且 $r(x)=1$. 由于(5)是一个常系数线性方程，我们可以通过求解特征方程来求解它(附录 A. 2). 我们得到

$$r^4-\alpha^4=0\Rightarrow r=\pm\alpha\quad 及\quad r=\pm i\alpha.$$

因此，通解为

$$X(x)=A\cosh\alpha x+B\sinh\alpha x+C\cos\alpha x+D\sin\alpha x,$$

其中 A，B，C 和 D 是任意常数．第一、三个边界条件蕴涵着

$$A+C=0,\quad A-C=0\Rightarrow A=C=0.$$

而第二、四个边界条件蕴涵着

$$\begin{cases}B\sinh\alpha L+D\sin\alpha L=0,\\ B\sinh\alpha L-D\sin\alpha L=0.\end{cases}$$

这等价于 $B\sinh\alpha L=0$ 和 $D\sin\alpha L=0$，由此得到 $B=0$(因为 $\sinh\alpha L\neq 0$ 对 $\alpha>0$ 成立)，并且

$$\alpha=\alpha_n=\frac{n\pi}{L},\quad n=1,2,\cdots.$$

因此，我们得到 x 的解：

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{L}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

注意到，此时，很容易验证特征函数 X_n 在区间 $0<x<L$ 上正交，正如6.4节定理1所保证的 [362] 那样．

回到(4)式，对 $\alpha=\alpha_n$，求解 T，我们得到相应的解为

$$T_n(t)=A_n\cos c\alpha_n^2t+A_n^*\sin c\alpha_n^2t.$$

从而得到乘积解，叠加起来，我们得到解的一般形式

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{L}x\,(A_n\cos c\alpha_n^2t+A_n^*\sin c\alpha_n^2t).}\tag{6}$$

利用初始条件(3)，我们得到

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{L}x,$$

以及

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n^*c\alpha_n^2\sin\frac{n\pi}{L}x.$$

因为这些就是 f 和 g 在区间 $0<x<L$ 上的正弦展开，由2.4节直接得到

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx,\tag{7}$$

$$A_n^*=\frac{2L}{n^2\pi^2c}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx,\quad n=1,2,\cdots.\tag{8}$$

因此，(1)～(3)的解由级数(6)给出，系数由(7)式和(8)式给出．

梁的横振动：嵌夹情形

如果前面例题中梁的端点是嵌夹的(图2)，则边界条件变为

$$u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0,$$
$$u_x(0,t)=0,\quad u_x(L,t)=0,\tag{9}$$

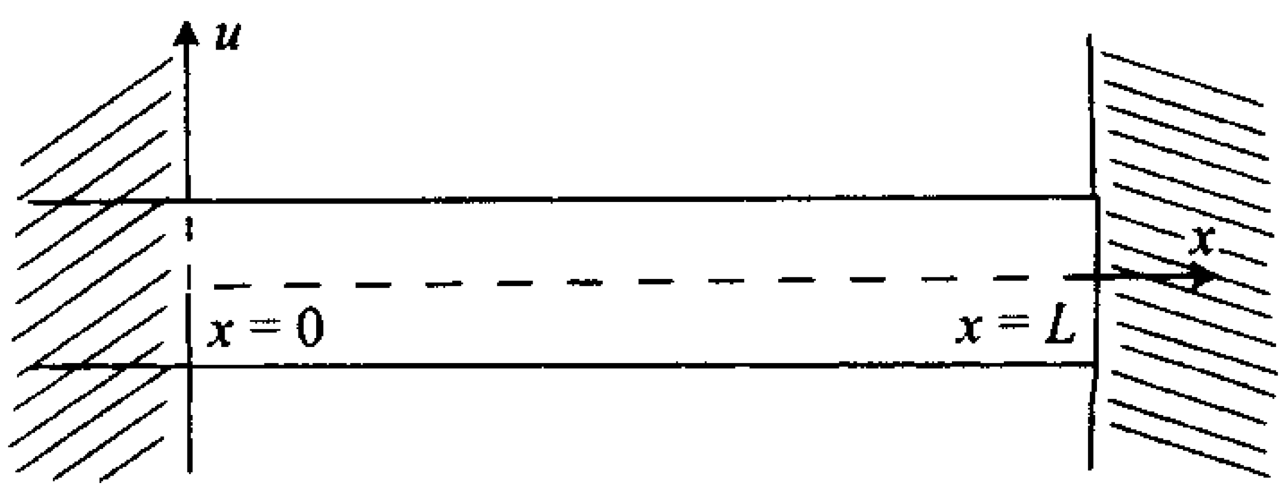


图2 两端嵌夹的梁

对所有 $t>0$. 虽然(9)式中前两个条件与简单支撑情形一样，但后面两个条件施加了阻止端点旋转的限制，因为梁在端点没有力矩. 初始条件仍然是

$$u(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=g(x),\quad 0<x<L. \tag{10}$$

363

我们用与前一个例题差不多的方法来求解边值问题(1)、(9)、(10). 在分离变量之后，我们得到四阶施图姆-刘维尔问题

$$\begin{gathered}X^{(4)}-\lambda X=0,\\ X(0)=0,\quad X(L)=0,\quad X'(0)=0,\quad X'(L)=0.\end{gathered} \tag{11}$$

这就是前一节例 1 和例 2 所研究的问题，其中我们发现 $\lambda=\lambda_n=\alpha_n^4$，并且

$$X_n(x)=\cosh\alpha_n x-\cos\alpha_n x-\frac{\cosh\alpha_n L-\cos\alpha_n L}{\sinh\alpha_n L-\sin\alpha_n L}(\sinh\alpha_n x-\sin\alpha_n x),$$

其中 α_n 是方程

$$\cosh\alpha L\cos\alpha L=1,\quad 或\quad \cos\alpha L=\frac{1}{\cosh\alpha L} \tag{12}$$

的正根. 利用前一个例题中的 T，并且叠加乘积解，我们得到

$$\begin{aligned}u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}&\left\{\cosh\alpha_n x-\cos\alpha_n x-\frac{\cosh\alpha_n L-\cos\alpha_n L}{\sinh\alpha_n L-\sin\alpha_n L}(\sinh\alpha_n x-\sin\alpha_n x)\right\}\\ &\times\{A_n\cos\alpha_n^2 ct+A_n^*\sin\alpha_n^2 ct\}.\end{aligned} \tag{13}$$

现在，利用初始条件和 6.4 节定理 2 来确定系数. 我们得到

$$A_n=\frac{1}{\kappa_n}\int_0^L f(x)X_n(x)\,\mathrm{d}x,\quad A_n^*=\frac{1}{\alpha_n^2 c\kappa_n}\int_0^L g(x)X_n(x)\,\mathrm{d}x, \tag{14}$$

其中

$$\kappa_n=\int_0^L X_n^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

且 α_n 是(12)的正根. 我们利用数值计算来说明这个问题.

例 1　弹性梁的振动：嵌夹情形

考虑边值问题(1)、(9)、(10)，取

$$L=1,\quad c=1,\quad f(x)=\sin^2\pi x,\quad g(x)=0.$$

364

这个问题的解由(13)式给出，其中 A_n 和 $A_n{}^*$ 由(14)式给出，并且 α_n 是(12)的第 n 个正根，取 $L=1$. 特征函数是

$$X_n(x)=\cosh\alpha_n x-\cos\alpha_n x-\frac{\cosh\alpha_n-\cos\alpha_n}{\sinh\alpha_n-\sin\alpha_n}(\sinh\alpha_n x-\sin\alpha_n x).$$

由于 g 恒为零，我们有 $A_n{}^*=0$. 在表 1 中，利用前一节例 1 中所得到的 $\alpha_n(n=1,2,\cdots,5)$ 及系数 A_n. 我们还计算了 $\alpha_n{}^2$ 的值.

表 1 例 1 的数值数据

n	1	2	3	4	5
α_n	4.730 0	7.853 2	10.995 6	14.137 2	17.278 8
α_n^2	22.372 9	61.672 7	120.903 2	199.860 4	298.556 9
A_n	0.612	0	−0.022	0	−0.002

利用表 1 的数据，我们得到

$$u(x,t)=0.612X_1(x)\cos\alpha_1^2t-0.022X_3(x)\cos\alpha_3^2t-0.002X_5(x)\cos\alpha_5^2t+\cdots.$$

图 3 绘出了这个问题前四个特征函数的图，图 4 绘出了梁在不同时刻 t 的位置．这里 u 是用前五项部分和

$$u(x,t)\approx0.612X_1(x)\cos\alpha_1^2t-0.022X_3(x)\cos\alpha_3^2t-0.002X_5(x)\cos\alpha_5^2t$$

来逼近的.

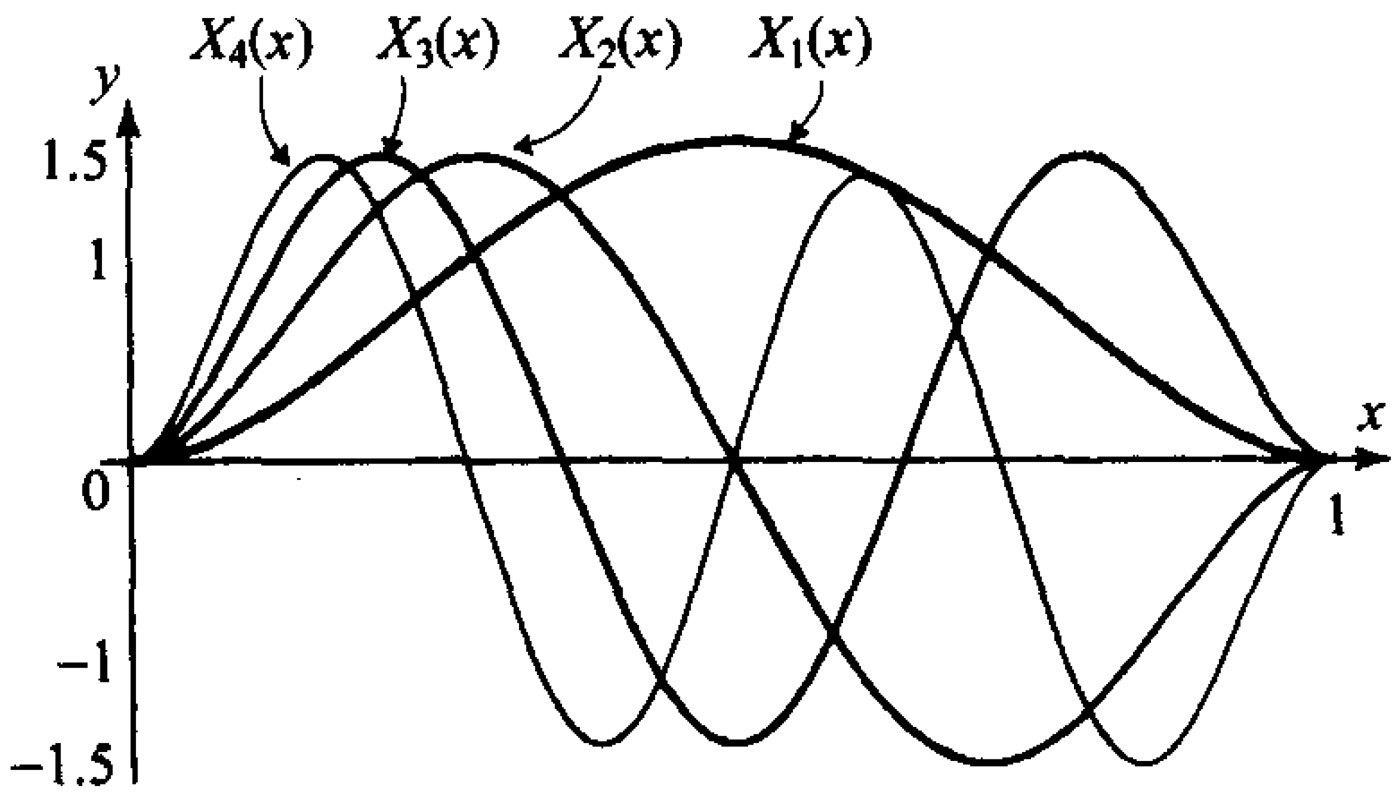


图 3 嵌夹梁的特征函数

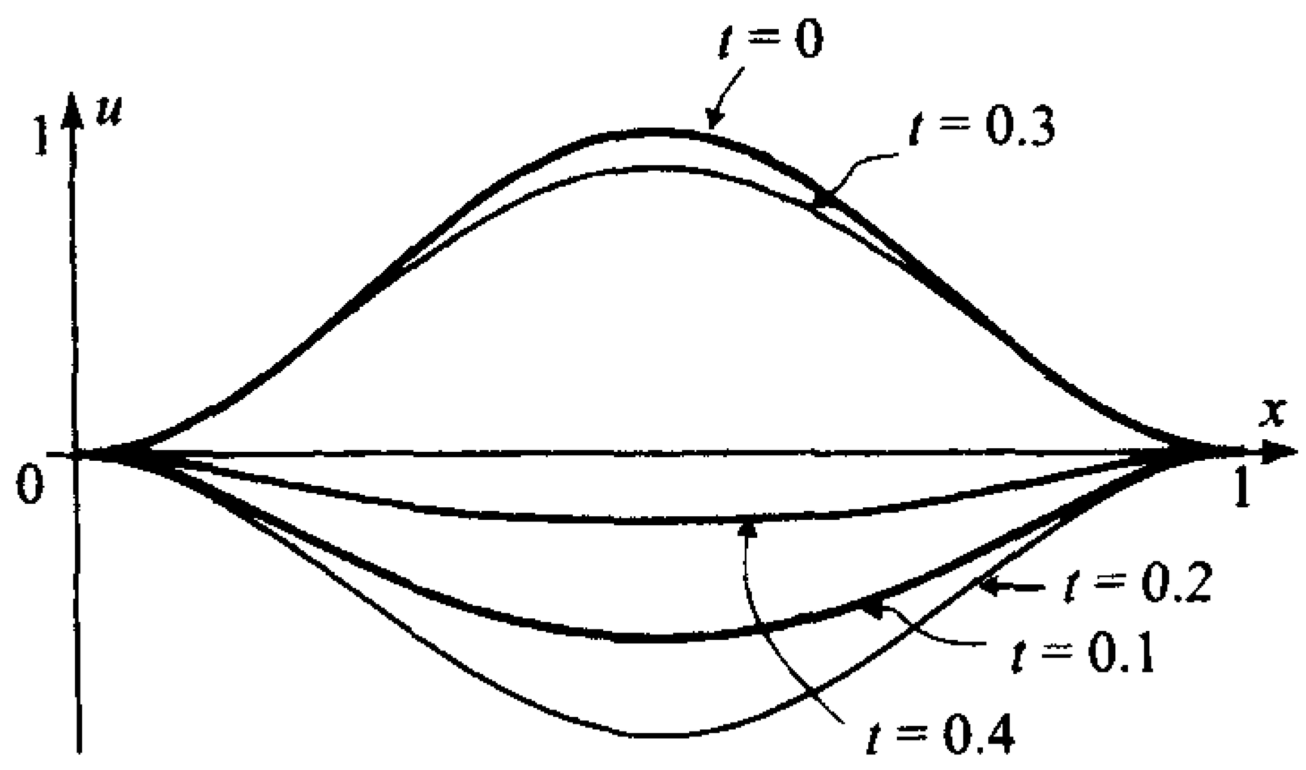


图 4 嵌夹梁振动的位置 ■

梁的横振动：嵌夹-自由情形

考虑图 5 中的悬臂梁，它是一端嵌夹、另一端自由的梁．我们有边界条件

$$u(0,t)=0,\quad u_x(0,t)=0,\quad u_{xx}(L,t)=0,\quad u_{xxx}(L,t)=0 \tag{15}$$

以及初始条件

365

$$u(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=g(x),\quad 0<x<L. \tag{16}$$

分离变量得到四阶施图姆-刘维尔问题

$$\begin{aligned}&X^{(4)}-\lambda X=0,\\&X(0)=0,\quad X'(0)=0,\\&X''(L)=0,\quad X'''(L)=0.\end{aligned} \tag{17}$$

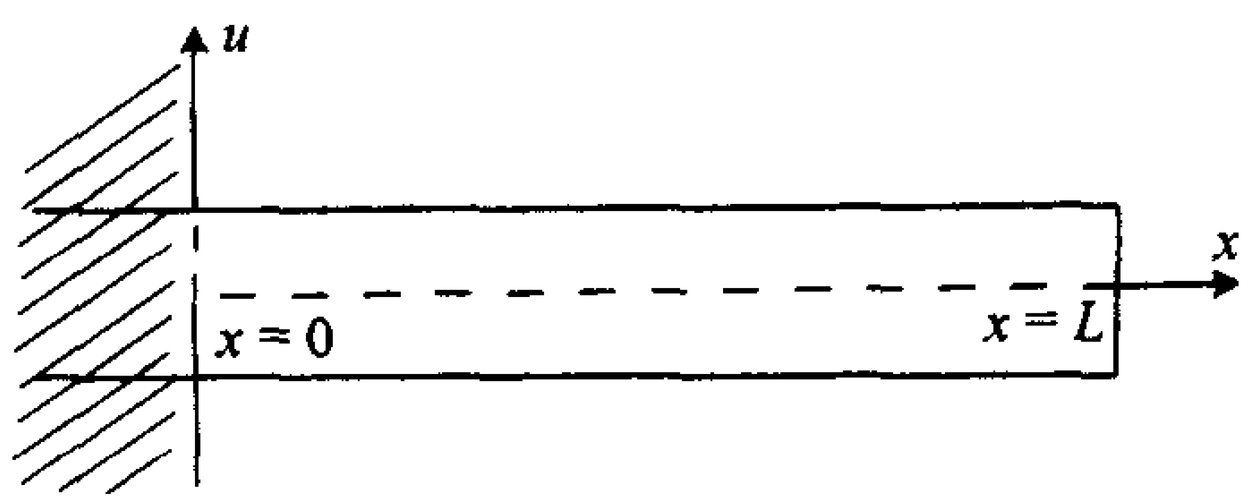


图 5 一端嵌夹、另一端自由的悬臂梁

这个问题的解在 6.4 节习题 14 中已经求过．我们有

$$\lambda=\lambda_n=\alpha_n^4$$

和

$$X_n(x)=\cos\alpha_nx-\cosh\alpha_nx-\frac{\cosh\alpha_nL+\cos\alpha_nL}{\sinh\alpha_nL+\sin\alpha_nL}(\sin\alpha_nx-\sinh\alpha_nx),$$

其中 $n=1, 2, \cdots$, α_n 是方程

$$\cosh\alpha L\cos\alpha L = -1 \tag{18}$$

的第 n 个正根. 利用前面一个例题中的 T，叠加乘积解，我们得到

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\cos\alpha_n x - \cosh\alpha_n x - \frac{\cosh\alpha_n L + \cos\alpha_n L}{\sinh\alpha_n L + \sin\alpha_n L}(\sin\alpha_n x - \sinh\alpha_n x)\right\} \times \{A_n\cos\alpha_n^2 ct + A_n^* \sin\alpha_n^2 ct\}. \tag{19}$$

为确定系数，我们利用初始条件和 6.4 节定理 2，得到

$$A_n = \frac{1}{\kappa_n}\int_0^L f(x)X_n(x)\mathrm{d}x, \quad A_n^* = \frac{1}{\alpha_n^2 c\kappa_n}\int_0^L g(x)X_n(x)\mathrm{d}x, \tag{20}$$

其中

$$\kappa_n = \int_0^L X_n^2(x)\mathrm{d}x,$$

366

以及 α_n 是(18)的正根.

例 2 弹性梁的振动：嵌夹-自由情形

求解边值问题(1)、(15)、(16)，取

$$L=1, \quad f(x)=x^2, \quad g(x)=0, \quad c=1.$$

解 这个问题的解由(19)和(20)式给出，其中 $A_n^*=0$，α_n 由方程

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\cosh\alpha}$$

确定. 如图 6 所示，这个方程具有无穷多个正实根. 利用计算机，我们得到前五个正根的数值近似，列在表 2 中.

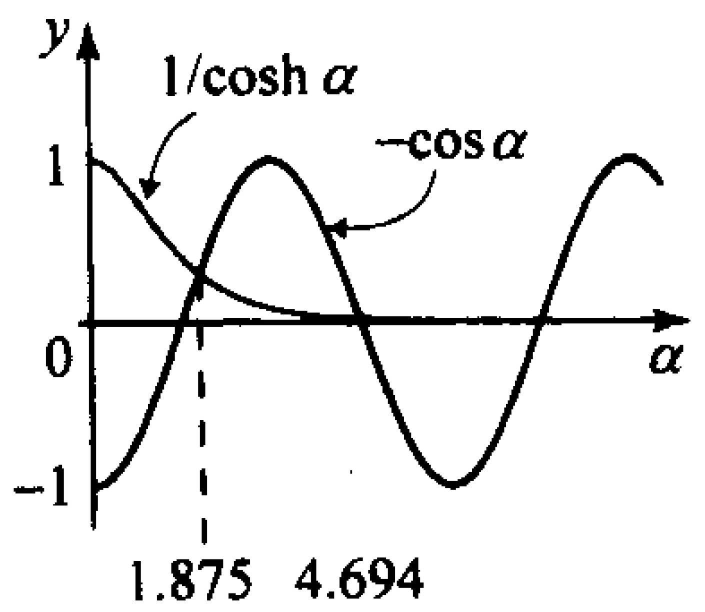


图 6

表 2 例 2 中的数值数据

n	1	2	3	4	5
α_n	1.875	4.694	7.855	10.995	14.137

注意到，表 2 中自 $n=2$ 开始的值与表 1 中自 $n=1$ 开始的值有点近似. 这是因为当 α 增大时，$1/\cosh\alpha$ 很快趋近于零，所以上面图 6 中的交点和 6.4 节图 1 中的交点具有很接近的 α 坐标值，该值很接近于$(n+1/2)\pi$. 为确定级数解(19)中的系数 A_n，按照(20)式，我们必须计算 f 和特征函数

$$X_n = \cos\alpha_n x - \cosh\alpha_n x - \frac{\cosh\alpha_n + \cos\alpha_n}{\sinh\alpha_n + \sin\alpha_n}(\sin\alpha_n x - \sinh\alpha_n x)$$

的内积. 这些内积可以手工计算出来，这里再次利用计算机来近似求系数. 我们有

$$u(x,t) = -0.445X_1(x)\cos\alpha_1^2 t + 0.039X_2(x)\cos\alpha_2^2 t - 0.008X_3(x)\cos\alpha_3^2 t + 0.003X_4(x)\cos\alpha_4^2 t - 0.001X_5(x)\cos\alpha_5^2 t\cdots.$$

图 7 绘出了这个问题前四个特征函数的图像. 图 8 绘出了梁在不同时刻 t 时的位置，这里我们利用了第五项部分和来近似 u.

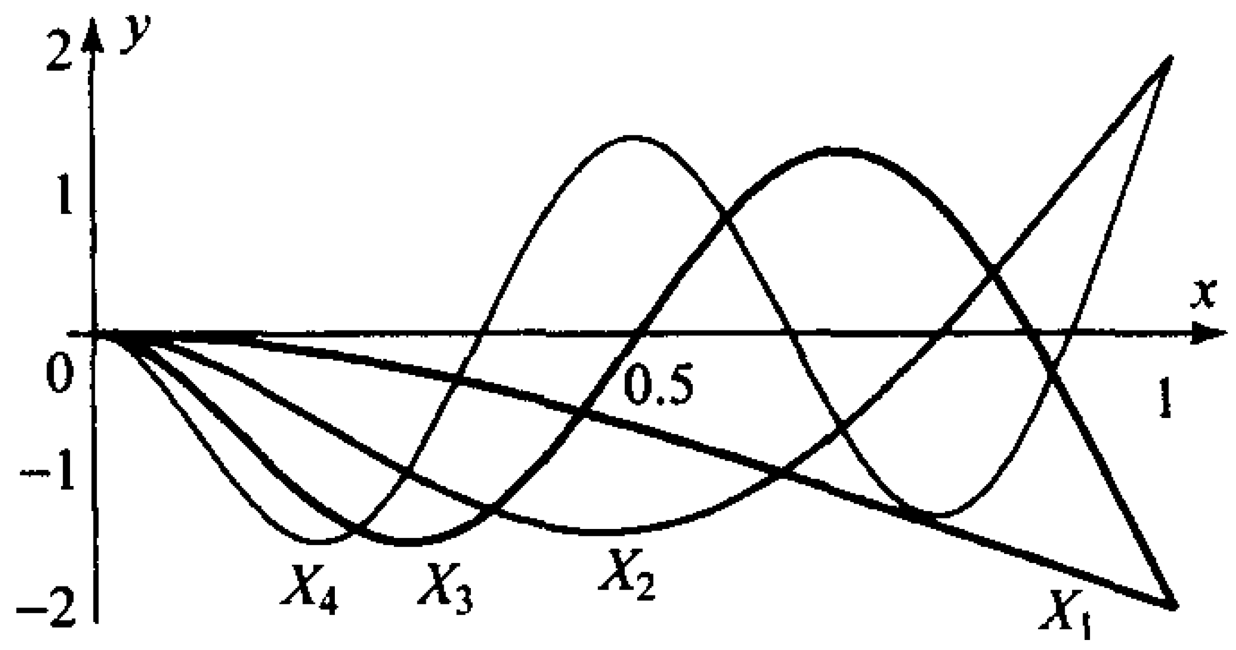


图 7 悬臂梁的特征函数

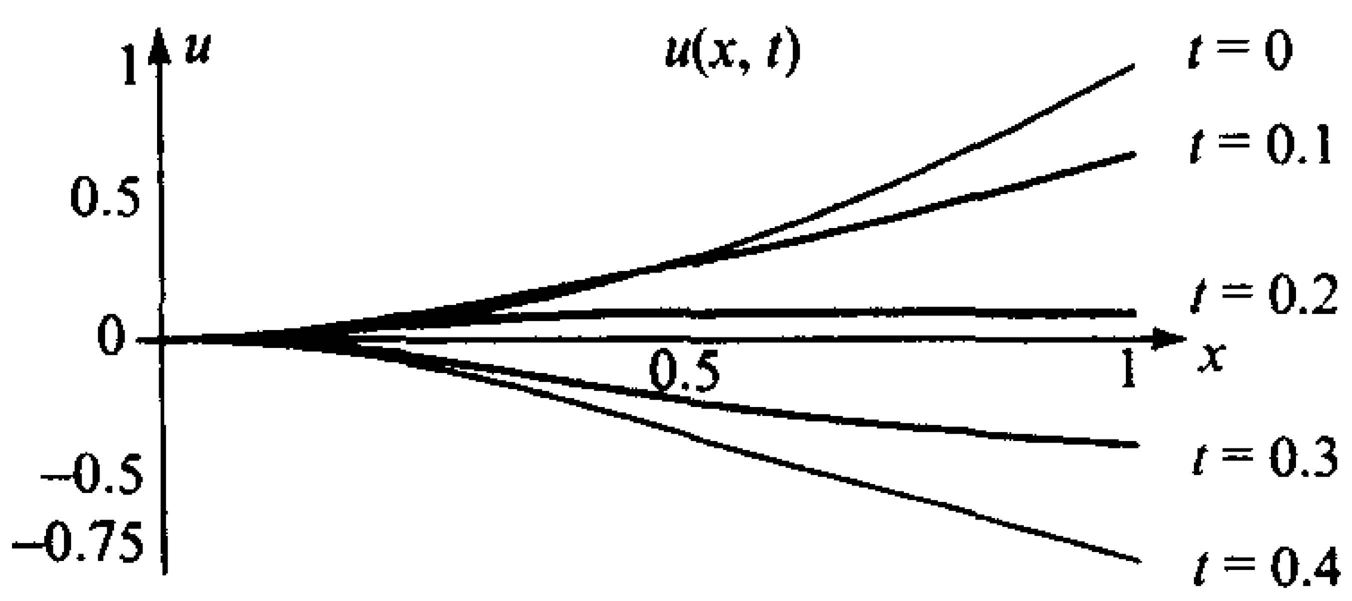


图 8 悬臂梁振动的位置 ■

367

施加轴向负荷时柱的屈曲

考虑长度为 L 的竖直柱，具有常数密度，在顶部具有负荷 P，其横截面形状如图 9 所示. 我们对使得柱子保持直立而不发生屈曲的最大负荷感兴趣. 这个临界值 P_1 称为**欧拉负荷**. 我们发现 P_1 由下面的四阶方程

$$y^{(4)}+\lambda y''=0 \tag{21}$$

和相应于柱端点固定方式的边界条件的第一特征值来确定. 几种典型的边界条件如图 10 所示.

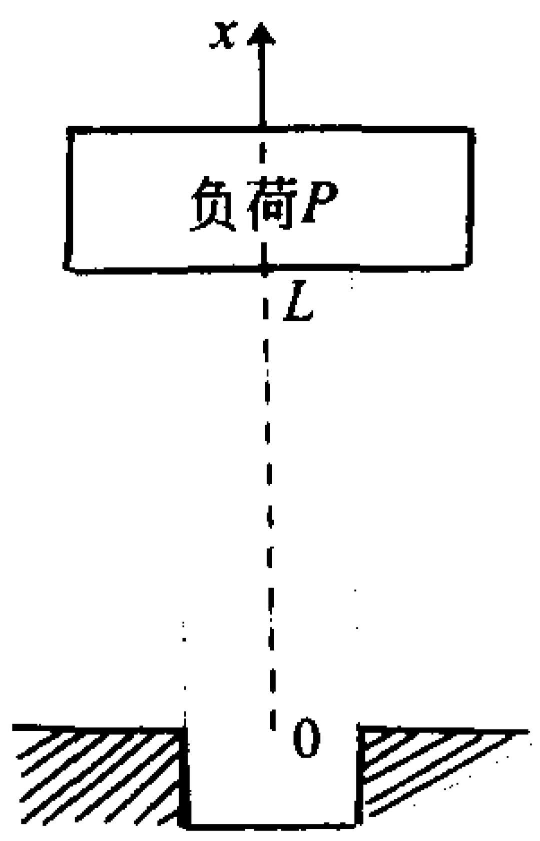
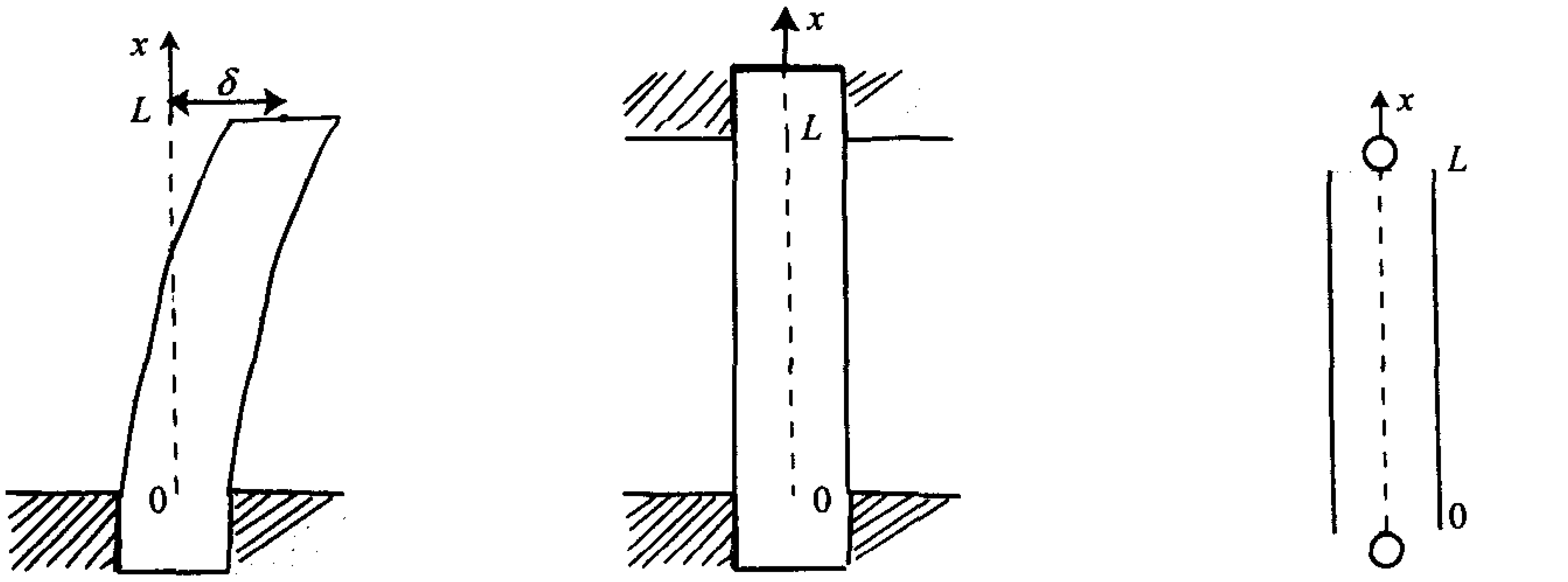


图 9 具有轴向负荷的竖直柱

由材料力学理论知，屈曲临界负荷 P_1 与带有适当边界条件的(21)式第一特征值有关：

$$P_1=EI\lambda_1,$$

其中 E=杨氏常数，I=柱截面关于过质心并与(x, y)平面垂直的轴的惯性矩. 相应于 λ_1 的特征函数描述了当柱开始屈曲时的形变. 在下面例题中，我们对图 10 中的第二、三种情形求出了欧拉负荷. 首先，研究第三种情形.



a) 嵌夹-自由情形
$y(0)=0,\ y'(0)=0,$
$y(L)=\delta,\ y''(L)=0.$

b) 嵌夹-嵌夹情形
$y(0)=0,\ y'(0)=0,$
$y(L)=0,\ y'(L)=0.$

c) 简单支撑情形
$y(0)=0,\ y''(0)=0,$
$y(L)=0,\ y''(L)=0.$

图 10 具有轴向负荷竖直柱的边界条件

例3　柱的屈曲：简单支撑情形

为求解铰接-铰接柱的临界负荷(欧拉负荷)，我们考虑方程

$$y^{(4)} + \lambda y'' = 0, \tag{22}$$

368

以及边界条件

$$y(0) = 0,\quad y''(0) = 0,\quad y(L) = 0,\quad y''(L) = 0.$$

可以验证非正的 λ 值只能导出平凡解 $y=0$(见习题 8)．因此，我们只考虑 $\lambda>0$ 情形，所以为方便起见，记 $\lambda=\alpha^4$，$\alpha>0$．(22)的特征方程是

$$r^4 + \alpha^2 r^2 = r^2(r^2 + \alpha^2) = 0,$$

该方程具有根 $r=0$(二重)以及 $r=\pm i\alpha$．因此，(22)的通解为

$$y = A + Bx + C\cos\alpha x + D\sin\alpha x.$$

利用前两个边界条件，我们有 $A=C=0$．第三、四个条件蕴涵着 $B=0$ 以及 $\sin\alpha L=0$．最后一个方程蕴涵着

$$\alpha = \alpha_n = \frac{n\pi}{L},$$

所以，第一个特征值为

$$\lambda_1 = \alpha_1^2 = \frac{\pi^2}{L^2}.$$

相应的屈曲方式为

$$y_1 = \sin\frac{\pi}{L}x.$$

这就给出了柱刚开始屈曲的形变形状．总之，我们得到这根柱的欧拉负荷是 $EI\frac{\pi^2}{L^2}$． ■

例4　柱的屈曲：嵌夹-嵌夹情形

在这种情形下，我们必须求解方程(22)以及边界条件

$$y(0) = 0,\quad y'(0) = 0,\quad y(L) = 0,\quad y'(L) = 0.$$

可以验证非正的 λ 值只能导出平凡解 $y=0$(见习题 10)．因此，我们只考虑 $\lambda=\alpha^2$，$\alpha>0$．由例 3，我们有

$$y = A + Bx + C\cos\alpha x + D\sin\alpha x.$$

边界条件导出如下关于系数的方程：

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \Rightarrow A = -C, \\ B + \alpha D &= 0 \Rightarrow B = -\alpha D, \\ A + BL + C\cos\alpha L + D\sin\alpha L &= 0, \\ B - \alpha C\sin\alpha L + \alpha D\cos\alpha L &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

将第一、二个方程代入第三、四个方程，我们得到

$$\begin{cases} (1-\cos\alpha L)C + (\alpha L - \sin\alpha L)D = 0, \\ \sin\alpha L C + (1-\cos\alpha L)D = 0. \end{cases} \tag{24}$$

369

如果这个方程组具有一个非零系数行列式，则唯一解是 $C=D=0$. 这就导出关于 y 的平凡解. 因此，为得到非平凡解，我们必须令系数行列式为 0. 我们得到

$$(1-\cos\alpha L)^2-\sin\alpha L(\alpha L-\sin\alpha L)=0,$$

或等价地，

$$2-2\cos\alpha L-\alpha L\sin\alpha L=0,$$

因为 $\cos^2\alpha L+\sin^2\alpha L=1$. 这个方程的第一个正根 α_1 就确定了第一特征值，从而确定了临界负荷. 利用半角三角恒等式，我们有

$$4\sin^2\frac{\alpha L}{2}-2\alpha L\sin\frac{\alpha L}{2}\cos\frac{\alpha L}{2}=0.$$

因此，所求的根是

$$\sin\frac{\alpha L}{2}\left[2\sin\frac{\alpha L}{2}-\alpha L\cos\frac{\alpha L}{2}\right]=0$$

的正根. 方程 $\sin\frac{\alpha L}{2}=0$ 具有最小正根 $\alpha=\frac{2\pi}{L}$. 方程 $2\sin\frac{\alpha L}{2}-\alpha L\cos\frac{\alpha L}{2}=0$ 变为

$$\tan\frac{\alpha L}{2}=\frac{\alpha L}{2}.$$

这个超越方程的根不能显式地求出，但是正如前面所做，我们可以利用计算机系统来逼近它们. 如图 11 所示，第一个正根肯定大于 $2\pi/L$. 因此，$\alpha_1=2\pi/L$，欧拉负荷是

$$P_1=\frac{4\pi^2}{L^2}EI.$$

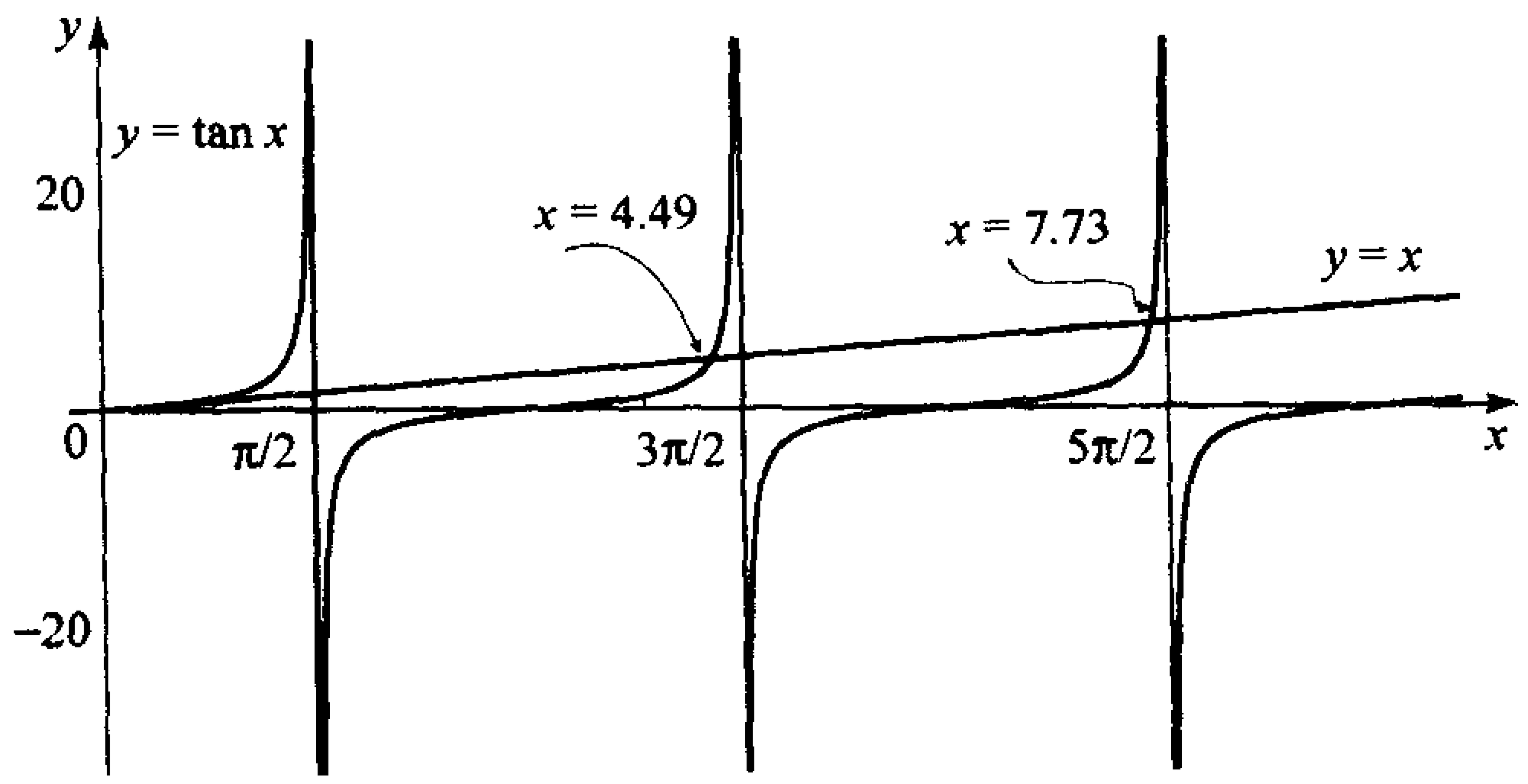


图 11　超越方程 $\tan x=x$ 具有无穷多个正根，每个区间 $\left(k\pi+\frac{\pi}{2},\ (k+1)\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，$k=0, 1, 2, \cdots$ 都有一个

注意到，临界负荷是简单支撑情形时的四倍. 最后，如果我们对柱屈曲时的形状感兴趣的话，我们必须计算相应于 α_1 的特征函数. 取 $\alpha_1=2\pi/L$，(24)中的第一个方程蕴涵着 $D=0$，因此，$B=0$. 系数 A 和 C 由式 $A=-C$ 相联系. 取 $A=1$，我们得到特征函数

370

$$y_1=1-\cos\frac{2\pi}{L}x,$$

或等价地，

$$y_1 = 2\sin^2 \frac{\pi}{L}x.$$ ■

习题 6.5

在习题 1～2 中，对给定条件，求解边值问题(1)、(2)、(3).

1. $f(x)=x\sin\pi x$，$g(x)=0$，$c=\pi$，$L=1$.

2. $f(x)=x(1-x)$，$g(x)=0$，$c=\pi$，$L=1$.

在习题 3～4 中，对给定条件，求解边值问题(1)、(9)、(10).

3. $f(x)=x(1-x)$，$g(x)=x$，$c=1$，$L=1$.

4. $f(x)=1-\cos 4\pi x$，$g(x)=\sin 2\pi x$，$c=1$，$L=1$.

在习题 5～6 中，对给定条件，求解边值问题(1)、(15)、(16).

5. $f(x)=x^3$，$g(x)=0$，$c=\pi$，$L=1$.

6. $f(x)=x^2\cos\pi x$，$g(x)=0$，$c=\pi$，$L=1$.

7. (a)确定图 10(a)中问题的特征值.

   (b)确定嵌夹-自由柱的屈曲临界负荷.

8. 试证：例 3 的特征值是正的.

9. 试证：例 4 的特征值是正的.

6.6 双调和算子

在本节和下节中，我们考虑板上的边值问题. 就像梁的情形，由于板的刚性，方程也涉及对某些特殊变量的四阶偏导数. 就像拉普拉斯算子在膜振动情形起着重要作用一样，**迭代拉普拉斯算子**或**双调和算子**在这里起着核心作用. $u(x, y)$的双调和算子定义为

$$\boxed{\nabla^4 u = \nabla^2(\nabla^2 u).} \tag{1}$$

在笛卡儿坐标系下，

$$\begin{aligned}\nabla^4 u(x,y) &= \nabla^2(u_{xx}+u_{yy}) = (u_{xx}+u_{yy})_{xx} + (u_{xx}+u_{yy})_{yy}\\ &= u_{xxxx}+u_{yyxx}+u_{xxyy}+u_{yyyy}\\ &= u_{xxxx}+2u_{yyxx}+u_{yyyy}.\end{aligned} \tag{2}$$

四阶偏导数的出现导致了新的挑战. 此外，不像拉普拉斯方程，我们不能对笛卡儿坐标系下的**双调和方程**

$$u_{xxxx}+2u_{yyxx}+u_{yyyy}=0$$

[371]

进行分离变量. 事实上，如果我们令 $u(x, y)=X(x)Y(y)$，并代入方程，我们得

$$X''''Y+2X''Y''+XY''''=0,$$

显然，在这个方程中变量不能被分离. 但是，可以对极坐标下的双调和方程进行分离变量. 直接对双调和方程作研究至今仍是十分困难的. 在本节和下节中，当寻求解析解时，我们将运用一个十分巧妙的方法，将问题简化为一个涉及拉普拉斯算子的问题. 这个化简只对极坐标有用，对笛卡儿坐标仍无效. 由于这个原因，我们不在笛卡儿坐标系下寻求解析解(对这些问题可以求数值解)，而在极坐标系下求解.

称双调和方程的解为**双调和函数**. 注意，任何调和函数也是双调和的，这是显然的，因为如果$\nabla^2 u=0$，则$\nabla^4(u)=\nabla^2(\nabla^2(u))=\nabla^2(0)=0$. 下面是构造并不必是调和的双调和函数的方法.

例 1 双调和函数

试证：如果 $u=u(x, y)$是调和的，并令

$$v = u \cdot (A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D), \tag{3}$$

其中，A，B，C 和 D 是常数，则 v 是双调和的.

解 我们必须验证$\nabla^4 v=0$. 第一步，建立恒等式

$$\nabla^2(\phi \cdot \psi) = \psi\nabla^2(\phi) + \phi\nabla^2(\psi) + 2\phi_x\psi_x + 2\phi_y\psi_y \tag{4}$$

(习题 10). 对 $u=\phi$ 和 $\psi=A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D$，应用上面的恒等式，因为$\nabla^2 u=0$(u 是调和的)，$\nabla^2(A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D)=4A$，$\psi_x=2Ax+B$ 和 $\psi_y=2Ay+C$，则

$$\begin{aligned}\nabla^4 v &= \nabla^2\ \nabla^2(u \cdot (A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D))\\ &= \nabla^2(4Au + 2u_x(2Ax + B) + 2u_y(2Ay + C))\\ &= 4A\nabla^2 u + 2\ \nabla^2(u_x(2Ax + B)) + 2\ \nabla^2(u_y(2Ay + C))\\ &= 2\ \nabla^2(u_x(2Ax + B)) + 2\ \nabla^2(u_y(2Ay + C)).\end{aligned}$$

由于$\nabla^2 u=0$，则$\nabla^2(u_x)=(\nabla^2 u)_x=0$，类似地，$\nabla^2(u_y)=0$. 同样，$2Ax+B$ 是线性函数，因此$\nabla^2(2Ax+B)=0$. 类似，$\nabla^2(2Ay+C)=0$. 应用(4)式，我们有

$$\nabla^2(u_x(2Ax + B)) = 2(u_x)_x(2Ax + B)_x + 2(u_x)_y(2Ax + B)_y = 4Au_{xx},$$

因为$(2Ax + B)_y = 0$. 类似地，$\nabla^2(u_y(2Ay + C)) = 4Au_{yy}$. 因此，$\nabla^4 v = 8Au_{xx} + 8Au_{yy} = 8A(u_{xx} + u_{yy}) = 0$. ■

372

在(3)式中取 $u(x, y)=1$，$A=-1$，$D=1$，且 $B=C=0$，我们得到

$$v(x,y) = 1 - x^2 - y^2.$$

我们有$\nabla^2 v=-2-2=-4$，则$\nabla^4 v=\nabla^2(-4)=0$. 所以，$v$ 是双调和的，但不是调和的. 如图 1 所示，v 在矩形$-1\leqslant x$，$y\leqslant 1$上的图像显示出调和函数和双调和函数之间的显著区别. v 的最大值在矩形的内点(0, 0)达到，这与非常数调和函数不同，后者的最大值和最小值只能边界上取到(3.11 节，最大值原理). 因此，对调和函数成立的最大值原理对双调和函数失效.

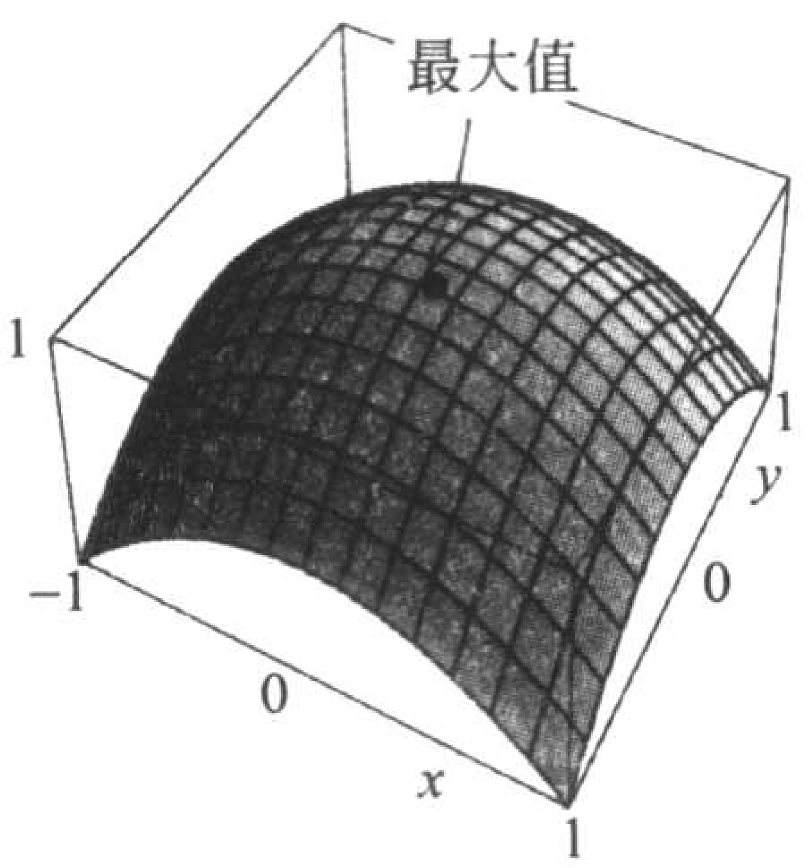


图 1 双调和函数可以在其区域内部取到最大值

双调和方程的解

我们转到极坐标(r, θ)，考虑中心在原点、半径为 $a>0$ 的圆盘上的双调和方程：

$$\nabla^4 u = 0,\quad 0 \leqslant r < a,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \tag{5}$$

因为双调和方程涉及四阶导数，我们加上两个边界条件，分别确定 u 及其法向导数在边界上的

值. 由于对圆盘而言，法向导数是$\frac{\partial u}{\partial r}$(或简单地 u_r)，我们将考虑(5)满足边界条件

$$u(a,\theta)=f(\theta),\quad \frac{\partial u}{\partial r}(a,\theta)=g(\theta),\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi. \tag{6}$$

下面通过将边值问题(5)～(6)化为圆盘上的两个狄利克雷问题来求解它. 考虑形如

$$u(r,\theta)=(a^2-r^2)v(r,\theta)+w(r,\theta) \tag{7}$$

的函数，其中 v 和 w 是调和的. 由于 $r^2=x^2+y^2$，由例 1 知：$(a^2-r^2)v$ 是双调和的. 并且由于 w 是双调和的，可知(7)式右端是两个双调和函数之和，所以是双调和的，因而 u 满足(5)式. 下面，我们确定 v 和 w，以使边界条件(6)满足. 由于 v 和 w 都是调和的，它们是由其在圆盘边界上的值确定的. 在(7)式中，令 $r=a$，并利用 $u(a,\ \theta)=f(\theta)$，我们得到 w 的边界条件为

$$w(a,\theta)=f(\theta). \tag{8}$$

因此，w 是圆盘上带有边界值(8)的狄利克雷问题的(唯一)解. 为求出 w，我们利用 4.4 节的技巧. 下面，我们确定 v 的边界值，从而确定 v 本身. 为此，对(7)式两边关于 r 求导数，令 $r=a$，并利用 $u_r(a,\ \theta)=g(\theta)$，我们得到 [373]

$$\begin{aligned}u_r(r,\theta)&=-2rv(r,\theta)+(a^2-r^2)v_r(r,\theta)+w_r(r,\theta);\\ u_r(a,\theta)=g(\theta)&=-2av(a,\theta)+w_r(a,\theta);\\ v(a,\theta)&=\frac{1}{2a}(w_r(a,\theta)-g(\theta)).\end{aligned} \tag{9}$$

由于此时 w 是已经确定好的，因此 $w_r(a,\ \theta)$是已知的，从而最后一个方程就确定了 v 的边界值. 故 v 是圆盘内的带有边界值(9)的狄利克雷问题的(唯一)解. 这就确定了(7)式的 v 和 w，因而解出了边值问题(5)～(6). 这个方法如图 2 所示，我们以定理 1 为总结.

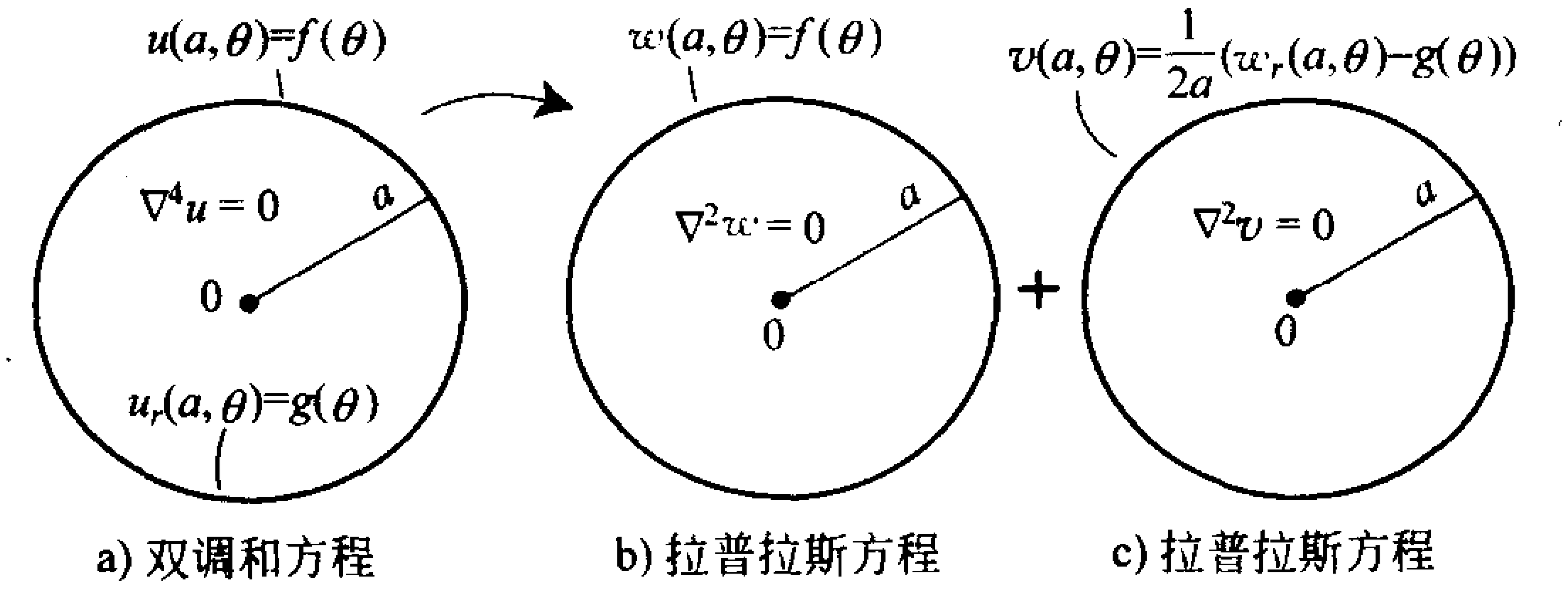


图 2 将带有两个边界条件的双调和问题化为两个各带一个边界条件的狄利克雷问题

定理 1(双调和方程的解) 边值问题(5)～(6)的解是由(7)式给出的双调和函数 u，其中 v 和 w 是圆盘上的狄利克雷问题的解，w 的边值由(8)式给出(与 u 具有相同的边值)，而 v 的边值由(9)式给出.

当求解圆盘内的双调和方程时，在解的推导过程中，我们首先求解 w，然后再求 v，因为 v 的边值依赖于 w 的边值.

例 2 **双调和方程**

在单位圆盘上，求解

$$\nabla^4 u = 0,\quad u(1,\theta) = \cos\theta \quad 及 \quad u_r(1,\theta) = \sin\theta. \tag{10}$$

解 由定理 1，解具有形式

374

$$u(r,\theta) = (1-r^2)v + w,$$

其中 v 和 w 是单位圆盘中的调和函数. w 的边值与 u 的边值相同. 因此，为求出 w，我们必须求解$\nabla^2 w=0$ 满足 $w(1,\theta)=\cos\theta$. 我们由 4.4 节知：这个问题的解是由 $w(r,\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$给出，其中 a_n 和 b_n 是边界函数 $f(\theta)=\cos\theta$ 的傅里叶系数. 我们立刻得到 $a_1=1$，且其他所有系数都为 0. 因此，$w(r,\theta)=r\cos\theta$.

我们已经求得 w，由(9)式，并利用 $g(\theta)=\sin\theta$ 和 $w_r(r,\theta)\mid_{r=1}=\cos\theta$，我们可以确定 v 的边值. 我们有

$$v(1,\theta) = \frac{1}{2}(\cos\theta - \sin\theta).$$

利用求解关于 w 的狄利克雷问题的方法，我们可以求得带有边界值$\frac{1}{2}(\cos\theta-\sin\theta)$的狄利克雷问题的解为 $v(r,\theta)=\frac{1}{2}r(\cos\theta-\sin\theta)$. 因此，双调和问题的解为

$$u(r,\theta) = (1-r^2)\frac{1}{2}r(\cos\theta - \sin\theta) + r\cos\theta.$$

可以验证，这个函数确实是一个解. 注意到，$r\cos\theta$ 是调和的，但是$(1-r^2)\frac{1}{2}r(\cos\theta-\sin\theta)$不是. 因此，函数 u 在圆盘中不是调和的. ■

虽然例 2 中的边界条件是有些特殊，但是它们确实揭示了：通过化简成两个狄利克雷问题来求解双调和方程的过程，以及傅里叶级数所起的作用. 下面是又一个例证.

例 3 **具有 0 边值的双调和函数**

在单位圆盘上，试证：边值问题

$$\nabla^4 u = 0,\quad u(1,\theta) = 0 \quad 及 \quad u_r(1,\theta) = g(\theta) \tag{11}$$

的解由

$$u(r,\theta) = -\frac{1}{2}(1-r^2)\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)\right]$$

给出，其中 a_0，a_n 和 b_n 是 g 的傅里叶系数.

解 由定理 1，解具有形式

$$u(r,\theta) = (1-r^2)v + w,$$

其中 v 和 w 是单位圆盘上的调和函数. 由于 w 在边界上为 0，所以我们得到 w 在单位圆盘内部恒等于 0. 因此，

375

$$u(r,\theta) = (1-r^2)v.$$

利用(9)式以及 $w_r=0$ 这个事实，我们得到 v 的边界值

$$v(1,\theta)=-\frac{1}{2}g(\theta).$$

由 4.4 节的结果，我们得到边界值为$-\frac{1}{2}g(\theta)$的狄利克雷问题的解为

$$v(r,\theta)=-\frac{1}{2}\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)\right],$$

其中 a_0，a_n 和 b_n 是 g 的傅里叶系数．这就确定了 v，从而所求的解就是题中所断言的． ■

习题 6.6

在习题 1～8 中，验证给定函数是双调和的，适当地利用例 1 的结果．下面，(x, y)表示笛卡儿坐标，(r, θ)表示极坐标，而 n 表示整数．

1. x^4-y^4.
2. $xy^2+yx^2+x^3-2y^3$.
3. $\frac{x^2}{x^2+y^2}$.
4. $\frac{xy}{x^2+y^2}$.
5. $(1-r^2)r^2\cos 2\theta$.
6. $r^3(\cos\theta+\sin\theta)$.
7. $r^{n+2}\cos n\theta$.
8. $r^2\ln r$.
9. 试证：$ar^2\ln r+br^2+c\ln r+d$ 是双调和的，其中 a，b，c，d 是常数．

 这个函数在求解环中带有不依赖于 θ 的边界数据的双调和方程时有用．见习题 11 和 12．

10. 证明(4)式．

在习题 11～12 中，求解如图所示的问题．

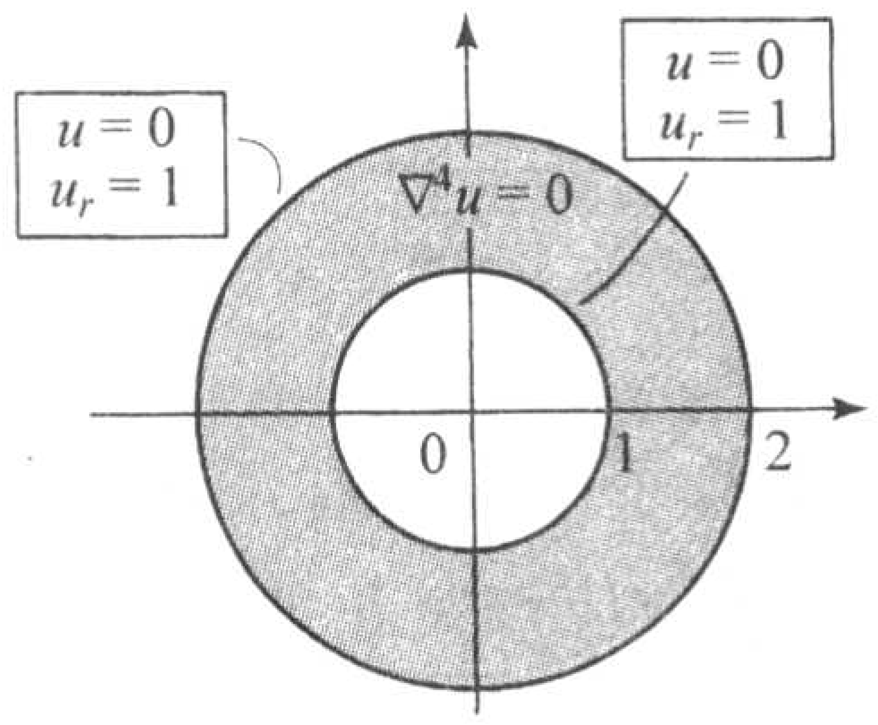


图 3　习题 11 的图

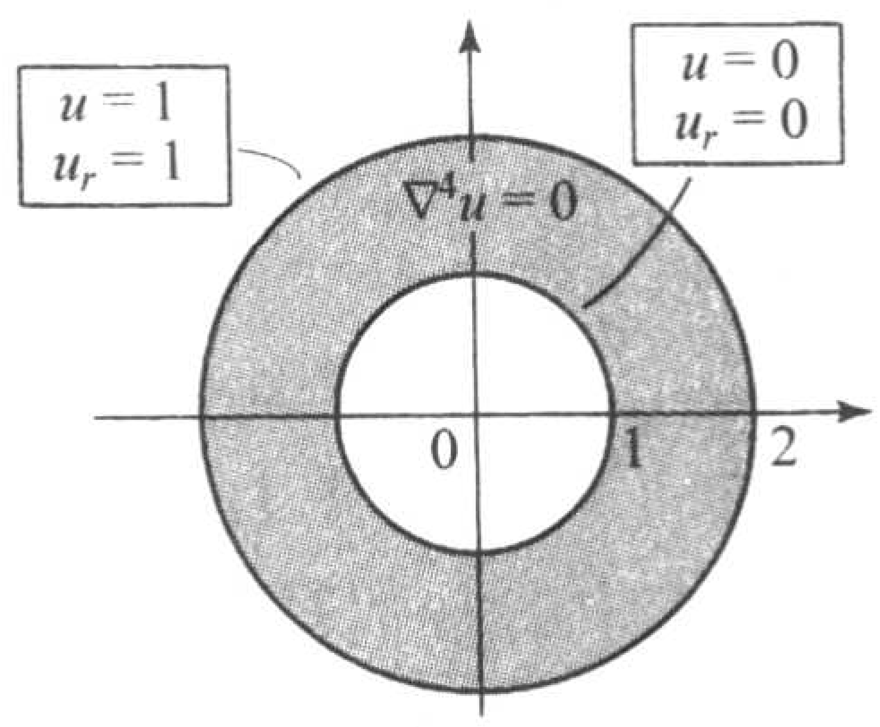


图 4　习题 12 的图

为求解给定问题，以习题 9 所描述的双调和函数为开始，确定其中的常数，以满足边界条件

13. 在单位圆盘上，求解$\nabla^4 u=0$，满足 $u(1, \theta)=\cos 2\theta$ 和 $u_r(1, \theta)=0$.
14. 在单位圆盘上，求解$\nabla^4 u=0$，满足 $u(1, \theta)=0$ 和 $u_r(1, \theta)=1$.
15. 在单位圆盘上，求解$\nabla^4 u=0$，满足 $u(1, \theta)=1$ 和 $u_r(1, \theta)=\cos\theta$.
16. 在单位圆盘上，求解$\nabla^4 u=0$，满足 $u(1, \theta)=0$ 和 $u_r(1, \theta)=\theta^2$，$-\pi<\theta<\pi$.
17. 在单位圆盘上，求解$\nabla^4 u=0$，满足 $u(1, \theta)=0$ 和 $u_r(1, \theta)=g(\theta)$.

376 18. 在单位圆盘上，求解$\nabla^4 u=0$，满足$u(1,\theta)=f(\theta)$和$u_r(1,\theta)=0$.

6.7 圆盘的振动

板振动是由梁振动方程(6.4 节)的二维形式所控制的：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+c^2\nabla^4 u=0.$$

这里$u=u(x,y,t)$表示板在点(x,y)处$t>0$时刻的偏斜，而$\nabla^4 u$表示u关于变量x和y的双调和算子. 正如前节所解释的，应用笛卡儿坐标会出现困难，所以我们将考虑该问题的极坐标形式. 在半径为$a>0$、中心为原点的圆盘上，方程变为

$$\boxed{u_{tt}+c^2\nabla^4 u=0,\quad 0\leqslant r<a, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, t>0.}\tag{1}$$

对于嵌夹的圆盘，相应的边界条件为

$$\boxed{u(a,\theta,t)=0\quad 及\quad u_r(a,\theta,t)=0,}\tag{2}$$

而初始条件为

$$\boxed{u(r,\theta,0)=f(r,\theta),\quad u_t(r,\theta,0)=g(r,\theta),\quad 0\leqslant r<a, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.}\tag{3}$$

同时，我们还将考虑非齐次方程

$$\boxed{u_{tt}+c^2\nabla^4 u=F(r,\theta,t),\quad 0\leqslant r<a,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad t>0,}\tag{4}$$

加上类似的边界条件和初始条件. 正如你所想象的，我们所面临的问题与 4.2～4.3 节的膜振动问题一样复杂. 我们将首先确定圆盘上的双调和算子的特征值和特征函数，然后利用特征函数展开法求解上述边值问题. 幸运的是，特征函数问题将化为我们在 4.6 节研究过的问题.

双调和算子的特征函数

考虑半径为a的圆盘上的**特征值问题**，

377

$$\boxed{\nabla^4\phi(r,\theta)=k^4\phi(r,\theta),\quad 0\leqslant r<a,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,}\tag{5}$$

带有**边界条件**

$$\phi(a,\theta)=0,\quad \phi_r(a,\theta)=0,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.\tag{6}$$

这里，我们增加了一个边界上法向导数的条件，这在拉普拉斯算子中并没有. 同样，为方便起见，我们将(5)式中的常数写为k^4. 一个重要的事实就是这个常数应该是正的.

注意到，如果ϕ满足$\nabla^2\phi=\pm k^2\phi$，则

$$\nabla^4(\phi)=\nabla^2(\nabla^2\phi)=\nabla^2(\pm k^2\phi)=\pm k^2\,\nabla^2(\phi)=k^4\phi.$$

因此，如果ϕ是拉普拉斯算子相应于特征值$\pm k^2$的特征函数，则ϕ是双调和算子相应于特征值k^4的特征函数. 记住这点，现在我们不考虑边界条件，回顾 4.6 节，我们知道函数

$$\phi(r,\theta)=J_m(kr)\cos m\theta\quad 或\quad J_m(kr)\sin m\theta\quad (m=0,1,2,\cdots)\tag{7}$$

是$\nabla^2\phi=-k^2\phi$的解，因此它们也满足方程$\nabla^4 u=k^4 u$. 下面，我们问：$\nabla^2\phi=+k^2\phi$的非零解是什么？它们与$\nabla^2\phi=-k^2\phi$的解有关联吗？为回答这些问题，首先我们证明如下命题.

命题 1(特征函数的扩张)　假设$\phi(r,\theta)$满足$\nabla^2\phi=\lambda\phi$ $(\lambda\neq 0)$，令$\psi(r,\theta)=A\phi(\alpha r,\theta)$，

其中 A 和 α 是非零常数，则 $\nabla^2\psi=\alpha^2\lambda\psi$.

换句话说，在径向扩张 α 因子的特征函数就是相应于该特征值扩张 α^2 因子的特征函数.

证明 方程 $\nabla^2\phi=\lambda\phi$ 告诉我们

$$\phi_{rr}(r,\theta)+\frac{1}{r}\phi_r(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\phi_{\theta\theta}(r,\theta)=\lambda\phi(r,\theta).$$

为避免混淆，我们记轴向变量为 ρ，则

$$\phi_{rr}(\rho,\theta)+\frac{1}{\rho}\phi_r(\rho,\theta)+\frac{1}{\rho^2}\phi_{\theta\theta}(\rho,\theta)=\lambda\phi(\rho,\theta). \tag{8}$$

我们现在计算 ψ 的拉普拉斯算子，利用 $\psi_r(\alpha r,\theta)=A\alpha\phi_r(\alpha r,\theta)$，$\psi_{rr}(\alpha r,\theta)=A\alpha^2\phi_{rr}(\alpha r,\theta)$，以及 $\psi_{\theta\theta}(\alpha r,\theta)=A\phi_{\theta\theta}(\alpha r,\theta)$：

$$\begin{aligned}\nabla^2\psi&=\psi_{rr}(r,\theta)+\frac{1}{r}\psi_r(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\psi_{\theta\theta}(r,\theta)\\&=A\alpha^2\left[\phi_{rr}(\alpha r,\theta)+\frac{1}{(\alpha r)}\phi_r(\alpha r,\theta)+\frac{1}{(\alpha r)^2}\phi_{\theta\theta}(\alpha r,\theta)\right]\\&=A\alpha^2\,\nabla^2\phi(\alpha r,\theta)\qquad (8)\text{ 中取 }\rho=\alpha r\\&=A\alpha^2\lambda\phi(\alpha r,\theta)=\alpha^2\lambda\psi(r,\theta).\end{aligned}$$

这就证明 ψ 是相应于特征值 $\alpha^2\lambda$ 的特征函数. ■

378

回顾，整数 m 阶的修正贝塞尔函数的定义(4.7 节，习题 29)：$I_m(r)=\frac{1}{\mathrm{i}^m}J_m(\mathrm{i}r)$. 令

$$\psi(r,\theta)=I_m(kr)\cos m\theta\quad\text{或}\quad I_m(kr)\sin m\theta\quad(m=0,1,2,\cdots). \tag{9}$$

我们有 $\psi(r,\theta)=\frac{1}{\mathrm{i}^m}\phi(\mathrm{i}r,\theta)$，其中 ϕ 如(7)式所定义. 由于 $\nabla^2\phi=-k^2\phi$，则由命题 1，

$$\nabla^2\psi=-k^2(\mathrm{i})^2\psi=k^2\psi\Rightarrow\nabla^4\psi=k^4\psi.$$

现在，我们小结一下我们所得到的，并给出特征值的一个公式.

定理 1(双调和算子的特征函数) 对 $m=0,1,2,\cdots$，$n=1,2,\cdots$，考虑由

$$[I_m(k_{mn}a)J_m(k_{mn}r)-J_m(k_{mn}a)I_m(k_{mn}r)]\cos m\theta \tag{10}$$

或

$$[I_m(k_{mn}a)J_m(k_{mn}r)-J_m(k_{mn}a)I_{mn}(k_{mn}r)]\sin m\theta \tag{11}$$

给出的函数 $\phi_{mn}(r,\theta)$，其中 k_{mn} 是

$$J_m(ka)I'_m(ka)-I_m(ka)J'_m(ka)=0 \tag{12}$$

的正根，则 $\nabla^4\phi_{mn}=k_{mn}^4\phi_{mn}$，并且 ϕ_{mn} 满足边界条件(6).

证明 我们已经证明了 $J_m(k_{mn}r)\cos m\theta$，$I_m(k_{mn}r)\cos m\theta$，$J_m(k_{mn}r)\sin m\theta$ 和 $I_m(k_{mn}r)\sin m\theta$ 都是满足 $\nabla^4\phi=k^4\phi$ 的特征函数. 因此，这些函数的任意线性组合也是相应于 k^4 的特征函数，特别地，(10)和(11)式中的函数是相应于 k^4 的特征函数. 现在，证明如果 k_{mn} 是方程(12)的根，则(10)和(11)式中的函数也满足边界条件(6). 取 $\phi(r,\theta)=[I_m(k_{mn}a)J_m(k_{mn}r)-J_m(k_{mn}a)\,I_m(k_{mn}r)]\cos m\theta$，则

$$\phi(a,\theta)=[I_m(k_{mn}a)J_m(k_{mn}a)-I_m(k_{mn}a)J_m(k_{mn}a)]\cos m\theta=0,$$

并且

$$\phi_r(a,\theta) = k_{mn}[I_m(k_{mn}a)J'_m(k_{mn}a) - J_m(k_{mn}a)I'_m(k_{mn}a)]\cos m\theta = 0,$$

因为 k_{mn} 是(12)式的根. 同理，对由(11)式给出的 ϕ_{mn}，结论也成立. ■

定理 1 中特征函数最重要的性质是它们在圆盘 $0 \leqslant r < a$ 内构成一个完备正交函数集，即，(10)或(11)中任意两个不同的函数 ϕ_{mn} 和 $\phi_{m'n'}$ 满足正交性关系式

379

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a \phi_{mn}(r,\theta)\phi_{m'n'}(r,\theta)r\,dr\,d\theta = 0, \tag{13}$$

并且圆盘上任意一个适当光滑的函数 $f(r,\theta)$ 都具有形如

$$f(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[A_{mn}[I_m(k_{mn}a)J_m(k_{mn}r) - J_m(k_{mn}a)I_m(k_{mn}r)]\cos m\theta$$
$$+ B_{mn}[I_m(k_{mn}a)J_m(k_{mn}r) - J_m(k_{mn}a)I_m(k_{mn}r)]\sin m\theta] \tag{14}$$

的特征函数展开式，其中系数是由 f 与特征函数之间的内积给出. 在本节的第二部分，我们将对 $m=0$ 情形证明这些事实. 一般情形类似可得，但是记号要复杂得多.

要解决与我们已经推导的结果有关的问题，还需要更多的特征值的知识，这可以通过计算(12)式解的近似数值来得到. 为叙述清楚，我们将只考虑径向对称情形.

径向对称问题

我们将求解单位圆盘($a=1$)上的方程(1)和(4)的径向对称情形. 当一个问题是径向对称的，函数不依赖于 θ，则特征函数展开式(14)变为($a=1$)

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n[I_0(k_n)J_0(k_nr) - J_0(k_n)I_0(k_nr)], \tag{15}$$

其中 k_n 是方程(12)的第 n 个正根，取 $a=1$，且 $m=0$，

$$J_0(k)I'_0(k) - I_0(k)J'_0(k) = 0. \tag{16}$$

由 4.8 节，我们知道 $J'_0(k) = -J_1(k)$；类似可得，$I'_0(k) = I_1(k)$. 因此，关于特征值的方程变为

380

$$J_0(k)I_1(k) + I_0(k)J_1(k) = 0. \tag{17}$$

J_0 和 J_1 的图像是振荡的，并且具有无穷多个零点(图 1)，而 I_0 和 I_1 的图像是递增的，且趋于无穷(图 2). 因此，有理由相信 $J_0(k)I_1(k)+I_0(k)J_1(k)$ 的图也将是振荡的，且具有无穷多个零点(图 3). 表 1 列出了前六个根的数值估计. 有趣的是，第 n 个根近似等于 $n\pi$.

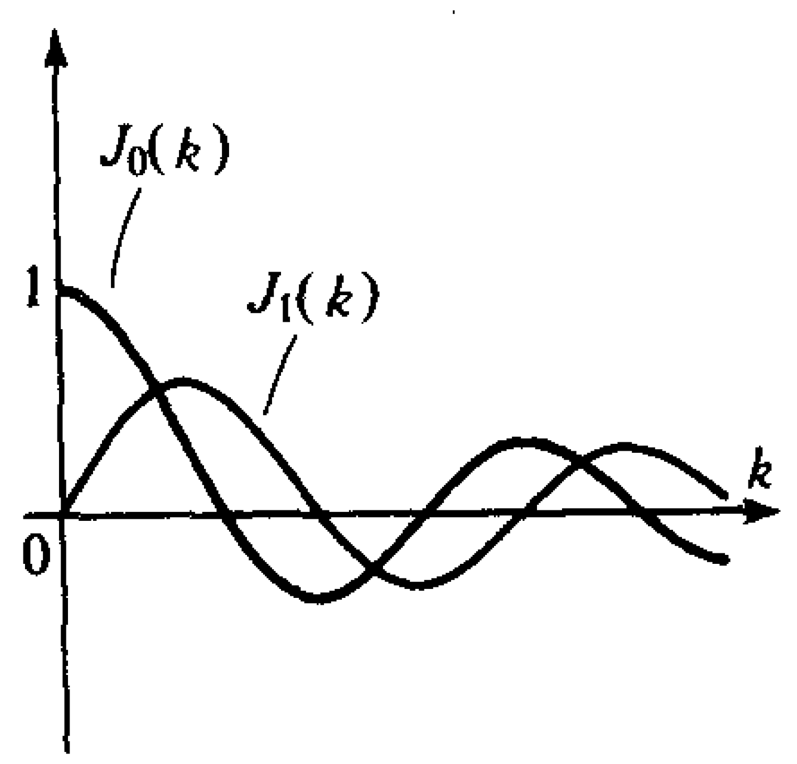


图 1

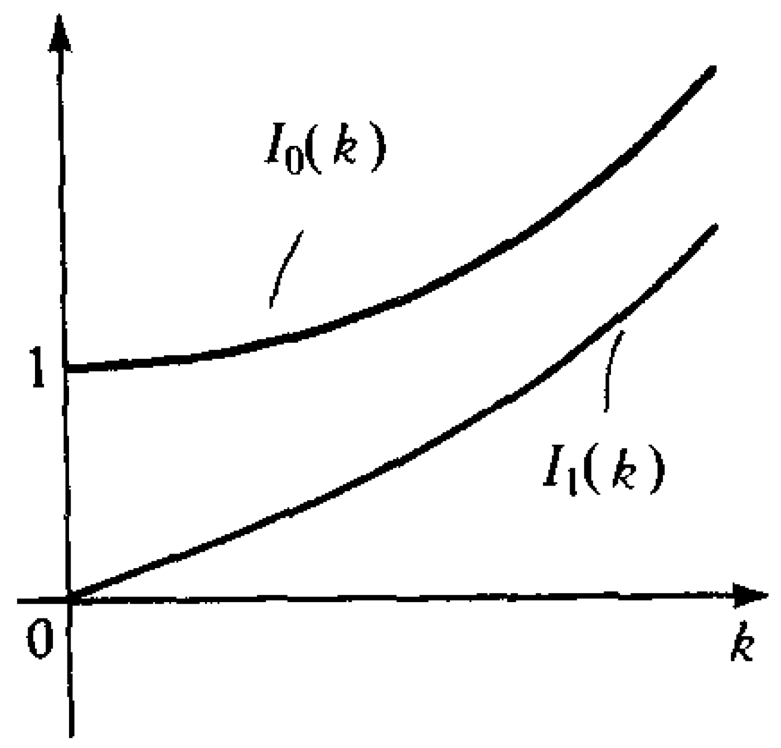


图 2

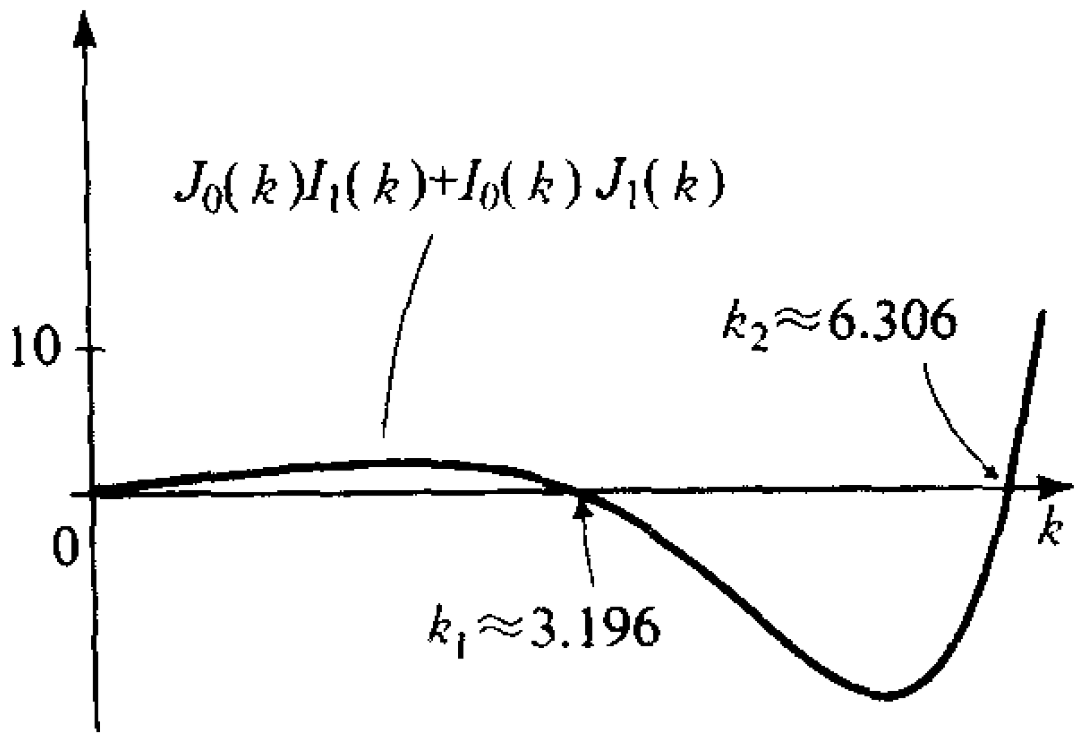


图 3

表 1 k_n，$J_0(k)I_1(k)+I_0(k)J_1(k)=0$ 的正根

n	1	2	3	4	5	6
k_n	3.196 2	6.306 4	9.439 5	12.577 1	15.716 4	18.856 5
$n\pi$	3.141 6	6.283 2	9.424 8	12.566 4	15.708 0	18.849 6

现在，我们来描述(15)式中的广义傅里叶系数 A_n. 利用特征函数

$$\phi_n(r) = I_0(k_n)J_0(k_nr) - J_0(k_n)I_0(k_nr) \tag{18}$$

在区间(0，1)上关于权 r 的正交性，用通常的方法就可以推导出这些系数. 因此，

$$A_n = \frac{1}{\int_0^1 \phi_n(r)^2 r\mathrm{d}r}\int_0^1 f(r)\phi_n(r)r\mathrm{d}r. \tag{19}$$

为处理涉及 J_0 和 I_0 的积分(特别地，为求出 $\int_0^1 \phi_n(r)^2 r\mathrm{d}r$ 的表达式)，我们将应用以下几个积分恒等式：

$$\int J_0^2(\lambda x)x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2(J_0^2(\lambda x) + J_1^2(\lambda x)) + C; \tag{20}$$

$$\int I_0^2(\lambda x)x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2(I_0^2(\lambda x) - I_1^2(\lambda x)) + C; \tag{21}$$

$$\int I_0(\lambda x)J_0(\lambda x)x\mathrm{d}x = \frac{1}{2\lambda}x(I_1(\lambda x)J_0(\lambda x) + I_0(\lambda x)J_1(\lambda x)) + C. \tag{22}$$

为验证这些恒等式，可以简单地求微分，从而去掉积分；也可以利用关于 I_0 和 J_0 的微分方程来推导出这些式子. 我们以证明(20)式为例来说明这些重要的技巧.

(20)式的证明 我们知道 $y=J_0(x)$满足零阶贝塞尔方程：$x^2y''+xy'+x^2y=0$. 将这个方程变为 381

$$
\begin{aligned}
xy'' + y' + xy &= 0 && \text{(除以 } x\text{)}\\
(xy')' + xy &= 0 && \text{(合并微分)}\\
2xy'(xy')' + x^2 2yy' &= 0 && \text{(乘以 } 2xy'\text{)}\\
((xy')^2)' + x^2(y^2)' &= 0 && \text{(链式法则,两次)}\\
\int((xy')^2)'\mathrm{d}x + \int x^2(y^2)'\mathrm{d}x &= C && \text{(积分)}\\
(xy')^2 + \int x^2(y^2)'\mathrm{d}x &= C.
\end{aligned}
$$

现在，$y'=J'_0(x)=J_1(x)$. 因此

$$x^2J_1^2(x) + \int x^2(y^2)'\mathrm{d}x = C.$$

利用分部积分计算这个积分，取 $u=x^2$，$\mathrm{d}v=(y^2)'\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$，$v=y^2$，得到

$$\int x^2(y^2)'\mathrm{d}x = x^2y^2 - 2\int y^2x\mathrm{d}x.$$

联立最后两个方程，并利用 $y=J_0(x)$，我们得到

$$x^2J_1^2(x)+x^2J_0^2(x)=2\int J_0^2(x)x\mathrm{d}x+C,$$

这就等价于(20)式.（在(20)式中作变量代换 $t=\lambda x$.） ■

另外两个恒等式(21)和(22)可以类似证明(习题 11 和 12). 利用这些恒等式以及(17)式，很容易验证

$$\begin{aligned}&\int_0^1\phi_n^2(r)r\mathrm{d}r\\&=\int_0^1[I_0(k_n)J_0(k_nr)-J_0(k_n)I_0(k_nr)]^2r\mathrm{d}r\\&=[I_0(k_n)]^2[J_0(k_n)]^2+\frac{1}{2}[I_0(k_n)]^2[J_1(k_n)]^2-\frac{1}{2}[J_0(k_n)]^2[I_1(k_n)]^2.\end{aligned}\tag{23}$$

现在，我们可以来计算一个简单的特征函数展开式，后面考虑受迫振动问题时将要用到这个展开式.

例 1 特征函数展开式

利用(18)式中的特征函数将函数 $f(r)=1(0\leqslant r<1)$展开.

解 我们必须计算级数(15)中的系数 A_n. 我们已经在(23)式中计算过积分 $\int_0^1\phi_n(r)^2r\mathrm{d}r$. 现在,我们计算

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(r)\phi_n(r)r\,\mathrm{d}r&=\int_0^1[I_0(k_n)J_0(k_nr)-J_0(k_n)I_0(k_nr)]r\,\mathrm{d}r\\&=I_0(k_n)\int_0^1J_0(k_nr)r\,\mathrm{d}r-J_0(k_n)\int_0^1I_0(k_nr)r\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

382

右端第一个积分与我们在 4.8 节例 1 中计算的有点类似. 我们有

$$\int_0^1J_0(k_nr)r\,\mathrm{d}r=\frac{1}{k_n^2}\int_0^{k_n}J_0(r)r\,\mathrm{d}r=\frac{1}{k_n^2}J_1(r)r\Big|_0^{k_n}=\frac{1}{k_n}J_1(k_n).$$

利用恒等式 $\int rI_0(r)\mathrm{d}r=rI_1(r)+C$，类似计算得到

$$\int_0^1I_0(k_nr)r\,\mathrm{d}r=\frac{1}{k_n}I_1(k_n).$$

因此，

$$\int_0^1f(r)\phi_n(r)r\,\mathrm{d}r=\frac{1}{k_n}(J_1(k_n)I_0(k_n)-J_0(k_n)I_1(k_n)),$$

从而，合并(19)和(23)式，我们得到

$$\begin{aligned}A_n=&\frac{1}{k_n}(J_1(k_n)I_0(k_n)-J_0(k_n)I_1(k_n))/\\&\left([I_0(k_n)]^2[J_0(k_n)]^2+\frac{1}{2}[I_0(k_n)]^2[J_1(k_n)]^2-\frac{1}{2}[J_0(k_n)]^2[I_1(k_n)]^2\right).\end{aligned}$$

前六个系数的数值列在表 2 中.

表 2 广义傅里叶系数 A_n 的数值

n	1	2	3	4	5	6
A_n	0.281 2	−0.014 5	0.000 7	−0.000 03	0.0	0.0

特征函数展开由图 4 说明，其中我们分别画出特征函数展开式(15)的第三、五、十项部分和图像. ■

下面，我们考察与板振动有关的问题. 首先，我们考虑边值问题(1)～(3)的径向对称情形.

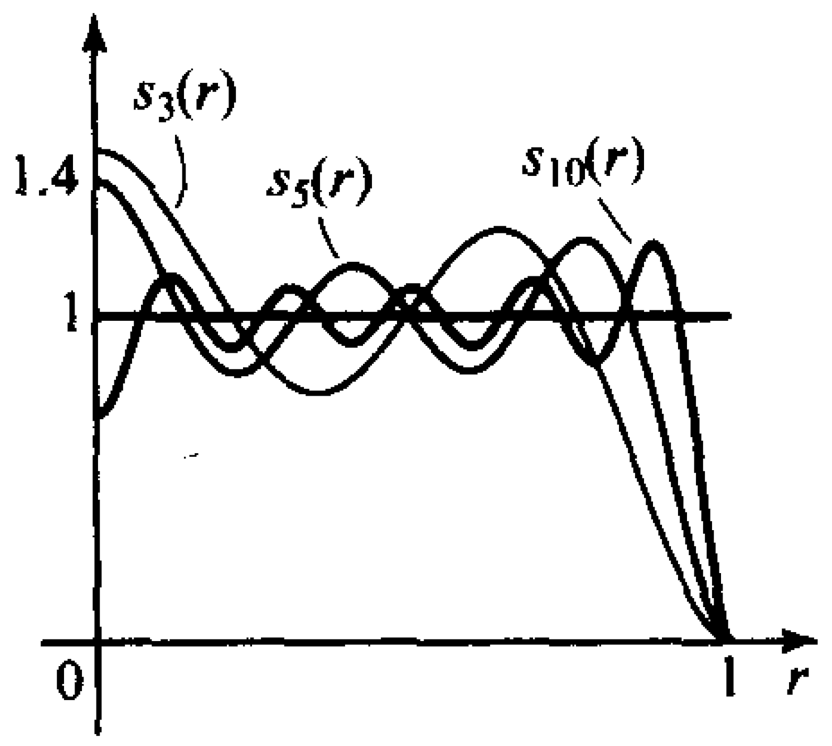


图 4　函数 $f(r)=1$，$0<r<1$ 的特征函数展开. 注意端点处的超出

例 2　板振动

求解方程

$$u_{tt}+c^2\nabla^4 u=0,\quad 0\leqslant r<1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad t>0,\tag{24}$$

满足边界条件

$$u(1,\theta,t)=0 \text{ 和 } u_r(1,\theta,t)=0$$

和径向对称初始条件

$$u(r,\theta,0)=f(r),\quad u_t(r,\theta,0)=0,\quad 0\leqslant r<a,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

解　我们给出每步的证明概要.

步骤 1：由于数据是径向对称的，所以利用径向对称解，即 $u(r,\theta,t)=u(r,t)$，它不依赖于 θ.

383

步骤 2：假设解具有定理 1 中函数的特征函数展开式. 由于解不依赖于 θ，所以我们只需用零阶贝塞尔函数. 因此，由(15)式，我们令

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)[I_0(k_n)J_0(k_nr)-J_0(k_n)I_0(k_nr)]=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\phi_n(r),\tag{25}$$

这里，不像(15)式，我们允许系数 A_n 是 t 的函数. 注意，由于 $\phi_n(1)=0$ 和 $\phi'_n(1)=0$，级数(25)式满足边界条件. 现在到了该方法的关键部分.

步骤 3：将这个解代入(24)式，并利用事实 $\nabla^4\phi_n=k_n^4\phi_n$. 假设可以交换所有求导和求和的顺序，我们有

$$\nabla^4 u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\,\nabla^4\phi_n(r)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)k_n^4\phi_n(r);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A_n(t)\phi_n(r)=\sum_{n=1}^{\infty}A''_n(t)\phi_n(r);$$

$$u_{tt}+c^2\nabla^4 u=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(A''_n(t)+k_n^4c^2A_n(t))\phi_n(r)=0.$$

这个级数恒等于零的唯一可能就是：所有的系数都等于零. 因此，对所有 n，

$$A''_n(t)+k_n^4c^2A_n(t)=0,$$

从而，

$$A_n(t)=\alpha_n\cos(k_n^2ct)+\beta_n\sin(k_n^2ct).$$

所以，我们得到形如

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos(k_n^2ct)+\beta_n\sin(k_n^2ct))\phi_n(r)$$

的解.

步骤 4：利用初始条件确定 α_n 和 β_n. 首先，我们考虑初始速度 $u_t(r,\ 0)=0$，这表示

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 c\beta_n \phi_n(r) = 0,$$

从而对所有 n，$\beta_n=0$. 下面，初始条件 $u(r,\ 0)=f(r)$蕴涵着

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n(r).$$

因此，α_n 就是 f 的第 n 项广义傅里叶系数，其值由(19)式给出. 我们得出结论：问题的解是

384

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(k_n^2 ct)[I_0(k_n)J_0(k_n r) - J_0(k_n)I_0(k_n r)],$$

这里，如我们所述，α_n 由(19)式计算. ■

要解决更一般性的振动问题，只需将上述求解过程作适当修改. 更一般形式的解是用(14)式右端的二重特征级数展开式来表达的，其中允许系数 A_{mn} 和 B_{mn} 是 t 的函数.

下面，我们考虑方程(4)的径向对称情形，其中外力仅依赖于时间，并随时间而衰减.

例 3 板的受迫振动

求解方程

$$u_{tt} + c^2 \nabla^4 u = e^{-t}, \quad 0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, t > 0, \tag{26}$$

满足边界条件

$$u(1,\theta,t) = 0 \quad 和 \quad u_r(1,\theta,t) = 0$$

以及径向对称初始条件

$$u(r,\theta,0) = 0, \quad u_t(r,\theta,0) = 0, \quad 0 \leqslant r < a, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

解 利用径向对称解，并允许系数是 t 的函数：

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)[I_0(k_n)J_0(k_n r) - J_0(k_n)I_0(k_n r)] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(r). \tag{27}$$

就像上个例题，将这个解代入方程(26)式，并利用事实$\nabla^4 \phi_n = k_n^4 \phi_n$，则

$$u_{tt} + c^2 \nabla^4 u = e^{-t} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a''_n(t) + k_n^4 c^2)\phi_n(r) = e^{-t}.$$

下面，我们必须将上式右端看成关于变量 r 的特征函数展开式. 事实上，将之看成 $e^{-t}\cdot 1$，而将常值函数 1 用 $\phi_n(r)$展开成级数. 这就是我们在例 1 中所计算得到的展开形式. 因此，

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a''_n(t) + k_n^4 c^2 a_n(t))\phi_n(r) = e^{-t} \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(r)}^{=1} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-t} \phi_n(r),$$

其中，A_n 就是例 1 中的级数展开式的(复杂)系数. 让两边系数相等，我们得到 $a_n(t)$的微分方程：

385

$$a''_n(t) + k_n^4 c^2 a_n(t) = A_n e^{-t}. \tag{28}$$

这个方程的一个特解 $b_n(t)$可以通过令 $b_n(t)=Ce^{-t}$来求得. 代入方程，我们有

$$Ce^{-t} + k_n^4 c^2 Ce^{-t} = A_n e^{-t} \Rightarrow C = \frac{A_n}{1 + k_n^4 c^2}.$$

齐次方程 $a''_n(t)+k_n^4c^2a_n(t)=0$ 的通解是 $c_n(t)=\alpha_n\cos k_n^2ct+\beta_n\sin k_n^2ct$. 因此，(28)式的通解是

$$a_n(t)=\alpha_n\cos k_n^2ct+\beta_n\sin k_n^2ct+\frac{A_n}{1+k_n^4c^2}e^{-t}.$$

现在，边值问题的解具有形式

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\cos k_n^2ct+\beta_n\sin k_n^2ct+\frac{A_n}{1+k_n^4c^2}e^{-t}\right]\phi_n(r).$$

应用初始条件，$u(r,0)=0$，我们得到

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n+\frac{A_n}{1+k_n^4c^2}\right]\phi_n(r),$$

因而，$\alpha_n=-\frac{A_n}{1+k_n{}^4c^2}$. 再应用初始条件，$u_t(r,0)=0$，我们得到

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}\left[k_n^2c\beta_n-\frac{A_n}{1+k_n^4c^2}\right]\phi_n(r),$$

所以，$\beta_n=\frac{A_n}{k_n{}^2c(1+k_n{}^4c^2)}$，这就导出我们的解

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\cos k_n^2ct+\frac{1}{k_n^2c}\sin k_n^2ct+e^{-t}\right]\frac{A_n}{1+k_n^4c^2}\phi_n(r).$$

不难验证这是一个解. ■

习题 6.7

在习题 1～10 中，我们列出了修正贝塞尔函数的一些性质. 将相应于贝塞尔函数性质的证明作适当修改，证明每条性质. 或者利用贝塞尔函数相应的性质，以及 4.7 节习题 29 中 I_p 的定义：$I_p(x)=\frac{1}{i^p}J_p(ix)$.

1. $[x^pI_p(x)]'=x^pI_{p-1}$.
2. $[x^{-p}I_p(x)]'=-x^{-p}I_{p+1}$.
3. $xI'_p(x)=xI_{p-1}(x)-pI_p(x)$.
4. $xI'_p(x)=xI_{p+1}(x)+pI_p(x)$.
5. $2I'_p(x)=I_{p-1}(x)+I_{p+1}(x)$.
6. $2pI'_p(x)=x[I_{p-1}(x)-I_{p+1}(x)]$.
7. $I_{-p}(x)=I_p(x)$.
8. $\frac{d}{dx}I_0(x)=I_1(x)$.
9. $\int x^{p+1}I_p(x)dx=x^{p+1}I_{p+1}(x)+C$.
10. $\int x^{-p+1}I_p(x)dx=-x^{-p+1}I_{p-1}(x)+C$.

386

11. 适当修改(20)式的证明以证明(21)式.（回顾：零阶修正贝塞尔函数的微分方程为 $x^2y''+xy'-x^2y=0$.）
12. **专题问题：(22)式的证明.** 验证下面(22)证明的每一步. 令 $y_1=J_0(x)$和 $y_2=I_0(x)$，则

$$x(y_1+y_2)''+(y_1+y_2)'+x(y_1-y_2)=0,$$
$$[x(y_1+y_2)']'+x(y_1-y_2)=0,$$

$$[[x(y_1+y_2)']^2]'+2x^2(y_1-y_2)(y_1'-y_2')=0,$$

$$[x(y_1+y_2)']^2=-2\int x^2(y_1-y_2)(y_1'-y_2')\mathrm{d}x.$$

利用 $y'_1=-J_1(x)$，$y'_2=I_1(x)$，并用分部积分求出积分值，从而完成(22)式的证明．同时将用到(20)和(21)式．

13. 利用(20)～(22)式证明(23)式．
14. 利用特征函数(18)将函数 $f(r)=1-r^2$，$0\leqslant r<1$ 展开．
15. 求解方程(24)，满足边界条件

$$u(1,\theta,t)=0 \quad 和 \quad u_r(1,\theta,t)=0$$

以及径向对称初始条件

$$u(r,\theta,0)=0,\quad u_t(r,\theta,0)=g(r),\quad 0\leqslant r<a,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

16. 求解方程(24)，满足边界条件

$$u(1,\theta,t)=0 \quad 和 \quad u_r(1,\theta,t)=0$$

以及径向对称初始条件

$$u(r,\theta,0)=f(r),\quad u_t(r,\theta,0)=g(r),\quad 0\leqslant r<a,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

17. 求解方程(26)，满足边界条件

$$u(1,\theta,t)=0 \quad 和 \quad u_r(1,\theta,t)=0$$

以及径向对称初始条件

$$u(r,\theta,0)=f(r),\quad u_t(r,\theta,0)=0,\quad 0\leqslant r<a,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

18. 求解方程

$$u_{tt}+c^2\nabla^4 u=1-r^2,\quad 0\leqslant r<1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,t>0,$$

满足边界条件

$$u(1,\theta,t)=0 \quad 和 \quad u_r(1,\theta,t)=0$$

以及径向对称初始条件

387

$$u(r,\theta,0)=0,\quad u_t(r,\theta,0)=0,\quad 0\leqslant r<a,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

19. 令 $u=u(r,\theta,t)$，求解方程

$$u_t+c^2\nabla^4 u=0,\quad 0\leqslant r<1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,t>0,$$

带有边界条件

$$u(1,\theta,t)=0 \quad 和 \quad u_r(1,\theta,t)=0$$

以及径向对称初始条件

$$u(r,\theta,0)=100,\quad 0\leqslant r<a,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

20. 令 $u=u(r,\theta)$，求解方程

$$\nabla^4 u=100,\quad 0\leqslant r<1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

满足边界条件

$$u(1,\theta,t)=0 \quad 和 \quad u_r(1,\theta,t)=0.$$

21. **专题问题：$I_0(x)$的积分表示．** 回顾4.7节习题29中 I_0 的定义：$I_0(x)=J_0(\mathrm{i}x)$，以及积分表示

$$J_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin t}\mathrm{d}t$$

(见4.9节定理1及其证明)．

(a)虽然我们还没有证明 J_0 的积分表示对复变量也成立，但是将其中的 x 替换成 ix，得到

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x\sin t}\,dt.$$

(b)通过验证这个积分所定义的函数满足零阶修正贝塞尔方程：$x^2y''+xy'+x^2y=0$，来验证上述公式的正确性.

22. **专题问题：$I_0(x)$的渐近性质.** 从 $J_0(x)$的渐近公式(4.9 节定理 3)开始，并利用恒等式 $\cos u=\frac{e^{iu}+e^{-iu}}{2}$，试证：当 $x\to\infty$时，

$$I_0(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^x.$$

388

第7章 傅里叶变换及其应用

推广并不是为了获得徒劳无功的满足，而是为了解决已有问题，这始终是卓有成效的推广.

——亨利·勒贝格

综述 自本章开始，我们将转入偏微分方程新领域的学习. 虽然本章大部分是自封的，但是它的思想是建立在傅里叶级数理论及其在第3章的热传导方程和波动方程应用之上的. 前面我们研究的问题是在有限区间或区域上，这里我们将考虑无界区域问题，如直线、半直线、平面以及半平面.

导读 7.1节给出了将在7.2节引入和研究的傅里叶变换的动机；7.3节介绍了傅里叶变换法，并运用它来求解一些标准的偏微分方程，该节的思想在本章其余部分以及下一章中都有用. 利用傅里叶变换法，我们在7.4节和7.5节说明如何将无穷区域的边值问题的解表达成涉及边界或初始数据的卷积. 7.6节和7.7节讨论傅里叶正弦、余弦变换及其在半无穷区域中的应用. 这与7.3节是平行的. 7.8节引入广义函数；在7.9节和7.10节中，我们研究格林函数及其应用. 7.8～7.10节是高级专题，在偏微分方程基础课程中，可以省略它们而不影响连贯性.

在前面章节中，利用傅里叶级数和正交展开法作为工具，我们求解了有界区域中的边值问题，如区间、矩形、圆盘以及球. 正如你所想象，某些物理现象的建模自然地出现无界区域上的边值问题. 例如，为描述一条很长的绝热线的温度分布，可以假设线的长度为无穷，这就导致一个在无穷直线上的边值问题. 为求解这类新问题，我们通过研究傅里叶变换将傅里叶级数概念进行推广. 就像傅里叶级数，我们将要介绍的应用既广泛又丰富. 虽然本章的方法主要针对傅里叶变换，但是它们对其他变换也是适合的，比如，傅里叶余弦变换和正弦变换(7.6节和7.7节)、拉普拉斯变换以及汉克尔变换(第8章).

除了建立了前面章节的思想之外，本章后半部分(7.8～7.10节)引入了新的高级专题，如广义函数、格林函数以及像方法. 这些专题在理论和实践中都有重要的应用. 比如，格林函数可以用来推导7.5节的泊松积分公式，该公式将边值问题的解用初始和边界数据来表达. 在第12章，利用复分析，我们将继续研究格林函数.

389

7.1 傅里叶积分表示

为便于我们理解本节的论题，让我们回顾2.3节的傅里叶级数表示定理. 对给定 $2p$-周期函数 f，我们有

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x+b_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right), \tag{1}$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos\frac{n\pi}{p}t\,\mathrm{d}t,\quad b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\sin\frac{n\pi}{p}t\,\mathrm{d}t.$$

现在，假设 f 是定义在整个实直线上的，但是不是周期的. 可以将 f 表示成一个傅里叶级数吗？可以证明，此时将不再能得到傅里叶级数表示，但是却可以得到一个傅里叶积分表示. 其答案就是下面这个重要的定理.

定理 1(傅里叶积分表示) 假设 f 在任意一个有限区间上分段光滑，且 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$，则 f 具有如下**傅里叶积分表示**：

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x]\,\mathrm{d}\omega \quad (-\infty < x < \infty), \tag{2}$$

其中，对所有 $\omega \geqslant 0$，有

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t;\quad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

在 f 的连续点 x 处，(2)式中的积分收敛到 $f(x)$；否则，收敛到 $\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

注意傅里叶积分(2)与傅里叶级数(1)之间的相似性. (1)式中的求和换成(2)式中的求积分，而傅里叶系数中从 $-p$ 到 p 的积分换成(3)式中的从 $-\infty$ 到 ∞ 的积分. 同样，在(3)式中，"傅里叶系数"是在连续范围 $\omega \geqslant 0$ 上计算的，而周期函数的傅里叶系数是在离散范围 $n=0$，1，2，…上计算的.

与傅里叶级数类似，为使定理 1 成立，我们在 f 上加了一些充分条件，包括条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty,$$

390

这可以表达为 f **在整个实直线上可积**. 这个条件也保证了定义(3)式中 $A(\omega)$ 和 $B(\omega)$ 的广义积分的存在性.

我们将略去定理 1 的证明，它涉及类似于傅里叶级数表示定理的证明思想(参见[1]). 事实上，当周期趋于无穷时，傅里叶级数表示定理的级数(1)就转化为一个积分，我们可以如下推导.

假设 f 在实直线上是一个可积函数，将 f 限制到一个有限区间 $(-p,\ p)$ 上. 在 $(-p,\ p)$ 上取部分 f，然后周期延拓出去. 这个周期延拓在 $(-p,\ p)$ 上与 f 一致，并且具有形如(1)的傅里叶级数，对 x 在 $(-p,\ p)$ 内，傅里叶级数表示了 $f(x)$. 现在的问题是：当 $p\to\infty$ 时，会发生什么？为回答这个问题，当 $p\to\infty$ 时，让我们来考察傅里叶系数. 由于 f 可积，所以当 $p\to\infty$ 时，$a_0\to 0$. 同样，可以得到 a_n 和 b_n 与 $A(\omega)$ 和 $B(\omega)$ 之间的联系. f 的可积性蕴涵着(3)式中的积分可以用在(很大)有限区间 $(-p,\ p)$ 上的积分来逼近，其误差仅是积分的尾项，可以取任意小. 因此，对充分大的 p，我们有

$$a_n \approx \frac{1}{p}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\frac{n\pi}{p}t\,\mathrm{d}t = A(\omega_n)\Delta\omega \qquad (\text{由(3)}),$$

其中 $\omega_n = (n\pi)/p$，以及 $\Delta\omega = \dfrac{\pi}{p}$. 类似地，$b_n \approx B(\omega_n)\Delta\omega$. 将这些值代入(1)式，对充分大的 p，有

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty}(A(\omega_n)\cos\omega_n x + B(\omega_n)\sin\omega_n x)\Delta\omega. \tag{4}$$

利用这些记号，可以方便地知道(4)式中的和式就是一个黎曼和，它表示(2)式中的被积函数在等分 ω_n 情形的积分和，分割长度为 $\Delta\omega$ 就是两个相邻 ω_n 之间的距离. (4)式中 n 趋于无穷这个事实说明这个黎曼和不是在一个有限区间上(不管 p 如何)，而是构成整个非负 ω 轴. 当 $p\to\infty$ 时，$\Delta\omega\to 0$，并且这个黎曼和收敛到由(2)式给出的关于 ω 的积分.

例1 傅里叶积分表示

求出函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{如果}|x|\leqslant 1,\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

的傅里叶积分表示.

解 由(3)式，

391

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos\omega t\,dt=\left[\frac{\sin\omega t}{\pi\omega}\right]_{-1}^{1}=\frac{2\sin\omega}{\pi\omega}.$$

(严格地说，我们应该单独处理 $\omega=0$ 情形. 但是，可以验证，我们得到的 $A(\omega)$ 公式在极限 $\omega\to\infty$ 意义下也是对的.)由于 $f(x)$ 是偶的，所以 $B(\omega)=0$. 对 $|x|\neq 1$，函数是连续的，定理1说明

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}d\omega.$$

对 $x=\pm 1$(f 的间断点)，定理1得到上面的积分值为1/2. 因此，我们得到 f 的傅里叶积分表示

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}d\omega=\begin{cases}1 & \text{若 } |x|<1,\\ 1/2 & \text{若 } |x|=1,\\ 0 & \text{若 } |x|>1.\end{cases}$$

■

在例1中，我们利用 f 是偶的，推出对所有 ω，$B(\omega)=0$. 类似地，如果 f 是奇的，则对所有 ω，$A(\omega)=0$. 这个观察可以简化奇偶函数傅里叶积分表示的计算.

定理1可以用来计算一些广义积分的值. 例如，在例1的积分表示中，令 $x=0$，得到如下重要积分：

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}, \tag{5}$$

这称为**狄利克雷积分**，它是以德国数学家彼得·古斯塔夫·勒热纳·狄利克雷(1805—1859)而命名的.

例2 用傅里叶积分来计算积分

试证：

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi\omega}{2}}{1-\omega^2}\cos\omega x\,d\omega=\begin{cases}\cos x & \text{若 } |x|<\pi/2,\\ 0 & \text{若 } |x|>\pi/2.\end{cases}$$

解　令 $f(x)$ 表示上面等式右端所定义的函数，如图 1 所示．它是偶的，且在区间$[-\pi/2, \pi/2]$之外为零．所以对所有 $\omega\geqslant 0$，$B(\omega)=0$；而

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\cos\omega x\,\mathrm{d}x && \text{由偶性}\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}[\cos(1+\omega)x+\cos(1-\omega)x]\mathrm{d}x. && \text{三角恒等式}\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin[(1+\omega)\pi/2]}{1+\omega}+\frac{\sin[(1-\omega)\pi/2]}{1-\omega}\right] && (\text{对 }\omega\neq 1)\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(\omega\pi/2)}{1+\omega}+\frac{\cos(\omega\pi/2)}{1-\omega}\right]=\frac{2\cos(\omega\pi/2)}{\pi(1-\omega^2)}.
\end{aligned}$$

392

$\omega=1$ 情形应该单独处理，可以得到 $A(1)=1/2$．（验证！）如图 2 所示，$A(\omega)$的图像在 $\omega=1$ 处连续．事实上，可以验证$\lim\limits_{\omega\to 1}A(\omega)=A(1)=1/2$．现在，利用(2)式，我们得到

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\omega\pi/2)}{1-\omega^2}\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega.$$

以其定义公式替代 $f(x)$，我们得到所要证的等式．

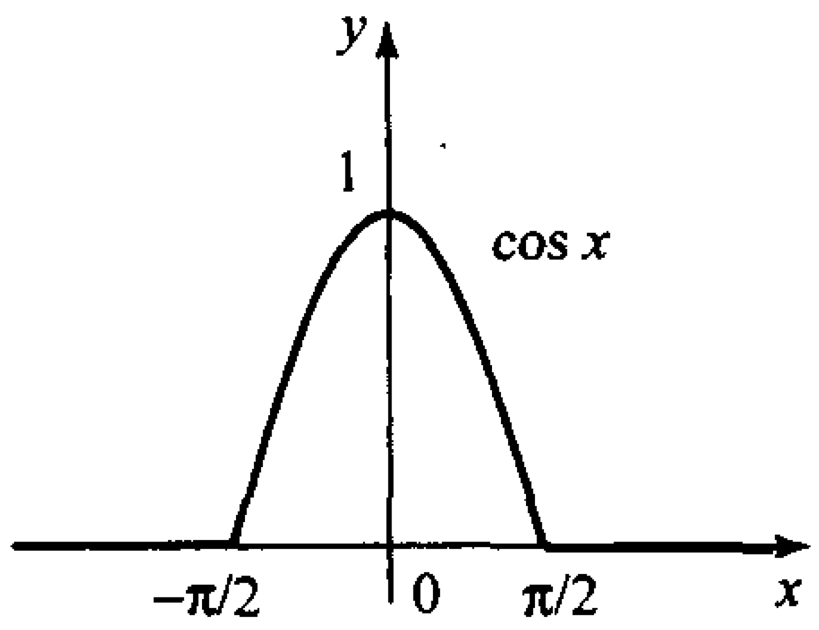


图 1　例 2 的 $f(x)$

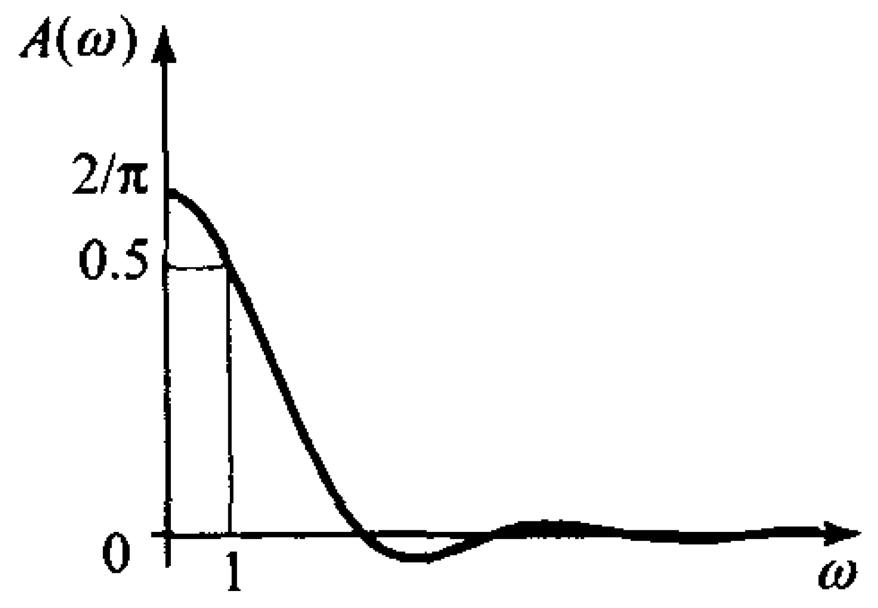


图 2　$A(\omega)$是连续的

■

部分傅里叶积分和吉布斯现象

类似于傅里叶级数的部分和，我们定义 f 的部分傅里叶积分为

$$S_\nu(x)=\int_0^{\nu}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\mathrm{d}\omega\qquad(\text{对 }\nu>0),\tag{6}$$

其中，$A(\omega)$和 $B(\omega)$由(3)式给出．由这个记号，定理 1 说明

$$\lim_{\nu\to\infty}S_\nu(x)=\frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

就像傅里叶级数，在间断点处，傅里叶积分表现出吉布斯现象．为说明这个现象，我们引入**正弦积分函数**

$$\mathrm{Si}(x)=\int_0^{x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\qquad(-\infty<x<\infty).\tag{7}$$

虽然 Si(x)不能用初等函数表示，但是可以利用幂级数展开式来计算其数值值（见习题 23(c)）．由于函数 Si(x)经常出现，所以它的值已经列成表格，在许多计算机系统中，它作为标准函数出现．其图像如图 3 所示．由(5)式，我们有

$$\lim_{x\to\infty}\mathrm{Si}(x)=\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.\tag{8}$$

393

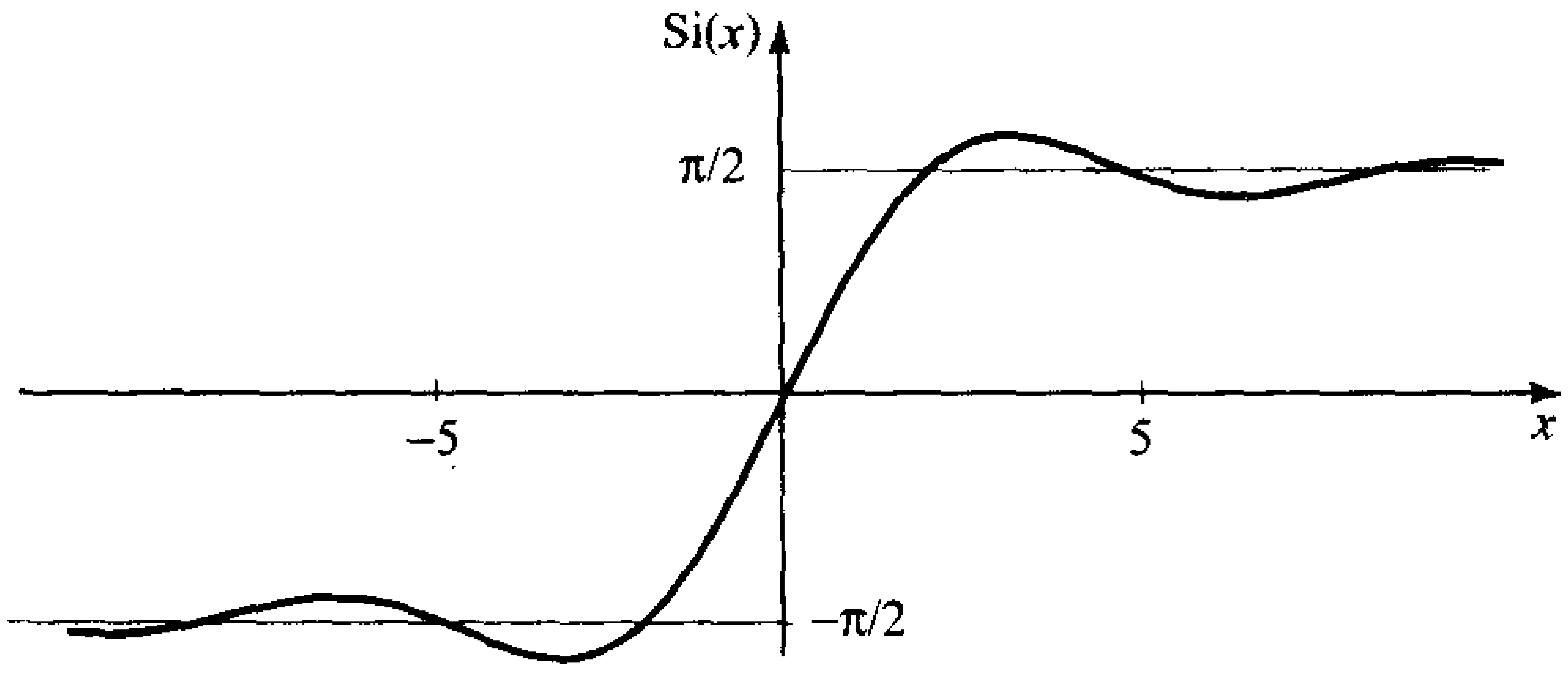


图 3　Si(x)的图像

例 3　部分傅里叶积分的吉布斯现象

(a)试证：例 1 中函数的部分傅里叶积分可以写成

$$S_\nu(x) = \frac{1}{\pi}[\mathrm{Si}(\nu(1+x)) + \mathrm{Si}(\nu(1-x))].$$

(b)为说明函数由其傅里叶积分表示，画出几个部分傅里叶积分的图像，并讨论它们在点 $x=\pm1$ 附近的性态.

解　(a)由例 1 和(6)式，我们有

$$\begin{aligned} S_\nu(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\nu \frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\nu \frac{\sin\omega(1+x)}{\omega}\mathrm{d}\omega + \frac{1}{\pi}\int_0^\nu \frac{\sin\omega(1-x)}{\omega}\mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

在第一次积分中令 $u=\omega(1+x)$，及在第二次积分中 $u=\omega(1-x)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\nu(1+x)} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u + \int_0^{\nu(1-x)} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right] \\ &= \frac{1}{\pi}[\mathrm{Si}(\nu(1+x)) + \mathrm{Si}(\nu(1-x))], \quad 由(7). \end{aligned}$$

(b)在图 4 中，利用正弦积分函数以及(a)给出的公式，我们画出了 $S_\nu(x)$的图像，$\nu=1$，4，7，10. 观察到：部分傅里叶积分以类似于傅里叶级数逼近周期函数的方式逼近函数. 特别地，注意在 f 的间断点处的吉布斯现象，此处部分积分值超出了它们的极限值.

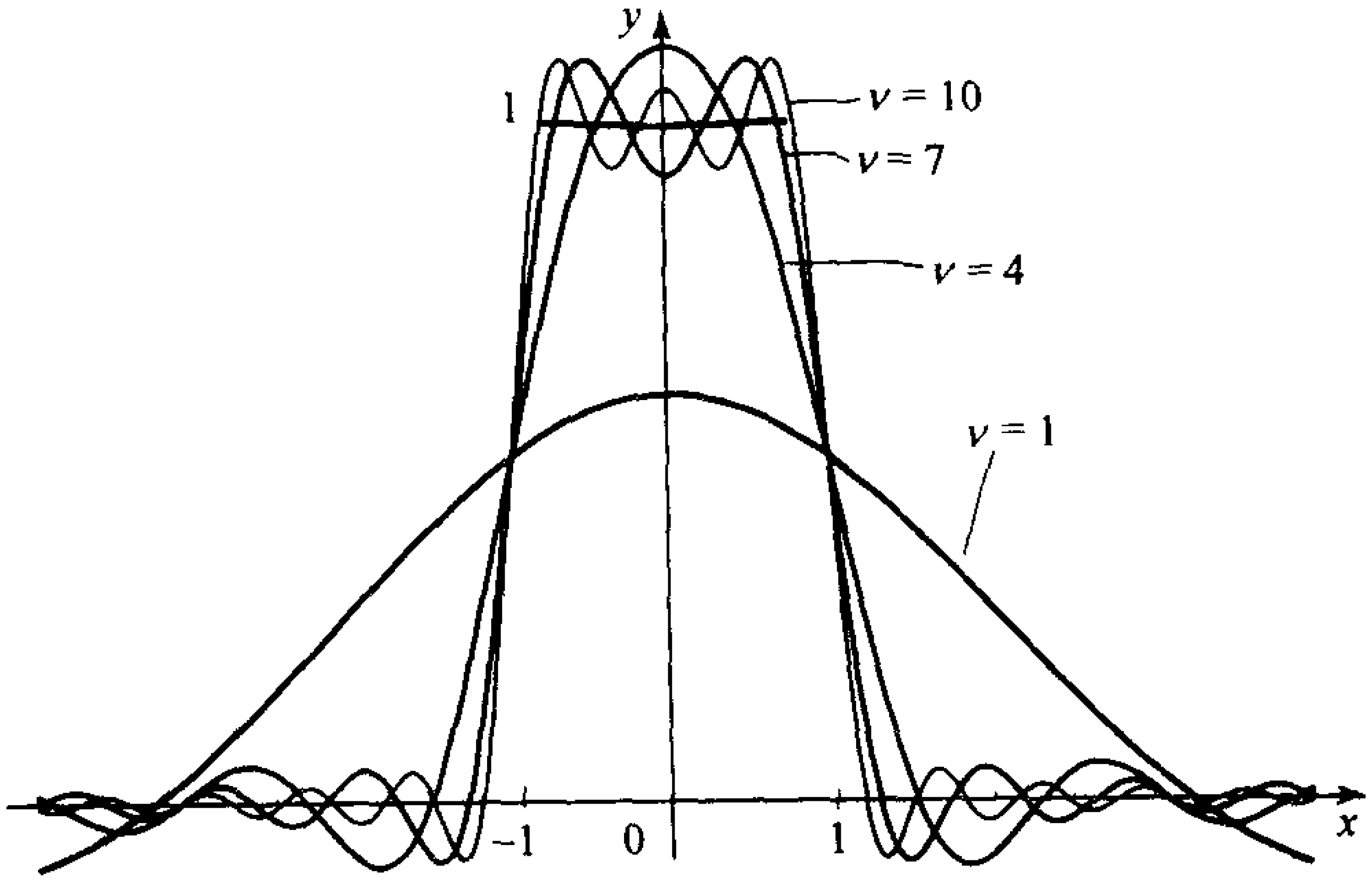


图 4　部分傅里叶积分逼近与吉布斯现象 ■

习题 7.1

在习题 1～12 中，求出给定函数的傅里叶积分表示.

1. $f(x)=\begin{cases}1 & 如果 -a<x<a,\\ 0 & 其他,\end{cases}$

其中 $a>0$.

2. $f(x)=\begin{cases}-1 & 如果 -1<x<0,\\ 1 & 如果\ 0<x<1,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}1-\cos x & 如果 -\pi/2<x<\pi/2,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}1-|x| & 如果 -1<x<1,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

5. $f(x)=e^{-|x|}$.

6. $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & 如果 -1<x<1,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases}1 & 如果\ 0<x<1,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases}0 & 如果 -1<x<1,\\ 1 & 如果\ 1<|x|<2,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases}x & 如果 -1<x<1,\\ 2-x & 如果\ 1<x<2,\\ -2-x & 如果 -2<x<-1,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases}x & 如果 -1<x<1,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases}\sin x & 如果\ 0<x<\pi,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & 如果\ x>1,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

13. (a)利用例 1，试证：

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cos\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{4}.$$

(b)利用分部积分和(a)，得到

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}.$$

14. 利用恒等式 $\sin^2\omega+\cos^2\omega=1$ 和习题 13(b)，得到

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 \omega}{\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{4}.$$

395

［提示：$\sin^2\omega = \sin^4\omega + \cos^2\omega\sin^2\omega = \sin^4\omega + \frac{1}{4}\sin^2 2\omega$.］

在习题 15～18 中，建立给定恒等式．

15. $\int_0^{\infty} \frac{\sin\omega\cos 2\omega}{\omega} d\omega = 0$.［提示：例 1.］

16. $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$.［提示：分部积分和利用例 1.］

17. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x\omega + \omega\sin x\omega}{1+\omega^2} d\omega = \begin{cases} 0 & 若\ x < 0, \\ \pi/2 & 若\ x = 0, \\ \pi e^{-x} & 若\ x > 0. \end{cases}$

18. $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\pi\omega}{1-\omega^2} \sin\omega x\, d\omega = \begin{cases} \sin x & 若\ |x| \leqslant \pi, \\ 0 & 若\ |x| > \pi. \end{cases}$

19. 令 $a>0$，推导公式

$$e^{-ax} = \frac{2a}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos\omega x}{a^2+\omega^2} d\omega \qquad (x \geqslant 0).$$

［提示：$e^{-a|x|}$ 的傅里叶积分表示.］

20. 定义**符号函数**，$\mathrm{sgn}(x)$为

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & 若\ x > 0, \\ 0 & 若\ x = 0, \\ -1 & 若\ x < 0. \end{cases}$$

建立恒等式

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{t} dt = \mathrm{sgn}(x).$$

［提示：作变量代换 $\omega = xt$.］

在习题 21～22 中，利用符号函数及其平移来表示给定函数．

21. $f(x)$同例 1.

22. $f(x) = \begin{cases} 2 & 若 -1<x<1, \\ 1 & 若\ 1<|x|<2, \\ 0 & 其他. \end{cases}$

专题问题：正弦积分．完成习题 23 和 24，并完成习题 25～28 中任意一个．

23. **正弦积分的性质**．利用(7)式建立如下性质：

(a) $\mathrm{Si}(x)$是奇函数.

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{Si}(x) = -\frac{\pi}{2}$.

396

(c) $\mathrm{Si}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$.［提示：$\frac{\sin t}{t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$.］

24. 考虑例 1 中的函数，以及我们在例 3(a)中所求出的部分傅里叶积分．利用正弦积分函数的性质，试证：当 $x \neq \pm 1$ 时，部分傅里叶积分收敛到 $f(x)$；如果 $x=\pm 1$，收敛到$\frac{1}{2}$．［提示：应该分别考虑情形 $x<-1$，$-1<x<1$，$x>1$．习题 23(b)和(8)式是有用的.］注意到，在本题，你显式地验证了定理 1 的结论．

在习题 25～28 中，用正弦积分来表示给定的定积分，取 $0 \leqslant a < b$.

25. $\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx$.

26. $\int_a^b \frac{\sin x^n}{x} dx$.［提示：令 $u = x^n$.］

27. $\int_a^b \frac{1-\cos x}{x^2} dx$.

28. $\int_a^b \frac{\sin x \cos x}{x} dx$.

［提示：分部积分.］

29. 利用正弦积分函数，求出习题 25 和 26 中积分的数值值，取 $a=0$，$b=\pi$.

30. 在(a)和(b)中，函数 f 的部分积分 $S_\nu(x)$ 已经给出，对 $\nu=5$，10，15，20，…，画出 $S_\nu(x)$ 的图像，并利用图像确定 f.

(a) $S_\nu(x)=\frac{1}{\pi}[\mathrm{Si}(\nu(2-x))+\mathrm{Si}(\nu(2+x))]$.

(b) $S_\nu(x)=\frac{1}{\pi}[\mathrm{Si}(\nu(1-x))+\mathrm{Si}(\nu x)+\mathrm{Si}(\nu(3-x))+\mathrm{Si}(\nu(-2+x))]$.

31. **部分傅里叶积分逼近.** 考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{若 } a<x<b, \\ 0 & \text{否则.}\end{cases}$$

(a)试证：f 的傅里叶积分表示为

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega(b-x)+\sin\omega(-a+x)}{\omega} d\omega.$$

(b)试证：f 的部分傅里叶积分为

$$I_\nu(x)=\frac{1}{\pi}[\mathrm{Si}(\nu(b-x))+\mathrm{Si}(\nu(-a+x))].$$

(c)取 $a=1$ 和 $b=3$，对 $\nu=5$，10，15，20，25，画出部分傅里叶积分的图像. 描述此题中的吉布斯现象，给出部分积分超出的近似值，以及部分积分的极限值.

对所有 $x>0$，**余弦积分函数**定义为

$$\mathrm{Ci}(x)=-\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt.$$

在下面习题中：

(a)用余弦积分表示给定积分.

(b)利用 $\mathrm{Ci}(x)$ 的数值值来逼近积分.

32. $\int_1^2 \frac{\cos t}{t} dt$.

33. $\int_0^1 \cos(e^x) dx$.

397

7.2 傅里叶变换

我们将利用复指数函数将 7.1 节的傅里叶积分表示写成复形式. 这个表示包含了一对重要的变换：傅里叶变换和傅里叶逆变换. 正如将在本节所看到的，变换对这个概念便于陈述傅里叶变换的基本运算性质，这在求解边值问题时非常有用.

考虑一个连续分段光滑可积函数 f，由傅里叶积分表示，我们有

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)(\cos\omega t\cos\omega x+\sin\omega t\sin\omega x)\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega$$

$$(\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega(x-t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega$$

$$\left(\cos u=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u})\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-t)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x-t)})\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x-t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega.$$

如果在第二项中将 ω 换成 $-\omega$，ω 的上下限改为从 $-\infty$ 到 0，将两个积分相加，我们得到

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\overbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t}^{\hat{f}(\omega)}\mathrm{d}\omega.$$

这就是**傅里叶积分表示的复形式**，由此得到如下重要的变换对：

傅里叶变换

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\qquad(-\infty<\omega<\infty)\tag{1}$$

以及

傅里叶逆变换

398

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\hat{f}(\omega)\mathrm{d}\omega\qquad(-\infty<x<\infty).\tag{2}$$

傅里叶变换还有其他形式的写法，比如，我们可以选取 $\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$，则傅里叶逆变换变为 $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\hat{f}(\omega)\mathrm{d}\omega$. 在 $\hat{f}$ 的定义中，我们用 x 作为积分变量，而不是 t. 符号 $\mathcal{F}(f)(\omega)$ 和 $\mathcal{F}^{-1}(f)(x)$ 也是分别用来表示傅里叶变换和逆变换的. 有时，为了确定起见，我们将 $\mathcal{F}(f)(\omega)$ 写成 $\mathcal{F}(f(x))(\omega)$. 由 7.1 节的定理 1，如果 f 在 x 点处不连续，则 (2) 式左端应该改为 $(f(x+)+f(x-))/2$. 傅里叶逆变换中的积分作为双侧广义积分不一定存在，一般说来，这个积分应该作为柯西主值来计算：$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\hat{f}(\omega)\mathrm{d}\omega$（见[1]，11.1 节）.

在 (1) 式中令 $\omega=0$，我们得到

$$\boxed{\hat{f}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x.}$$

因此，傅里叶变换在 $\omega=0$ 处的值就等于 $f(x)$ 的图像与 x 轴之间的带符号面积，再乘以因子 $1/\sqrt{2\pi}$.

例 1 傅里叶变换

(a)求出如下给出的、图 1 所示函数的傅里叶变换：

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{如果 } |x|<a,\\ 0 & \text{如果 } |x|>a.\end{cases}$$

$\hat{f}(0)$ 是多少？

(b)用傅里叶逆变换表示 f.

解 (a)对 $\omega\neq 0$，我们有

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}e^{-i\omega x}dx$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}i\omega}e^{-i\omega x}\Big|_{-a}^{a}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin a\omega}{\omega}.$$

对 $\omega=0$，我们有 $\hat{f}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}dx=a\sqrt{2/\pi}$. 由于

$$\lim_{\omega\to 0}\hat{f}(\omega)=\lim_{\omega\to 0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin a\omega}{\omega}=a\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\hat{f}(0),$$

因此，$\hat{f}(\omega)$ 在 0 点连续(图 2)，所以我们可以写为

$$\hat{f}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin a\omega}{\omega}\quad 对所有 \omega.$$

399

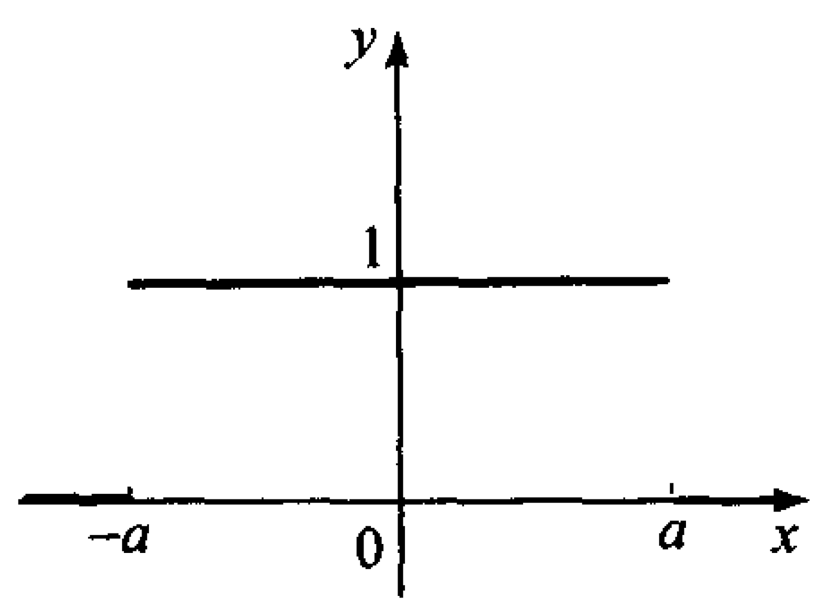


图 1 例 1 中 f 的图像

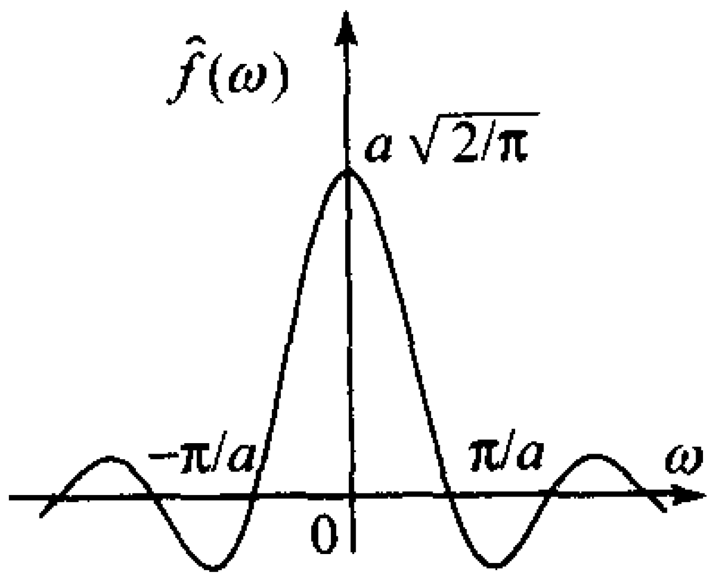


图 2 例 1 中 $\hat{f}$ 的图像

(b)为将 f 表示成傅里叶逆变换，我们利用(2)式得到

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin a\omega}{\omega}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\frac{\sin a\omega}{\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\cos\omega x-i\sin\omega x)\frac{\sin a\omega}{\omega}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega x\sin a\omega}{\omega}d\omega,$$

因为 $\sin\omega x\frac{\sin a\omega}{\omega}$ 是 ω 的奇函数，所以其积分为零.

不出所料，当 $a=1$ 时，这个表示与 7.1 节例 1 所得到的积分表示一致. ■

虽然函数在 $x=\pm a$ 处有跳跃，但例 1 中的傅里叶变换在整个实线上是连续的. 事实上，

可以证明可积函数的傅里叶变换总是连续的.

在下面的例题中，我们将用到复数的绝对值. 回顾，如果 $z=a+ib$，则 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. 特别地，如果 $z=e^{-ix\omega}$，则

$$|e^{-ix\omega}|=|\cos(x\omega)-i\sin(x\omega)|=\sqrt{\cos^2(x\omega)+\sin^2(x\omega)}=1.$$

例2 计算傅里叶变换

求出图3中函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x} & \text{如果 } x>0,\\ 0 & \text{如果 } x\leqslant 0\end{cases}$$

的傅里叶变换.

解 我们有

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-x}e^{-i\omega x}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-x(1+i\omega)}\,dx$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}(1+i\omega)}e^{-i\omega x}e^{-x}\Big|_0^\infty.$$

由于 $|e^{-ix\omega}|=1$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}|e^{-x(1+i\omega)}|=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}=0$，从而，

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\omega)}=\frac{1-i\omega}{\sqrt{2\pi}(1+\omega^2)}.$$

图4是 $\hat{f}$ 绝对值的图像. 同样值得注意的是，虽然 f 不是连续的，但是 $\hat{f}$ 和 $|\hat{f}|$ 都是连续的.

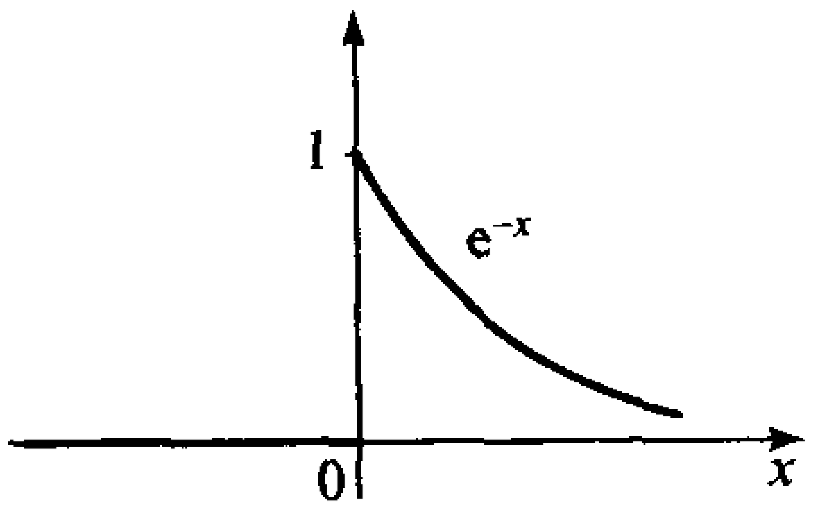


图3 例2中 f 的图像

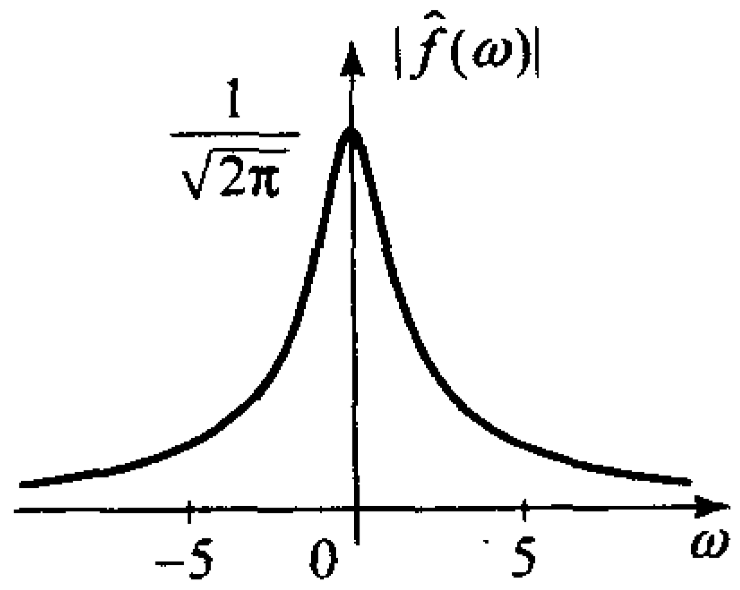


图4 例2中 $|\hat{f}|$ 的图像

■

例2说明了一个值得注意的事实：傅里叶变换可能是复值的，虽然函数是实值的. 同样，[400] 傅里叶变换是连续的，但是不是可积的，即使作为双侧广义积分. 此时，傅里叶逆变换(2)式中的积分应该作为柯西主值来计算. 事实上，可以验证：在 $x=0$，我们确实有 $1/2=(f(0+)+f(0-))/2$，而傅里叶逆变换的柯西主值为

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\hat{f}(\omega)\,d\omega=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\frac{1-i\omega}{\sqrt{2\pi}(1+\omega^2)}\,d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\lim_{a\to\infty}\Big[\int_{-a}^{a}\frac{1}{1+\omega^2}\,d\omega-\overbrace{i\int_{-a}^{a}\frac{\omega}{1+\omega^2}\,d\omega}^{=0}\Big]=\frac{1}{2}.$$

如(1)式所定义，傅里叶变换由一个函数 f 产生一个新函数 $\hat{f}$，而其逆变换由 $\hat{f}$ 又重新得到原来函数 f. 这个过程使得这对变换在求解偏微分方程时非常有用. 就像我们将在后面各节所

看到的，这个思想就是：将一个给定方程“傅里叶变换”成一个容易求解的方程. 在求解变换后的关于$\hat{f}$的方程后，我们利用逆变换重新得到原问题的解. 为帮助我们处理变换后的方程，我们发展一些傅里叶变换的运算性质.

运算性质

我们将研究傅里叶变换在通常函数运算下的性态：线性组合、平移、伸缩、微分、乘以多项式以及卷积.

定理 1(线性性) 傅里叶变换是一种线性运算，即对任意可积函数 f 和 g，以及任意实数 a 和 b，

$$\mathcal{F}(af+bg)=a\,\mathcal{F}(f)+b\,\mathcal{F}(g).$$

证明 习题 18. ■

定理 2(导数的傅里叶变换) (i)假设 $f(x)$是分段光滑的，$f(x)$和 $f'(x)$是可积的，并且当 $|x|\to\infty$时，$f(x)\to 0$，则

$$\mathcal{F}(f')=\mathrm{i}\omega\,\mathcal{F}(f).$$

(ii)如果 $f''(x)$也是可积的，且 $f'(x)$是分段光滑的，当 $|x|\to\infty$时，$f'(x)\to 0$，则

$$\mathcal{F}(f'')=\mathrm{i}\omega\,\mathcal{F}(f')=-\omega^2\,\mathcal{F}(f).$$

(iii)一般地，如果 f 和 $f^{(k)}(x)(k=1,2,\cdots,n-1)$是分段光滑的，且当 $|x|\to\infty$时，都趋近于 0，f 及其直到 n 阶的导数都是可积的，则

$$\mathcal{F}(f^{(n)})=(\mathrm{i}\omega)^n\,\mathcal{F}(f).$$

401

证明 (ii)和(iii)部分可以由重复应用(i)而得到. 为证(i)，我们利用$\mathcal{F}(f')$的定义，以及分部积分. 为简化证明，我们进一步假设 f 是光滑的，则

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f')(\omega)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty}-(-\mathrm{i}\omega)\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x\right]\\&=0+\mathrm{i}\omega\,\mathcal{F}(f).\ (\text{由于当 }|x|\to\infty\text{ 时},f(x)\to 0\text{ 及 }|\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega x}|=1)\end{aligned}$$ ■

定理 3(傅里叶变换的导数) (i)假设 $f(x)$和 $xf(x)$是可积的，则

$$\mathcal{F}(xf(x))(\omega)=\mathrm{i}[\hat{f}]'(\omega)=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathcal{F}(f)(\omega).$$

(ii)一般地，如果 $f(x)$和 $x^nf(x)$是可积的，则

$$\mathcal{F}(x^nf(x))=\mathrm{i}^n[\hat{f}]^{(n)}(\omega).$$

证明概要 (ii)部分由(i)部分可得. 为说明(i)，我们假设可以在积分号下求导，则

$$\begin{aligned}[\hat{f}]'(\omega)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x=-\mathrm{i}\,\mathcal{F}(xf(x))(\omega),\end{aligned}$$

两边乘以 i 即得(i). 如果 f 是光滑的且在有限区间以外为零，这个证明成立. 对于任意函数 f，我们用在有限区间以外为零的光滑函数来逼近 f. 其细节超出了本书的水平范围，故略去. ■

函数的卷积

为研究进一步的运算性质，我们引入两个函数 f 和 g 的卷积.

卷积

$$f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t. \tag{3}$$

$\left(\text{因子}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{仅是为了方便. 如果在卷积的定义中略去这个因子，它将在其傅里叶变换中出现.}\right)$ f

402

和 g 的卷积是一个二元运算，它包含了平移、函数乘积以及积分. 如下例所示，它对 f 和 g 所产生的影响很难直接解释. (但是利用傅里叶变换，它确实有一个简单的描述，见定理 4.) 首先，我们注意到卷积是一种交换运算，即 $f * g(x) = g * f(x)$. 这可由在(3)式中作变量代换($t \leftrightarrow t-x$)来得到(习题 55).

例 3 与余弦的卷积

假设 f 是可积的，且是偶的($f(-x)=f(x)$对所有 x 成立)，令 $g(x)=\cos ax$. 试证：对所有实数 a，有 $f * g(x) = \cos(ax)\hat{f}(a)$.

解 由定义和事实 $f * g = g * f$，我们有

$$f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos[a(x-t)]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos(ax)\cos(at) + \sin(ax)\sin(at)]\mathrm{d}t.$$

由于 f 是偶的，乘积 $f(t)\sin at$ 是奇的，因此，$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin at\,\mathrm{d}t = 0$，所以，

$$f * g(x) = \cos(ax)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(at)\mathrm{d}t$$

$$= \cos(ax)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos(at) - \mathrm{i}\sin(at)]\mathrm{d}t$$

$$= \cos(ax)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}at}\mathrm{d}t = \cos(ax)\hat{f}(a).$$ ■

例 4 卷积像个平均值

对 $n=1, 2, \cdots$，当 $|x| < 1/n$ 时，令 $g_n(x) = n\sqrt{\pi/2}$，否则 $g_n(x)=0$. 假设 f 在 $(-\infty, \infty)$上连续，记 F 为 f 的原函数. 试证：

$$f * g_n(x) = \frac{F(x+1/n) - F(x-1/n)}{2/n}.$$

解 由定义，我们有

$$f*g_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)g_n(t)\mathrm{d}t=\frac{n}{2}\int_{-1/n}^{1/n}f(x-t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{n}{2}\int_{x-1/n}^{x+1/n}f(t)\mathrm{d}t=\frac{n}{2}(F(x+1/n)-F(x-1/n)),$$

其中在第二个积分中，我们用了变量代换 $t\leftrightarrow x-t$. 所以得到所求结论. ■

对例 4 中的卷积，我们提几个值得注意的性质. 在表达式 $f*g_n(x)=\frac{n}{2}\int_{x-1/n}^{x+1/n}f(t)\mathrm{d}t$ 中，积分区间$(x-1/n,\ x+1/n)$的中心在 x 点，长度为 $2/n$. 因此，卷积 $f*g_n(x)$是函数 f 在区间$(x-1/n,\ x+1/n)$上的平均值. 当区间的长度缩成 0 时(即，当 $n\to\infty$时)，我们期望这个平均值收敛于 $f(x)$. 换句话说，我们期望$\lim\limits_{n\to\infty}f*g_n(x)=f(x)$. 这确实是对的，因为由微分的定义，我们有

403

$$\lim_{n\to\infty}f*g_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}(F(x+1/n)-F(x-1/n))$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{1/n\to 0}\left[\frac{F(x+1/n)-F(x)}{1/n}+\frac{F(x+(-1/n))-F(x)}{(-1/n)}\right]$$
$$=F'(x),$$

但是由微积分基本定理得，$F'(x)=f(x)$，因此，$\lim\limits_{n\to\infty}f*g_n(x)=f(x)$.

f 和一列函数的卷积收敛到 f 这个事实是某些重要边值问题求解的核心，比如，上半平面的狄利克雷问题和实直线上的热传导方程. 在这些问题中，函数序列(或者称为核)可能不同，但是都具有类似于例 4 中 $g_n(x)$的如下性质：

- $g_n(x)\geqslant 0$ 对所有 x 成立. 对所有 $n\geqslant 1$，$g_n(x)$图像之下与 x 轴之上的面积等于$\sqrt{2\pi}$. 即，$\int_{-\infty}^{\infty}g_n(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}$. 更进一步，面积越来越集中在 0 点附近，即如果 0 点不在$[a,\ b]$内，则$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x=0$.
- 从傅里叶变换观点来看，对所有 ω，我们有$\lim\limits_{n\to\infty}\hat{g}_n(\omega)=1$(习题 8).

直接从(3)式来求解卷积有时是非常困难的. 避免直接计算的一个方法是利用下面这个卷积和傅里叶变换的重要性质. 其过程由例 5 来示例.

定理 4(卷积的傅里叶变换) 假设 $f(x)$和 $g(x)$是可积的，则

$$\mathcal{F}(f*g)=\mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g).$$

定理 4 可以表达为，傅里叶变换将卷积变成乘积.

证明 利用(3)和(1)式，并且交换积分顺序，我们得到

$$\mathcal{F}(f*g)(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x g(t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega u}\mathrm{d}u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}g(t)\mathrm{d}t\quad(u=x-t,\mathrm{d}u=\mathrm{d}x)$$

404

$$=\mathcal{F}(f)(\omega)\ \mathcal{F}(g)(\omega).$$ ■

例5 卷积的傅里叶变换

考虑函数 $f(x)=1$ 当 $|x|<1$ 时，否则取零，这个函数的图像如图5所示．由例1，我们有

$$\hat{f}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\omega}{\omega}.$$

我们希望计算 $f*f$，f 和自身的卷积．我们不直接由(3)式来计算，而是利用定理4作如下计算．我们有

$$\mathcal{F}(f*f)(\omega)=\hat{f}(\omega)^2=\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}.$$

求助于附录B中的傅里叶变换表，利用傅里叶逆变换，我们得到

$$f*f(x)=\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\right)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1-\frac{|x|}{2}\right) & 若\ |x|<2,\\ 0 & 若\ |x|\geqslant 2.\end{cases}$$

$f*f(x)$的图像如图6所示．注意，虽然 f 不连续，但是 $f*f$ 却是连续的．

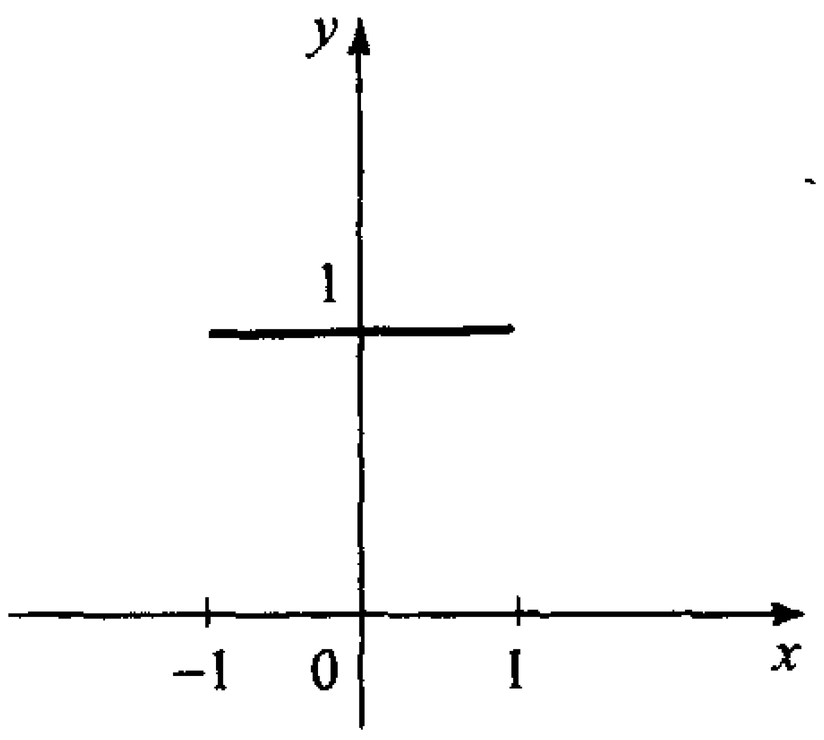


图5 f 的图像

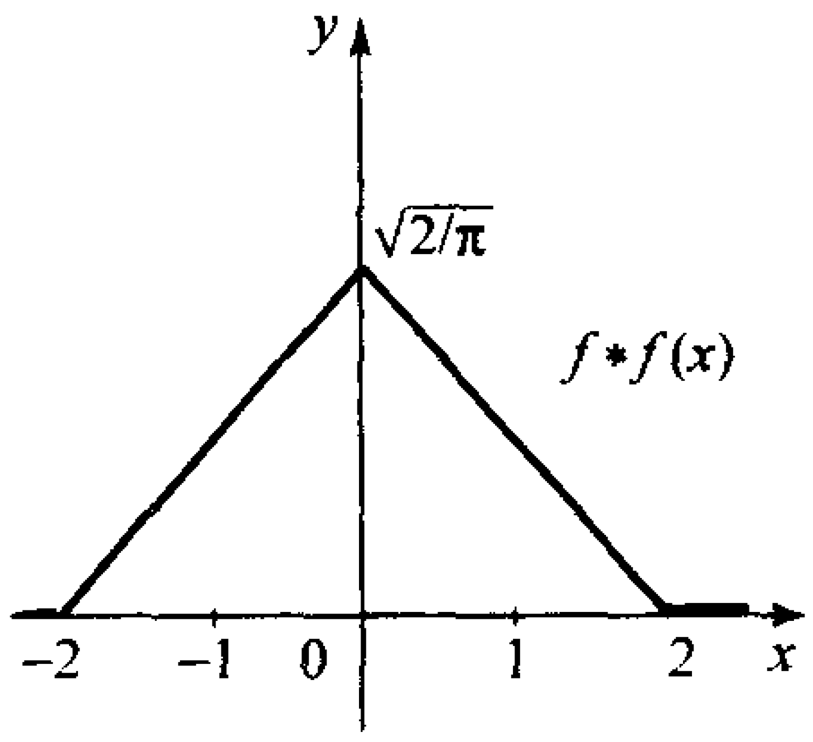


图6 $f*f$ 的图像 ■

本节的其余部分研究**高斯函数** $f(x)=e^{-x^2}$ 及其傅里叶变换．这个函数在求解直线上热传导方程时起着重要的作用(7.4节)．我们需要如下著名的广义积分：

$$\boxed{I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}.} \tag{4}$$

我们在4.7节习题35中已经计算过这个积分，它与伽马函数有关．现在，我们给出一个更直接的证明．将这个积分平方，利用极坐标($r^2=x^2+y^2$，$dxdy=rdrd\theta$)，得到

$$\begin{aligned}I^2&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-r^2}rdrd\theta=\int_0^{2\pi}-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^{\infty}d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta=\pi,\end{aligned}$$

405

开平方即得(4)式．

定理 5(高斯函数的傅里叶变换) 令 $a>0$，我们有

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{ax^2}{2}})(\omega)=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\omega^2}{2a}}.$$

证明 我们给出一个间接的证明，它是基于傅里叶变换的运算性质．令 $f(x)=e^{-\frac{ax^2}{2}}$．直接验证可得 f 满足一阶线性微分方程：

$$f'(x)+axf(x)=0.$$

作傅里叶变换，并利用定理 1、2、3，我们得到

$$\omega\hat{f}(\omega)+a\frac{d}{d\omega}[\hat{f}](\omega)=0.$$

因此，$\hat{f}$满足一个类似的一阶线性微分方程．求解$\hat{f}$的微分方程，我们得到

$$\hat{f}(\omega)=Ae^{-\frac{\omega^2}{2a}},$$

其中，A 是任意常数．为完成证明，我们必须说明 $A=\frac{1}{\sqrt{a}}$．我们有

$$\begin{aligned}A=\hat{f}(0)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{ax^2}{2}}dx\\&=\frac{1}{\sqrt{a\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du\qquad\left(u=\sqrt{\frac{a}{2}}x,\sqrt{\frac{2}{a}}du=dx\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{a}}.\qquad\text{(由(4))}\end{aligned}$$

■

在定理 5 中将 a 替换成 $2a$ 得到

$$\boxed{\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}\qquad(a>0).}\tag{5}$$

在定理 5 中取 $a=1$ 得到

$$\boxed{\mathcal{F}(e^{-\frac{x^2}{2}})(\omega)=e^{-\frac{\omega^2}{2}}.}$$

值得注意的是，该恒等式说明 $e^{-\frac{x^2}{2}}$是其自身的傅里叶变换．这是具有该性质的唯一函数吗？答案参看习题 59.

定理 5 可以用来计算某些有趣的积分. [406]

例 6 **特殊广义积分**

将定理 5 中的傅里叶变换显式地写出来，我们发现

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{ax^2}{2}}(\cos\omega x-i\sin\omega x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{ax^2}{2}}\cos\omega x\,dx=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\omega^2}{2a}}.$$

取 $\omega=1$ 和 $a=2$，我们得到一个有趣的恒等式

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\cos x\,dx=\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4}}.$$

■

在下一节中，我们要研究求解实直线上偏微分方程的傅里叶变换方法．我们将利用这个方法来

求解与热传导方程和波动方程有关的边值问题，以及实直线和二维空间区域上的其他许多重要问题.

习题 7.2

在习题 1～7 中：

(a)画出给定函数及其傅里叶变换的图像.

(b)如果$\hat{f}$是实值的，画出其图像；否则画出$|\hat{f}|$的图像.

1. $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{如果} -1<x<0,\\ 1 & \text{如果 } 0<x<1,\\ 0 & \text{否则.}\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \text{如果 } |x|\leqslant 1,\\ 0 & \text{否则.}\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{如果 } |x|\leqslant \pi,\\ 0 & \text{否则.}\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}x & \text{如果 } |x|<1,\\ 0 & \text{否则.}\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}1-|x| & \text{如果} |x\leqslant 1|,\\ 0 & \text{否则.}\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|x|}{a} & \text{如果 } |x|\leqslant a,\\ 0 & \text{否则,}\end{cases}$

   其中 $a>0$.

7. $f(x)=\begin{cases}2x & \text{如果 } 0<x<10,\\ 0 & \text{否则.}\end{cases}$

8. 令 $g_n(x)$如例 4 中定义的函数，计算$\hat{g}_n(\omega)$，并证明：对所有 ω，有$\lim\limits_{n\to\infty}\hat{g}_n(\omega)=1$.

9. 通过观察 $f(x)$的图像，计算习题 1 和 7 中的$\hat{f}(0)$.

10. **傅里叶变换的互反关系.**

    (a)由傅里叶变换的定义，解释为什么$\mathcal{F}(f)(x)=\mathcal{F}^{-1}(f)(-x)$.

    (b)利用(a)，推导互反关系$\mathcal{F}^2(f)(x)=f(-x)$，其中$\mathcal{F}^2(f)=\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))$.

    (c)得出结论：f 是偶的当且仅当$\mathcal{F}^2(f)(x)=f(x)$；f 是奇的当且仅当$\mathcal{F}^2(f)(x)=-f(x)$.

    407

    (d)试证：对所有的 f，有$\mathcal{F}^4(f)=f$.

在习题 11～16 中，利用互反关系和已知的变换，计算给定函数的傅里叶变换. [提示：利用傅里叶变换表，将给定函数写成$\mathcal{F}(f)$，然后利用习题 10(b).]

11. $g(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

12. $g(x)=\dfrac{a^2}{a^2+x^2}$.

13. $g(x)=\dfrac{\sin ax}{x}$.

14. $g(x)=\dfrac{\sin^2 ax}{x^2}$，　$a\neq 0$.

15. $g(x)=\dfrac{a-\mathrm{i}x}{a^2+x^2}$，　$a>0$.

16. $g(x)=\dfrac{2x}{(a^2+x^2)^2}$，　$a\neq 0$.

17. **傅里叶变换和伸缩**．

(a)试证：

$$\mathcal{F}(f(ax))(\omega)=\frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{a}\right),\quad a\neq 0.$$

(b)利用(a)，由 $f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}$ 的傅里叶变换推导出 $g(x)=\mathrm{e}^{-2|x|}$ 的傅里叶变换.

(c)利用(a)和例 2，推导当 $x<0$ 时，$g(x)=\mathrm{e}^x$ 及当 $x>0$ 时，$g(x)=0$ 的傅里叶变换．然后，推导 $h(x)=\mathrm{e}^{-|x|}$ 的傅里叶变换.

18. **傅里叶变换的线性性**．

(a)证明定理 1.

(b)计算 $f(x)=x/(a^2+x^2)$的傅里叶变换．[提示：习题 11 和 15.]

19. **在 x 轴上的位移**．试证：$\mathcal{F}(f(x-a))(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega}\mathcal{F}(f)(\omega)$.

20. **在 ω 轴上的位移**．

(a)试证：$\mathcal{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}f(x))(\omega)=\hat{f}(\omega-a)$，以及 $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax}f(x))(\omega)=\hat{f}(\omega+a)$.

(b)得出结论

$$\mathcal{F}(\cos(ax)f(x))(\omega)=\frac{\hat{f}(\omega-a)+\hat{f}(\omega+a)}{2};$$

$$\mathcal{F}(\sin(ax)f(x))(\omega)=\frac{\hat{f}(\omega-a)-\hat{f}(\omega+a)}{2\mathrm{i}};$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\cos(a\omega)\,\hat{f}(\omega))(x)=\frac{f(x-a)+f(x+a)}{2};$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\sin(a\omega)\,\hat{f}(\omega))(x)=\frac{f(x+a)-f(x-a)}{2\mathrm{i}}.$$

在习题 21～26 中，利用习题 20 和已知的变换，计算给定函数的傅里叶变换.

21. $f(x)=\dfrac{\cos x}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

22. $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\mathrm{e}^{|x|}}$.

23. $f(x)=\dfrac{\cos x+\cos 2x}{1+x^2}$.

24. $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos 2x}{4+x^2}$.

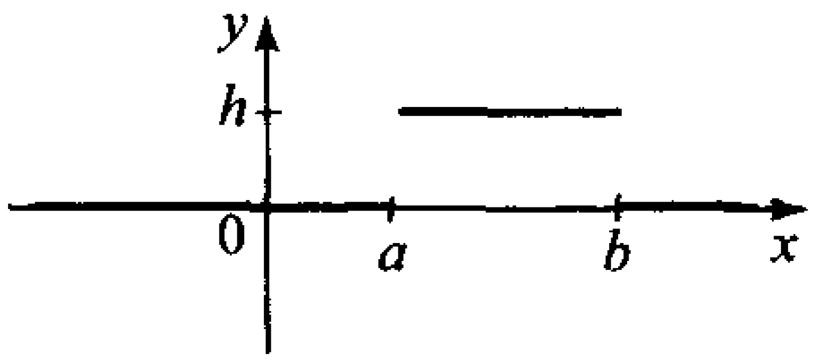
25. $f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{如果 } |x|<1,\\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$

26. $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{如果 } |x|<1,\\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$

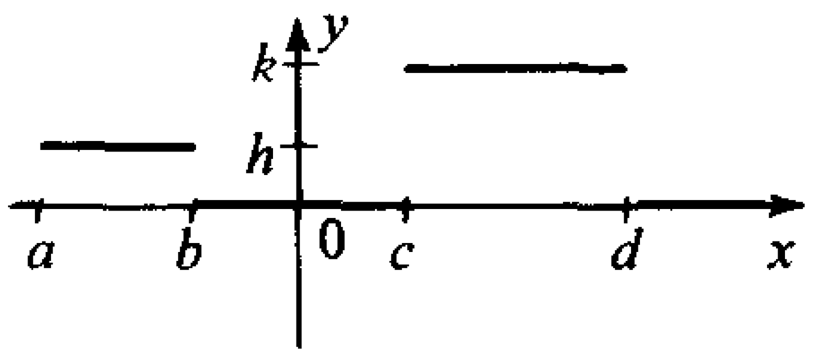
408

在习题 27～32 中，利用例 1 中的变换和运算性质，求出给定函数的傅里叶变换.

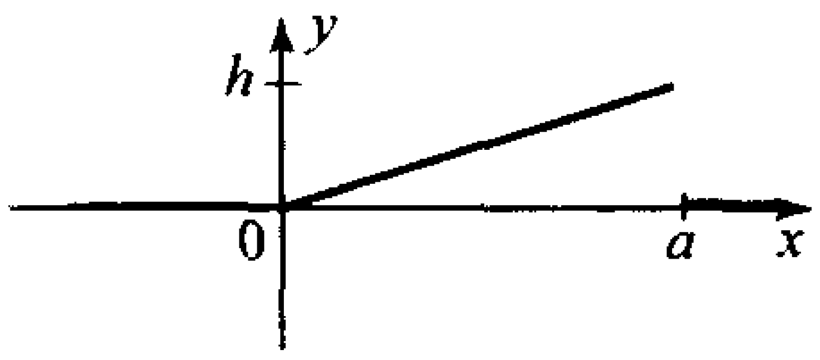
27.



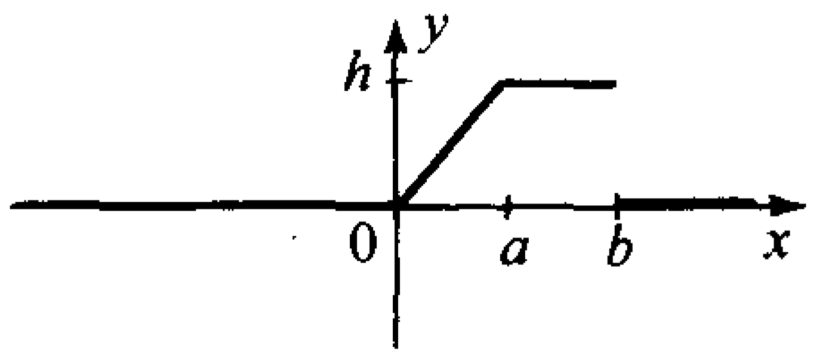
28.



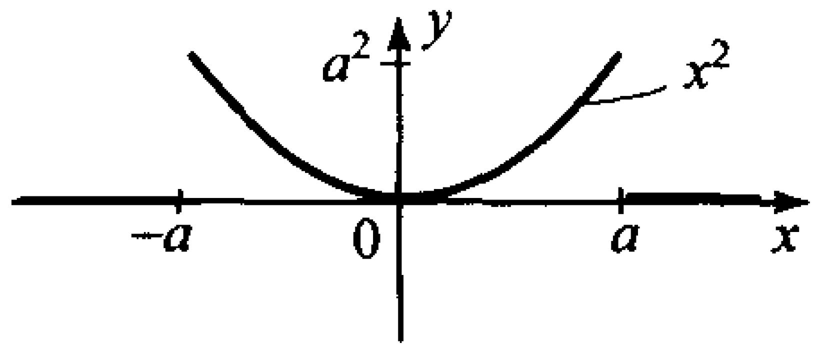
29.



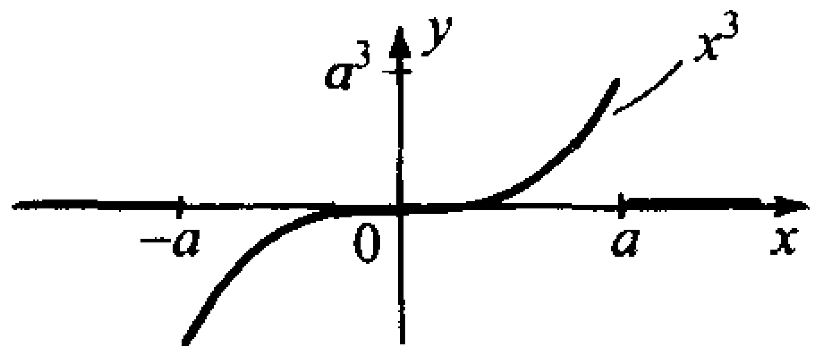
30.



31.

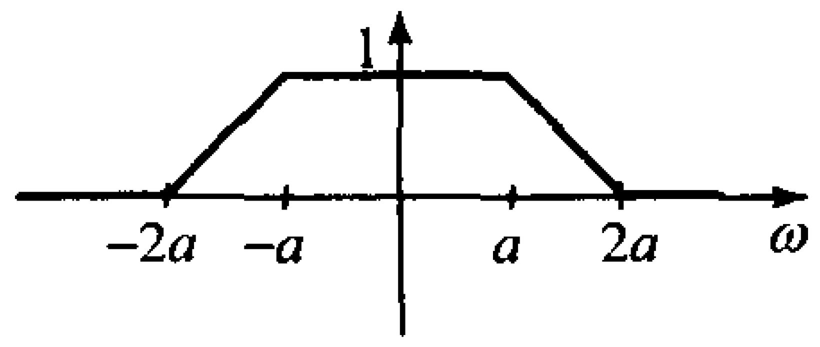


32.

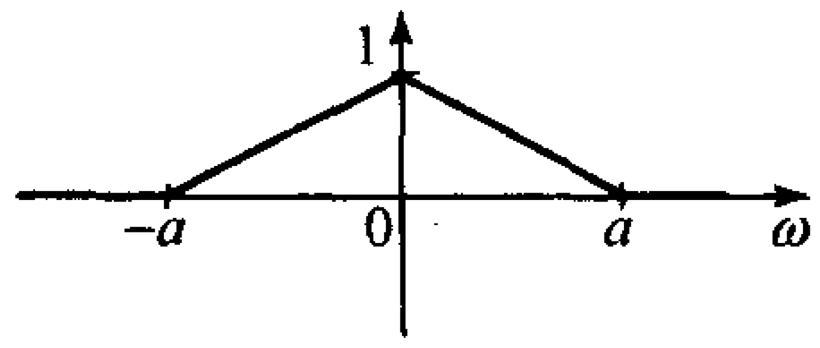


在习题 33～34 中，傅里叶变换的图像已经给出，求出给定变换所对应的函数.

33.



34.



在习题 35～36 中，利用定理 5，求出给定函数的傅里叶变换.

35. (a) $f(x)=e^{-x^2}$.　　(b) $f(x)=e^{-2x^2}$.

36. (a) $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2+2}$.　　(b) $f(x)=e^{-2x^2+2x}$. [提示：完全平方.]

在习题 37～46 中，利用运算性质和已知的傅里叶变换，计算给定函数的傅里叶变换.

37. $f(x)=xe^{-x^2}$.

38. $f(x)=x^2e^{-|x|}$.

39. $f(x)=\begin{cases} x & \text{如果 } |x|<1, \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$

40. $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{如果 } x<0, \\ xe^{-x} & \text{如果 } x>0. \end{cases}$　[提示：例 2.]

41. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

42. $f(x)=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$.

43. $f(x)=(1-x^2)e^{-x^2}$.

44. $f(x)=(1-x)^2e^{-|x|}$.

45. $f(x)=xe^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$.

46. $f(x)=(1-x)e^{-|x-1|}$.

47. 假设 f 是可积的、偶的，而 $g(x)=\sin ax$. 试证：对任意实数 a，$f*g(x)=\sin(ax)\hat{f}(a)$.

409

48. 假设 f 是可积的、奇的，而 $g(x)=\sin ax$. 试证：对任意实数 a，$f*g(x)=-i\cos(ax)\hat{f}(a)$.

在习题 49～52 中，将 $\hat{h}$ 写成两个傅里叶变换 $\hat{f}$ 和 $\hat{g}$ 的乘积，求出 f 和 g，并将 h 表示成卷积.

49. $\hat{h}(\omega)=\dfrac{e^{-\omega^2}}{1+\omega^2}$.

50. $\hat{h}(\omega)=e^{-\omega^2}\dfrac{\sin\omega}{\omega}$.

51. $\hat{h}(\omega)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} & 如果\ |\omega|<1, \\ 0 & 其他. \end{cases}$

52. $\hat{h}(\omega)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+\omega^2} & 如果\ |\omega|<1, \\ 0 & 其他. \end{cases}$

53. 令 $f(x)=xe^{-x^2/2}$ 和 $g(x)=e^{-x^2}$.

(a) f 和 g 的傅里叶变换分别是什么?

(b) $f*g$ 的傅里叶变换是什么?

(c) $f*g$ 是什么? [提示：利用(b)和定理 3.]

54. 对 $f(x)=e^{-x^2}$ 和 $g(x)=xe^{-(x^2+2x)}$，重做习题 53.

55. **卷积的基本性质**. 建立卷积的如下性质.（这些性质可以直接由定义导出或利用傅里叶变换的运算性质.）

(a) $f*g=g*f$(交换性).

(b) $f*(g*h)=(f*g)*h$(结合性).

(c)令 a 是一个实数，而 f_a 表示由 f 平移 a 单位得到的，即 $f_a(x)=f(x-a)$. 试证：$(f_a)*g=f*(g_a)=(f*g)_a$. 这个重要性质说明卷积和平移是可交换的.

56. **卷积的微分**. 试证：当 f 和 g 满足适当条件时，对任意非负整数 μ 和 ν，满足 $\mu+\nu=n$，我们有

$$\frac{d^n}{dx^n}(f*g)=\frac{d^\mu f}{dx^\mu}*\frac{d^\nu g}{dx^\nu},$$

[提示：在积分号下求导.]

57. **卷积的可积性**. 试证：如果 f 和 g 是可积的，则 $f*g$ 也是可积的.

58. **傅里叶变换的有界性**. 试证：如果 f 是可积的 $\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty\right)$，则其傅里叶变换是有界的，即 $|\hat{f}(\omega)|\leqslant M$ 对所有的 ω 成立. M 的值是多少?

59. **专题问题：埃尔米特函数**. 对 $n=0, 1, 2, \cdots$，定义**埃尔米特函数**为 $\phi_n(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)$，其中 $H_n(x)$是 11.4 节定义的第 n 个埃尔米特多项式.

(a)利用计算机系统生成 ϕ_n，$n=0, 1, 2, \cdots, 10$.

(b)利用计算机系统验证

$$\mathcal{F}(\phi_n)(\omega)=(-1)^n i^n\phi_n(\omega)\quad(n=0,1,2,\cdots,10).$$

这个恒等式对所有 n 都成立，因此，埃尔米特函数是其傅里叶变换的常数倍.

(c)给出等于其傅里叶变换的函数例子. [提示：利用(b).]

410

60. 举出两个函数 f 和 g，使得在任意区间上任何一个函数都不恒等于零，但是 $f*g$ 恒等于 0. [提示：考虑傅里叶变换. 令 $\hat{f}$ 是如图 6 所定义、支撑在区间 $(-2, 2)$ 上的帐篷函数，定义 $\hat{g}$ 为将 $\hat{f}$ 向左(或右)平移 4 个单位.]

7.3 傅里叶变换法

我们在第 3～5 章所遇到的偏微分方程在绝大多数情形是定义在有限区域上的(比如：有限长度弦的振动、有限杆上的热传导、矩形膜的振动). 它们的解本质上都依赖于边界条件. 当

模拟至少在一个方向上延伸很远的区域上的问题时，我们经常将这种情况理想化成在一个或多个方向上无限延伸的问题，其中在很远的边界上任何边界条件，都将被当相应变量趋于无穷时解的有界性所取代．这些问题在数学上用定义在无穷区域上的微分方程来描述．对于一维问题，我们将区分以下两种无穷区域：自 $-\infty$ 到 ∞ 的无穷区间和自一点（通常记为原点）到无穷（通常为 $+\infty$）的半无穷区间．

本节，我们将研究傅里叶变换法，并应用它去求解实直线上的波动方程和热传导方程．求解半无穷区间的合适工具及其应用将在后面章节中给出，包括余弦变换、正弦变换、拉普拉斯变换和汉克尔变换．

偏导数的变换

贯穿本节，我们都将假设 $u(x, t)$ 是两个变量 x 和 t 的函数，其中 $-\infty<x<\infty$，$t>0$．由于出现两个变量，所以要特别注意计算傅里叶变换所对应的变量．比如，当 t 固定时，$u(x, t)$ 就变成空间变量 x 的函数，此时我们可以求其关于空间变量 x 的傅里叶变换．我们将这个变换记为 $\hat{u}(x, t)$．因此，

关于变量 x 的傅里叶变换

$$\mathcal{F}(u(x,t))(\omega)=\hat{u}(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

为说明这个记号的用处，我们计算一些非常有用的变换．我们将假设函数 $u(x, t)$，作为 x 的函数，具有非常好的性质，足以保证我们可以自由地使用 7.2 节的傅里叶变换运算性质．

411

傅里叶变换和偏导数　给定 $u(x, t)$，$-\infty<x<\infty$，$t>0$，我们有

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right)(\omega)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}(\omega,t); \tag{2}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^n}{\partial t^n}u(x,t)\right)(\omega)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\hat{u}(\omega,t),\quad n=1,2,\cdots; \tag{3}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right)(\omega)=\mathrm{i}\omega\,\hat{u}(\omega,t); \tag{4}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}u(x,t)\right)(\omega)=(\mathrm{i}\omega)^n\,\hat{u}(\omega,t),\quad n=1,2,\cdots. \tag{5}$$

注意，在(2)和(3)式的右端我们用了关于 t 的常导数来代替偏导数．原因是要强调如下重要事实：在运用傅里叶变换法时，我们将关于 $u(x, t)$ 的一个偏微分方程变成关于 $\hat{u}(\omega, t)$ 的一个常微分方程，其中 t 是变量．这在后面例题中显得更明显．上面最后两个式子是(1)式和 7.2 节定理 2 的推论．为证明(2)式，我们从右端出发，在积分号下求关于 t 的微分：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x.$$

最后的表达式就是 $\frac{\partial}{\partial t}u(x, t)$ 作为 x 的函数的傅里叶变换，因而(2)式得证．反复在积分号下求关于 t 的微分可以得到(3)式．

傅里叶变换法

利用傅里叶变换来求解偏微分方程最好以例题说明．我们以波动方程开始．

例 1 无穷弦的波动方程

求解边值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad(-\infty<x<\infty,t>0),$$

$$u(x,0)=f(x),\quad \text{初始位移}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)=g(x).\quad \text{初始速度}$$

假设 f 和 g 都有傅里叶变换，将答案以傅里叶逆变换表示．

解 我们固定 t，对微分方程的两边和初始条件作傅里叶变换．利用 $n=2$ 时的(3)和(5)式，我们得到

$$\frac{d^2}{dt^2}\hat{u}(\omega,t)=-c^2\omega^2\hat{u}(\omega,t),\tag{6}$$

$$\hat{u}(\omega,0)=\hat{f}(\omega),\tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{u}(\omega,0)=\hat{g}(\omega).\tag{8}$$

412

显然，(6)式是关于$\hat{u}(\omega,t)$的一个常微分方程，其中 t 是变量．我们将(6)写成标准形式

$$\frac{d^2}{dt^2}\hat{u}(\omega,t)+c^2\omega^2\hat{u}(\omega,t)=0.$$

这个方程的通解是(关于二阶线性微分方程的通解参考附录 A. 2(情形Ⅲ))

$$\hat{u}(\omega,t)=A(\omega)\cos c\omega t+B(\omega)\sin c\omega t,$$

其中 $A(\omega)$和 $B(\omega)$关于 t 是常数．(注意，虽然 A 和 B 关于 t 是常数，但是它们可以依赖于 ω，所以写成 $A(\omega)$和 $B(\omega)$．)下面，利用初始条件(7)和(8)，我们确定 $A(\omega)$和 $B(\omega)$：

$$\hat{u}(\omega,0)=A(\omega)=\hat{f}(\omega),$$

$$\frac{d}{dt}\hat{u}(\omega,0)=c\omega B(\omega)=\hat{g}(\omega).$$

因此

$$\hat{u}(\omega,t)=\hat{f}(\omega)\cos c\omega t+\frac{1}{c\omega}\hat{g}(\omega)\sin c\omega t.$$

为得到解，我们利用傅里叶逆变换(7.2 节(2)式)，得到

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\hat{f}(\omega)\cos c\omega t+\frac{1}{c\omega}\hat{g}(\omega)\sin c\omega t\right]e^{i\omega x}d\omega.\tag{9}$$

■

我们将傅里叶变换法总结如下：

步骤 1：对关于 $u(x,t)$的给定边值问题作傅里叶变换，得到关于$\hat{u}(\omega,t)$的一个常微分方

程，其中 t 是变量.

步骤 2：求解这个常微分方程，得出$\hat{u}(\omega, t)$.

步骤 3：对$\hat{u}(\omega, t)$作傅里叶逆变换，得到 $u(x, t)$.

这个简单方法在求解许多偏微分方程时都有用，但是它有局限性，这是因为必须假设问题中的函数以及其解都具有傅里叶变换. 尽管如此，正如我们即将举例说明的，这个方法还是为我们提供了超出这些限制的机会. 考虑(9)式，它以傅里叶逆变换形式给出了波动边值问题的解. 为简化叙述，取 $g=0$，则$\hat{g}=0$，(9)式变为

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[\hat{f}(\omega)\cos c\omega t]e^{i\omega x}\,d\omega.$$

因此，u 是$\hat{f}(\omega)\cos c\omega t$ 的傅里叶逆变换. 利用 7.2 节习题 20(b)，我们得到 $u(x, t)=(f(x-ct)+f(x+ct))/2$，这就是 3.4 节波动方程解的达朗贝尔形式. (对于一般情形参见习题 21). 用这个形式，我们利用边值问题中的方程，可以直接验证该解. 因此，虽然傅里叶变换法要求 f 的傅里叶变换存在，但是我们所推出的解可以应用到更一般的情形.

413

在下一个例题中，我们运用傅里叶变换法求解实直线上的热传导方程. 这个例题模拟了在 x 轴两个方向都无穷延伸的杆上的热传导.

例 2　无限长杆的热传导方程

求解边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (-\infty < x < \infty, t > 0),$$

$$u(x,0) = f(x). \quad (\text{初始温度分布})$$

假设 f 具有傅里叶变换，将答案以傅里叶逆变换表示.

解　对边值问题作傅里叶变换，我们得到

$$\frac{d}{dt}\hat{u}(\omega,t) = -c^2\omega^2\hat{u}(\omega,t),$$

$$\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega).$$

这是关于 t 的一阶微分方程，其通解为

$$\hat{u}(\omega,t) = A(\omega)e^{-c^2\omega^2 t},$$

[再次强调，由于讨论的是一族微分方程(每个 ω 对应一个微分方程)，所以必须对每个方程使用一个不同的常数，这解释了记号 $A(\omega)$的使用.]其中 $A(\omega)$是常数，依赖于 ω. 令 $t=0$，利用变换后的初始条件，我们得到

$$\hat{u}(\omega,0) = A(\omega) = \hat{f}(\omega).$$

因此

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)e^{-c^2\omega^2 t}.$$

作傅里叶逆变换，我们得到解

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{-c^2\omega^2 t}e^{i\omega x}\,d\omega. \tag{10}$$

■

公式(10)用涉及初始热量分布的傅里叶变换的积分来表示热边值问题的解. 下节我们将计算这个积分，并将解写成 f 和一个给定函数的卷积，这个函数就是所谓的高斯核. 像波动方程情形一样，在 f 没有傅里叶变换时还是可以应用卷积形式的解.

下面两个例题说明傅里叶变换法还可以求解带有混合型高阶导数的问题. 414

例 3 混合导数的傅里叶变换

求解边值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad(-\infty<x<\infty,t>0),$$

$$u(x,0)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|}.$$

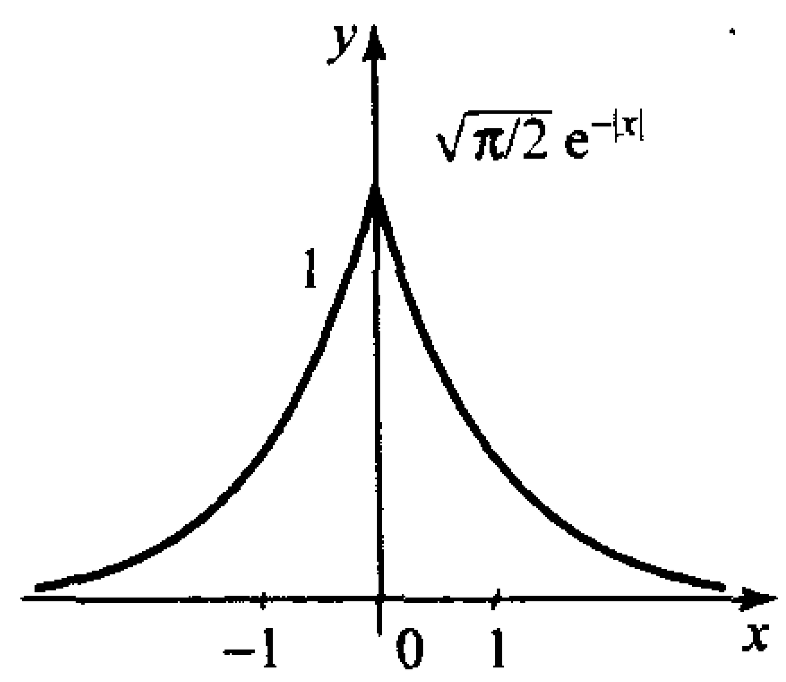


图 1 $\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|}$ 的图像

解 初始条件中的函数如图 1 所示. 合并(2)和(4)式，我们得到

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)=\mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{d}{dt}\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=i\omega\frac{d\hat{u}}{dt}(\omega,t).$$

对微分方程作傅里叶变换，并利用(5)式，我们得到

$$i\omega\frac{d\hat{u}}{dt}(\omega,t)=-\omega^2\hat{u}(\omega,t)\quad 或\quad \frac{d\hat{u}}{dt}(\omega,t)=i\omega\hat{u}(\omega,t).$$

求解这个一阶线性常微分方程，我们得到

$$\hat{u}(\omega,t)=A(\omega)e^{i\omega t}.$$

初始条件蕴涵着

$$\hat{u}(\omega,0)=\mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|}\right)=\frac{1}{1+\omega^2},$$

因此，$A(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2}$，从而

$$\hat{u}(\omega,t)=\frac{e^{i\omega t}}{1+\omega^2},$$

作傅里叶逆变换即可得到解 u. 在这个情形下，利用傅里叶变换的平移性质(7.2 节习题 19)，我们可以显式确定解 u. 首先，注意到，$\frac{1}{1+\omega^2}$的傅里叶逆变换是$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|}$(查傅里叶变换表). 因此，由平移性质，

$$u(x,t)=\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{e^{i\omega t}}{1+\omega^2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x+t|}.$$

解如图 2 所示. 415

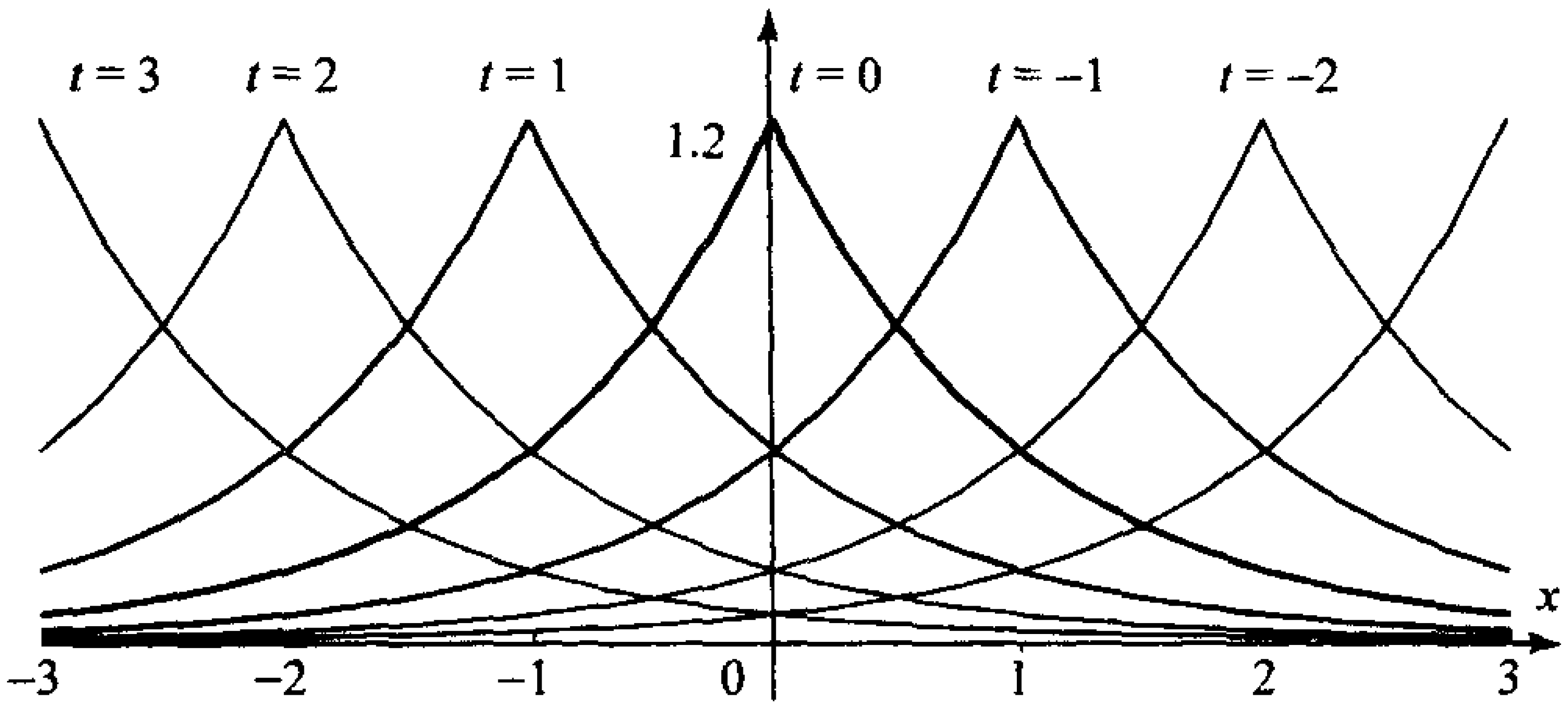


图 2　例 3 中的 $u(x, t)$ 在不同 t 值时的图像 ■

我们的下个例题研究出现在弹性梁的横振动模型中的四阶微分方程(参见 6.5 节).

例 4　弹性梁的横振动

求解边值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \qquad (-\infty < x < \infty, t > 0),$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x),$$

其中 $c>0$ 是常数，将答案以傅里叶逆变换表示.

解　固定 t，对微分方程的两端和初始条件作傅里叶变换. 利用 $n=2$ 时的(3)式，我们得到 $\mathcal{F}(u_{tt}) = \frac{d^2}{d\omega^2}\hat{u}(\omega, t)$. 利用 $n=4$ 时的(5)式，并记住 $i^4=1$，我们得到 $\mathcal{F}(u_{xxxx}) = \omega^4 \hat{u}(\omega, t)$. 因此

$$\frac{d^2\hat{u}}{dt^2}(\omega,t) + c^2\omega^4 \hat{u}(\omega,t) = 0 \qquad (-\infty < \omega < \infty),$$

$$\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega), \quad \frac{d}{d\omega}\hat{u}(\omega,0) = \hat{g}(\omega).$$

关于 t 的二阶微分方程与例 1 中的类似，其通解为

$$\hat{u}(\omega,t) = A(\omega)\cos(c\omega^2 t) + B(\omega)\sin(c\omega^2 t),$$

[关于二次线性微分方程的解(情形Ⅲ)参见附录 A.2.]其中 $A(\omega)$ 和 $B(\omega)$ 关于 t 是常数. 由变换后的初始条件，我们确定 $A(\omega)$ 和 $B(\omega)$：

$$\hat{u}(\omega,0) = A(\omega) = \hat{f}(\omega),$$

$$\frac{d}{dt}\hat{u}(\omega,0) = c\omega^2 B(\omega) = \hat{g}(\omega).$$

因此

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)\cos(c\omega^2 t) + \frac{1}{c\omega^2}\hat{g}(\omega)\sin(c\omega^2 t).$$

应用傅里叶逆变换(7.2 节(2)式)，我们得到

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\hat{f}(\omega)\cos(c\omega^2 t) + \frac{1}{c\omega^2}\hat{g}(\omega)\sin(c\omega^2 t)\right]e^{i\omega x}\,d\omega. \tag{11}$$

与例 1 不同，这里的傅里叶逆变换更具挑战性(见习题 26). ■

至此，我们利用傅里叶变换法求解了具有常系数的偏微分方程. 正如下例所示，这个方法在求解变系数问题时也是有用的.

416

例 5 **变系数方程**

求解

$$t\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}=0 \qquad (-\infty<x<\infty, t>0),$$

$$u(x,0)=f(x).$$

尽可能地化简你的答案．对 f 的适当假设是什么？

解 本例题新特点是在方程中出现了 $t\frac{\partial u}{\partial x}$ 这项．由于我们将用的傅里叶变换是关于 x 的，变量 t 视为常数．因此

$$\mathcal{F}\left(t\frac{\partial u}{\partial x}\right)=t\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\mathrm{i}\omega t\,\hat{u}(\omega,t).$$

回到我们的问题，利用傅里叶变换，得到

$$\mathrm{i}\omega t\hat{u}(\omega,t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}(\omega,t)=0,$$

$$\hat{u}(\omega,0)=\hat{f}(\omega).$$

此时，我们必须假设 f 具有傅里叶变换．求解关于 t 的一阶微分方程，得到

$$\hat{u}(\omega,t)=A(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t^2}{2}\omega},$$

其中任意常数 $A(\omega)$ 允许是 ω 的常数．令 $t=0$，得到

$$\hat{u}(\omega,t)=\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t^2}{2}\omega}.$$

为确定 u，我们像例 3 所做，利用傅里叶变换的一个性质．这个性质指出，将一个函数平移 a 单位相当于其傅里叶变换乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega}$（见 7.2 节习题 19）．因此

$$u(x,t)=f\left(x-\frac{t^2}{2}\right).$$

让我们来验证我们的答案．假设 f 是可微的，我们有 $u_x(x,\ t)=f'\left(x-\frac{t^2}{2}\right)$；由链式法则，$u_t(x,\ t)=-tf'\left(x-\frac{t^2}{2}\right)$．因此，$tu_x+u_t=0$，这就验证了方程．在 $t=0$ 时，我们得到 $u(x,\ 0)=f(x)$，即为所求．我们所推导出的解仅要求 f 可微． ■ 417

习题 7.3

在习题 1～6 中，确定给定波动问题或热传导问题的解，将答案以傅里叶逆变换表示，变量的取值范围是 $-\infty<x<\infty$，$t>0$.

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x,\ 0)=\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)=0$.

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x,\ 0)=\begin{cases}\cos x & 若 -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0 & 其他,\end{cases}$ $\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)=0$.

3. $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x,\ 0)=\mathrm{e}^{-x^2}$. [提示：7.2 节定理 5.]

4. $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{100}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，　$u(x,0)=\begin{cases}100 & 若-1<x<1,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

5. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，　$u(x,0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x}{x}$，　$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0.$

6. $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，　$u(x,0)=\begin{cases}1-\frac{|x|}{2} & 若-2<x<2,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

在习题7～20中，求解给定问题，假设每个问题中的函数具有傅里叶变换，变量的取值范围是$-\infty<x<\infty$，$t>0$.

7. $\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial t}=0$，　$u(x,0)=f(x).$

8. $a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial t}=0$，　$u(x,0)=f(x).$

9. $t^2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial t}=0$，　$u(x,0)=f(x).$

10. $a(t)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}=0$，　$u(x,0)=f(x).$

11. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial t}$，　$u(x,0)=f(x).$

12. $\frac{\partial u}{\partial t}+\sin t\frac{\partial u}{\partial x}=0$，　$u(x,0)=\sin x.$

13. $\frac{\partial u}{\partial t}=t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，　$u(x,0)=f(x).$

14. $\frac{\partial u}{\partial t}=a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，　$u(x,0)=f(x)$，其中$a(t)>0$.

15. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\frac{\partial u}{\partial t}=-u$，　$u(x,0)=f(x)$，　$u_t(x,0)=g(x).$

16. $\frac{\partial u}{\partial t}=e^{-t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，　$u(x,0)=e^{-|x|}.$

418

17. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0$，　$u(x,0)=\begin{cases}0.1 & 如果|x|<1,\\ 0 & 其他,\end{cases}$　$u_t(x,0)=0.$

18. $\frac{\partial u}{\partial t}=t\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$，　$u(x,0)=f(x).$

19. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}$，　$u(x,0)=f(x)$，　$u_t(x,0)=g(x).$

20. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-4\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}+3\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0$，　$u(x,0)=f(x)$，　$u_t(x,0)=g(x).$

21. **波动方程的达朗贝尔解.**

(a)验证

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-ct)+f(x+ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,ds$$

是例1中的边值问题的解.

(b)由(9)式和7.2节的习题19、20，推导出达朗贝尔解.

22. (a)利用达朗贝尔解来描述一个很长弦的振动，$c=1$，当$|x|\leqslant\frac{\pi}{2}$时，$f(x)=\cos x$，否则$f(x)$为0；

$g(x)=0$.

(b)画出弦在 $t=0$，$\pi/4$，$\pi/2$，π 时的形状.

专题问题：完成习题 23 和 24，**求解具有对流的热传导问题**.

23. 假设 $f(x)$ 具有傅里叶变换，求解边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+k\frac{\partial u}{\partial x},\quad -\infty<x<\infty, t>0,$$
$$u(x,0)=f(x).$$

这个问题模拟了一个与周围介质有热交换的长热棒中的热传导. 这种现象称为**对流**，k 是一个正常数，称为**对流系数**.（关于卷积形式的解参考 7.4 节习题 10.）

24. 对特殊情形：$c=1$，$k=0.5$，$f(x)=e^{-x^2}$，求解习题 23.

25. 求解边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3},\quad -\infty<x<\infty, t>0,$$
$$u(x,0)=f(x).$$

这个方程称为**线性化的 KdV 方程**.

26. **专题问题：梁的横振动**. 这个问题给出了计算 $g=0$ 时例 4 中傅里叶逆变换的概要. 你将需要 e^{ix^2} 的傅里叶变换，这由

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\cos x^2+i\sin x^2)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\omega^2}{4}+\sin\frac{\omega^2}{4}\right)+\frac{i}{2}\left(\cos\frac{\omega^2}{4}-\sin\frac{\omega^2}{4}\right)\quad(12)$$

419

给出. 计算这个变换的一个方法是利用复分析(参见[1]，5.5 节). 注意：也可以在前一节(5)式中令 $a=-i$ 得到该式. 但是这需要一个非平凡的验证，因为这个公式是对正实值 a 建立的. 如果在(12)式中令 $\omega=0$，即可得到菲涅尔积分

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\cos x^2+i\sin x^2)dx=\frac{1}{2}(1+i);$$

或等价地，令实部、虚部相等得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos x^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}\sin x^2dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(a)反过来，如何由菲涅尔积分推导出(12)式?

(b)利用(12)式证明 $\cos(ct\omega^2)$ 是

$$\frac{1}{\sqrt{2ct}}\cos\left(\frac{x^2}{4ct}-\frac{\pi}{4}\right)$$

的傅里叶变换.

(c)在例 4 中取 $g=0$，证明解是 f 和 $\cos(ct\omega^2)$ 的傅里叶逆变换的卷积，从而得出结论

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{ct\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(\frac{s^2}{4ct}-\frac{\pi}{4}\right)f(x-s)ds.$$

7.4 热传导方程和高斯核

在前一节，我们用傅里叶变换求解了熟悉的边值问题，比如热传导问题和波动问题. 解表示成包含初始数据的傅里叶变换的逆傅里叶变换. 在实际的数值应用中，更希望计算出这些傅里叶逆变换，将解用初始数据本身表示出来. 在这节以及下一节，我们以热传导方程和狄利克雷问题这两个重要应用来说明这一思想.

首先，我们考察热传导问题(7.3 节例 2)：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad (-\infty<x<\infty, t>0) \tag{1}$$

$$u(x,0)=f(x).$$

为应用傅里叶变换法，我们假设 f 具有傅里叶变换. 当我们推出解以后，我们将其应用到函数 f 可能没有傅里叶变换的情形.

由上一节例 2，我们知道

$$\hat{u}(\omega,t)=\hat{f}(\omega)e^{-c^2\omega^2 t}, \tag{2}$$

因此，应用傅里叶逆变换，得

420

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{-c^2\omega^2 t}e^{i\omega x}d\omega. \tag{3}$$

本节的目标是用 f 来表示这个傅里叶逆变换. 由(2)式，我们注意到$\hat{u}$是两个傅里叶变换的乘积，一个是$\hat{f}$，另一个是 $e^{-c^2\omega^2 t}$. 记住：傅里叶变换的乘积对应于卷积(7.2 节定理 4)，我们知道 u 是 f 和傅里叶变换为 $e^{-c^2\omega^2 t}$的函数的卷积. 正如我们即将看到的，这个函数就是所谓的**热核**或**高斯核**

$$g_t(x)=\frac{1}{c\sqrt{2t}}e^{-x^2/4c^2 t}.$$

(我们将热核 $g_t(x)$看成关于 x 的一族函数；对于每个 $t>0$，有一个相应的函数(图 1).)这导出如下重要结果.

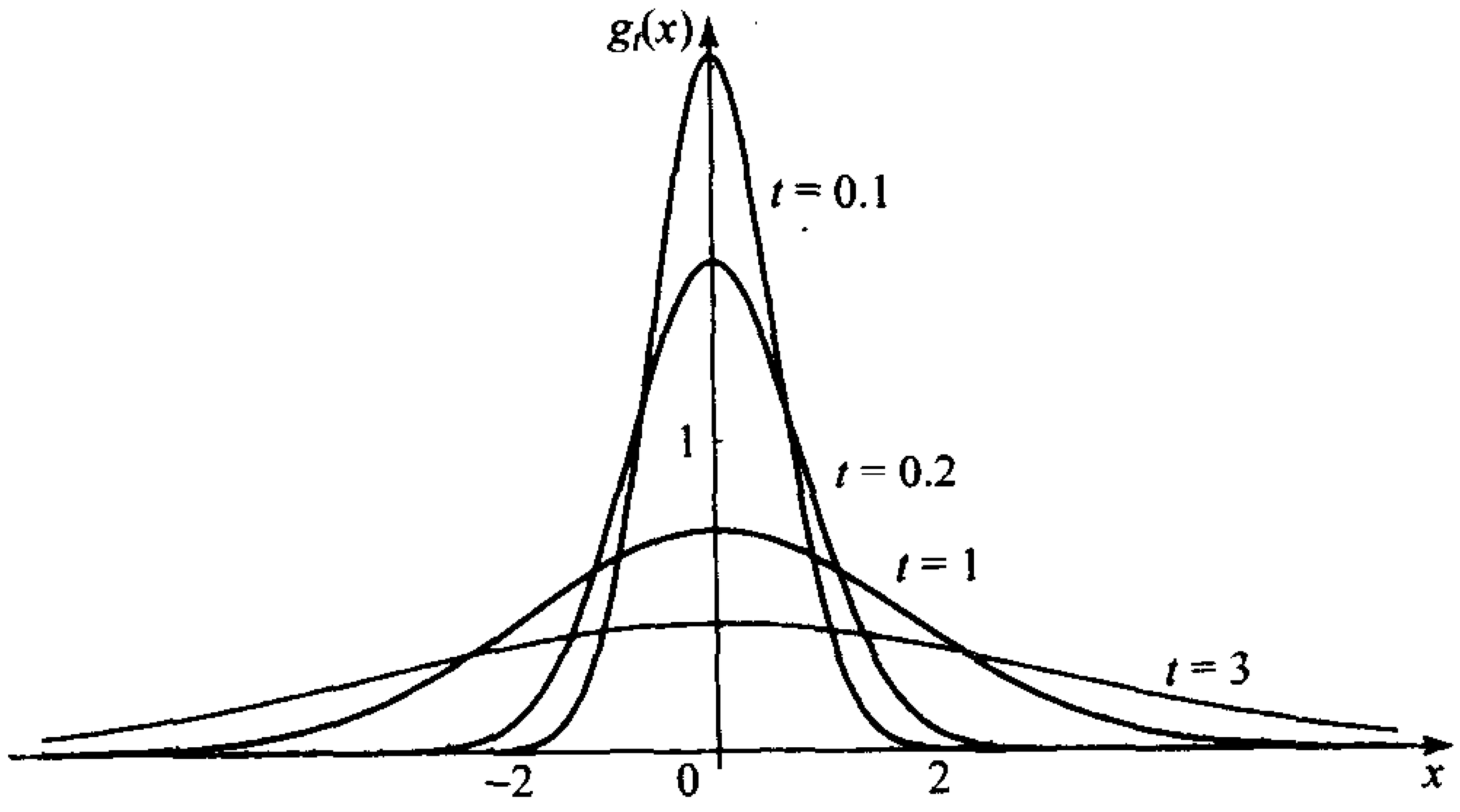


图 1 高斯核 $g_t(x)$是应用数学中最重要的函数之一. 对任意 $t>0$，$g_t(x)$的图都是一个钟形曲线，关于 y 轴对称. 当 t 趋近于零时，曲线越来越靠近零点. 即使当 t 变化时，每条曲线下的面积都是常数(见习题 29)

定理 1(热传导方程的卷积解) 带有初始温度分布 f 的热传导方程(1)的解是 f 和热核的卷积，更确切地，

$$u(x,t)=\frac{1}{c\sqrt{2t}}e^{-x^2/4c^2 t}*f=\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)e^{-(x-s)^2/4c^2 t}ds. \tag{4}$$

证明 我们必须证明函数 $g_t(x)=\frac{1}{c\sqrt{2t}}e^{-x^2/4c^2t}$ 具有傅里叶变换 $e^{-c^2\omega^2 t}$. 这立刻由 7.2 节定理 5 可得. 在定理中取 $\frac{a}{2}=\frac{1}{4c^2t}\left(\text{或 } a=\frac{1}{2c^2t}\right)$，我们得到

$$\hat{g}_t(\omega)=\frac{1}{c\sqrt{2t}}\sqrt{2c^2t}e^{-\omega^2c^2t}=e^{-\omega^2c^2t},$$

即为所求. ■

关于公式(4)，有如下注记：

- 由于函数的卷积是可交换的，所以我们有 $u(x,t)=f*g_t(x)$ 或 $u(x,t)=g_t*f(x)$，其中 f 是初始温度分布，而 g_t 是热核. 如果将卷积显式地写成积分，除 x 和 t 外，需要引入新的积分变量. 在(4)式中，我们用了变量 s，但是其他的选择也是可以的. 比如，可以将 $u(x,t)$ 写成

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-s)g_t(s)\mathrm{d}s \quad \text{或} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g_t(x-y)\mathrm{d}y.$$

[421]

- 由于当 $x\to\pm\infty$ 时热核(作为 x 的函数)很快衰减到 0，公式(4)可以用在许多有趣的情形，即使当 f 没有傅里叶变换(在 7.2 节意义下)时. 比如，f 是有界的或多项式.
- 由于公式(4)涉及除以$\sqrt{t}$和 t，我们不能简单地在公式中取 $t=0$ 来验证初始条件 $u(x,0)=f(x)$. 所以，在什么意义下解(4)满足初始条件？让我们将解(4)写成 $u(x,t)=g_t*f(x)$，其中 g_t 是热核. 解在下述意义下满足初始条件：$\lim\limits_{t\to 0}g_t*f(x)=f(x)$. 虽然我们将不证明这个极限，注意到，在 7.2 节例 4 中我们对函数序列证明了一个类似结果，它具有与热核相类似的性质(见习题 29(d)和(f)).

如果我们对数值值感兴趣，卷积可以用快速傅里叶变换(见第 10 章)来高效率地计算出来. 同样，利用(4)式，我们可以用一些特殊函数来表达解. 这些函数可以用来研究解的性质. 我们以所谓的**误差函数**(图 2)来说明，对所有 w，其定义为

$$\operatorname{erf}(w)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^w e^{-z^2}\mathrm{d}z, \tag{5}$$

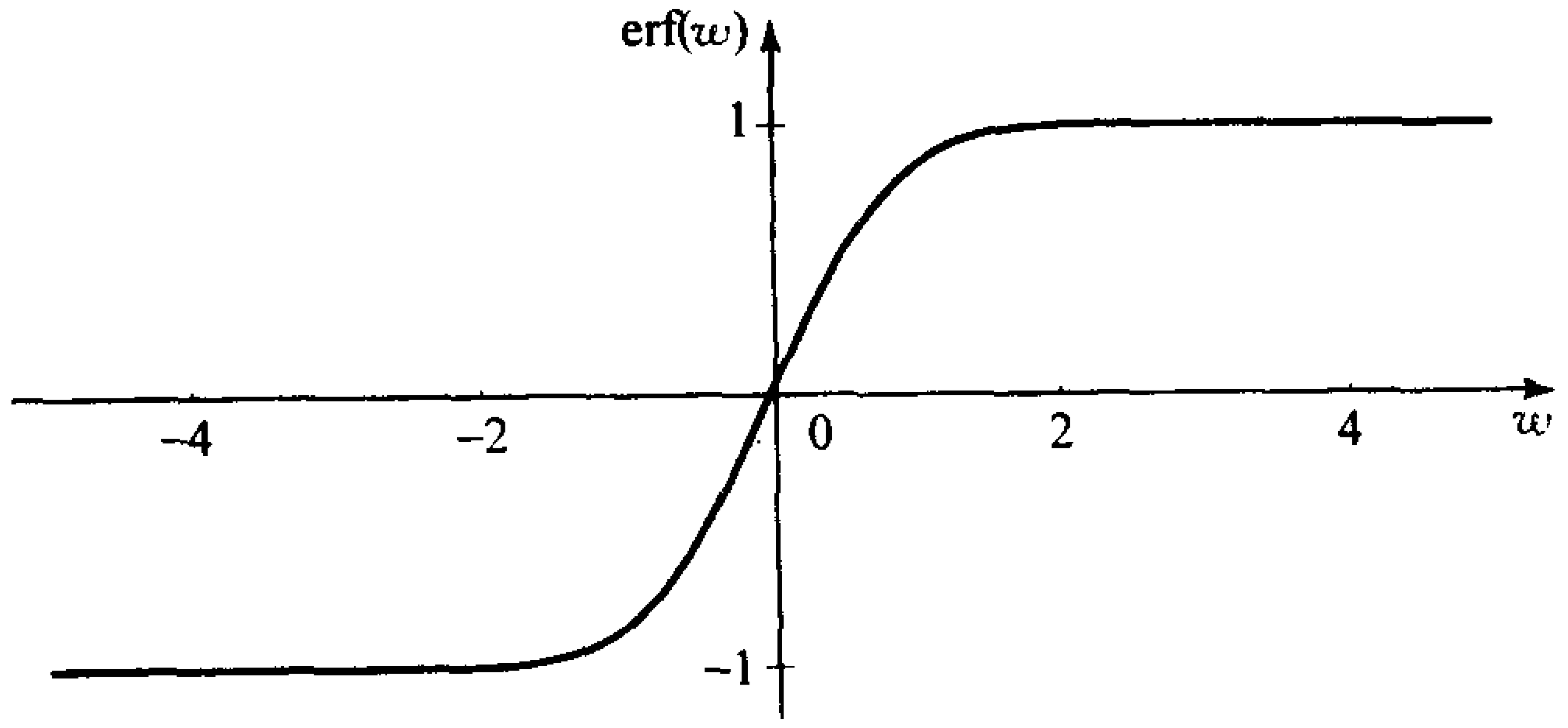


图 2 误差函数是高斯函数的积分

误差函数在应用数学和概率论的不同领域中都有应用．其数值已经列成表格，在许多计算机系统中作为标准函数．关于其基本性质，参看习题 15．在下面的例题中，我们用误差函数来表达给定热传导问题的解．

422

例 1　误差函数的应用

在无限长的线上求解热传导问题，$c=1$，初始温度分布为：当 $|x|<1$ 时，$f(x)=100$，否则 $f(x)$ 为 0．将答案用误差函数表示．

解　应用(4)式，我们得到

$$u(x,t)=\frac{50}{\sqrt{\pi t}}\int_{-1}^{1}e^{-(x-s)^2/4t}ds.$$

令 $z=\frac{x-s}{2\sqrt{t}}$，$dz=\frac{-1}{2\sqrt{t}}ds$，则

$$u(x,t)=\frac{100}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x-1}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x+1}{2\sqrt{t}}}e^{-z^2}dz=\frac{100}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^{\frac{x+1}{2\sqrt{t}}}e^{-z^2}dz-\int_0^{\frac{x-1}{2\sqrt{t}}}e^{-z^2}dz\right)$$

$$=50\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{t}}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{t}}\right)\right]\quad(\text{由}(5)).$$

利用这个公式，在图 3 中，我们画出 $u(x,t)$ 在不同 t 值时的图像．这些图像说明最初温度迅速降低，然后缓慢接近平衡温度 0．

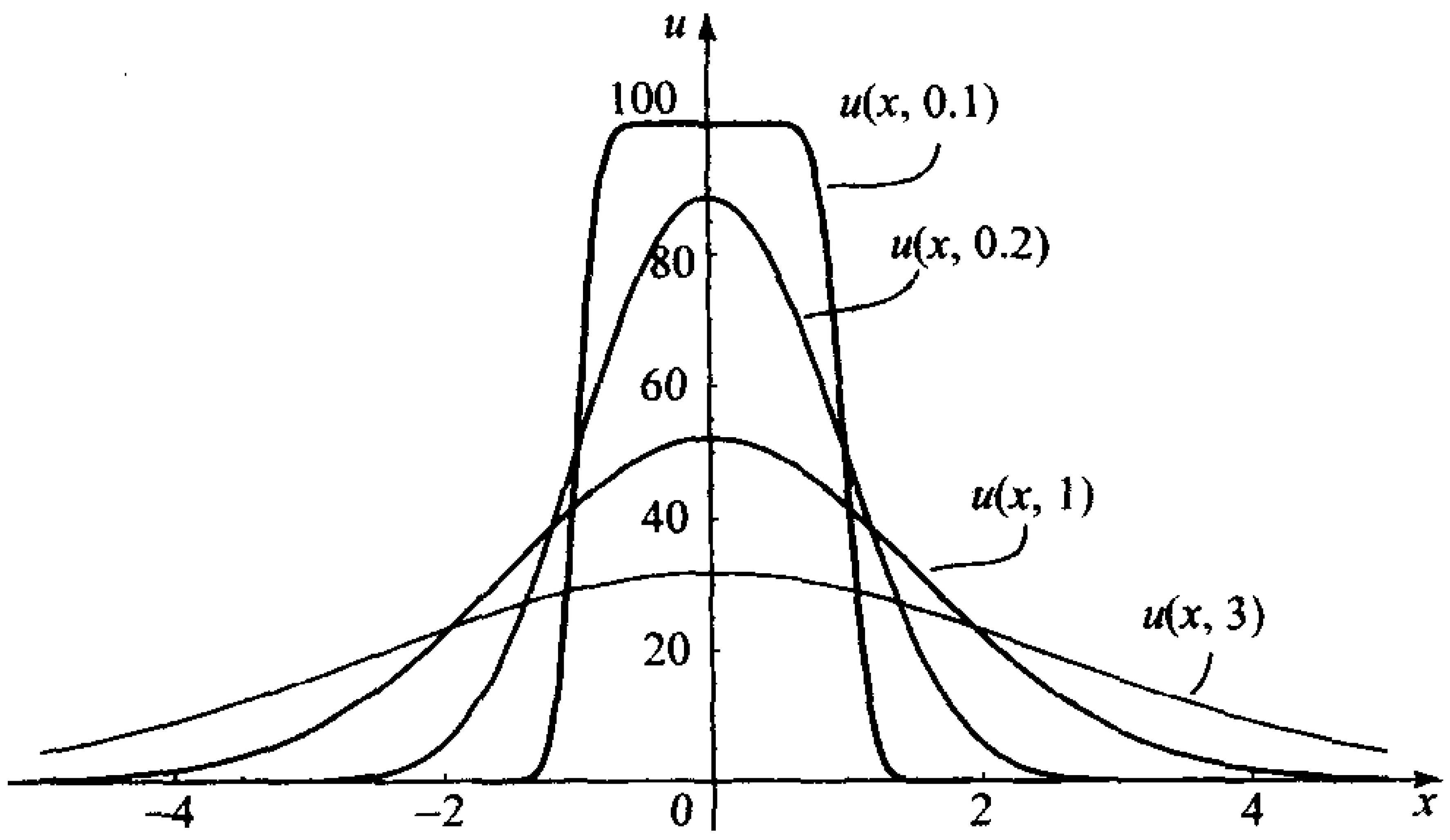


图 3　在 $t>0$ 的不同时刻，例 1 中的温度分布．当 t 很小时，棒中的温度接近于初始温度分布．当 t 增大时，温度传遍整个棒，最终趋于零

■

下面，我们考虑变系数热传导问题．

例 2　变系数热传导问题

求解

$$u_t=tu_{xx},\quad(-\infty<x<\infty,t>0),$$

$$u(x,0)=f(x).$$

将答案表达成卷积．

解　我们不能应用(4)式，因为这里的问题涉及一个新的方程．我们首先应用傅里叶变换

法，然后运用导出(4)式的同样方法计算解．对问题作傅里叶变换，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}(\omega,t)=-t\omega^2\hat{u}(\omega,t),\quad \hat{u}(\omega,0)=\hat{f}(\omega).$$

423

求解这个一阶微分方程，我们得到

$$\hat{u}(\omega,t)=\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}\omega^2}.$$

因此，$u(x,t)$是 f 和其傅里叶变换为 $\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}\omega^2}$ 的函数的卷积．利用 7.2 节定理 5，$a=\frac{1}{t^2}$，我们得到

$$\mathcal{F}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t^2}}}{t}\right)(\omega)=\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}\omega^2}.$$

因此

$$u(x,t)=f*\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t^2}}}{t}=\frac{1}{t\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\mathrm{e}^{-\frac{(x-s)^2}{2t^2}}\mathrm{d}s.$$ ■

由 3.5 节中热传导方程的推导，我们知道例 2 中的微分方程模拟了棒中随时间变化的热扩散率等于 t 的热传导．因此，我们希望热传导速率随时间变化．在下面的例题中，我们通过将例 1 和例 2 中的解作比较来说明这个思想．

例 3　热扩散率的变化

(a)在例 2 中，取 f 如例 1，用 $\mathrm{erf}(x)$来表达解．

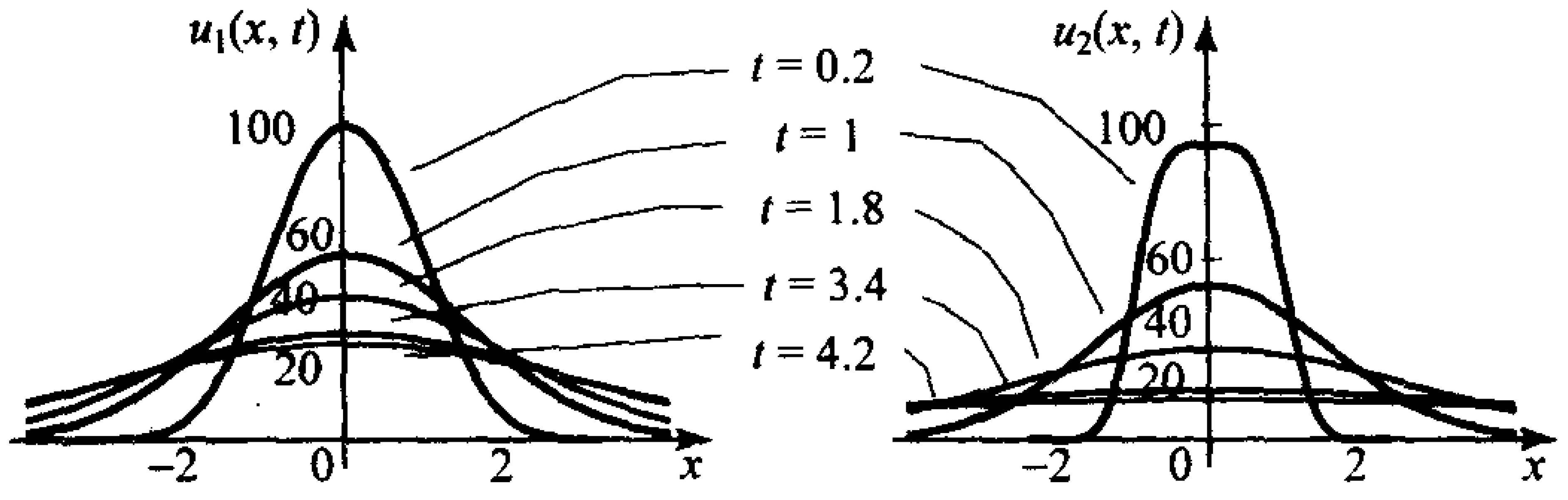
(b)记例 1 中的解为 $u_1(x,t)$，(a)部分的解为 $u_2(x,t)$．对 $t=0.2$，1，1.8，3.4，4.2，画出图像并比较 u_1 和 u_2．

解　(a)在例 2 所得到的结果中代入给定 f，得到

$$\begin{aligned}
u(x,t)&=\frac{100}{t\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-s)^2}{2t^2}}\mathrm{d}s\\
&=\frac{100}{t\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{x+1}{\sqrt{2}t}}^{\frac{x-1}{\sqrt{2}t}}\mathrm{e}^{-z^2}(-\sqrt{2}t)\mathrm{d}z\quad\left(\text{令 } z=\frac{x-s}{\sqrt{2}t},\mathrm{d}z=-\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2}t}\right)\\
&=\frac{100}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^{\frac{x+1}{\sqrt{2}t}}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z-\int_0^{\frac{x-1}{\sqrt{2}t}}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z\right)\\
&=50\left[\mathrm{erf}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}t}\right)-\mathrm{erf}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}t}\right)\right]\quad(\text{由}(5)).
\end{aligned}$$

(b)利用这个公式，我们在图 4 中对指定的 t 值画出了解的图像．图像显示对小 t 值，$u_1(x,t)$(例 1 中的温度)比 $u_2(x,t)$(例 2 中的温度)下降得快．当 t 增加时，例 2 中的热扩散率增加，这导致温度快速变化，如在时刻 $t=3.4$ 和 $t=4.2$ 的图像所示． ■

至今为止，我们所求的热传导方程解都要求初始温度分布具有一定的可积性．但是在某些情形中，虽然初始温度分布不可积，但是问题的解是显然的．考虑初始温度分布：对所有 x，$f(x)=1$．显然，$f(x)$在整个实线上不可积，但是直观地，该问题具有解 $u(x,t)=1$．正如定理 1 后的注记所言，该问题以及其他许多问题都可以直接应用(4)式求解．下面就是一个有趣的例子．



[424]

图 4 热扩散率的变化及其对解的影响

例 4 周期初始温度分布

求解热传导方程 $u_t=u_{xx}$，其中 $t>0$，$-\infty<x<\infty$，给定初始温度分布 $u(x, 0)=1+\cos 2x(-\infty<x<\infty)$(图 5).

解 注意，$f(x)=1+\cos 2x$ 在整个实线上不可积，所以其傅里叶变换就不是在 7.2 节的意义下定义的.（利用广义函数，其傅里叶变换可以定义，见 7.8 节.）但是因为这个函数是有界的，(4)式中的卷积存在. 我们将计算它，并且证明事实上它就是所求的解. 为方便起见，我们记 $u(x, t)=g_t * f(x)$，其中 $g_t(x)$是高斯核，$f(x)=1+h(x)$，这里 $h(x)=\cos 2x$. 于是

$$u(x,t) = g_t * (1+h)(x) = g_t * 1(x) + g_t * h(x).$$

对所有 x，我们有 $g_t * 1(x)=1$(习题 19). 同样，由 7.2 节例 3，我们有

$$g_t * h(x) = \hat{g}_t(2)\cos 2x = e^{-4t}\cos 2x,$$

最后一个等式中，我们利用了在定理 1 证明过程得到的 g_t 的傅里叶变换. 将这些结果加起来，我们得到

$$u(x,t) = 1 + e^{-4t}\cos 2x.$$

显然，u 满足初始条件：$u(x, 0)=1+e^{-4\cdot 0}\cos 2x=1+\cos 2x=f(x)$. 同样，可以直接验证 u 是热传导方程的解：$u_t=-4e^{-4t}\cos 2x$，$u_{xx}=e^{-4t}(-4)\cos 2x$，因此 $u_t=u_{xx}$. 关于这个例题的推广请参见习题 14. 解如图 6 所示.

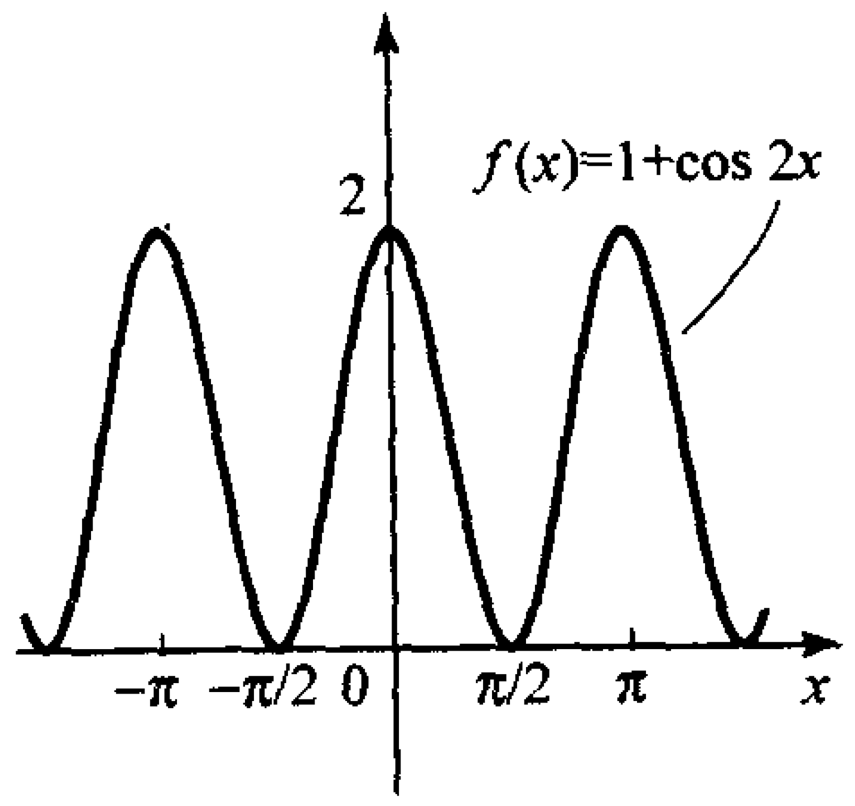


图 5 例 4 中的初始温度分布

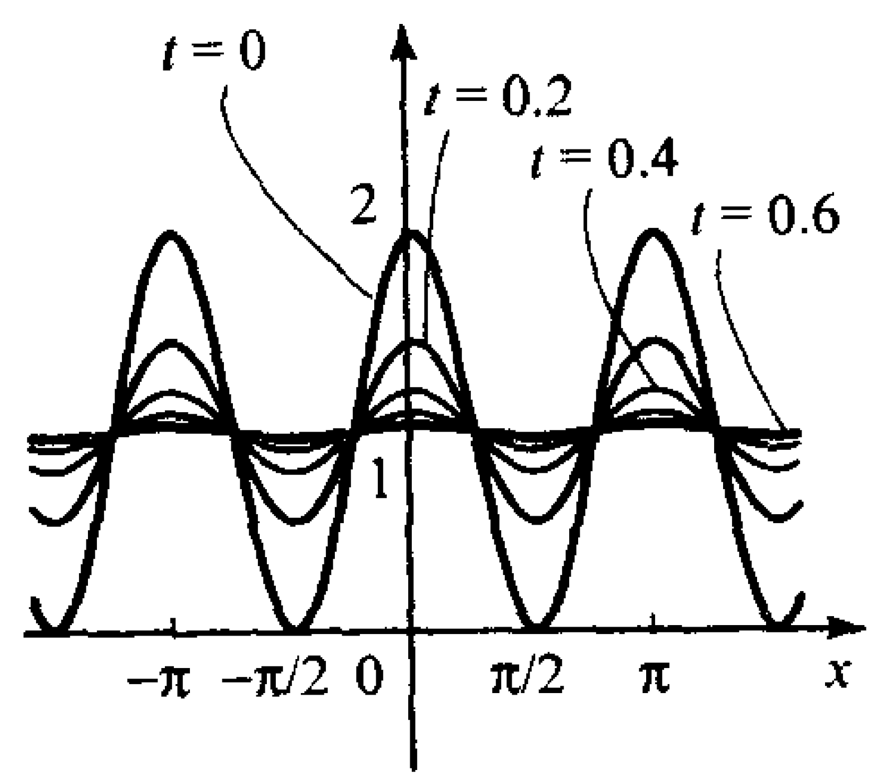


图 6 例 4 中的温度分布. 注意，当 $t\to\infty$时，对所有 x，例 4 中的解是如何快速趋近于极限$u(x, t)=1$的 ■

我们将在 7.9 节重新回到热传导方程，那里将用广义函数及其傅里叶变换，求解非齐次方程.

[425]

习题 7.4

在习题 1～12 中，利用卷积、误差函数，以及傅里叶变换的运算性质，求解边值问题．取$-\infty<x<\infty$，$t>0$.

1. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$， $u(x,0)=\begin{cases}20 & \text{如果 } -1<x<1, \\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$

2. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{1}{100}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$， $u(x,0)=\begin{cases}100 & \text{如果 } -2<x<0, \\ 50 & \text{如果 } 0<x<1, \\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$

3. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$， $u(x,0)=70\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

4. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$， $u(x,0)=3+2\sin 3x$.

5. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$， $u(x,0)=x^2$.

6. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$， $u(x,0)=\mathrm{e}^x$.

7. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=t^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$， $u(x,0)=f(x)$.

8. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=-\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$， $u(x,0)=f(x)$.

9. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\mathrm{e}^{-t}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$， $u(x,0)=f(x)$.

10. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+k\dfrac{\partial u}{\partial x}(k>0)$， $u(x,0)=f(x)$.

11. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a(t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a(t)>0)$， $u(x,0)=f(x)$.

12. $-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}$， $u(x,0)=f(x)$.

13. 取 $f(x)$如例 1，求解习题 9．将解与例 1 的解比较．仿照例 3，解释你的答案．

14. **专题问题：2π－周期的初始温度分布**．假设 $f(x)$是分段光滑的 2π－周期函数，并将其傅里叶级数写成

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

(a)试证：带有初始条件 $u(x,0)=f(x)$的热传导方程 $u_t=u_{xx}$ ($t>0$，$-\infty<x<\infty$)的解为

$$u(x,t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n^2t}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

[提示：利用例 3 和 7.2 节习题 47．当计算(4)式中的卷积积分时，首先假设可以逐项积分，以得到所需结论．然后，将结果代入热传导方程，以验证它是解．利用 2.9 节的定理 5，说明可以逐项微分.]

(b)利用魏尔斯特拉斯的 M－判别法证明：当 $t\to\infty$时，对所有 x，$u(x,t)$一致收敛到 a_0．因此，稳态解等于 a_0，它是初始温度分布在长度为 2π 的任意区间上的平均温度． [426]

15. **专题问题：误差函数的基本性质**．建立如下性质．

(a)$\mathrm{erf}(-x)=-\mathrm{erf}(x)$(erf 是奇函数).

(b)$\mathrm{erf}(0)=0$，$\mathrm{erf}(\infty)=1$. [提示：利用 7.2 节(4)式.]

(c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$. 得出结论 erf 是严格增的.

(d) $\int \mathrm{erf}(x)\mathrm{d}x = x\mathrm{erf}(x)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}+C$.［提示：两边求微分.］

(e) $\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}x^{2n+1}$.

(f)试证：对 $0\leqslant x<\infty$，$\mathrm{erf}(x)\approx 1-\frac{e^{-x^2}}{1+1.248\,386\,171\,5x}$，误差小于 0.01.（这个公式由 S. 蒙特高麦利一史密斯教授提供.）

16. **补余误差函数**定义为

$$\mathrm{erfc}(w)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_w^{\infty}e^{-z^2}\mathrm{d}z,\quad \text{对所有 } w.$$

(a)试证：$\mathrm{erf}(w)+\mathrm{erfc}(w)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-z^2}\mathrm{d}z=1$.［提示：7.2 节(6)式.］

(b)得出结论 $\mathrm{erfc}(w)=1-\mathrm{erf}(w)$.

(c)利用误差函数的图像，画出补余误差函数的图像.

17. (a)利用卷积求解热传导问题，已知初始温度分布为：当 $a<x<b$ 时，$f(x)=T_0$，否则 $f(x)$ 为 0.

(b)将答案以误差函数表达.

18. 考虑例 1 中的热传导问题. 改变 c，取 $c=1$，$c=2$，$c=1/2$. 对 $-10<x<10$，$0<t<20$，画出相应解的图像. 将热传导看成 c 的函数，可以得出什么结论? 利用图像验证你的答案.

19. **常值函数作为初始温度分布**. 显然，如果我们将初始温度分布 $f(x)$ 取成恒等于 T_0，则热传导方程(1)的解是 $u(x,t)=T_0$，其中 x 取任意值，$t>0$. 利用(4)式验证这个事实. 特别地，如果 $f(x)=1$，则 $g_t*f(x)=1$ 对所有 x 和 $t>0$ 成立.

20. **阶梯函数作为初始温度分布**.

(a)利用(4)式验证：如果初始温度分布是：当 $x>0$ 时，$f(x)=T_0$，否则 $f(x)$ 为 0，则

$$u(x,t)=\frac{T_0}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right)\right].$$

(b)对几个不同的 $t>0$ 值，画出解的图像. 你有什么发现? 图像与你的希望吻合吗?

21. 令 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 是一根无限长杆的初始温度分布，$c=1$.

(a)利用(3)式，得到 $u(x,t)=\int_0^1 e^{-\omega^2 t}\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega$.

(b)通过代入方程和检验初始值，验证(a)中的答案确实是解.

(c)试证：$u(0,t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}\mathrm{erf}(\sqrt{t})$. 这个函数的物理解释是什么?

［427］22. 对 $t>0$ 的不同值，画出习题 21 中温度分布的图像. 然后利用图像估算 $x=0$ 处温度何时降到 0.8.

23. **平移初始数据**. 如果你将初始温度分布平移 a 单位，即将 $f(x)$ 换成 $f(x-a)$，则可期望解在 x 轴上也平移同样长度. 利用(4)式证明：如果 $f(x)$ 换成 $f(x-a)$，则解变成 $u(x-a,t)$. 从而验证上述事实.［提示：变量代换.］

24. **初始高斯温度分布**. 按照下述步骤证明：带有初始温度分布 $f(x)=e^{-kx^2}$ $(k>0)$ 的热传导方程(1)的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4kc^2t+1}}e^{\frac{-kx^2}{4kc^2t+1}}.$$

(a)令 a，$b>0$，证明$\mathcal{F}(e^{-ax^2} * e^{-bx^2}) = \frac{1}{2\sqrt{ab}} e^{-\frac{\omega^2}{4ab}(a+b)}$.

(b)利用(a)，证明

$$e^{-ax^2} * e^{-bx^2} = \frac{1}{\sqrt{2(a+b)}} e^{-\frac{ab}{a+b}x^2}.$$

(c)推导出给定的解. [提示：解是两个高斯函数的卷积.]

在习题 25～28 中，(a)利用习题 23 和 24 的结果，求解满足给定初始温度分布的热传导方程(1).

(b)取 $c=1$，对不同的 t 值，画出解的图像来说明你的答案.

25. $f(x)=e^{-(x-1)^2}$.

26. $f(x)=100e^{-(x+1)^2}$.

27. $f(x)=e^{-(x-2)^2/2}$.

28. $f(x)=e^{-(x-2)^2}$.

29. **专题问题：高斯核的性质.**

证实高斯核

$$g_t(x) = \frac{1}{c\sqrt{2t}} e^{-x^2/4c^2t} \qquad (c>0, t>0, -\infty<x<\infty)$$

的如下性质. 如有可能，与 7.2 节例 4 中函数序列的性质比较.

(a) $g_t(x)$是关于 x 的偶函数，并对所有 x，有 $g_t(x)\geqslant 0$.

(b) $g_t(x)$的图像是中心在原点的钟形曲线. 对 $c=1$ 和 $t=1$，2，3，画出 $g_t(x)$的图像，以验证这个断言.

(c) $\lim\limits_{t\to 0} g_t(0)=\infty$. (当 t 趋近于 0 时，$g_t(x)$的图像变得越来越集中于原点附近，其图像之下、x 轴之上的面积绝大部分集中在 0 点附近. 同样，可以通过图像来验证这个断言.)

(d)在 $g_t(x)$的图像之下和 x 轴之上的面积为 $\int_{-\infty}^{\infty} g_t(x)\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$.

(e) $g_t(x)$的傅里叶变换为$\hat{g}_t(\omega)=e^{-c^2t\omega^2}$.

428

(f)如果 f 是可积的分段光滑函数，则在其连续点处，我们有

$$\lim_{t\to 0} g_t * f(x) = f(x).$$

在热传导问题解的意义下，验证这个断言. 另外，还可以利用傅里叶变换以及事实$\lim\limits_{t\to 0}\mathcal{F}(g_t)(\omega)=1$，这是(c)的推论.

7.5 狄利克雷问题和泊松积分公式

在前面一节中，我们利用卷积将热传导问题的解写成包含初始温度分布和一个固定热核的积分(卷积)形式. 本节，我们将利用类似步骤，研究**上半平面内的狄利克雷问题**：

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (-\infty<x<\infty, y>0), \tag{1}$$

$$u(x,0) = f(x) \quad (\text{边值}), \tag{2}$$

我们的目标是求解这个问题，并且将解 $u(x, y)$写成边界函数 $f(x)$和一个固定核的卷积，这个核就是所谓的**泊松核**

$$P_y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{x^2+y^2} \qquad (-\infty<x<\infty, y>0). \tag{3}$$

将这个核看成一族关于 x 的函数(图1). 对每个 $y>0$, 我们都有一个函数. P_y 的傅里叶变换对我们的求解很关键. 利用傅里叶变换表, 我们有

$$\hat{P}_y(\omega)=\mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{x^2+y^2}\right)(\omega)=\mathrm{e}^{-y|\omega|}. \tag{4}$$

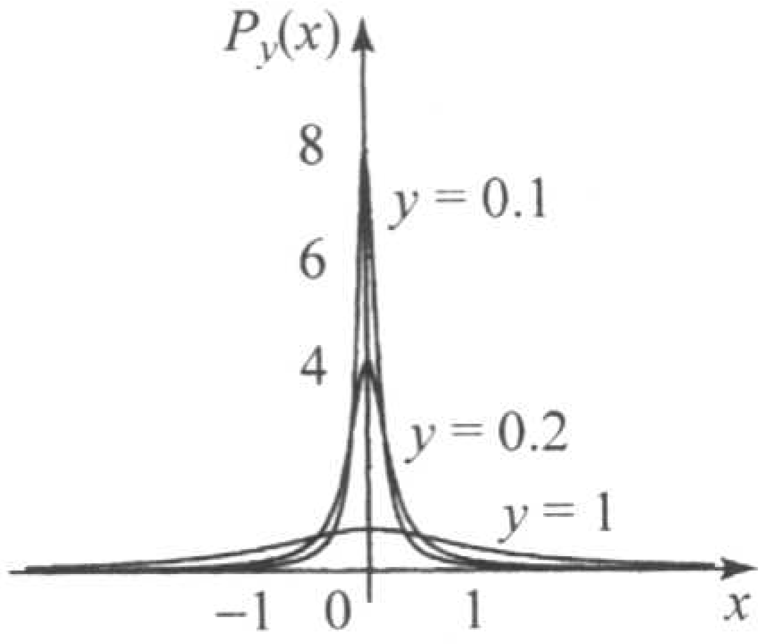


图1 泊松核

定理1(泊松积分公式) 带有边值(2)的拉普拉斯方程(1)的解由**泊松积分公式**

$$u(x,y)=P_y*f(x)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(s)}{(x-s)^2+y^2}\mathrm{d}s \tag{5}$$

给出.

这个公式说明, 上半平面内的狄利克雷问题的解 $u(x,y)$ 是边界函数 $f(x)$ 和泊松核 $P_y(x)$ 的卷积.

证明 为推导这个公式, 我们假设 f 具有傅里叶变换, 并且对所有 $y>0$ 和所有 ω, $\hat{u}(\omega,y)$ 有界. 对(1)和(2)式关于变量 x 作傅里叶变换, 得到

429

$$-\omega^2\hat{u}(\omega,y)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\hat{u}(\omega,y)=0;\quad \hat{u}(\omega,0)=\hat{f}(\omega).$$

求解 $\hat{u}(\omega,y)$ 的微分方程, 我们得到

$$\hat{u}(\omega,y)=A(\omega)\mathrm{e}^{-\omega y}+B(\omega)\mathrm{e}^{\omega y}.$$

由于 $\hat{u}(\omega,y)$ 是有界的, 这要求在 $\omega<0$ 时 $A(\omega)=0$, 而在 $\omega>0$ 时 $B(\omega)=0$. 因此, 我们可以写成 $\hat{u}(\omega,y)=C(\omega)\mathrm{e}^{-y|\omega|}$. 令 $y=0$, 再利用变换后的边界条件和(4)式, 我们得到

$$\hat{u}(\omega,y)=\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{-y|\omega|}=\hat{f}(\omega)\hat{P}_y(\omega),$$

由7.2节定理4知, u 是 f 和 P_y 的卷积, 得证. ■

必须指出, 狄利克雷问题(1)~(2)的解并不唯一. 为说明这点, 考虑函数 $v(x,y)=y$. 可以验证 $v(x,y)$ 满足(1), 并且在 x 轴上等于零. 因此, 如果 $u(x,y)$ 是(1)~(2)的解, 则 $u(x,y)+y$ 也是解. 从而(1)和(2)的解不唯一. 这有点问题, 因为我们倾向于认为狄利克雷问题模拟了稳态问题, 所以我们希望解是唯一的. 问题出在: 当陈述(1)和(2)时, 我们并没有施加足够多的条件, 以保证解的唯一性. 可以证明, 通过对(1)和(2)加上有界性条件, 比如, 对所有的 x 和 $y>0$, 有

$$|u(x,y)|\leqslant M,$$

则只要边界函数 $f(x)$ 有界, 问题就具有唯一的有界解, 由(5)式给出.

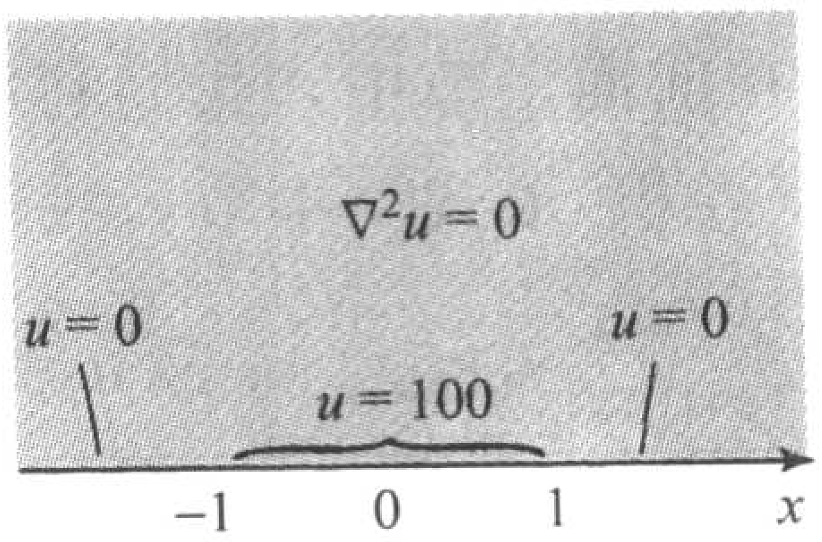


图2 狄利克雷问题

例1 **上半平面内的狄利克雷问题: 等温线**

(a)求解图2中的狄利克雷问题.

(b)确定上半平面内的等温线.

解 我们有: 当 $|x|<1$ 时, $f(x)=100$, 否则 $f(x)$ 为0. 应用(5)式, 我们有

$$u(x,y)=\frac{100y}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}s}{(x-s)^2+y^2}=\frac{100}{\pi y}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}s}{\left(\frac{x-s}{y}\right)^2+1}$$

$$=\frac{100}{\pi}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{y}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{-1-x}{y}\right)\right\}$$

$$=\frac{100}{\pi}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{1+x}{y}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{y}\right)\right\}\qquad (\tan^{-1}(u)\text{ 是奇数}).$$

(b)由于温度的边界值，显然上半平面内的温度介于 0 和 100 之间. 因此，为求出等温线，我们必须求解 $u(x, y)=T$，其中 $0<T<100$. 我们有

$$\tan^{-1}\left(\frac{1+x}{y}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{y}\right)=\frac{\pi T}{100}.$$

430

两边同时取正切，并利用恒等式

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b},$$

化简后，得到

$$\frac{2y}{x^2+y^2-1}=\tan\left(\frac{\pi T}{100}\right)\tag{6}$$

对 $T=50$，右端是无穷大. 此时，满足方程的唯一方法是令 $x^2+y^2-1=0$，或 $x^2+y^2=1$. 此时的等温线是以(0, 0)为中心、1 为半径的圆周上的圆弧(在半平面内). 对其他的 T 值，利用(6)式，得到

$$x^2+y^2-2\cot\left(\frac{\pi T}{100}\right)y=1.$$

通过配方，得到

$$x^2+\left(y-\cot\left(\frac{\pi T}{100}\right)\right)^2=1+\cot^2\left(\frac{\pi T}{100}\right)=\csc^2\left(\frac{\pi T}{100}\right).$$

因此，等温线 $u(x, y)=T$ 是以 $\left(0, \cot\left(\frac{\pi T}{100}\right)\right)$ 为中心、$\csc\left(\frac{\pi T}{100}\right)$ 为半径的圆周上的圆弧. 当 T 趋近于 50 时，中心趋近于(0, 0)，半径趋近于 1，这验证了我们前面的结论. 等温线如图 3 所示，它们都结束于点(±1, 0)，与 T 无关.

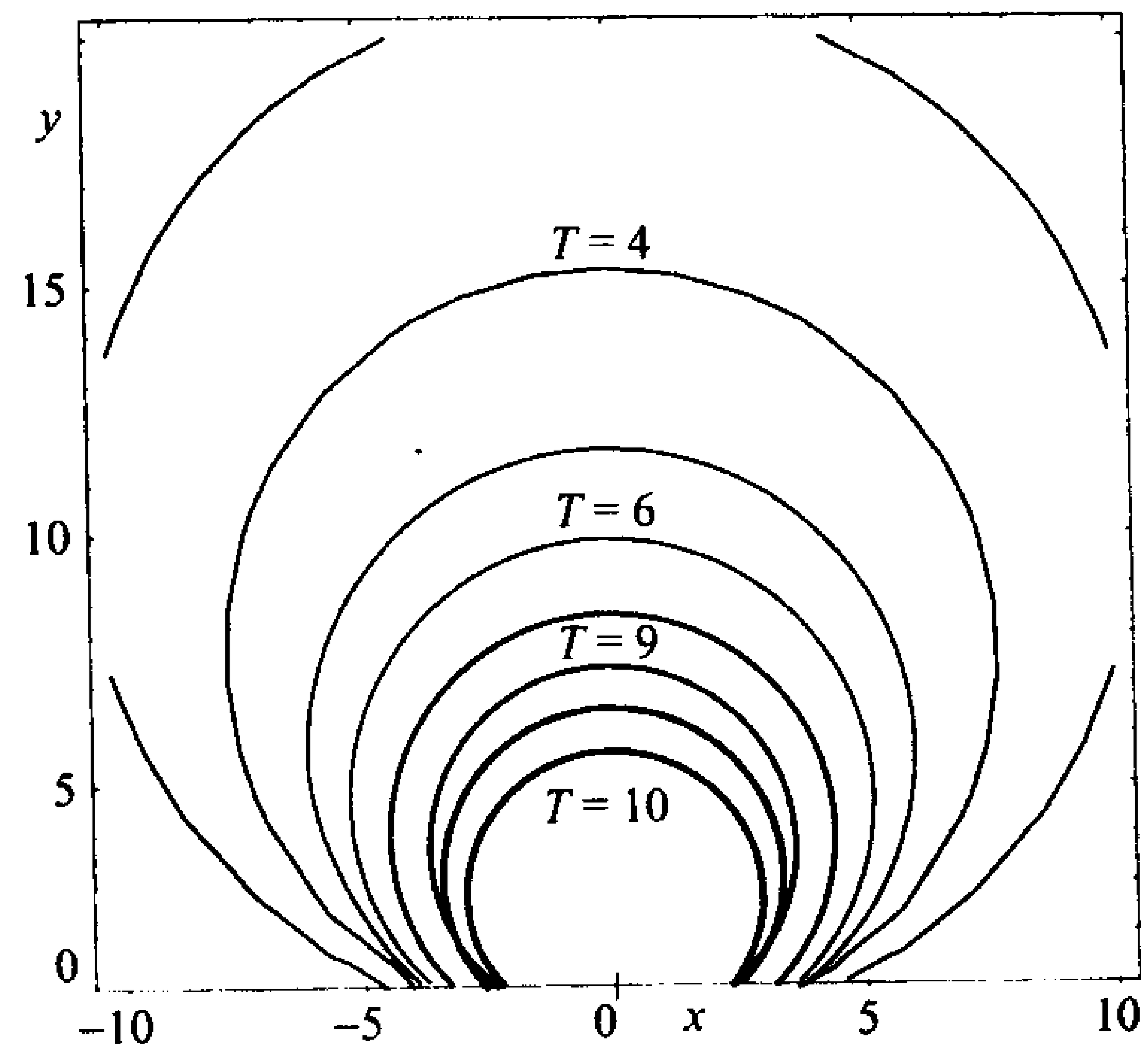


图 3 例 1 中的等温线是圆弧，中心在 y 轴上

431

习题 7.5

在习题 1～4 中，对给定的边界数据，求解狄利克雷问题(1)～(2).

1. $f(x)=\begin{cases}50 & 若 -1<x<1,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}100(1+x) & 若 -1<x<0,\\ 100(1-x) & 若 0<x<1,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

3. $f(x)=\cos x$.

4. $f(x)=1+\sin x$.

5. **泊松核的半群性质**．利用傅里叶变换证明 $P_{y_1} * P_{y_2}(x)=P_{y_1+y_2}(x)$. 这被称为泊松核的半群性质.

6. (a)对边界数据 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，求解狄利克雷问题.［提示：用 P_1 来表达 f，然后利用习题 5.］

   (b)此时的等温线是什么？

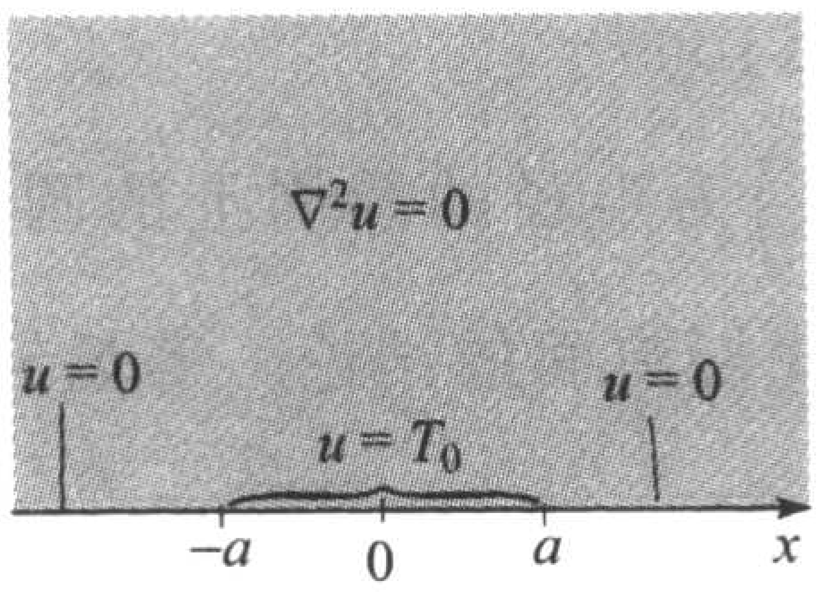
   (c)画出等温线，以验证(b)的答案.

7. 对 $f(x)=\dfrac{1}{4+x^2}$，重做习题 6.

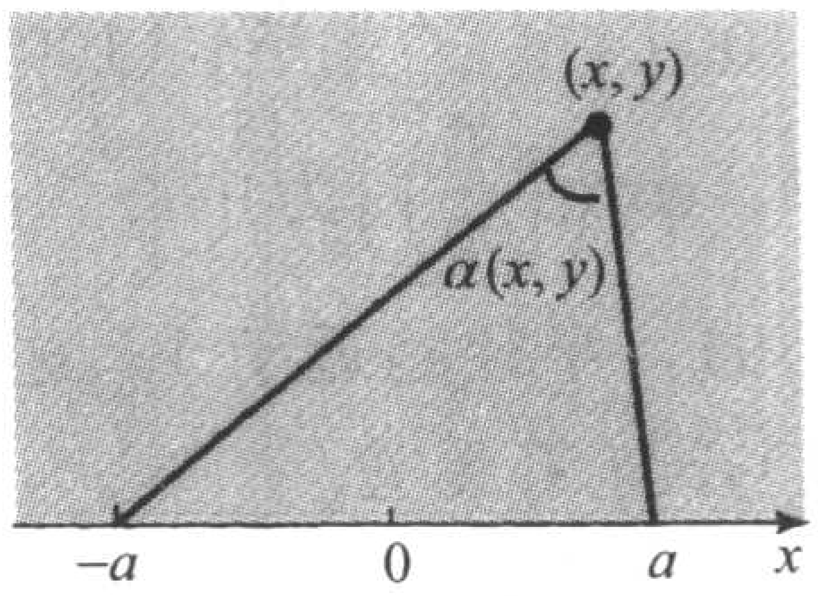
8. 求解图中的狄利克雷问题，得到

$$u(x,y)=\frac{T_0}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{a+x}{y}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{a-x}{y}\right)\right].$$

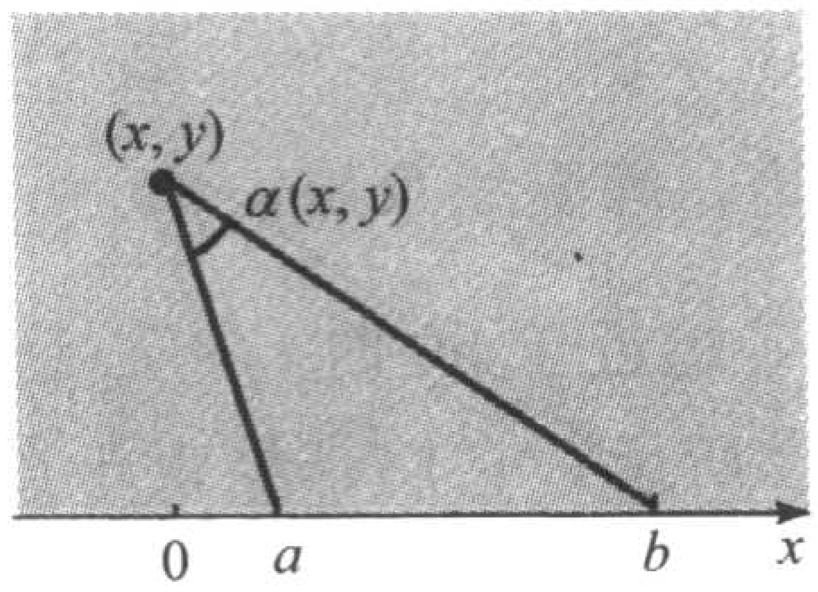
   仿照例 1，得出你的解，并解释本题是如何推广例 1 的.



习题 8 的图



习题 10 的图



习题 12 的图

9. 参考习题 8，证明等温线 $u(x,\ y)=T$，$0<T<T_0$，是以 $\left(0,\ a\cot\left(\dfrac{\pi T}{T_0}\right)\right)$ 为中心、$a\csc\left(\dfrac{\pi T}{T_0}\right)$ 为半径的圆在上半平面中的弧. 当 $T=\dfrac{T_0}{2}$ 时，结果如何？

10. 参考习题 8，令 $\alpha(x,\ y)$ 表示点 $(x,\ y)$ 与 x 轴上的区间 $[-a,\ a]$ 所夹的角.

    (a)试证：$u(x,\ y)=\dfrac{T_0}{\pi}\alpha(x,\ y)$. 因此，习题 8 中狄利克雷问题的解有一个简单的几何解释，试陈述之.

    (b)如何利用(a)确定习题 9 给定的等温线？

11. 参考习题 8，取 $a=1$，$T_0=100$，画出曲面 $z=u(x,\ y)$，$y>0$. 这个曲面有何意义？在答案中要特别注意当 $y\to 0$ 和 $y\to\infty$ 情形.

432

12. (a)求解上半平面内的狄利克雷问题，其中

$$f(x)=\begin{cases}T_0 & 若\ a<x<b,\\ 0 & 其他,\end{cases}$$

从而得到

$$u(x,y)=\frac{T_0}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{b-x}{y}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{a-x}{y}\right)\right].$$

(b)试证：$u(x,\ y)=\frac{T_0}{\pi}\alpha(x,\ y)$，其中 $\alpha(x,\ y)$ 表示点 $(x,\ y)$ 与 x 轴上的区间 $[a,\ b]$ 所夹的角(见图).

13. **泊松核的性质** 在完成这个习题时，请将结果与前面一节中的热传导核性质作比较.

(a) $P_y(x)$ 是关于 x 的偶函数；并对所有 x，有 $P_y(x)\geqslant 0$.

(b) $P_y(x)$ 的图像是中心在原点的钟形曲线.（直接以图像说明这个部分.）

(c)我们有 $P_y(0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{y}$；从而 $\lim\limits_{t\to 0}P_y(0)=\infty$. 因此，当 t 趋近于 0 时，$P_y(x)$ 的图像变得越来越集中于原点附近，其图像之下与 x 轴之上的面积绝大部分集中在原点附近.

(d)对所有 $y>0$，在 $P_y(x)$ 的图像之下与 x 轴之上的面积为 $\int_{-\infty}^{\infty}P_y(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}$.

(e) $P_y(x)$ 的傅里叶变换为 $\mathrm{e}^{-y|\omega|}$.（利用傅里叶变换表.）

(f)如果 f 是可积的分段光滑函数，则在其连续点处，我们有 $\lim\limits_{y\to 0}P_y * f(x)=f(x)$.（这个结果的严格证明很难，但是可以利用傅里叶变换来验证它.）

7.6 傅里叶余弦变换和正弦变换

至今为止，本章所考虑的边值问题的初始或边界数据都是定义在整个实线上的. 很容易想象带有定义在半直线上的边界或初始数据的类似问题. 例如，考虑一端无限延伸的棒中的热传导问题，此时，初始温度分布将由定义在半实线上的函数给出. 再如，考虑第一象限内的狄利克雷问题，此时的边界由两条半直线构成. 下节将介绍更多这类问题，为处理这些问题，我们在本节中引入两个与傅里叶积分密切相关的变换：余弦傅里叶变换和正弦傅里叶变换. 这些变换的基本理论已经在 7.1 节和 7.2 节中作了介绍. 你将看到，这些变换与傅里叶级数中的半幅展开有些类似.

基本的问题是：当函数 $f(x)$ 仅对 $x>0$ 有定义时，我们如何应用傅里叶变换？由前面的傅里叶级数和半幅展开，我们知道答案就是利用 f 的偶或奇(非周期)延拓. 433

如果我们将 f 延拓成整个实线上的偶函数(图 1)，再应用傅里叶积分表示(7.1 节定理 1)，我们得到 **f 的傅里叶余弦积分表示**：

$$\boxed{f(x)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega\qquad(x>0),}\tag{1}$$

其中

$$\boxed{A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t.}\tag{2}$$

推导细节类似于由傅里叶级数表示推导半幅展开式(2.4 节)，留作习题.

类似地，如果我们用奇延拓(图 2)，则我们得到 **f 的傅里叶正弦积分表示**：

$$f(x)=\int_0^{\infty}B(\omega)\sin\omega x\,d\omega \qquad (x>0), \tag{3}$$

其中

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt. \tag{4}$$

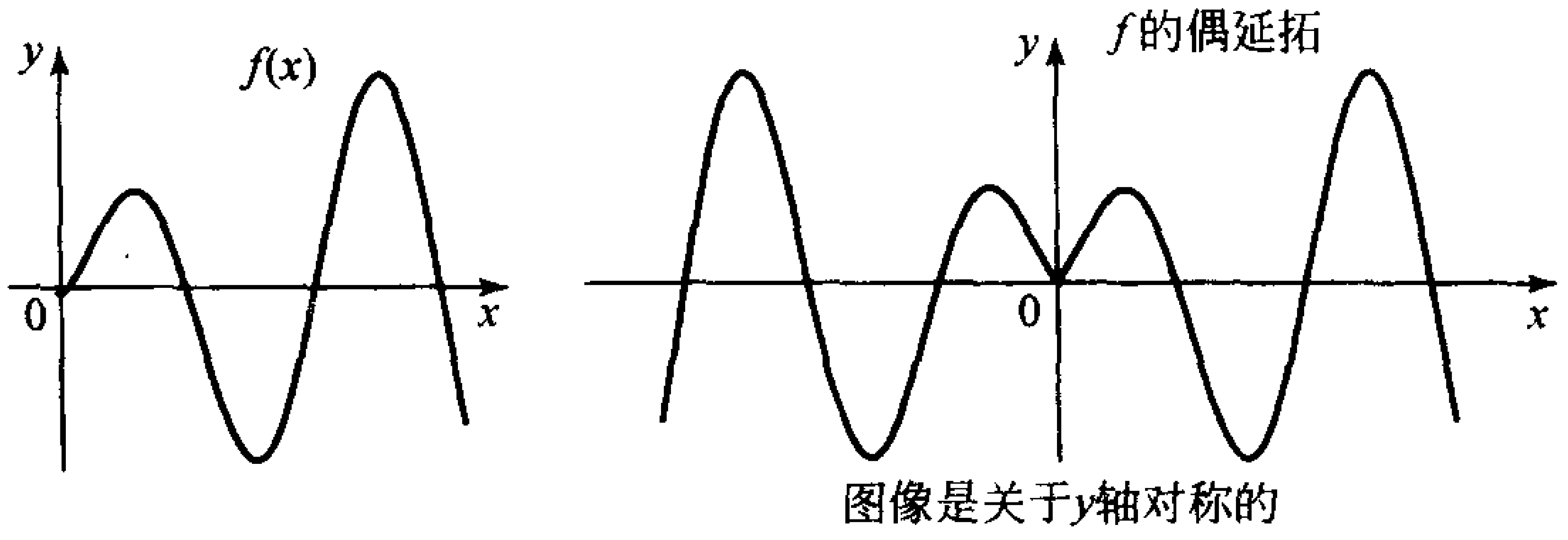
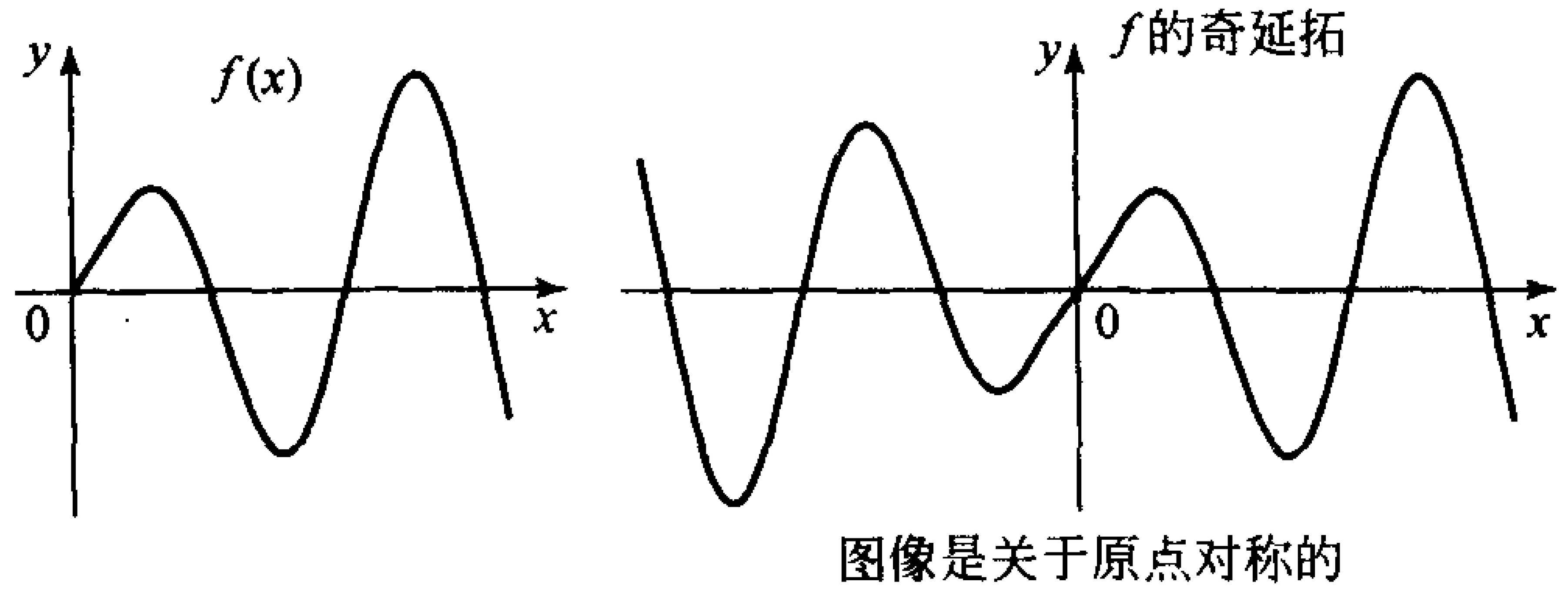


图 1



434

图 2

为方便起见，我们引入 **f 的傅里叶余弦变换**：

$$\hat{f}_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt \qquad (\omega\geqslant 0). \tag{5}$$

注意到，余弦变换仅仅是 $A(\omega)$ 的常数倍．由(1)和(2)式，我们得到

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\hat{f}_c(\omega)\cos\omega x\,d\omega \qquad (x>0). \tag{6}$$

这个公式刻画了**傅里叶余弦逆变换**，并将 f 表达为 $\hat{f}_c(\omega)$ 的傅里叶余弦逆变换．注意到，傅里叶余弦变换和傅里叶余弦逆变换形式完全一样．

同样，我们定义 **f 的傅里叶正弦变换**为

$$\hat{f}_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt \qquad (\omega\geqslant 0). \tag{7}$$

则(3)和(4)式蕴涵着

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\hat{f}_s(\omega)\sin\omega x\,d\omega \qquad (x>0). \tag{8}$$

这里，我们将 f 表达为一个**傅里叶正弦逆变换**. 其他常用的记号有

$$\boxed{\mathcal{F}_c(f)=\hat{f}_c \quad 及 \quad \mathcal{F}_s(f)=\hat{f}_s.}$$

在(6)和(8)式(同样，(1)和(3)式)中，在 f 的间断点 x 处，$f(x)$应换成$(f(x+)+f(x-))/2$.

例 1 傅里叶余弦和正弦变换

考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & 若\ 0\leqslant x\leqslant \pi,\\ 0 & 若\ x>\pi.\end{cases}$$

用傅里叶余弦逆变换来表示 f；然后用傅里叶正弦逆变换来表示.

解 首先，我们计算傅里叶余弦变换. 由(5)式，有

$$\hat{f}_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}\sin x\cos\omega x\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos(\pi\omega)+1}{1-\omega^2}.$$

435

在计算积分值时，利用了恒等式 $\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(a+b)]$. 利用(6)式，我们得到傅里叶余弦逆变换表示

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\pi\omega)+1}{1-\omega^2}\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega \quad (x\geqslant 0).$$

类似地，由(7)式，计算傅里叶正弦变换得

$$\hat{f}_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\pi\omega)}{1-\omega^2},$$

因此，得到傅里叶正弦逆变换表示

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(\pi\omega)}{1-\omega^2}\sin\omega x\,\mathrm{d}\omega \quad (x\geqslant 0).$$

■

例 2 傅里叶余弦变换

考虑函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-ax}(a>0)$，$x>0$.

(a)求出 $f(x)$的傅里叶余弦变换.

(b)用傅里叶余弦逆变换来表示 f.

解 (a)由积分表可知 $\int \mathrm{e}^{-at}\cos\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{a}{a^2+\omega^2}\mathrm{e}^{-at}\left(\frac{\omega}{a}\sin\omega t-\cos\omega t\right)$，所以由(5)式得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c(f)(\omega)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-at}\cos\omega t\,\mathrm{d}t\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\omega^2}\left[\mathrm{e}^{-at}\left(\frac{\omega}{a}\sin\omega t-\cos\omega t\right)\right]_0^{\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\omega^2}.\end{aligned}$$

(b)由(6)式，对 $x>0$，我们有

$$\mathrm{e}^{-ax}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\hat{f}_c(\omega)\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{a\cos\omega x}{a^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega.$$

■

有时，傅里叶余弦和正弦变换可以由傅里叶变换计算出来.

例 3　**由傅里叶变换求傅里叶余弦变换**

求出 $f(x)=e^{-ax^2/2}(a>0)$，$x>0$ 的傅里叶余弦变换.

解　我们有

$$\mathcal{F}_c(f)(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-ax^2/2}\cos\omega x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2/2}\cos\omega x\,dx \quad \text{（被积函数是偶的）}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2/2}e^{-i\omega x}\,dx \quad \text{（虚部积分为零,因为它是奇的）}$$

$$=\mathcal{F}(e^{-ax^2/2})(\omega) \quad \text{（由傅里叶变换的定义）}$$

436

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\omega^2/2a} \quad \text{（由 7.2 节定理 5）}. \qquad \blacksquare$$

例 3 说明了如下非常有用的一般法则，其证明留作习题.

变换之间的关系　如果 $f(x)(x\geqslant 0)$是一个偶函数 f_e 的限制，则

$$\mathcal{F}_c(f)(\omega)=\mathcal{F}(f_e)(\omega) \quad \text{对所有 } \omega\geqslant 0. \tag{9}$$

如果 $f(x)(x\geqslant 0)$是一个奇函数 f_o 的限制，则

$$\mathcal{F}_s(f)(\omega)=i\,\mathcal{F}(f_o)(\omega) \quad \text{对所有 } \omega\geqslant 0. \tag{10}$$

例 4　**利用傅里叶变换**

为说明(9)和(10)式的应用，利用傅里叶变换(见傅里叶变换表)，对 $\omega\geqslant 0$，我们计算

$$\mathcal{F}_c\left(\frac{a}{a^2+x^2}\right)(\omega)=\mathcal{F}\left(\frac{a}{a^2+x^2}\right)(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a\omega} \quad (a>0)$$

和

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{x}{a^2+x^2}\right)(\omega)=i\,\mathcal{F}\left(\frac{x}{a^2+x^2}\right)(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\omega e^{-a\omega} \quad (a>0). \qquad \blacksquare$$

运算性质

傅里叶余弦和正弦变换具有与傅里叶变换非常类似的运算性质. 我们列出下节要用的那些性质. 其证明与傅里叶变换情形(7.2 节)非常类似，所以略去. 下面，我们假设函数是可积的，所以所有的变换都存在.

定理 1(线性性)　如果 f 和 g 是函数，而 a 和 b 是数，则

$$\mathcal{F}_c(af+bg)=a\,\mathcal{F}_c(f)+b\,\mathcal{F}_c(g)$$

和

437

$$\mathcal{F}_s(af+bg)=a\,\mathcal{F}_s(f)+b\,\mathcal{F}_s(g).$$

将下面的定理与 7.2 节的定理 2 比较.

定理 2(导数的变换)　(i)假设当 $x\to\infty$时，$f(x)\to 0$，则

$$\mathcal{F}_c(f')=\omega\,\mathcal{F}_s(f)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0), \tag{11}$$

$$\mathcal{F}_s(f') = -\omega\,\mathcal{F}_c(f). \tag{12}$$

(ii)另外，如果当 $x\to\infty$ 时，$f'(x)\to 0$，则

$$\mathcal{F}_c(f'') = -\omega^2\,\mathcal{F}_c(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0), \tag{13}$$

$$\mathcal{F}_s(f'') = -\omega^2\,\mathcal{F}_s(f) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega f(0). \tag{14}$$

注意到，一阶导数的变换公式涉及两个变换，而二阶导数的变换公式只涉及一个变换.

例 5 导数的变换

在例 3 中，我们得到

$$\mathcal{F}_c(\mathrm{e}^{-x^2})(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\omega^2/4}.$$

对 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$，应用定理 2(ii)，我们得到

$$\mathcal{F}_s(-2x\mathrm{e}^{-x^2}) = -\omega\,\mathcal{F}_c(\mathrm{e}^{-x^2}) = -\omega\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\omega^2/4}.$$

因此

$$\mathcal{F}_s(x\mathrm{e}^{-x^2}) = \frac{\omega}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\omega^2/4}.$$ ■

定理 3(变换的导数) 我们有

$$\mathcal{F}_c(xf(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathcal{F}_s(f(x)), \tag{15}$$

$$\mathcal{F}_s(xf(x)) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathcal{F}_c(f(x)). \tag{16}$$

例 6 利用运算性质

求出 $f(x)=x\mathrm{e}^{-ax}\ (a>0)(x>0)$的傅里叶正弦变换.

解 例 2 中，我们得到

$$\mathcal{F}_c(\mathrm{e}^{-ax})(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\omega^2}.$$

由定理 3(ii)，我们有

$$\mathcal{F}_s(x\mathrm{e}^{-ax}) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathcal{F}_c(\mathrm{e}^{-ax}) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{a}{a^2+\omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2a\omega}{(a^2+\omega^2)^2}.$$ ■

438

习题 7.6

在习题 1～6 中，求出 $f(x)(x>0)$的傅里叶余弦变换，并将 $f(x)$表示成傅里叶余弦逆变换. 尽可能地利用已知的傅里叶变换和(9)式.

1. $f(x)=\begin{cases}1 & 若\ 0<x<1, \\ 0 & 其他.\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}1 & 若\ 0<a<x<b<\infty, \\ 0 & 其他.\end{cases}$

3. $f(x)=3e^{-2x}$.

4. $f(x)=x^2e^{-x^2}$.

5. $f(x)=\begin{cases}\cos x & 若\ 0<x<2\pi,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}1-x & 若\ 0<x<1,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

在习题7~12中，求出$f(x)(x>0)$的傅里叶正弦变换，并将$f(x)$表示成傅里叶正弦逆变换．尽可能地利用已知的傅里叶变换和(10)式．

7. $f(x)=\begin{cases}1 & 若\ 0<x<1,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

8. $f(x)=xe^{-x^2}$.

9. $f(x)=e^{-2x}$.

10. $f(x)=xe^{-x}$.

11. $f(x)=\begin{cases}\sin 2x & 若\ 0<x<\pi,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

12. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

在习题13~18中，计算给定的变换．

13. $\mathcal{F}_c\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.

14. $\mathcal{F}_c\left(\dfrac{x^2}{e^{x^2}}\right)$.

15. $\mathcal{F}_s\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$.

16. $\mathcal{F}_s(xe^{-x})$.

17. $\mathcal{F}_c\left(\dfrac{\cos x}{1+x^2}\right)$.

18. $\mathcal{F}_c\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

19. 证明(9)和(10).

20. 证明(11)~(14).

21. **互反关系**．试证：$\mathcal{F}_c\mathcal{F}_c f=f$和$\mathcal{F}_s\mathcal{F}_s f=f$.

439 22. 补全由傅里叶积分表示(7.1节定理1)到傅里叶余弦和正弦积分表示之间的推导细节.

7.7 半无限区间上的问题

本节将求解半无限区间上、平面上的无界区域(如半平面、四分之一平面和带状上)的边值问题，这里利用傅里叶余弦和正弦变换，而不是傅里叶变换．因为我们将要处理的函数是定义在实线的子集上的，而应用傅里叶变换要求函数是定义在整个实线上的．本节的方法与傅里叶变换法非常类似．我们将以例题来说明．

例1 半无限杆上的热传导方程

求解边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<\infty,t>0,\tag{1}$$

$$u(x,0)=f(x),\qquad x>0,\tag{2}$$

$$u(0,t)=0,\qquad t>0.\tag{3}$$

这个问题模拟了半无限杆上的热扩散，初始温度分布是 $f(x)$，一端保持温度 0°(见图 1).

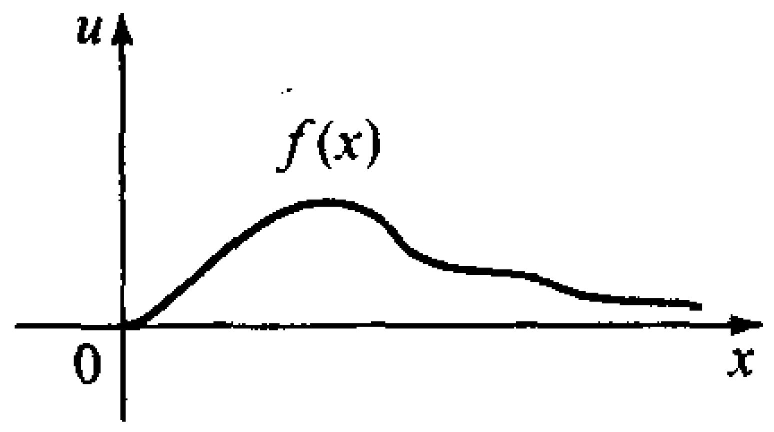


图 1　初始温度分布

解　注意，由于初始条件(2)中含有变量 x，所以要用关于 x 的变换，而不是关于 t 的. 正如你即将看到的，傅里叶正弦变换是这个问题的正确选择(参考解答后面的注记). 我们有

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}_s(\omega,t),$$

由 7.6 节定理 2，我们有

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=-\omega^2\hat{u}_s(\omega,t)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega u(0,t)=-\omega^2\hat{u}_s(\omega,t).$$

因此，对(1)和(2)作变换，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}_s(\omega,t)=-c^2\omega^2\hat{u}_s(\omega,t),$$

$$\hat{u}_s(\omega,0)=\hat{f}_s(\omega).$$

这个关于 t 的一阶常微分方程的通解为

$$\hat{u}_s(\omega,t)=A(\omega)e^{-c^2\omega^2t},$$

其中 $A(\omega)$是依赖于 ω 的常数. 令 $t=0$，得到

$$\hat{u}_s(\omega,0)=A(\omega)=\hat{f}_s(\omega),$$

所以

$$\hat{u}_s(\omega,t)=\hat{f}_s(\omega)e^{-c^2\omega^2t}.$$

440

作傅里叶正弦逆变换(7.6 节(8)式)，我们得到解形如

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\hat{u}_s(\omega,t)\sin\omega x\,\mathrm{d}\omega=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\hat{f}_s(\omega)e^{-c^2\omega^2t}\sin\omega x\,\mathrm{d}\omega.\tag{4}$$

■

回顾 7.4 节，$e^{-c^2\omega^2t}$是热核的傅里叶变换. 所以本例中的解也涉及热核. 习题 7 给出了解的另外一个形式. 你可能会问：为什么在例 1 中要用傅里叶正弦变换，而不是傅里叶余弦变换？这个选择是由边界条件(3)所要求的. 为计算二阶导数$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$的傅里叶余弦变换，7.6 节运算性质(13)要求$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)$的值，但是这个量在问题中并没有给出. 一般而言，能够成功应用一个变换，我们必须利用初始条件来提供运算公式中所需的值.

下一个例题是狄利克雷问题和诺伊曼问题的混合. **诺伊曼问题**是由拉普拉斯方程和预先给定边界上的法向导数构成的.

例 2　半无限带状区域中的狄利克雷-诺伊曼问题

求解边值问题

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, y > 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < a, \tag{6}$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = f(y), y > 0. \tag{7}$$

这个问题模拟了一大块金属板中的稳态温度，其中边界保持在给定的温度分布，而沿 x 轴上的边界没有热流通过，如图 2 所示.

解 由于变量 y 的区域是半无限的(变量 x 的区域是有界的)，所以我们选择对方程作关于 y 的变换. 同样，由于边界条件(6)中包含 $y=0$ 时的导数，所以此时余弦变换是一个合适的选择. 利用 7.6 节的运算性质，作余弦变换可得

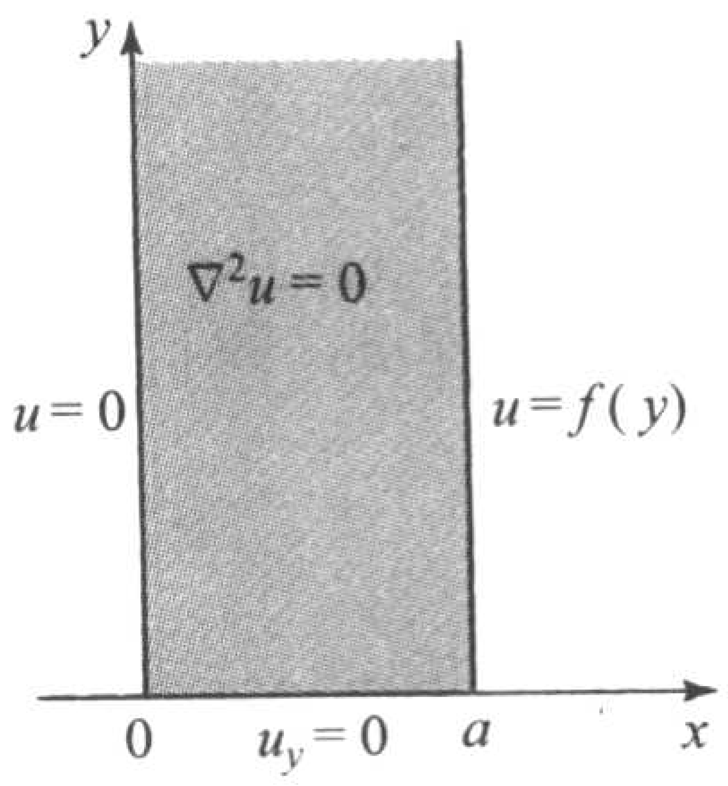


图 2 狄利克雷–诺伊曼问题

$$\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = -\omega^2 \hat{u}_c(x, \omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = -\omega^2 \hat{u}_c(x, \omega),$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \hat{u}_c(x, \omega) - \omega^2 \hat{u}_c(x, \omega) = 0 \qquad (对(5)作变换), \tag{8}$$

$$\hat{u}_c(0, \omega) = 0, \quad \hat{u}_c(a, \omega) = \hat{f}_c(\omega) \qquad (对(7)作变换). \tag{9}$$

二阶常微分方程(8)的通解是

441

$$\hat{u}_c(x, \omega) = A(\omega)\cosh\omega x + B(\omega)\sinh\omega x, \tag{10}$$

其中 $A(\omega)$ 和 $B(\omega)$ 是依赖于 ω 的常数. 令 $x=0$ 和 $x=a$，并利用(9)式，我们得到

$$A(\omega) = 0, \quad B(\omega) = \frac{\hat{f}_c(\omega)}{\sinh\omega a}.$$

代入(10)式，并作傅里叶余弦逆变换(7.6 节(6)式)，我们得到解形如

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{u}_c(x, \omega) \cos\omega y \, d\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\hat{f}_c(\omega)}{\sinh\omega a} \sinh\omega x \cos\omega y \, d\omega. \qquad ■$$

正如在上半平面内的狄利克雷问题(7.5 节)中所注意到的，例 2 中的解不是唯一的，除非在无限远处加上补充条件，如解在竖直带中的有界性. 例如，在例 2 的任意解中加上函数 $v(x, y) = \sin\frac{\pi x}{a}\cosh\frac{\pi y}{a}$，其和仍然是同一问题的解. 注意到，$v$ 在竖直带中是无界的，也没有关于变量 y 的傅里叶正弦或余弦变换.

傅里叶变换法是求解偏微分方程的一个强有力的工具. 其重要性源自它应用的广泛性. 在习题中研究了(在不同区域上的)另外几种问题. 选取适当的变换是应用这个方法的关键步骤. 由例题，我们知道，变换的选取是由区域以及边界条件所决定的.

习题 7.7

在习题 1～4 中，对 $c=1$，$u(0, t)=0$，以及给定初始温度分布，求解热传导方程(1). 取 $0<x<\infty$，$t>0$.

1. $f(x) = \begin{cases} T_0 & 若\ 0<x<b, \\ 0 & 其他. \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}\sin x & 若\ 0<x<\pi,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

3. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

4. $f(x)=xe^{-x^2/2}$.

5. **诺伊曼型条件**．令 $u(x,\ t)$表示带有诺伊曼型条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$$

的(1)和(2)的解．利用傅里叶余弦变换，推导解

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_c(\omega)e^{-c^2\omega^2 t}\cos\omega x\,d\omega.$$

6. 对 $c=1$，以及习题 1 中的 $f(x)$这一特殊情形，重做习题 5.

442

7. 试证：例 1 中的解(4)可以写成形式

$$u(x,t)=\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty f(s)\left[\exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4c^2t}\right)-\exp\left(-\frac{(x+s)^2}{4c^2t}\right)\right]ds.$$

[提示：在(4)式中，将$\hat{f}_s$ 用关于 f 的项显式写出来.]

8. (a)试证：当 $0<x<a$ 时，$f(x)=T_0$，否则 $f(x)$为 0，此时例 1 的热传导问题的解可以表示成

$$u(x,t)=T_0\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right)-\frac{T_0}{2}\left\{\mathrm{erf}\left(\frac{x-a}{2c\sqrt{t}}\right)+\mathrm{erf}\left(\frac{x+a}{2c\sqrt{t}}\right)\right\}.$$

[提示：利用习题 7.]

(b)取 $c=1$，$T_0=5$，画出 $t=0.2$，0.5，1，2，3，4，5 时解曲线的图像．对 $c=2$，5，重新画出图像．当 c 增加时，你有什么发现？

9. **专题问题：非齐次边界条件**．考虑热传导方程(1)，带有如下条件：$u(x,\ 0)=0$，$x>0$，以及 $u(0,\ t)=T_0$，$t>0$.

(a)利用傅里叶正弦变换证明

$$\frac{d}{dt}\hat{u}_s(\omega,t)+c^2\omega^2\hat{u}_s(\omega,t)=c^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega T_0;\quad \hat{u}_s(\omega,0)=0.$$

(b)建立下面诸式，并导出解：

$$\hat{u}_s(\omega,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{T_0}{\omega}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{T_0}{\omega}e^{-c^2\omega^2 t};$$

$$u(x,t)=\frac{2T_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega x}{\omega}d\omega-\frac{2T_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-c^2\omega^2t}}{\omega}\sin\omega x\,d\omega;$$

$$u(x,t)=T_0-\frac{2T_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-c^2\omega^2t}}{\omega}\sin\omega x\,d\omega.$$

(c)取 $T_0=100$，对不同的 t 值，画出解的图像．当 $t\to\infty$时，你有何发现？

10. **依赖于时间的边界条件**．考虑边值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad x>0,\quad t>0,$$

$$u(x,0)=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,$$

$$u(0,t)=s(t),$$

其中 $s(t)$ 是 t 的给定函数.

(a)给出该问题的一个可能的物理解释.

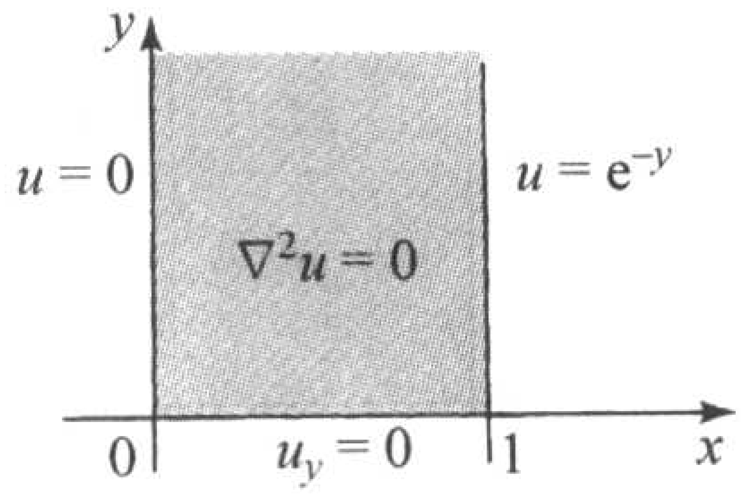
(b)令 f^* 表示 f 在整个直线上的奇延拓. 直接验证，问题的解是

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)] & \text{如果 } x>ct,\\ \frac{1}{2}[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)]+s\left(t-\frac{x}{c}\right) & \text{如果 } x<ct.\end{cases}$$

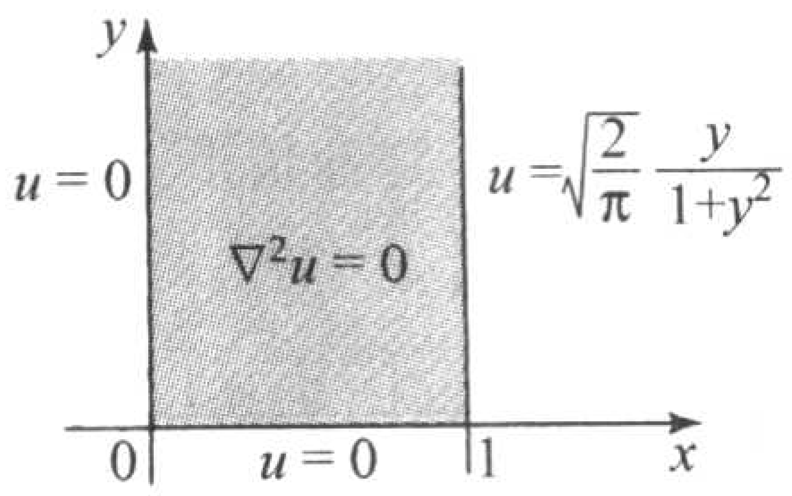
443 (c)取 $c=1$，$f(x)=0$，$s(t)=\sin t$，对 $t=0$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2}$，π，2π，4π，画出解的图像.

在习题 11～18 中，求解由图给出的边值问题.

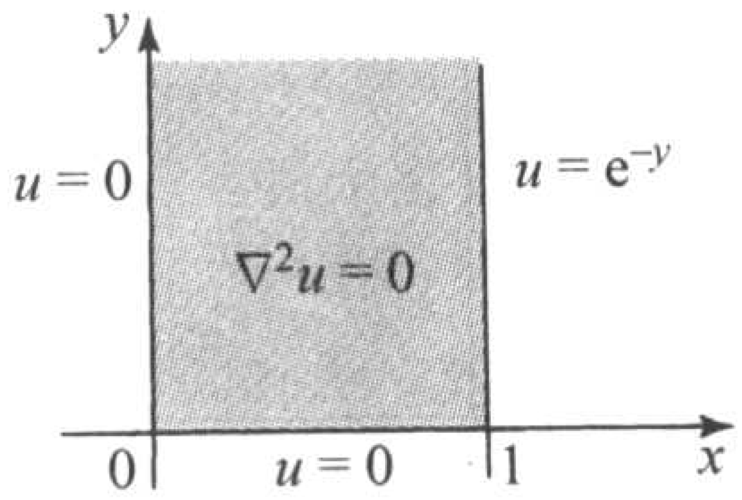
11.



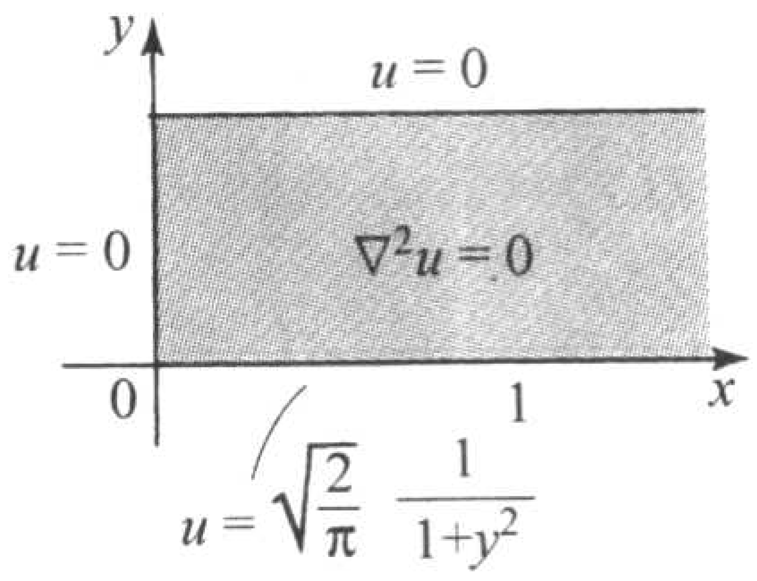
12.



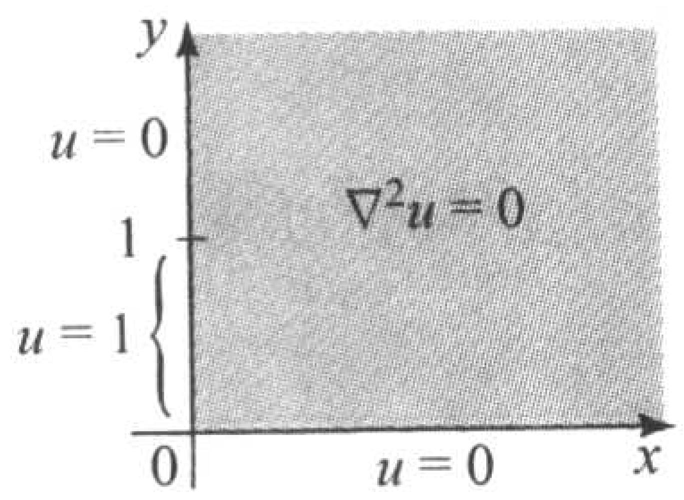
13.



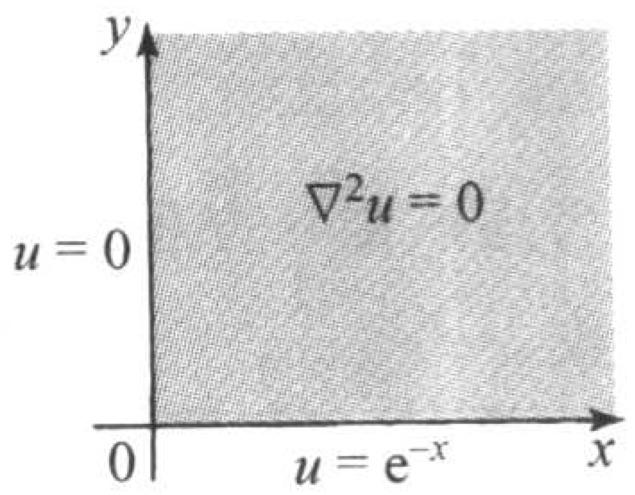
14.



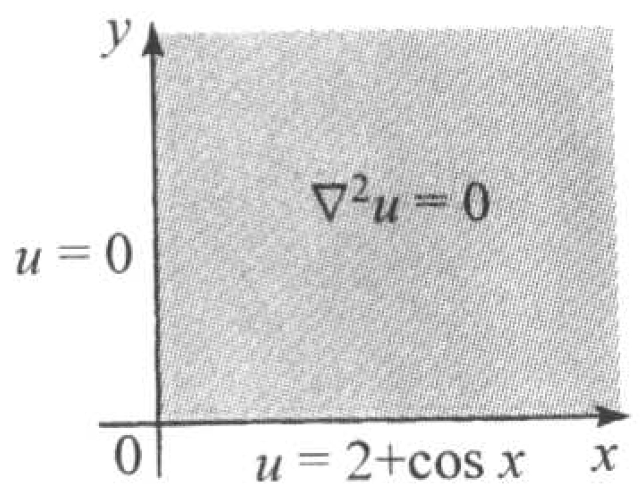
15.



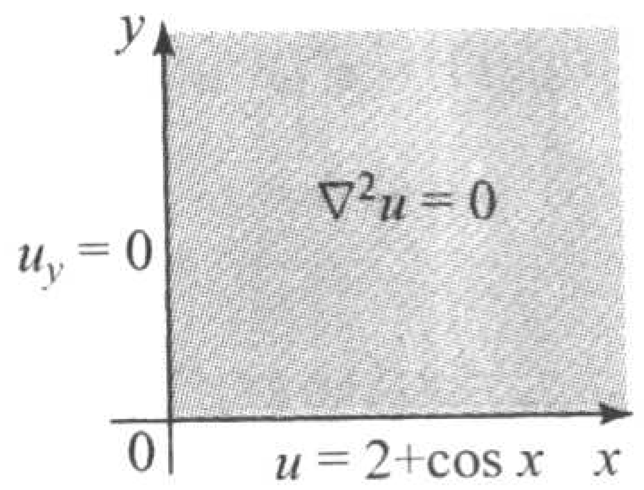
16.



17.



18.



444

7.8 广义函数

许多实际应用中会涉及脉冲现象，比如，一个强度很大的外力在很短的时间内作用在某个系统上，或点焊条上的热源作用在棒的一端. 物理上，在 t 时间、$[a,b]$ 区间上作用的力 $F(t)$ 的**脉冲**是度量这个力的强度的一种方法，定义为积分 $\int_a^b F(t)\,dt$. 对 $k=1,2,\cdots$，考虑

$$F_k(t)=\begin{cases}k & \text{若 } -\frac{1}{2k}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2k},\\ 0 & \text{若 } |t|>\frac{1}{2k}\end{cases}$$

(图 1). 对每个 k，力 F_k 具有单位脉冲，强度为 k，持续时间为 $\left[-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right]$. 令 $k\to\infty$，我们知道 F_k 的持续时间趋近于 0，但是其脉冲仍然是 1.

为表达具有单位脉冲、持续时间特别短而几乎为零的力 $F(t)$(比如，由锤子敲打所产生的力)，我们将 $F(t)$视为 F_k 的极限. 但是，如果这个极限存在且是一个函数，则对 $t\neq 0$，函数必为零，而介于其图像和 t 轴之间的面积必须是集中在 $t=0$ 点上，且为 1. 显然，没有任何一个常意义下的函数满足这个性质. 我们将说明，F_k 的极限在乘以一个光滑函数、再积分的意义下存在. 这启示我们，为表达极限函数，我们要引入广义函数. (后面，为方便起见，我们用变量 x 代替 t.)

定理 1(积分的极限)　假设 $f(x)$是$[a, b]$上的连续函数，其中 $a<b$，则

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)F_k(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} f(0) & \text{如果 } a<0<b, \\ 0 & \text{如果 } 0 \text{ 不在}[a,b]. \end{cases} \tag{1}$$

证明　如果 0 不在$[a, b]$上，则当 k 很大，比如说 $k\geqslant k_0$ 时，$[a, b]$和$\left[-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right]$不交. 由于 F_k 在$\left[-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right]$之外为零，所以对所有 $k\geqslant k_0$，F_k 在$[a, b]$上为零，因而对所有 $k\geqslant k_0$，有 $\int_a^b f(x)F_k(x)\mathrm{d}x = \int_a^b 0\cdot\mathrm{d}x = 0$ (图 2). 这证明了当 0 不在$[a, b]$上时的结果.

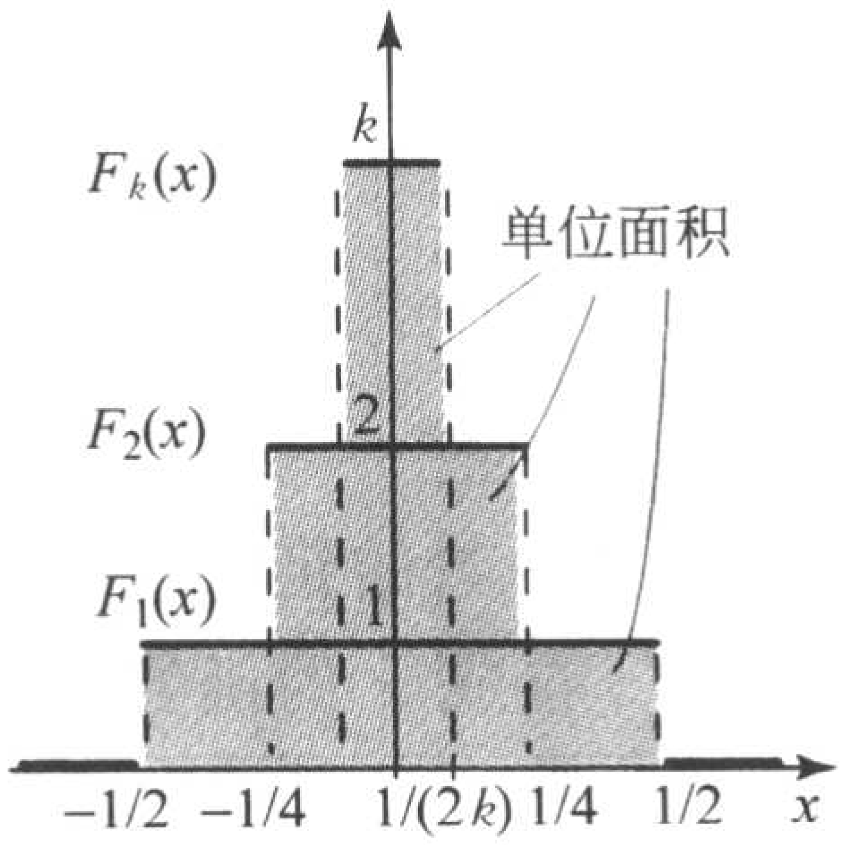


图 1　具有单位脉冲、持续时间趋近于 0 的函数族

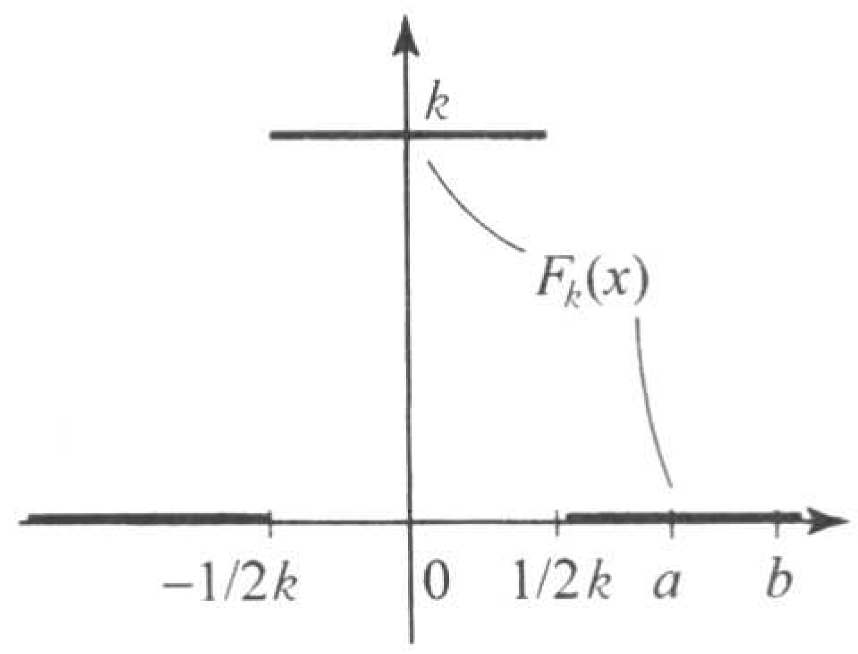


图 2　当 0 不在$[a, b]$上时，$F_k(k\geqslant k_0)$在$[a, b]$上为零

如果 0 在(a, b)内(0 不是$[a, b]$的端点)，则当 k 很大，比如说 $k\geqslant k_0$ 时，$\left[-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right]$包含在$[a, b]$内(图 3). 则

$$\int_a^b f(x)F_k(x)\mathrm{d}x = k\int_{-\frac{1}{2k}}^{\frac{1}{2k}} f(x)\mathrm{d}x.$$

现在，回顾微积分中的中值定理：如果 f 在$[a, b]$上连续，则存在$[a, b]$内的点 c，使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(c)$. 所以对每个 k，存在$\left[-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right]$内的点 c_k，使得

$$\int_a^b f(x)F_k(x)\mathrm{d}x = k\int_{-\frac{1}{2k}}^{\frac{1}{2k}} f(t)\mathrm{d}t = kf(c_k)\left(\frac{1}{2k}-\left(-\frac{1}{2k}\right)\right)= f(c_k).$$

当 $k\to\infty$ 时，区间 $\left[-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right]$ 收缩到 0 点，因此 $c_k\to 0$，从而我们得到

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)F_k(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} f(c_k) = f(0),$$

最后一个等式是因为 f 的连续性. 如果 $a=0$ 或 $b=0$，类似可证(1)式中的极限为 $f(0)/2$. 我们将其细节留作习题. ■

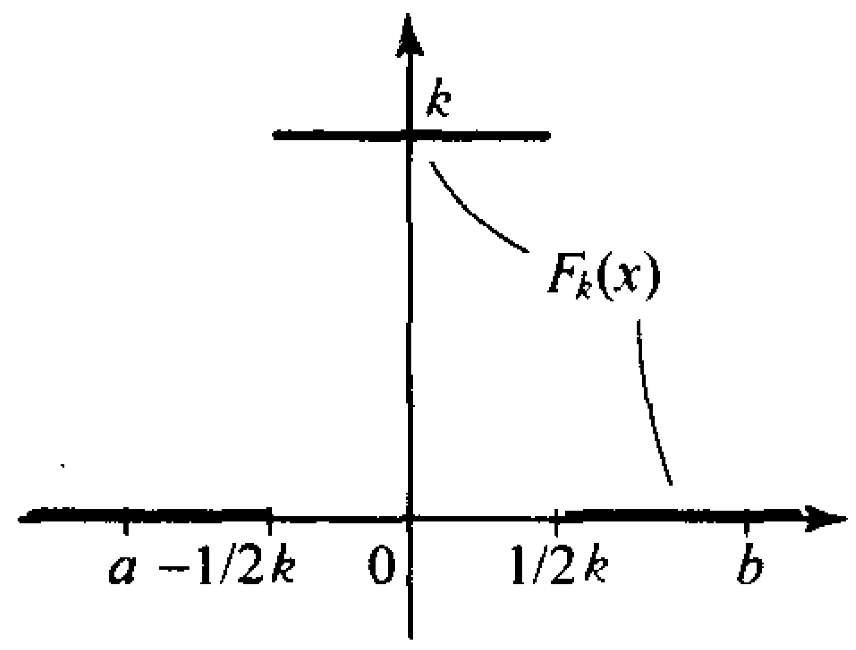


图 3 0 在 (a, b) 内时的情形

广义函数：狄拉克 δ 函数

在数学上，如果一个函数序列 (ϕ_k) 满足：对所有连续函数 f，$\int_a^b f(x)\phi_k(x)\mathrm{d}x$ 都有极限，则称函数序列 (ϕ_k) 在 $[a, b]$ **上弱收敛**. 这里我们将不详细讨论弱收敛这个概念，我们提到它，是因为它启发了下面的定义.

定理 1 说明函数 (F_k) 是弱收敛的. 由前面的讨论，我们知道 F_k 的极限不是函数. 所以，我们引入广义函数 $\delta_0(x)$，称为**狄拉克 δ 函数**，定义它为 F_k 的(弱)极限，即对 $[a, b]$ 上的任意连续函数 f，我们有

$$\int_a^b f(x)\delta_0(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)F_k(x)\mathrm{d}x.$$

应用定理 1，对 $(-\infty, \infty)$ 上的所有连续函数，有

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_0(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} f(0) & \text{如果 } a<0<b, \\ 0 & \text{如果 } 0 \text{ 不在}[a,b]. \end{cases}} \qquad (2)$$

如果不用前面讨论的函数序列弱极限概念，上式可以作为狄拉克 δ 函数的定义式. 虽然不能讨论 $\delta_0(x)$ 在每点 x 处的值，但有时为方便起见，我们还是将 $\delta_0(x)$ 看成 x 的函数，取值为：当 $x\neq 0$ 时，$\delta_0(x)=0$；$\delta_0(0)=\infty$. 其图像用图 4 来描述.

狄拉克 δ 函数是许多**广义函数**(又称**缓增广义函数**)中的一个，它们不像普通函数那样可以逐点定义，而是通过与其他函数乘积的积分来定义的. 也就是说，为定义一个广义函数 ϕ，只需对某个函数类中的所有函数 f，称为**检验函数**，定义积分 $\langle\phi, f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x$ 的值即可. 对狄拉克 δ 函数，这个积分对所有的连续函数都有定义. 一般而言，检验函数有各阶导数，在 $\pm\infty$ 处很快趋近于 0，或在某个有界区间之外为零. 这里，我们的目标不是严格地讨论广义函数，而是为应用而引入这些概念. 比如，考虑函数：当 $|x|<1$ 时，$\phi(x)=1$；否则 $\phi(x)$ 为零. 现在考察运算性质：$\mathcal{F}(f')(\omega)=\mathrm{i}\omega\mathcal{F}(f)(\omega)$. 由于对所有 $x\neq\pm 1$，$\phi'(x)=0$，而零函数的傅里叶变换是 0. 因而对所有 ω，我们有 $\mathcal{F}(f')(\omega)=0$，因此，上述的运算性质对 ϕ 不再成立. 但是，在应用中，迫切需要将这些运算性质推广到阶梯函数和分段线性函数上. 广义函数提供了完成这种推广的合适工具. (关于函数 ϕ 情形请参看下面的例 5.)在我们所遇到的应用中，涉及最多的广义函数是狄拉克 δ 函数，以及与它有关的(广义)函数，如它的平移、微

446

分、积分等．所以我们将避免广义函数的形式化定义，而尽可能采用其逐点定义．

两个广义函数 ϕ 和 ψ **相等**，如果 $\langle\phi, f\rangle=\langle\psi, f\rangle$ 对所有检验函数 f 成立．

令 α 是一个实数，δ_0 对 α 的**平移**定义为

$$\langle\delta_\alpha, f\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\alpha(x)\mathrm{d}x=f(\alpha). \tag{3}$$

因此函数 f 乘以 δ_α 的积分就是取 f 在 α 点的值．这里，也可以将 δ_α 看成逐点定义的 $\delta_0(x)$ 的平移：$\delta_\alpha(x)=\delta_0(x-\alpha)$．$\delta_\alpha(x)$ 的图像如图 5 所示，它是将 $\delta_0(x)$ 的图像平移 α 单位而得到的．所以，如果我们认为 δ_0 的支点是 $x=0$，则 δ_α 的支点是 $x=\alpha$．

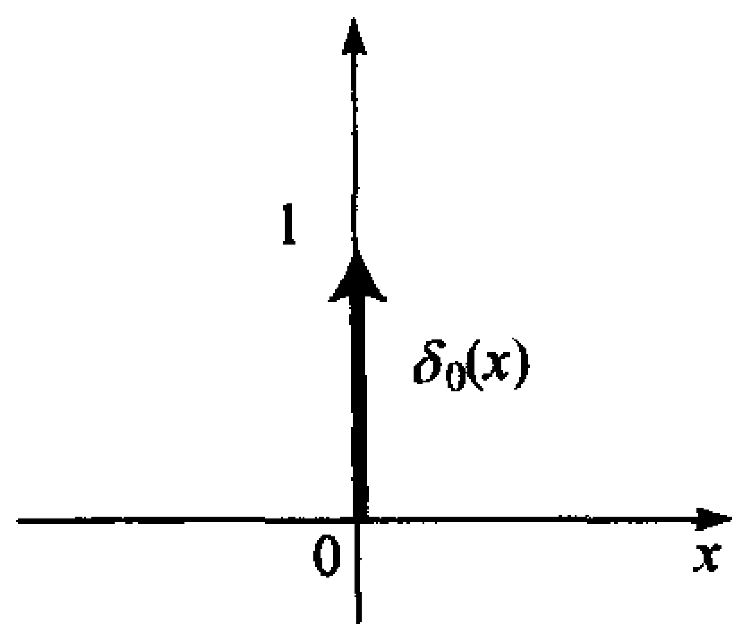


图 4　支点在 $x=0$ 处的狄拉克 δ 函数的表示

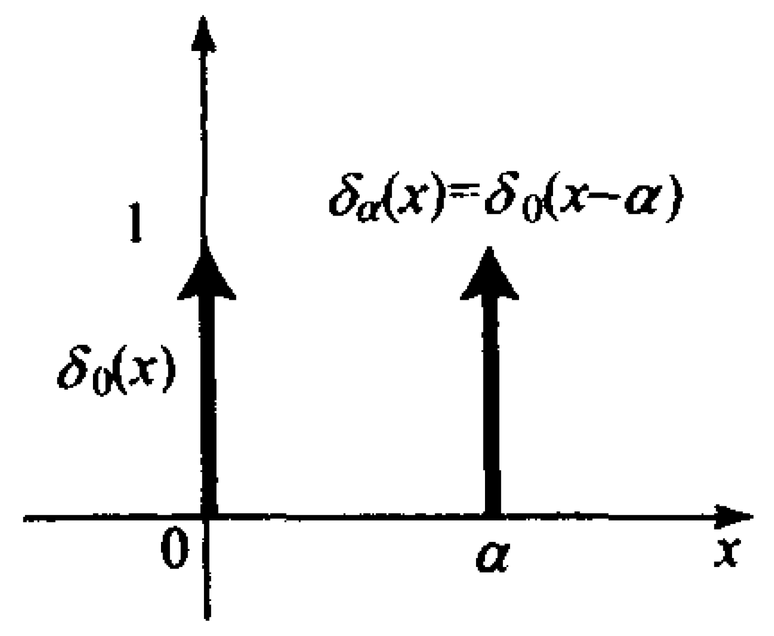


图 5　狄拉克 δ 函数及其平移的表示，支点分别在 $x=0$ 和 $x=\alpha$ 处

虽然我们关于广义函数的第一个例子不是常意义下的函数，但是必须记住：任何有界函数 $\phi(x)$ 显然也是广义函数，因为对任意检验函数 f，令 $\langle\phi, f\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x$．所以对有界函数，我们至少可以用两种不同的观点来看它：通常意义下的逐点定义以及作为广义函数．记住这点，考虑**赫维赛德单位阶梯函数** $\mathcal{U}_0$，或简单地记为 $\mathcal{U}$，将其定义为

$$\mathcal{U}_0(x)=\begin{cases}0 & \text{如果 } x<0,\\ 1 & \text{如果 } x\geqslant 0.\end{cases} \tag{4}$$

作为一个广义函数，它乘以一个检验函数 f 的积分是显然的，

$$\langle\mathcal{U}_0, f\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathcal{U}_0(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

由于这个积分值不受 $\mathcal{U}_0$ 在一点处值的影响，我们将不具体给出 $\mathcal{U}_0$ 在其间断点 $x=0$ 处的值．赫维赛德函数对 α 的平移是

$$\mathcal{U}_\alpha(x)=\begin{cases}0 & \text{如果 } x<\alpha,\\ 1 & \text{如果 } x\geqslant \alpha,\end{cases} \tag{5}$$

我们有 $\mathcal{U}_\alpha(x)=\mathcal{U}_0(x-\alpha)$（图 6）．

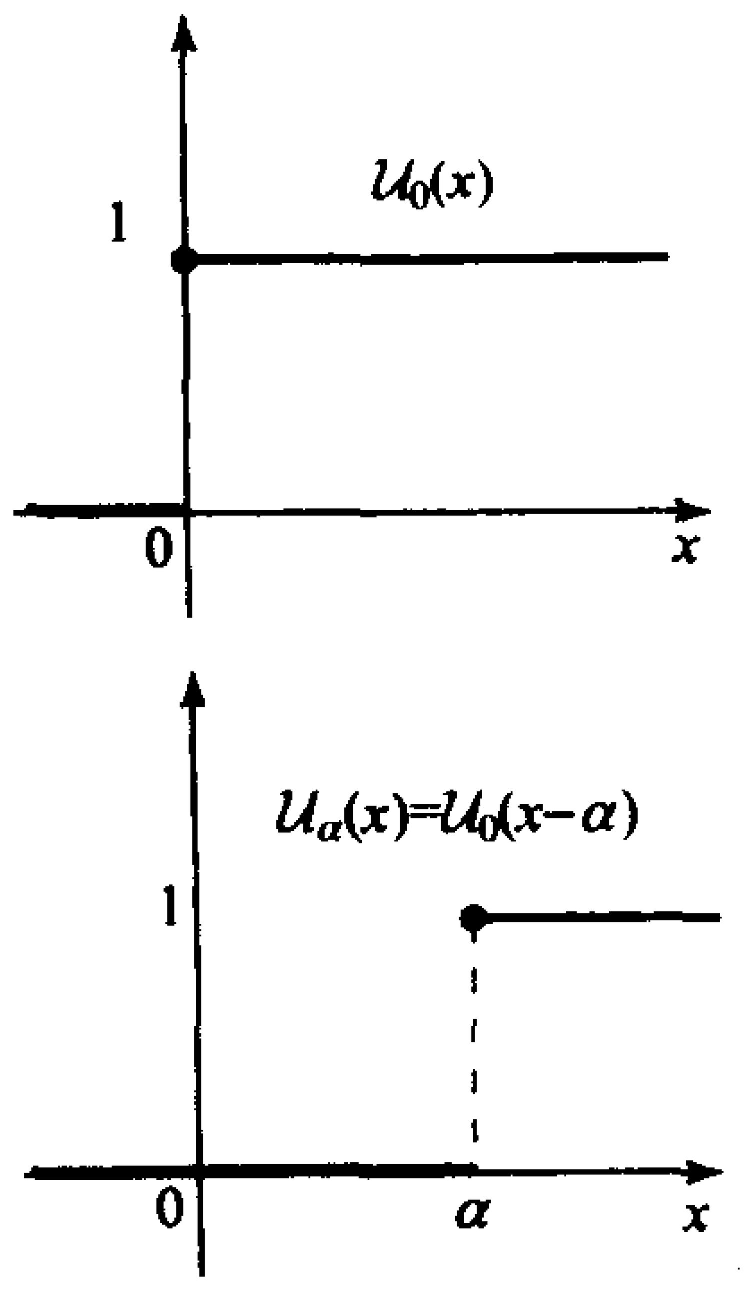


图 6　赫维赛德单位阶梯函数 $\mathcal{U}_0$ 及其平移 $\mathcal{U}_\alpha(x)=\mathcal{U}_0(x-\alpha)$

447

广义函数的导数

令 $\phi(x)$ 是一个广义函数，为定义其作为广义函数的导数 $\phi'(x)$，对所有检验函数 f，我们必须确定 $\langle\phi', f\rangle=$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)\mathrm{d}x$ 的值.（记住，这就是广义函数的定义.）为此，我们形式地作分部积分，得到

$$\begin{aligned}\langle \phi', f\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)\mathrm{d}x \\ &= f(x)\phi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x)\mathrm{d}x \qquad (\text{分部积分}) \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x)\mathrm{d}x \qquad (\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0) \\ &= \langle \phi, -f'\rangle. \end{aligned} \tag{6}$$

这样，我们就定义了 ϕ 的导数，即广义函数 ϕ'，它与检验函数 f 乘积的积分是

$$\boxed{\langle \phi', f\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \langle \phi, -f'\rangle.} \tag{7}$$

下面是两个有趣的例子.

例 1　赫维赛德单位阶梯函数的导数

试证：$\mathcal{U}_0' = \delta_0$，即 $\mathcal{U}_0$ 的导数是 δ_0（图 7）.

解　如果对所有检验函数 f，我们能够证明 $\langle \mathcal{U}_0', f\rangle = \langle \delta_0, f\rangle$，则等式得证. 应用广义函数导数的定义，我们有

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{U}_0', f\rangle &= -\langle \mathcal{U}_0, f'\rangle \\ &= -\int_0^{\infty} f'(x)\mathrm{d}x = -f(x)\Big|_0^{\infty} \\ &= f(0) \qquad (\text{因为} \lim_{x\to\infty} f(x) = 0) \\ &= \langle \delta_0, f\rangle. \end{aligned}$$

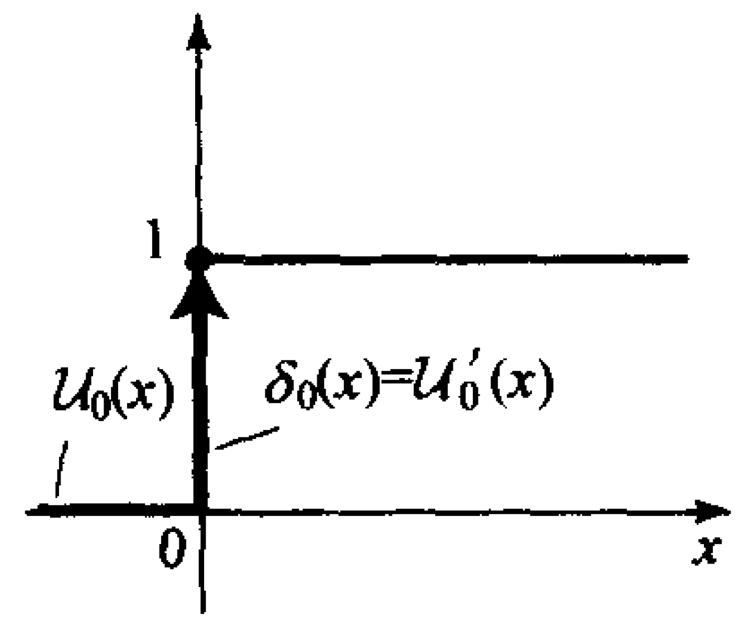


图 7　$\mathcal{U}_0(x)$ 在 $x=0$ 点的单位跳跃蕴涵着导数中的 $\delta_0(x)$

448　因此 $\langle \mathcal{U}_0', f\rangle = \langle \delta_0, f\rangle$，命题得证. ■

因为如下原因，例 1 并不是出人意料的. 首先，如果计算 $\delta_0(x)$ 的原函数，我们可以考虑下面的函数：

$$\int_{-\infty}^{x} \delta_0(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{若 } x < 0, \\ 1 & \text{若 } x > 0, \end{cases} \tag{8}$$

这与 $\mathcal{U}_0(x)$ 相吻合. 所以将 δ_0 视为 $\mathcal{U}_0(x)$ 的导数是有道理的.

检验等式 $\mathcal{U}_0' = \delta_0$ 的另外一种方法是利用 $\mathcal{U}_0$ 的图像. 由于除点 $x=0$ 外，这个函数是常值的，所以其斜率（导数）为零；而 $\mathcal{U}_0$ 的值由 0 跳到 1 产生一个无穷的斜率. 我们将在 $x=0$ 的一个单位跳跃记为 $\delta_0(x)$（图 7）. 由这个斜率解释，我们立刻得到

$$(c\,\mathcal{U}_a)' = c\delta_a, \tag{9}$$

因为此时，$\mathcal{U}_a$ 的图像在 $x=a$ 点处有 c 单位的跳跃（图 8）. 我们称广义函数 $c\delta_a$ 为以 c 为权的**加权 δ 函数**. 如果 $c=0$，则图像上没有跳跃（下面的例 2）；如果 $c>0$，当我们在 x 轴上从左向右运动时，图像向上跳跃（例 1）；如果

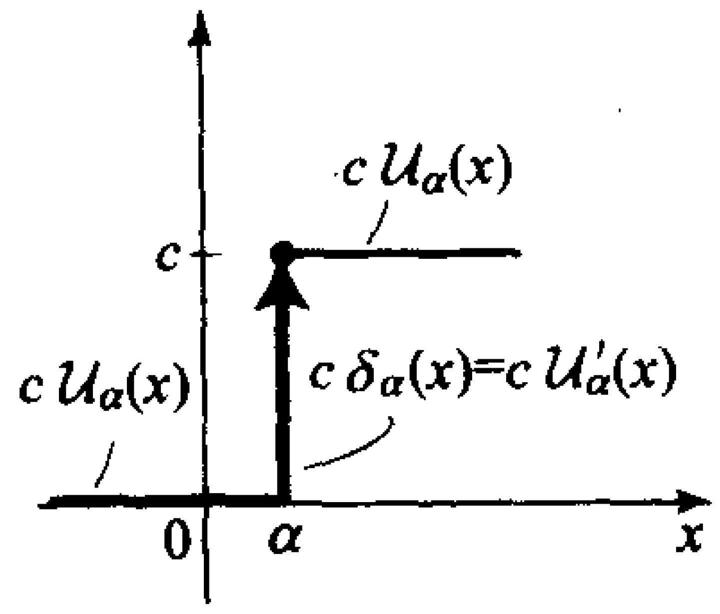


图 8　$\mathcal{U}_a(x)$ 在 $x=a$ 点的 c 单位跳跃蕴涵着导数中的 $c\delta_a(x)$

$c<0$，当我们在 x 轴上从左向右运动时，图像向下跳跃(下面的例 3 和图 10).

例 2　广义函数的导数

令 α 为任意实数，考虑图 9 中的函数，定义为

$$\tau_\alpha(x)=\begin{cases}0 & 若\ x<\alpha,\\ x-\alpha & 若\ x\geqslant\alpha.\end{cases}$$

(a)对检验函数 f，$\langle\tau_\alpha, f\rangle$是多少?

(b)求出 $\tau_\alpha'(x)$.

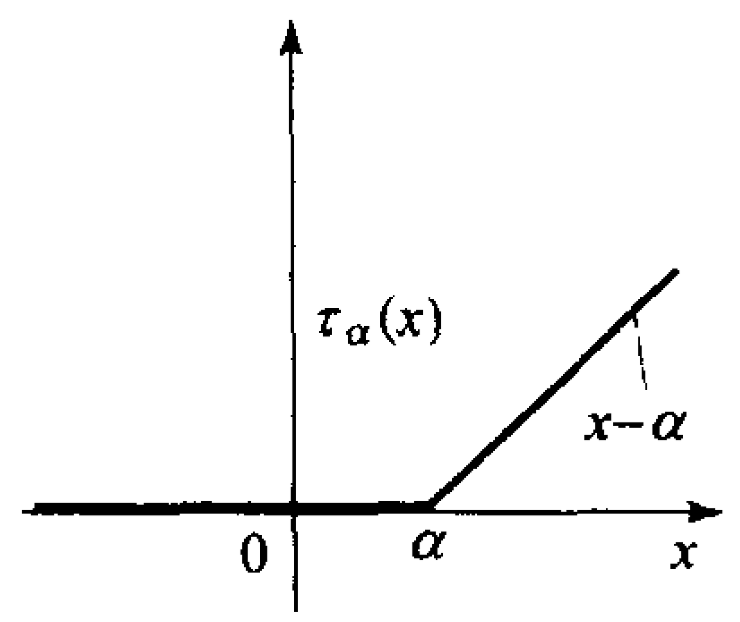


图 9　$\mathcal{U}_\alpha(x)$的原函数(例 2)，我们有 $\tau_\alpha(x)=(x-\alpha)\mathcal{U}_\alpha(x)$，同样，$\tau_\alpha(x)=(x-\alpha)\mathcal{U}_0(x-\alpha)$

解　(a)如果 f 是个检验函数，则

$$\langle\tau_\alpha,f\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\tau_\alpha(x)\mathrm{d}x=\int_{\alpha}^{\infty}(x-\alpha)f(x)\mathrm{d}x.$$

(b)在计算导数之前，首先我们来猜猜答案是什么. 如果 $x\neq\alpha$，函数 $\tau_\alpha(x)$是可微的，其导数为

$$\tau_\alpha'(x)=\begin{cases}0 & 若\ x<\alpha,\\ 1 & 若\ x>\alpha.\end{cases}$$

因此，对所有 $x\neq\alpha$，有 $\tau_\alpha'(x)=\mathcal{U}_\alpha(x)$. 当 $x=\alpha$ 时，情况如何? 如果认为此处存在 δ 函数，那么应该乘以 0，由于图像上没有跳跃. 因此，作为广义函数，有 $\tau_\alpha'(x)=\mathcal{U}_\alpha$. 现在，让我们通过计算导数来验证它. 利用定义(7)式，作分部积分 [449]

$$\begin{aligned}\langle\tau_\alpha',f\rangle&=-\langle\tau_\alpha,f'\rangle=-\int_{\alpha}^{\infty}(x-\alpha)f'(x)\mathrm{d}x\\&=-(x-\alpha)f(x)\Big|_{\alpha}^{\infty}+\int_{\alpha}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{\alpha}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=\langle\mathcal{U}_\alpha,f\rangle.\end{aligned}$$

在第三个等式中，我们用了 $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\alpha)f(x)=0$($f$ 在∞处很快趋近于 0). 因此，$\tau_\alpha'(x)=\mathcal{U}_\alpha(x)$，这就验证了我们的几何推理. ■

为定义广义函数的二阶导数，我们直接对一阶导数求导就是了，高阶导数可类似定义. 这个定义虽然直接，但是在实际操作时，比较困难.

例 3　二阶导数

令

$$\phi(x)=\begin{cases}0 & 若\ x<-1,\\ 2(x+1) & 若\ -1\leqslant x\leqslant 0,\\ -2(x-1) & 若\ 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0 & 若\ x>1\end{cases}$$

(图 10). 求出 ϕ' 和 ϕ''(在广义函数意义下).

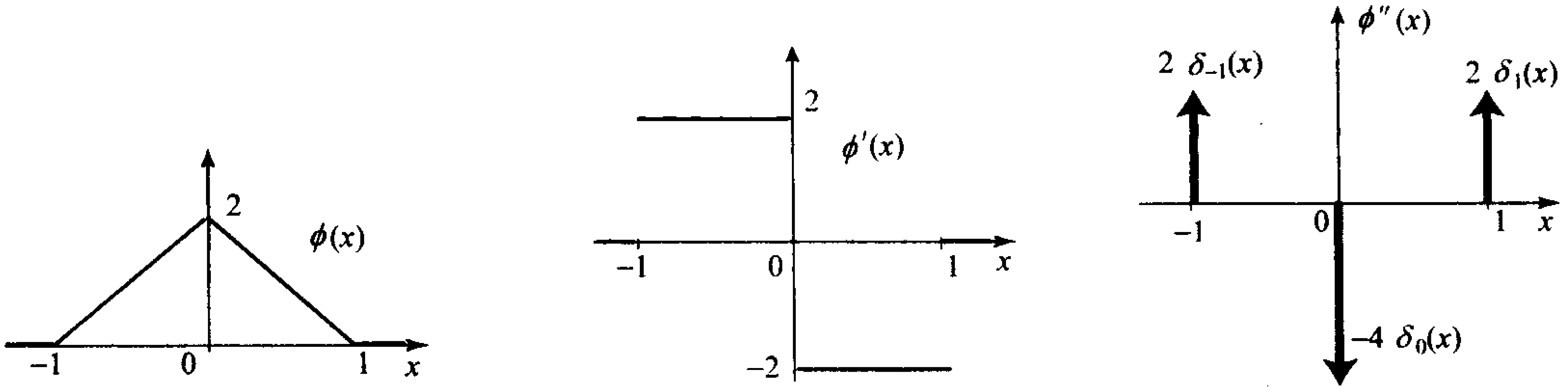


图 10　例 3 中的函数及其导数

解　我们利用几何图像来推导答案. 由于对 $x<-1$ 或 $x>1$, $\phi(x)$ 为零, 当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时, 我们有 $\phi'(x)=0$. 对 $-1<x<0$, 我们有 $\phi'(x)=2$; 而对 $0<x<1$, 我们有 $\phi'(x)=-2$; 如图 10 所示. 又由于 ϕ 的图像没有跳跃, 所以我们不需要用 δ 函数, 所以

$$\phi'(x)=\begin{cases}0 & \text{若 } x<-1,\\ 2 & \text{若 } -1<x<0,\\ -2 & \text{若 } 0<x<1,\\ 0 & \text{若 } x>1.\end{cases}$$

除了在 $x=-1$, 0 和 1 外, 二阶导数 ϕ'' 处处为零. 在 $x=-1$ 处, 有 2 个单位的跳跃, 因此, 我们放一个加权狄拉克 δ 函数 $2\delta_{-1}$ 以说明该跳跃. 类似地, 在 $x=0$ 处下降 4 个单位用 $-4\delta_0$ 说明; 在 $x=1$ 处的 2 个单位跳跃用 $2\delta_1$ 说明. 由于 δ 函数在支点以外为零, 我们有

$$\phi''(x)=2\delta_{-1}(x)-4\delta_0(x)+2\delta_1(x)$$

(图 10). 利用赫维赛德阶梯函数, 可以验证

$$\phi'(x)=2\,\mathcal{U}_{-1}(x)-4\,\mathcal{U}_0(x)+2\,\mathcal{U}_1(x). \tag{10}$$

现在, 利用(9)式, 对单位阶梯函数求导, 可得 ϕ''. 利用定义(7)式, 直接计算 ϕ' 和 ϕ'', 以验证 我们的几何推理, 这是一个很好的习题(习题 25). ■

450

广义函数的傅里叶变换

我们像定义导数那样, 通过描述它与检验函数乘积的积分来定义广义函数的傅里叶变换. 如果 ϕ 是个广义函数, 而 f 是个检验函数, 我们定义 ϕ 的**傅里叶变换**[记为 $\hat{\phi}$ 或 $\mathcal{F}(\phi)$]为

$$\boxed{\langle\hat{\phi},f\rangle=\langle\phi,\hat{f}\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x.} \tag{11}$$

例 4　**狄拉克 δ 函数的傅里叶变换**

试证:

$$\mathcal{F}(\delta_0(x))(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \tag{12}$$

解 令 f 是一个检验函数，利用定义，我们有

$$\langle\hat{\delta}_0,f\rangle=\langle\delta_0,\hat{f}\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(x)\delta_0(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\hat{f}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\left\langle\frac{1}{\sqrt{2\pi}},f\right\rangle.$$

其中在最后一个等式中，我们将常数$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$看成广义函数，而在倒数第二个等式中，我们用了傅里叶变换的定义．因此，$\hat{\delta}_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，即为所证． ■

如果我们将 $\delta_0(x)$视为一个函数，利用 7.2 节的定义来计算其傅里叶变换，我们得到

$$\hat{\delta}_0(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\delta_0(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\cdot 0}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

这与例 4 的结果相符．以后只要可能，我们都会像刚才所做，计算广义函数傅里叶变换时，都视它们是通常的函数．我们将自由地应用 7.2 节的运算性质．这些可以像例 4 一样来验证，但是这样的验证所要求的理论处理超出了本书的范围．下面就是几个例子．

广义函数的傅里叶变换 我们有

$$\mathcal{F}(\delta_a)(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega};\tag{13}$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{U}_0)(\omega)=-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}\omega};\tag{14}$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{U}_a)(\omega)=-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega}.\tag{15}$$

证明 为证明(13)式，计算

451

$$\mathcal{F}(\delta_a)(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_a(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega},$$

因为积分 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}$乘以$\delta_a$ 取 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega}$在 a 处的值．为证明(14)和(15)式，如下利用 7.2 节的定理 2：

$$\mathcal{F}(\mathcal{U}_a')=\mathrm{i}\omega\,\mathcal{F}(\mathcal{U}_a);$$

但是$\mathcal{U}_a'=\delta_a$，所以，

$$\mathrm{i}\omega\,\mathcal{F}(\mathcal{U}_a)=\mathcal{F}(\delta_a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega};$$

这就得到(15)式．在(15)式中，令 $a=0$，就得到(14)式． ■

作为运算性质的进一步应用，考虑 δ_a 的第 n 阶导数．应用 7.2 节的定理 2，得到

$$\boxed{\mathcal{F}(\delta_a^{(n)})(\omega)=\frac{(\mathrm{i}\omega)^n}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega}.}\tag{16}$$

下面我们以例题说明，如何利用广义函数来推广傅里叶变换的运算性质. 首先，我们回到前面考虑过的一个例题.

例 5 运算性质和广义函数

考虑函数：当 $|x|<1$ 时，$f(x)=1$，否则 $f(x)$ 为零(图 11). 验证：如果将 f 和 f' 视为广义函数，则运算性质 $\mathcal{F}(f')(\omega)=\mathrm{i}\omega\,\mathcal{F}(f)(\omega)$ 成立.

解 在 $f(x)$ 的图像上，在 $x=-1$ 处有一个单位跳跃，而在 $x=1$ 处有一个单位下降，因此，$f'(x)=\delta_{-1}(x)-\delta_1(x)$. 所以

$$\mathcal{F}(f')(\omega)=\mathcal{F}(\delta_{-1})(\omega)-\mathcal{F}(\delta_1)(\omega)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{i\omega}-e^{-i\omega})\quad(\text{由}(13))$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,i\sin\omega,$$

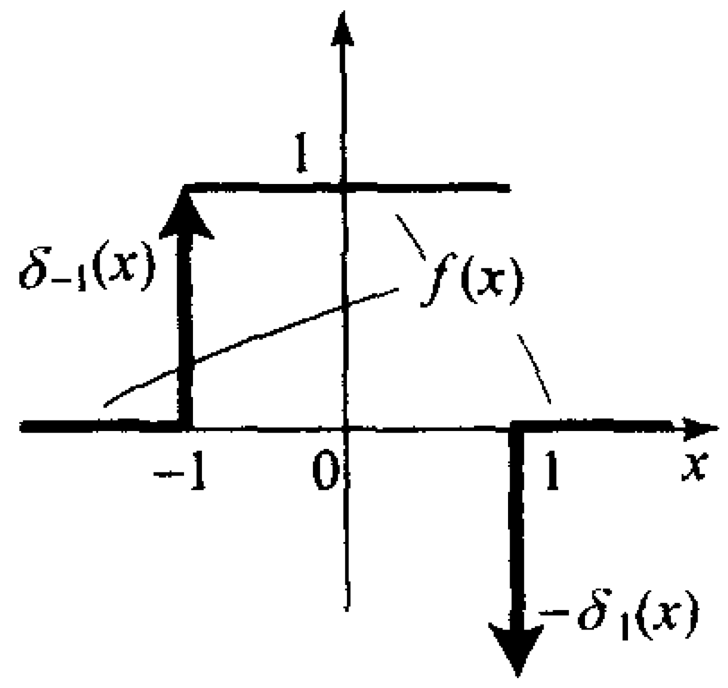


图 11 在 $x=-1$ 处的单位跳跃和在 $x=1$ 处的单位下降得到导数 $\delta_{-1}(x)-\delta_1(x)$

因为 $\sin\omega=\frac{1}{2i}(e^{i\omega}-e^{-i\omega})$. 又 $\mathcal{F}(f)(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}$(7.2 节例 1). 因此，运算性质 $\mathcal{F}(f')(\omega)=\mathrm{i}\omega\,\mathcal{F}(f)(\omega)$ 确实成立. ■

广义函数通常用在中间步骤中，以简化或求解含有常义函数的问题. 我们利用两个例题来说明，如何化简通常意义下分段线性函数傅里叶变换的计算. 452

例 6 分段线性函数的傅里叶变换

求出例 3 中函数 $\phi(x)$ 的傅里叶变换.

解 由(10)式，我们有

$$\phi'(x)=2\,\mathcal{U}_{-1}(x)-4\,\mathcal{U}_0(x)+2\,\mathcal{U}_1(x).$$

利用(15)式，我们得到

$$\mathcal{F}(\phi')=2\,\mathcal{F}(\mathcal{U}_{-1})-4\,\mathcal{F}(\mathcal{U}_0)+2\,\mathcal{F}(\mathcal{U}_1)=-\frac{i}{\sqrt{2\pi}\omega}(2e^{i\omega}-4+2e^{-i\omega}).$$

但是

$$\mathcal{F}(\phi')=i\omega\,\mathcal{F}(\phi)\Rightarrow\mathcal{F}(\phi)=\frac{-i}{\omega}\mathcal{F}(\phi'),$$

因此

$$\mathcal{F}(\phi)=-\frac{2e^{i\omega}-4+2e^{-i\omega}}{\sqrt{2\pi}\omega^2}.$$

利用恒等式 $e^{i\omega}+e^{-i\omega}=2\cos\omega$ 化简可得

$$\mathcal{F}(\phi)=\frac{4(1-\cos\omega)}{\sqrt{2\pi}\omega^2},$$

这对所有 ω 都连续，包括 $\omega=0$ 点，正如由可积函数的傅里叶变换所期待的. 变换在 $\omega=0$ 处的值是

$$\mathcal{F}(\phi)(0)=\lim_{\omega\to 0}\mathcal{F}(\phi)(\omega)=\lim_{\omega\to 0}\frac{4(1-\cos\omega)}{\sqrt{2\pi}\omega^2}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}},$$

两次利用洛必达法则可以验证它. ■

为求解分段线性或多项式函数 ϕ 的傅里叶变换，我们将例 6 的方法总结如下：

- 对 ϕ 求足够多次导数，使得 $\phi^{(n)}$ 是阶梯函数、狄拉克 δ 函数及其导数的线性组合.
- 利用运算性质和(12)～(15)式，计算 $\phi^{(n)}$ 的傅里叶变换.
- 利用运算性质 $\mathcal{F}(\phi^{(n)})(\omega)=(\mathrm{i}\omega)^n\,\mathcal{F}(\phi)(\omega)$，得到 $\mathcal{F}(\phi)(\omega)=(-1)^n\mathrm{i}^n\,\dfrac{\mathcal{F}(\phi^{(n)})(\omega)}{\omega^n}$.

回忆：

$$\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=-1;\quad \frac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i};$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\mathrm{i})^n}&=\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^n\\&=(-\mathrm{i})^n\\&=(-1)^n\mathrm{i}^n.\end{aligned}$$

在例 6 中，我们只需要微分一次，就得到导数 ϕ' 是狄拉克 δ 函数和单位阶梯函数的线性组合. 在下面这个例题中，仅计算一阶导数是不够的，我们将计算二阶导数. 453

例 7 分段光滑函数的傅里叶变换

求出图 12 中函数 $f(x)$ 的傅里叶变换.

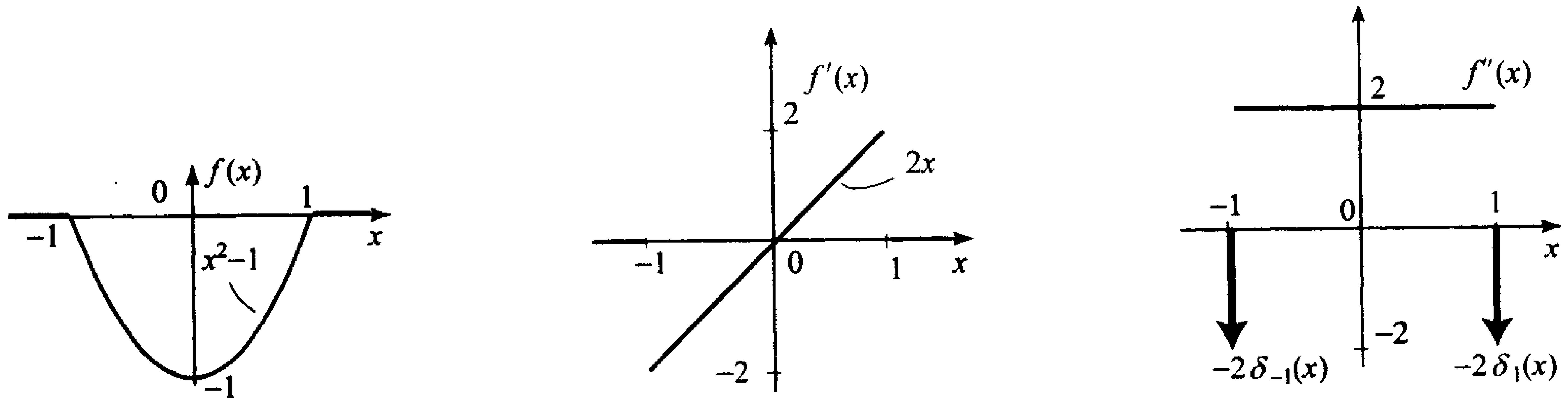


图 12 例 7 中的函数 $f(x)$ 及其导数

解 首先，我们将问题转化为求解广义函数的傅里叶变换. 对 f 求导(见图 12)，我们得到

$$f''=2(\mathcal{U}_{-1}-\mathcal{U}_1)-2\delta_{-1}-2\delta_1,$$

其中插入 δ 函数是为了说明 f' 在 ±1 处的跳跃. 利用(13)和(15)式，计算傅里叶变换可得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f'')&=2(\mathcal{F}(\mathcal{U}_{-1})-\mathcal{F}(\mathcal{U}_1))-2(\mathcal{F}(\delta_{-1})+\mathcal{F}(\delta_1))\\&=\frac{-2\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\omega}-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})\\&=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}-\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\cos\omega.\end{aligned}$$

应用 7.2 节定理 2，我们有

$$\mathcal{F}(f'') = -\omega^2 \mathcal{F}(f) \Rightarrow \mathcal{F}(f) = \frac{-1}{\omega^2} \mathcal{F}(f''),$$

因此

$$\mathcal{F}(f) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}\omega^2}\left(\cos\omega - \frac{\sin\omega}{\omega}\right).$$

同样，可以验证变换在 $\omega=0$ 处是连续的.（考虑在 0 点附近的泰勒级数.） ■

在下面的例题中，我们说明：如何构造一个函数所满足的微分方程，该函数在通常意义下是不可微的. 正如你所料，这样的微分方程肯定包含广义函数. 其过程就是傅里叶变换计算的一个重要应用. 我们以它作为计算 $f(x)=e^{-a|x|}$ $(a>0)$的傅里叶变换的另外一种方式.

例 傅里叶变换与微分方程

函数 $f(x)=e^{-a|x|}$ $(a>0)$及其导数如图 13 所示. 由于 f 是连续的，所以在 f' 的公式里不需要用狄拉克 δ 函数. 在计算 $f''(x)$时，由 f' 的图像可知，在 $x=0$ 处存在 $2a$ 单位的下降. 为此，我们要加上加权 δ 函数 $-2a\delta_0(x)$. 因此，$f''(x)=a^2 f(x)-2a\delta_0(x)$，所以 f 满足微分方程

$$f''(x) - a^2 f(x) = -2a\delta_0(x).$$

对这个方程作傅里叶变换，并利用 7.2 节定理 2，我们得到

$$-\omega^2 \mathcal{F}(f)(\omega) - a^2 \mathcal{F}(f)(\omega) = -2a\,\mathcal{F}(\delta_0) = -2a \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow \mathcal{F}(f)(\omega)(a^2+\omega^2) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}},$$

这就得到公式$\mathcal{F}(e^{-a|x|})(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\omega^2}$.

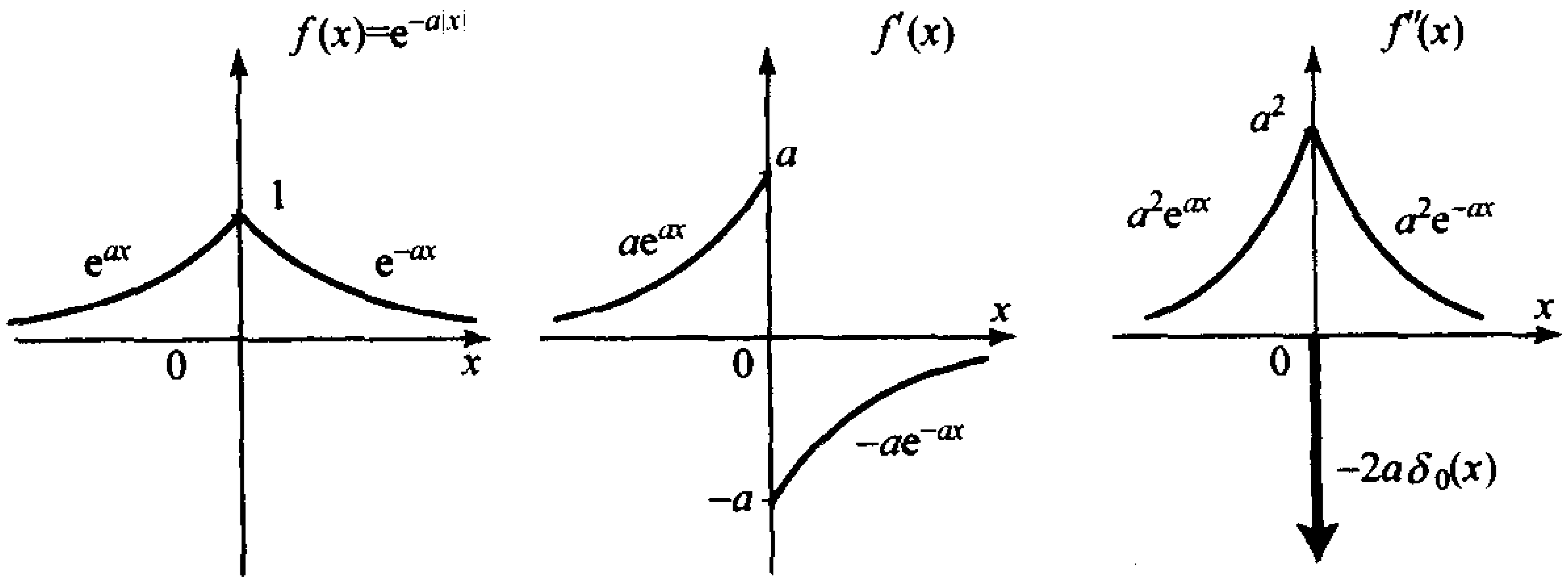


图 13 函数 $f(x)=e^{-a|x|}$ $(a>0)$，二阶导数在 $x=0$ 处有一个狄拉克 δ 函数，以说明一阶导数在$x=0$ 处的 $2a$ 单位下降 ■

454

包含狄拉克 δ 函数的卷积

更向前进一步，我们来正式地计算包含广义函数的卷积. 我们将不给出两个广义函数 ϕ 和 ψ 卷积的确切定义. 我们以 $\phi * \psi$ 来表示

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)\psi(x-t)\,dt,$$

只要上式积分有意义．例如，如果ϕ是一个具有逐点表示的广义函数(如，狄拉克δ函数、或赫维赛德函数、或通常的有界函数)，而α是个实数，则

$$\delta_\alpha * \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\alpha(t)\phi(x-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\phi(x-\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\phi_\alpha(x), \tag{17}$$

[积分$\phi(x-t)$乘以$\delta_\alpha(t)$取$\phi(x-t)$在$t=\alpha$处的值.]其中$\phi_\alpha(x)$是ϕ对α的平移．因此，与δ_α的卷积就等效于乘以常数$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$、再平移α单位．特别地，当$\alpha=0$时，与δ_0的卷积除了乘以因子$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$以外，保持函数不变．这就使得$\sqrt{2\pi}\delta_0$是卷积的二元运算的单位元，因为对任意函数f，我们有

$$\boxed{(\sqrt{2\pi}\delta_0) * f(x) = f(x).} \tag{18}$$

更一般地，我们有

$$\boxed{(\sqrt{2\pi}\delta_\alpha) * f(x) = f(x-\alpha).} \tag{19}$$

455

在(17)式中取$\phi=\delta_b$，我们得到如下有趣的恒等式

$$\boxed{\delta_a * \delta_b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta_{a+b}} \tag{20}$$

(习题 48)．这个恒等式说明：两个δ函数的卷积是一个加权δ函数，其支点是原来两个δ函数支点之和(图 14)．

在下面的应用中，我们利用广义函数的卷积和导数，求出分段线性函数的卷积．这里介绍的方法非常有用，在习题中将用来求解更具挑战性的卷积．我们需要公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\phi * \psi) = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} * \psi = \phi * \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}. \tag{21}$$

验证这个公式的一个方法是：利用运算性质，证明上面三个卷积的傅里叶变换是相同的(习题 48)．两次应用这个公式，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\phi * \psi) = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} * \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}. \tag{22}$$

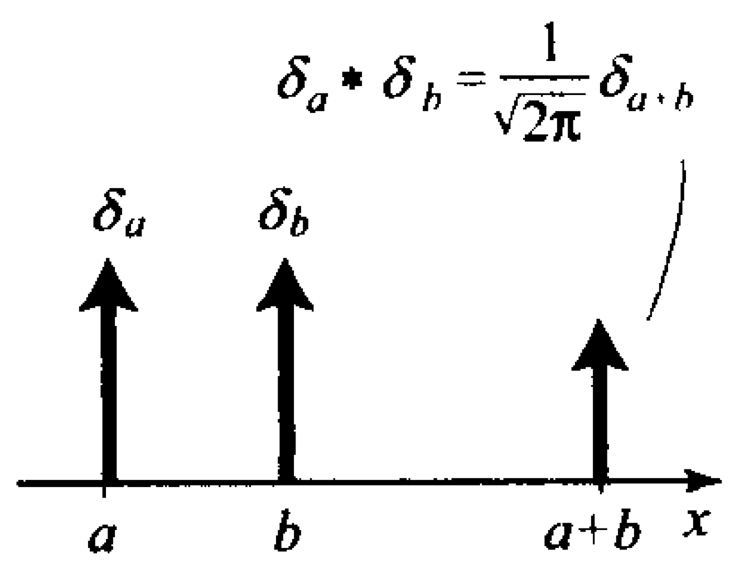


图 14 两个δ函数的卷积是另一个加权δ函数，其支点是原来支点之和

例 9 阶梯函数卷积

当$|x|<1$时，$f(x)=1$，否则$f(x)$为零．计算$f*f(x)$．(关于f和自身的n次卷积，请参见习题 70.)

解 我们有$f'(x)=\delta_{-1}-\delta_1$(图 15)．利用(22)、(20)式，以及卷积的分配性，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(f*f) = f' * f' = (\delta_{-1}-\delta_1) * (\delta_{-1}-\delta_1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\delta_{-2} - 2\delta_0 + \delta_2)$$

(图 16)．

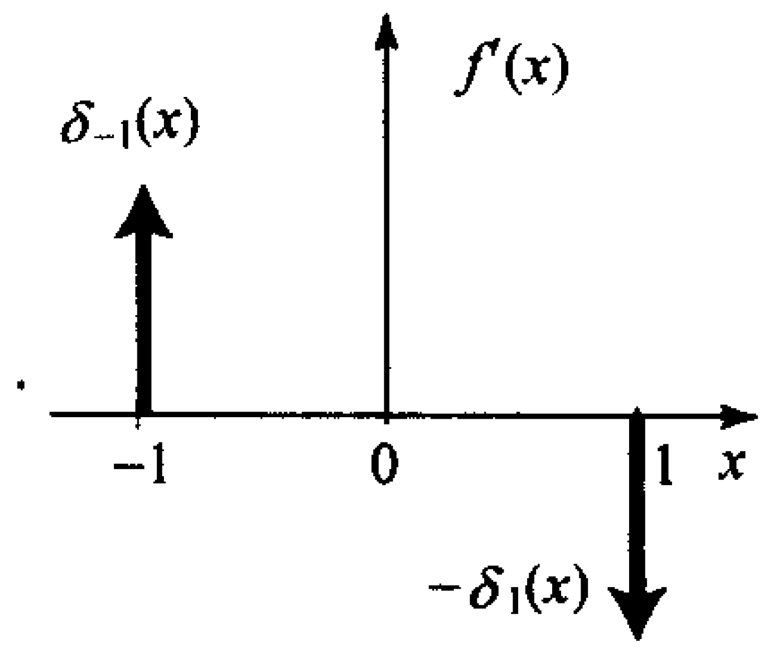


图 15　例 9 中的 $f'(x)$

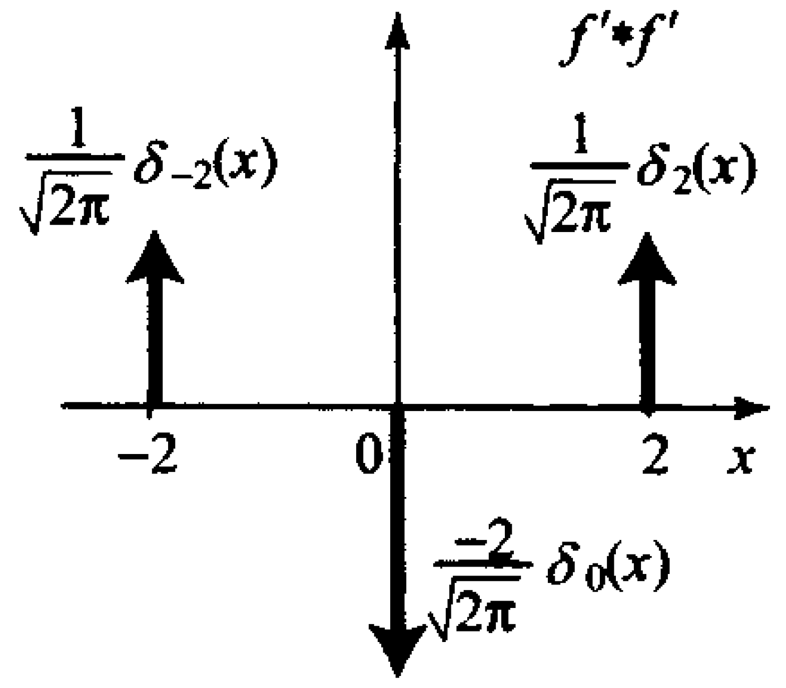


图 16　$(f*f)''(x)$

利用(9)式，求一次积分，得到

$$(f*f)'=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathcal{U}_{-2}-2\,\mathcal{U}_0+\mathcal{U}_2),$$

这是一个阶梯函数，如图 17 所示.（另一种解法请参考习题 49.）利用例 2 的结果，再求一次积分，得到

$$f*f=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\tau_{-2}-2\tau_0+\tau_2),$$

这个函数图像如图 18 所示.

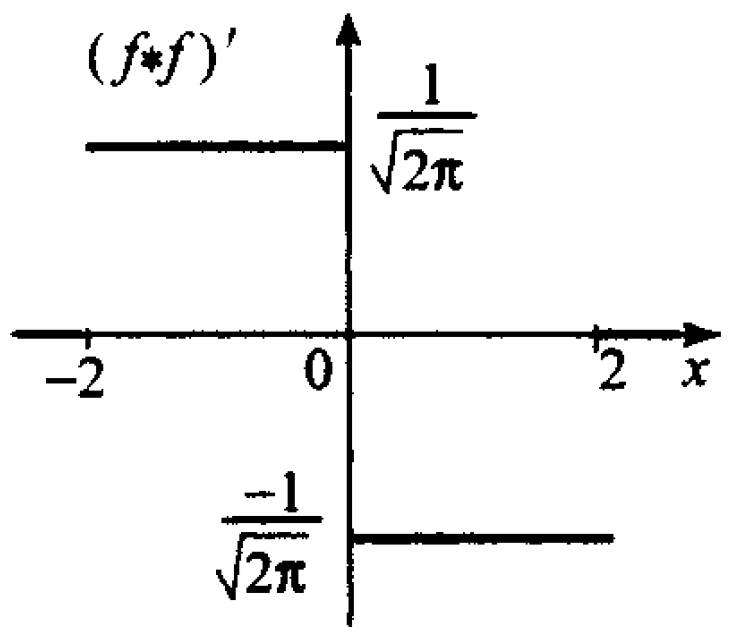


图 17　$(f*f)'(x)$

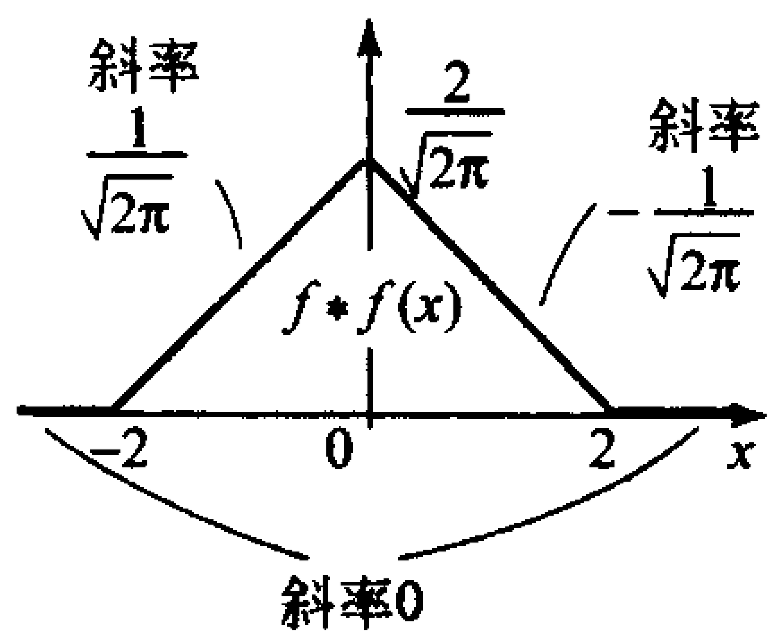


图 18　$f*f(x)$

456　下面是构造图 18 中图像的几个小技巧，我们知道 $f*f$ 是连续的、分段线性，且对充分大 $|x|$，有 $f*f(x)=0$. 同样，由于对 $x<-2$，斜率为零，我们得到：当 $x<-2$ 时，$f*f(x)=0$. 所以，在 $x=-2$ 的左边，$f*f$ 的图像与 x 轴重合. 当 $x>-2$ 时，$f*f$ 的图像由几段首尾相连的直线段组成，其斜率由 $(f*f)'$ 给出（图 17）. 从图 17 中得出每条线段的斜率，再画出相应的线段. 例如，如果 $-2<x<0$，斜率为 $1/\sqrt{2\pi}$，所以对 $-2<x<0$，我们自点 $(-2,0)$ 画一条斜率为 $1/\sqrt{2\pi}$ 的线段. 继续做下去，就得到图 18 中的图像. 由图像，得到公式

$$f*f(x)=\begin{cases}0 & 若\ x<-2,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(x+2) & 若\ -2\leqslant x\leqslant 0,\\ -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(x-2) & 若\ 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0 & 若\ x>2.\end{cases}$$

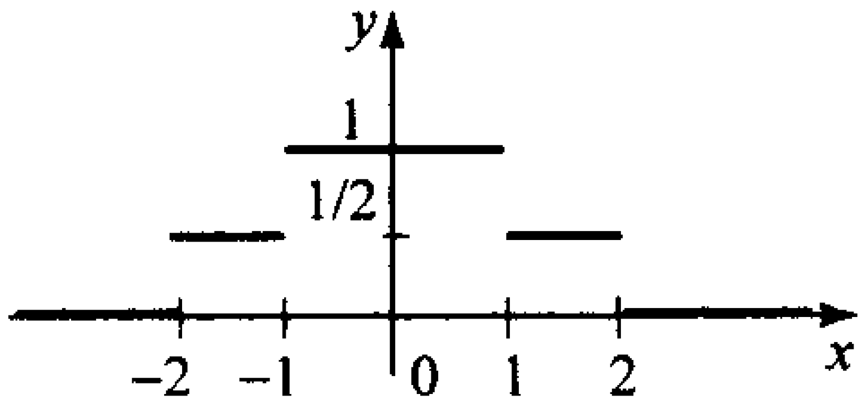
■

与广义函数有关的技巧很多，我们将在习题中介绍更多的例子．至今为止，为避免繁琐的计算，我们只是介绍了广义函数应用中的中间步骤．在下一节中，我们将结合傅里叶变换法，将广义函数作为工具，求解偏微分方程．更重要的边值问题应用将在第 12 章给出．

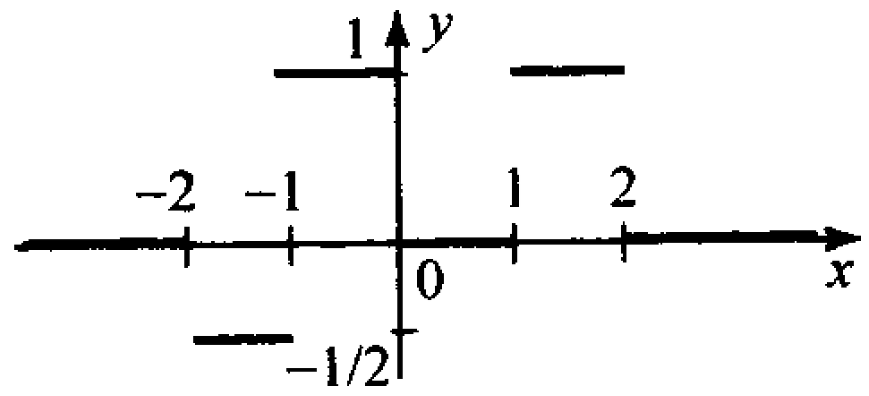
习题 7.8

在习题 1～4 中，求出给定函数的导数．在适当的地方，应用狄拉克 δ 函数．

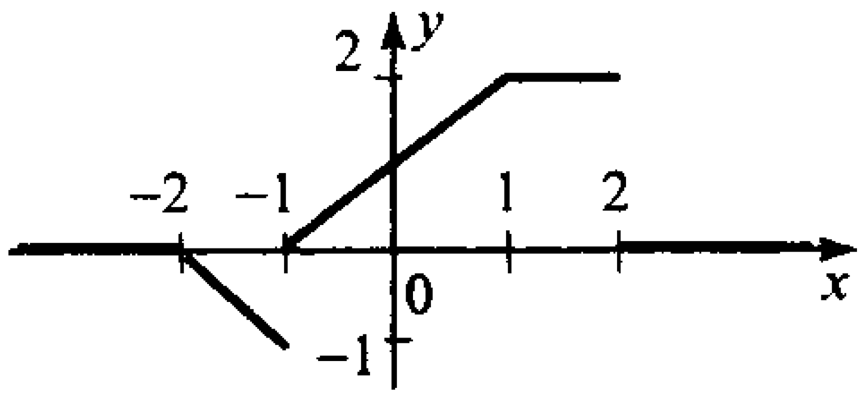
1.



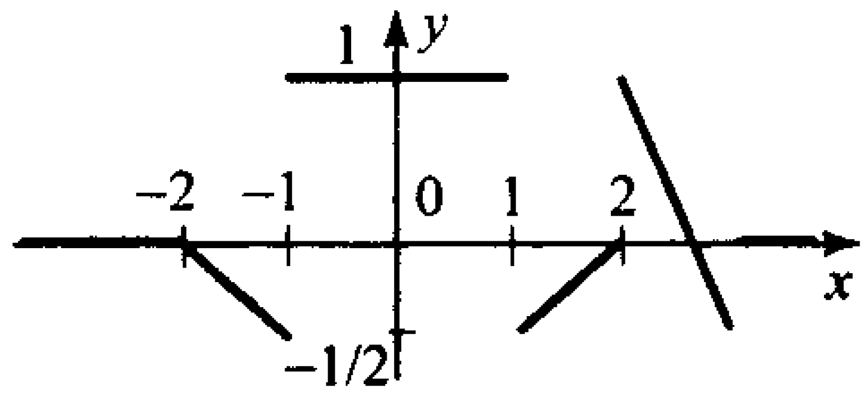
2.



3.



4.



在习题 5～12 中，画出给定函数的图像，并求出它的导数．在适当的地方，应用狄拉克 δ 函数．取 $n=0, 1, 2, \cdots$，a 和 α 是实数，$a>0$.

5. $\phi(x)=\begin{cases}1 & 若\ x<-1,\\ 0 & 若\ -1<x<1,\\ 1 & 若\ x>1.\end{cases}$

6. $\phi(x)=\begin{cases}1 & 若\ x<-1,\\ x^2 & 若\ -1<x<1,\\ -1 & 若\ x>1.\end{cases}$

457

7. $\phi(x)=\begin{cases}0 & 若\ x<-2a,\\ \dfrac{1}{a}(x+2a) & 若\ -2a<x<-a,\\ 1 & 若\ -a<x<a,\\ -\dfrac{1}{a}(x-2a) & 若\ a<x<2a,\\ 0 & 若\ x>2a.\end{cases}$

8. $\phi(x)=\begin{cases}1 & 若\ x<0,\\ 0 & 若\ x>0.\end{cases}$

9. $\phi(x)=x(\mathcal{U}_0(x)-\mathcal{U}_2(x))$.

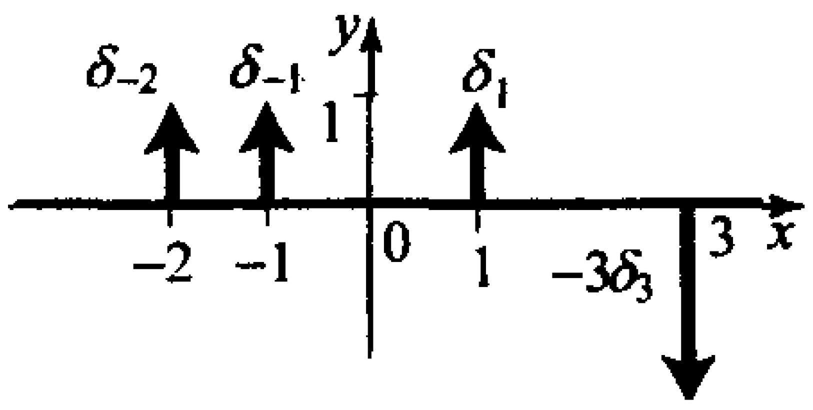
10. $\phi(x)=(x-\alpha)^n\,\mathcal{U}_\alpha(x)$.

11. $\phi(x)=\mathcal{U}_0(x)-\mathcal{U}_1(x)+x(\mathcal{U}_1(x)-\mathcal{U}_2(x))+(-x+4)(\mathcal{U}_2(x)-\mathcal{U}_4(x))$.

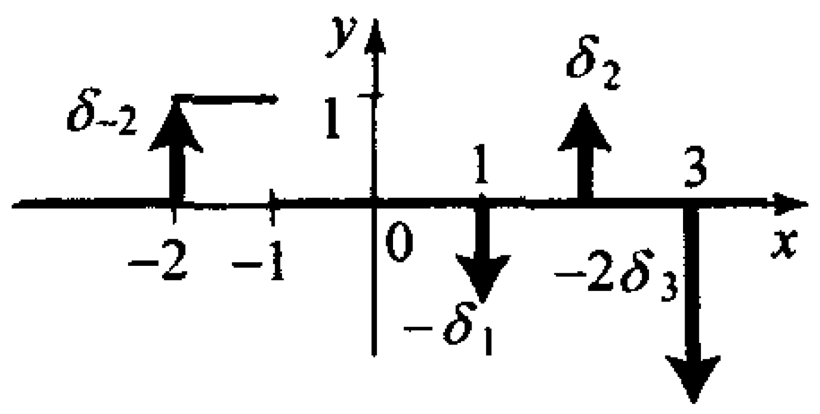
12. $\phi(x)=\sum_{j=1}^{5} j(\mathcal{U}_j(x)-\mathcal{U}_{j+1}(x))$.

在习题 13～16 中，$f(x)$导数的图像已经给出，画出 $f(x)$的图像，已知 $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.

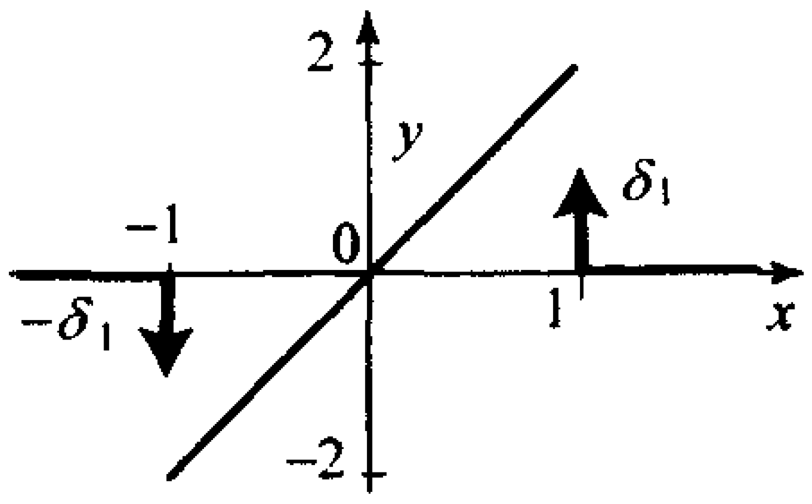
13.



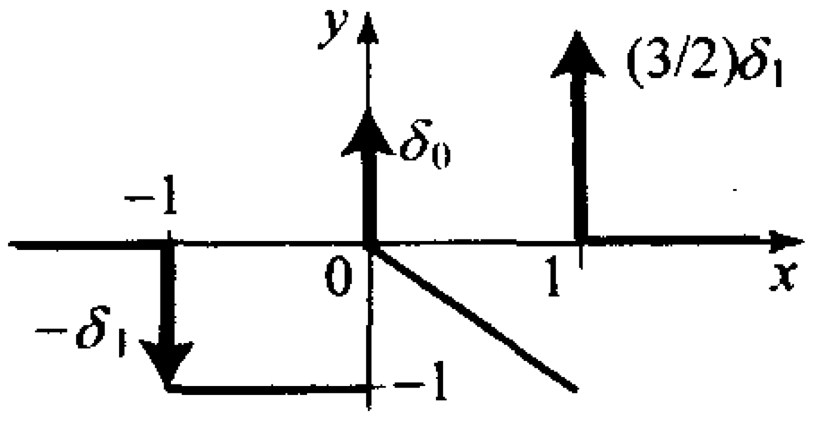
14.



15.



16.



在习题 17～20 中，求出 $<\phi'(x),\ f(x)>$ 的表达式，其中 f 是检验函数，ϕ 是给定函数.

17. $\phi(x)=\delta_0(x)-\delta_1(x)$.

18. $\phi(x)=\mathcal{U}_1(x)-\mathcal{U}_2(x)$.

19. ϕ 如习题 7.

20. $\phi(x)$ 如习题 11.

在习题 21～24 中，求出 ϕ''，不必从广义函数导数的定义来推导.

21. ϕ 如习题 7.

22. $\phi(x)$ 如习题 11.

23. $\phi(x)$ 如图 19.

24. $\phi(x)$ 如图 20.

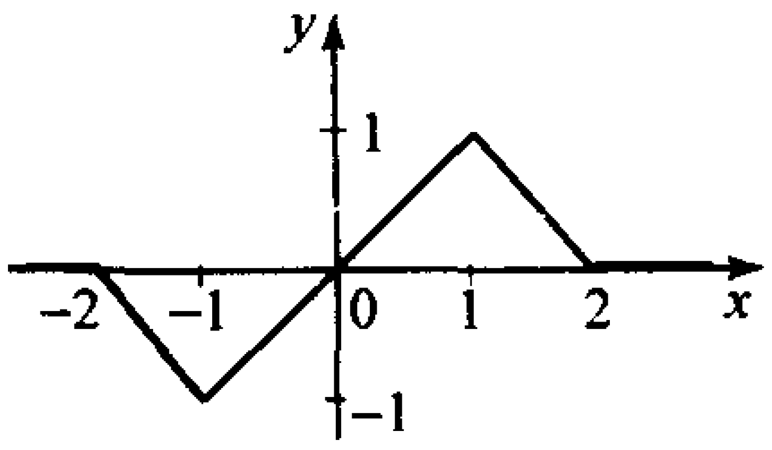


图 19

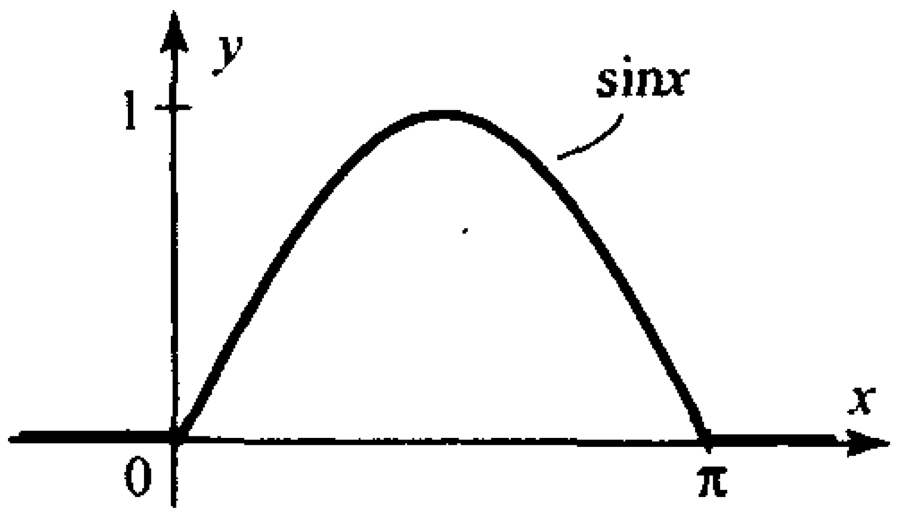


图 20

25. 利用广义函数导数的定义，计算例 3 中的 ϕ' 和 ϕ''(按照例 2 求解后半部分的步骤).

26. 按照例 2(b)的步骤，对 $n=1,2,\cdots$，证明：$(x^n\,\mathcal{U}_0(x))'=nx^{n-1}\mathcal{U}_0(x)$.（利用事实：对检验函数 $f(x)$，$\lim\limits_{x\to\infty}x^n f(x)=0$.）

27. 求出检验函数 $f(x)$ 与下列广义函数之积的积分：

458

(a) $\delta_0'(x)$.　　(b) $\delta_a'(x)$.　　(c) $\delta_a^{(n)}(x)$，其中 $n=1,2,\cdots$.

28. 利用广义函数导数的定义，证明(9)式.

在习题 29～46 中，求出给定函数的傅里叶变换. 利用已知变换和运算性质，简化计算步骤.

29. $\phi(x)=3\delta_0(x)-2\delta_{-2}(x)$.

30. $\phi(x)=(\mathcal{U}_0(x)-\mathcal{U}_1(x))'$.

31. $\phi(x)=\operatorname{sgn}(x)$，其中当 $x>0$ 时，$\operatorname{sgn}(x)=1$；当 $x<0$ 时，$\operatorname{sgn}(x)=-1$；而当 $x=0$ 时，为零.

32. $\phi(x)=-\delta_{-1}(x)+\delta_1(x)+\mathcal{U}_0(x)-\mathcal{U}_1(x)$.

33. $\phi(x)=x(\mathcal{U}_{-1}(x)-\mathcal{U}_1(x))$.

34. $\phi(x)=F_k(x)$，其中 F_k 如定理 1 定义.

35. $f(x)=\sum\limits_{j=-3}^{3}j(\mathcal{U}_j(x)-\mathcal{U}_{j+1}(x))$.

36. $f(x) = \sum_{j=0}^{5}(x-j)(\mathcal{U}_j(x)-\mathcal{U}_{j+1}(x))$.

37. $\phi(x)=\tau^2(x)$，其中 τ 如例 2 定义.

38. $\phi(x)=\tau^2(x-\alpha)$，其中 τ 如例 2 定义，而 α 是实数.

[提示：在习题 39～42 中，利用例 6 的方法.]

39. $f(x)$如习题 1.

40. $f(x)$如习题 2.

41. $f(x)$如习题 3.

42. $f(x)$如习题 4.

[提示：在习题 43～46 中，利用例 8 的方法.]

43. 当 $x>0$ 时，$f(x)=e^{-x}$；而当 $x<0$ 时，$f(x)$为零.

44. 当 $|x|<1$ 时，$f(x)=e^{-x}$；否则 $f(x)$为零.

45. 当 $|x|<\pi$ 时，$f(x)=\sin x$；否则 $f(x)$为零.

46. $f(x)=\sin x\sum_{j=0}^{5}(\mathcal{U}_{2j\pi}(x)-\mathcal{U}_{(2j+1)\pi}(x))$.

47. 利用两种不同的方法计算例 8 中 $f*f$ 的傅里叶变换：利用运算性质$\mathcal{F}(f*f)=\mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(f)$；按照例 7 的方法.

48. 利用傅里叶变换验证(20)、(21)和(22)式.

49. 计算例 9 中的$(f*f)'$，注意到，$(f*f)'=f'*f$，然后利用 $f'(x)=\delta_{-1}(x)-\delta_1(x)$以及(19)式.

50. 令 α 和 β 是任意实数，试证：$(\sqrt{2\pi}\delta_\alpha)*\mathcal{U}_\beta=\mathcal{U}_{\alpha+\beta}$.

在习题 51～60 中，计算 $\phi*\psi$.

51. $\phi(x)=3\delta_{-1}(x)$，$\psi(x)=\delta_2(x)-\delta_1(x)$.

52. $\phi(x)=3\delta_{-1}(x)$，$\psi(x)=e^{-|x|}$.

53. $\phi(x)=\delta_{-1}(x)+2\delta_2(x)$，$\psi(x)=\phi(x)$.

54. $\phi(x)=\delta_{-1}(x)*\delta_1(x)$，$\psi(x)=\sqrt{2\pi}\delta_2(x)$.

[提示：在习题 55～60 中，利用例 10 的方法.]

55. $\phi(x)=\mathcal{U}_{-1}(x)-\mathcal{U}_1(x)$，$\psi(x)=(\mathcal{U}_{-1}(x)-\mathcal{U}_1(x))x$.

56. $\phi(x)=\mathcal{U}_{-a}(x)-\mathcal{U}_a(x)$，$\psi(x)=\mathcal{U}_{-b}(x)-\mathcal{U}_b(x)$，其中 $0<a\leqslant b$.

57. $\phi(x)=\mathcal{U}_{-1}(x)-\mathcal{U}_1(x)+\mathcal{U}_2(x)-\mathcal{U}_3(x)$，$\psi(x)=\mathcal{U}_{-1}(x)-\mathcal{U}_1(x)$.

58. $\phi(x)=\mathcal{U}_{-2}(x)-\mathcal{U}_2(x)$，$\psi(x)=x^2(\mathcal{U}_{-1}(x)-\mathcal{U}_1(x))$.

59. $\phi(x)$是习题 1 中的函数；当 $|x|<1$ 时，$\psi(x)=1$；否则 $\psi(x)$为零.

60. 令 $\alpha<\beta$ 是任意实数，试证：如果 $f(x)=(x-\alpha)(\mathcal{U}_\alpha(x)-\mathcal{U}_\beta(x))+(\beta-\alpha)\mathcal{U}_\beta$，则 $f'(x)=\mathcal{U}_\alpha(x)-\mathcal{U}_\beta(x)$.

61. 对任意实数 α，试证：$x\delta_\alpha(x)=\alpha\delta_\alpha(x)$.

62. $\phi(x)$是例 3 中的函数；$\psi(x)=\sin\pi x$.

63. 我们定义广义函数 $\phi(x)$和一个连续函数 $g(x)$的乘积为：$g(x)\phi(x)$与检验函数 $f(x)$的乘积的积分值，为 $\langle g(x)\phi(x), f(x)\rangle=\langle\phi(x), g(x)f(x)\rangle$.

(a)试证：按照这个定义，有 $x\delta_0(x)=0$.

(b)试证：$x\delta_0(x)=\alpha\delta_\alpha$.

64. 假设 ϕ 是个广义函数，而 f 是一个检验函数. 试证：$\langle x\phi', f\rangle=\langle-\phi'+(x\phi)', f\rangle$. 由此得出：$(x\phi)'=x\phi'+\phi$. [提示：记住$\langle\phi, f\rangle$是一个积分，所以在下述意义下是线性的：给定 α 和 β 是数，ϕ 和 ψ 是广义函数，而 f 和 g 是检验函数，则$\langle\alpha\phi+\beta\psi, f\rangle=\alpha\langle\phi, f\rangle+\beta\langle\psi, f\rangle$，以及$\langle\phi, \alpha f+\beta g\rangle=\alpha\langle\phi, f\rangle+\beta\langle\phi, g\rangle$.]

推导下面的傅里叶变换，取 a 为实数.

459

65. $\mathcal{F}(e^{iax})=\sqrt{2\pi}\delta_a$. [提示：令 f 是检验函数，则 $\langle\mathcal{F}(e^{iax}),f\rangle=\langle e^{iax},\mathcal{F}(f)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iax}\,\mathcal{F}(f)(x)\mathrm{d}x$. 利用傅里叶逆变换解释为什么最后一个积分为 $\sqrt{2\pi}f(a)$，即得所证之公式.]

66. $\mathcal{F}(\cos ax)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta_a+\delta_{-a})$. [提示：将 $\cos ax$ 写成关于 $e^{\pm iax}$ 的表达式，再应用习题 65 的结果.]

67. $\mathcal{F}(\sin ax)=-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta_a-\delta_{-a})$. [提示：与前一个习题类似.]

68. 在本习题中，我们给出公式 $\mathcal{F}(x^n)=i^n\sqrt{2\pi}\delta_0^{(n)}$ 的证明要点，其中 $n=1,2,\cdots$. [提示：令 f 是个检验函数，则 $\langle\mathcal{F}(x^n),f\rangle=\langle x^n,\mathcal{F}(f)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x^n\mathcal{F}(f)(x)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2\pi}}{i^n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}i^nx^n\,\mathcal{F}(f)(x)\mathrm{d}x$. 利用傅里叶逆变换解释为什么最后一个积分为 $\sqrt{2\pi}i^n(-1)^nf^{(n)}(0)$，即得所证之公式.]

69. (a)利用麦克劳林级数展开式，证明：如果 n 是偶数时，

$$\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}e^{-x^2/2}\Big|_{x=0}=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^nn!},$$

否则为零.

(b)利用(a)，习题 68，以及事实 $\mathcal{F}(e^{-x^2/2})=e^{-x^2/2}$，证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^{2n}e^{-x^2/2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2\pi}(2n)!}{2^nn!}.$$

460

70. **专题问题：指示函数的卷积**. 在本习题中，我们将推导如下有趣的公式. 令 $f(x)=\mathcal{U}_0(x)-\mathcal{U}_1(x)$，$n\geqslant 2$ 为一个整数. 定义 f 与自身的 n 次卷积为

$$f^{*n}(x)=\overbrace{f*f*\cdots*f}^{n个}. \tag{23}$$

则当 $x<0$ 或 $x>n$ 时，$f^{*n}(x)=0$，而对$[0,n]$中的 x，我们有

$$f^{*n}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!}\sum_{k=0}^{[x]}(-1)^k\binom{n}{k}(x-k)^{n-1}, \tag{24}$$

其中$[x]$表示 x 的最大整数，而 $\binom{n}{k}$ 是二项式系数. 按照所提示的证明，利用傅里叶变换和广义函数的适当运算性质，补充所有遗漏的细节.

证明提示：我们有

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^nf^{*n}(x)=(f')^{*n}(x)\quad 及\quad f'(x)=\delta_0(x)-\delta_1(x);$$

所以

$$(f')^{*n}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\delta_k(x).$$

为得到(24)式，从 $-\infty$ 到 0 关于 x 积分 n 次.（先作 $n=2$ 和 3 的情形.）

7.9 非齐次热传导方程

在本节，我们利用广义函数，求解热传导方程的有趣情形，包括非齐次热传导方程. 用狄拉克 δ 函数，我们可以考虑包含集中在孤立点的函数的边值问题. 这些问题不仅具有重要的实际应用，而且它们也启发了一些强有力的理论概念，并作为其具体示例，如微分方程的基本解和格林函数等. 本节及下节将讨论这些论题，而在第 12 章将深入展开.

首先，我们考虑 7.4 节热传导方程的一个例题，其中初始温度分布是一个广义函数(一个

狄拉克 δ 函数). 在习题中，将有一些有趣的应用，其中初始分布的傅里叶变换，而不是初始分布，是个广义函数(习题 7).

例 1　电焊的效应

模拟在一个长棒上一点(比如说，$x=0$)处电焊短暂作用效应的模型是热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad(-\infty<x<\infty,\quad t>0),\tag{1}$$

461

满足初始条件

$$u(x,0)=\delta_0(x),\quad(-\infty<x<\infty),\tag{2}$$

其中 $\delta_0(x)$ 表示棒内的初始温度分布：对所有 $x\neq0$，为零；在 $x=0$ 处，为∞(图 1). 求解边值问题，以确定在 $t>0$ 时刻棒内各点的温度.

解　记问题(1)～(2)的解为 $\phi(x,t)$. 利用 7.4 节定理 1，$\phi(x,t)$是初始温度分布 $f(x)$和热核 $g_t(x)=\frac{1}{c\sqrt{2t}}e^{-x^2/(4c^2t)}$ 的卷积. 取 $f(x)=\delta_0(x)$，由 7.8 节(17)式，我们得到

$$\begin{aligned}\phi(x,t)&=\frac{1}{c\sqrt{2t}}e^{-x^2/(4c^2t)}*\delta_0(x)\\&=\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/(4c^2t)},\end{aligned}\tag{3}$$

但是(3)式右端的函数是常数乘以热核，$g_t(x)$；更具体地，$\phi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}g_t(x)$. 在图 2 中，我们画出了当 $c=1$ 时解的图像. 注意到，热量是如何以无穷大的速度立即传遍整个棒的.

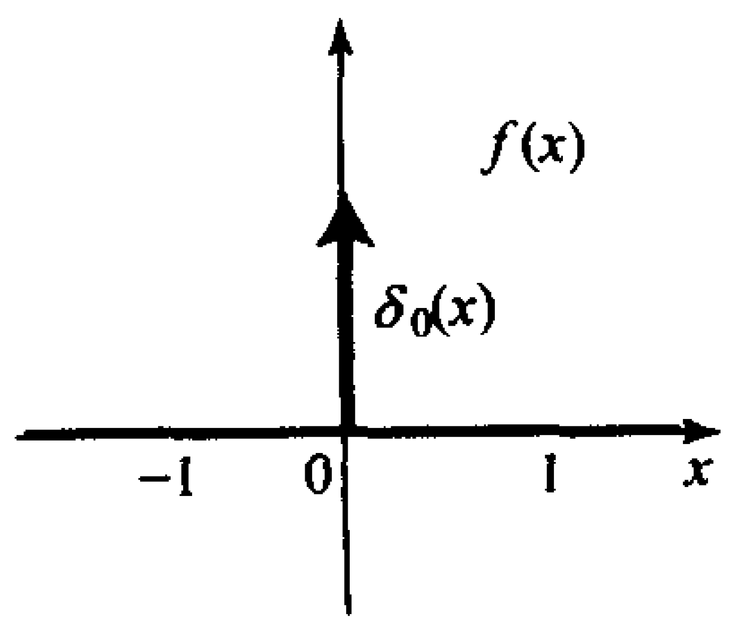


图 1　δ 函数作为初始条件

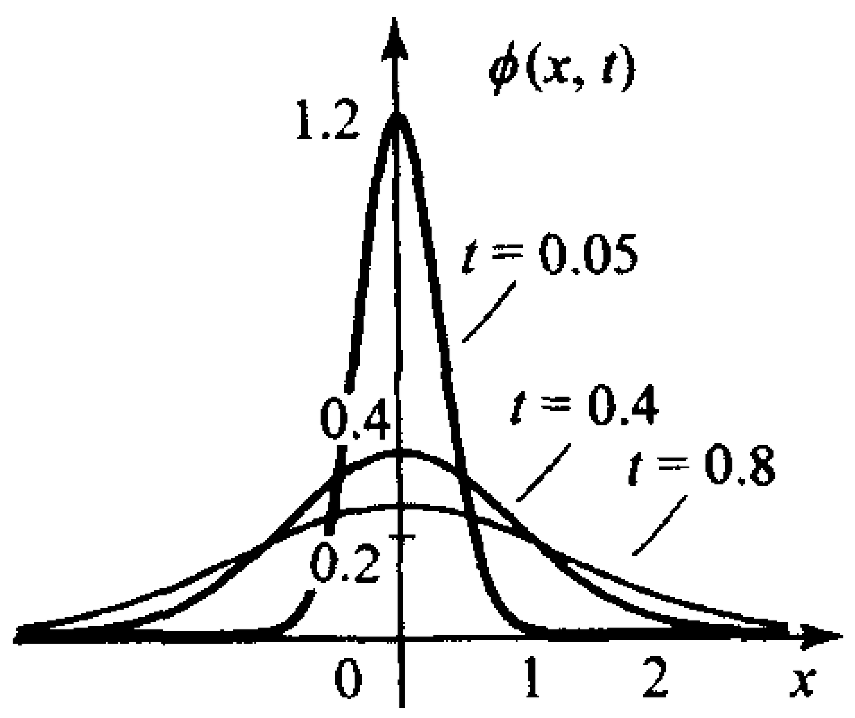


图 2　热量沿着棒以无穷大的速度散开　■

例 1 中解的有效性可以直接将 $\phi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}g_t(x)$代入(1)式来证明. 但是 $\phi(x,t)$在 $t=0$ 时没有定义，所以它在什么意义下满足初始条件：$\phi(x,0)=\delta_0(x)$，或$\lim\limits_{t\to0}\phi(x,t)=\delta_0(x)$? 回顾，在上一节中，我们说两个广义函数相等，如果它们与检验函数乘积的积分都相等. 所以，为验证(2)式，我们必须验证：对所有的检验函数 f，有

$$\lim_{t\to0}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,t)f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\delta_0(x)f(x)\,dx.\tag{4}$$

由狄拉克 δ 函数的性质，右端是 $f(0)$. 至于左端，我们有

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,t)f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g_t(x)f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g_t(0-x)f(x)\mathrm{d}x,$$

在上面最后一个等式中，利用了 $g_t(x)$关于 x 是偶的这个事实. 我们认识到最后的表达式是 $\lim\limits_{t\to 0}g_t * f(0)$. 由 7.4 节定理 1，这个极限是 $f(0)$. 因此，(4)式成立，所以称 $\phi(x, t)$是(1)～(2)的解是有意义的. 因为 $\phi(x, t)$是作为一个广义函数来验证(2)式，而不是作为常义函数，所以我们称 $\phi(x, t)$为**弱解**. 一般地，我们称一个在广义函数之间相等意义下满足边值问题的函数或广义函数为弱解.

462

由例 1，我们知道，这个边值问题的弱解是常数乘以热核. 因此，这个弱解是很基本的，因为它可以用来表达热传导方程的通解(7.4 节定理 1). 记住这点，我们来解释求解非齐次热传导方程的步骤：首先，我们求出一个弱解(就是一个包含狄拉克 δ 函数问题的解)，然后，我们将利用这个弱解来导出通解. 后面，为简化行文，我们将不再指明弱解，简单地以解称之.

热传导方程的基本解

为进一步研究热传导方程，我们必须理解热核在 $t=0$ 时的性态. 为利用前一节的广义函数理论和傅里叶变换，我们将热核延拓到 $t\leqslant 0$，对所有 $-\infty<x<\infty$，令

$$\phi(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-x^2/(4c^2t)} & 若\ t>0,\\ 0 & 若\ t\leqslant 0.\end{cases}\tag{5}$$

因此，对 $t>0$，$\phi(x, t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}g_t(x)$，其中 $g_t(x)$是热核，否则 $\phi(x, t)$为零. 由例 1，我们知道：对 $t>0$，$\phi(x, t)$满足热传导方程(1). 下面，我们将证明 $\phi(x, t)$事实上是一个非齐次热传导方程的(弱)解. 在证明中，我们将利用 $\phi(x, t)$的关于变量 x 的傅里叶变换. 回顾 7.4 节的热核的傅里叶变换：$\hat{g}_t(\omega)=\mathrm{e}^{-c^2\omega^2t}$. 因此，对 $-\infty<\omega<\infty$，我们有

$$\hat{\phi}(\omega,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-c^2\omega^2t} & 若\ t>0,\\ 0 & 若\ t\leqslant 0.\end{cases}\tag{6}$$

定理 1(热传导方程的基本解) 令 $\phi(x, t)$如(5)式定义，则 $\phi(x, t)$是一个非齐次热传导方程

$$u_t=c^2u_{xx}+\delta_0(x)\delta_0(t)\qquad(-\infty<t,x<\infty)\tag{7}$$

的(弱)解.

因为 ϕ 是求解一般非齐次热传导方程的核心(参见下面的定理 2)，称之为热传导方程的**基本解**.

证明 注意到，对所有$(x, t)\neq(0, 0)$，$\phi(x, t)$是(7)的解. 这是例 1、(5)式，以及事实：对$(x, t)\neq(0, 0)$，$\delta_0(x)\delta_0(t)=0$ 的直接推论. 为证明定理，对(7)式作关于变量 x 的傅里叶变换，利用 7.3 节的运算性质，(对固定 t)得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}(\omega,t)=-c^2\omega^2\hat{u}(\omega,t)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta_0(t),$$

463

其中我们利用了事实$\mathcal{F}(\delta_0(x))(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. 等价地,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}(\omega,t)+c^2\omega^2\hat{u}(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta_0(t).$$

如果我们可以证明$\hat{\phi}(\omega)$是这个方程的解,其中$\hat{\phi}$由(6)式给出,则取傅里叶逆变换,定理得证. 因为方程包含了广义函数,我们证明两边与检验函数乘积的积分相等. 令$f(t)$是个检验函数,我们必须证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\phi}(\omega,t)+c^2\omega^2\hat{\phi}(\omega,t)\right)f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_0(t)f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(0). \tag{8}$$

对于左端,我们利用(6)式、广义函数ψ导数的定义:对所有检验函数f,$\langle\psi', f\rangle=-\langle\psi, f'\rangle$,得到

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\phi}(\omega,t)+c^2\omega^2\hat{\phi}(\omega,t)\right)f(t)\mathrm{d}t\\&=-\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\phi}(\omega,t)f'(t)\mathrm{d}t+c^2\omega^2\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\phi}(\omega,t)f(t)\mathrm{d}t\\&=-\int_{0}^{\infty}\hat{\phi}(\omega,t)f'(t)\mathrm{d}t+c^2\omega^2\int_{0}^{\infty}\hat{\phi}(\omega,t)f(t)\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{9}$$

其中最后两个积分是黎曼广义积分,对第一个作分部积分:对$t>0$,$\hat{\phi}(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-c^2\omega^2t}$,$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\phi}(\omega,t)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}c^2\omega^2\mathrm{e}^{-c^2\omega^2t}$,则

$$\begin{aligned}-\int_{0}^{\infty}\hat{\phi}(\omega,t)f'(t)\mathrm{d}t&=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-c^2\omega^2t}f(t)\Big|_0^{\infty}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}c^2\omega^2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-c^2\omega^2t}f(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(0)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}c^2\omega^2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-c^2\omega^2t}f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

代入(9)式,我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\phi}(\omega,t)+c^2\omega^2\hat{\phi}(\omega,t)\right)f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(0),$$

这就证明(8)式成立,从而完成了证明. ■

非齐次热传导方程

当研究带有热源的热传导问题时,就会出现非齐次热传导方程. 现在,我们来求解这样的方程. 证明的思想很重要,在第12章中将用来求解平面上各种子集上的泊松方程.

464

定理2(非齐次热传导方程的解) 非齐次热传导方程

$$u_t=c^2u_{xx}+f(x,t)\qquad(t>0,-\infty<x<\infty), \tag{10}$$

带有初始条件

$$u(x,0)=0\qquad(-\infty<x<\infty)\tag{11}$$

的解是

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x-y,t-s)f(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s,\tag{12}$$

其中，当 $t>0$，$-\infty<x<\infty$ 时，$\phi(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}g_t(x)=\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-x^2/(4c^2t)}$.

(12)式中的内层积分是热核和 $f(x,\ s)$的卷积，其中 s 固定. 由 7.4 节定理 1，这个卷积满足齐次热传导方程(1)和初始条件 $u(x,\ 0)=f(x,\ s)$. 将非齐次热传导方程(10)的解表达成齐次热传导方程解与初始条件 $f(x,\ s)$($s>0$ 固定)的积分(关于 t)，这个过程称为**杜阿梅尔原理**. 这个重要方法将在下节中研究，并用来求解非齐次波动方程. 我们将不给出定理 2 的严格证明，相反地，我们将给出足够多的细节，以验证(12)式的有效性.

证明概略 当 $t=0$ 时，(12)式外层积分的区间变成一个点，所以积分值为零. 因此，如果 $t=0$，$u(x,\ t)=0$，即得(11)式成立. 由于对 $t<0$，$f(x,\ t)$没有给定，所以对 f 作延拓：当 $t<0$ 时，令 $f(x,\ t)=0$. 同样，如(5)式，当 $t\leqslant 0$ 时，令 $\phi(x,\ t)=0$. 这样，我们可以将(12)式写成

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x-y,t-s)f(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x-y,t-s)f(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s,$$

其中第二个等式成立是因为：如果 $t<0$，$\phi(x,\ t)=0$；所以如果 $t-s<0$ 或 $s>t$，有 $\phi(x-y,\ t-s)=0$. 假设我们可以在积分号下求导，我们有

$$u_t-c^2u_{xx}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\phi_t(x-y,t-s)-c^2\phi_{xx}(x-y,t-s))f(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s.$$

由定理 1，ϕ 是 $u_t-c^2u_{xx}=\delta_0(x)\delta_0(t)$的(弱)解，所以

$$u_t-c^2u_{xx}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_0(x-y)\delta_0(t-s)f(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s=f(x,t),$$

这就是函数 $f(y,\ s)$在$(y,\ s)=(x,\ t)$点的取值，因为它是与 $\delta_0(x-y)\delta_0(t-s)$乘积的积分. 这就证明了由(12)式定义的函数 $u(x,\ t)$满足 $u_t-c^2u_{xx}=f(x,\ t)$，等价地，$u(x,\ t)$是(10)的解. ■

465

作为定理 2 的应用，我们考虑棒中点热源的影响. 解将用一个特殊函数来表达，这个函数称为**不完全伽马函数**，定义为

$$\boxed{\Gamma(a,x)=\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{a-1}\mathrm{d}t\qquad(x\geqslant 0,a>0).}\tag{13}$$

如果 $x=0$，则 $\Gamma(a,\ 0)=\Gamma(a)$，其中 $\Gamma(a)$是伽马函数在 a 点的值(4.7 节). 如果 $x>0$，定义 $\Gamma(a)$的积分有一部分消失了，这就是解释了函数名. 不完全伽马函数也自然地出现在量子力学的重要应用中(参见 11.2 节). 因为(13)式中的被积函数是正的，如果我们增加积分的区间，积分值变大. 因此，对所有 $x\geqslant 0$，我们有

$$\boxed{0<\Gamma(a,x)\leqslant\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{a-1}\mathrm{d}t=\Gamma(a).}\tag{14}$$

如果 $x>0$，(13)式的积分对所有 a 都收敛．如果 $a\neq 0$，我们作分部积分$\left(u=\mathrm{e}^{-t},\ \mathrm{d}v=t^{a-1},\ \mathrm{d}u=-\mathrm{e}^{-t},\ v=\frac{t^a}{a}\right)$，得到

$$\int_x^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{a-1}\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-t}t^a\Big|_x^\infty+\frac{1}{a}\int_x^\infty \mathrm{e}^{-t}t^a\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{e}^{-x}x^a}{a}+\frac{1}{a}\overbrace{\int_x^\infty \mathrm{e}^{-t}t^a\mathrm{d}t}^{=\Gamma(a+1,x)}.$$

特别地，如果 $-1<a<0$ 和 $x>0$，我们记

$$\int_x^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{a-1}\mathrm{d}t=\frac{1}{a}[-\mathrm{e}^{-x}x^a+\Gamma(a+1,x)]. \tag{15}$$

例 2　点热源的效应

求解边值问题

$$u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+\delta_0(x)\qquad (t>0,-\infty<x<\infty), \tag{16}$$

带有初始条件

$$u(x,0)=0\qquad (-\infty<x<\infty). \tag{17}$$

在方程(16)中，$\delta_0(x)$表示对所有 $t>0$ 作用在点 $x=0$ 的热源．

解　取 $f(x,t)=\delta_0(x)$和 $c=\frac{1}{2}$，应用定理 2，我们得到

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{t-s}}\mathrm{e}^{-(x-y)^2/(t-s)}\delta_0(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s.$$

466

计算与 $\delta_0(y)$乘积的内层积分，得到

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}}\mathrm{e}^{-x^2/(t-s)}\mathrm{d}s.$$

为化简指数函数，我们做变量代换：$z=\frac{x^2}{t-s}$，$\mathrm{d}z=\frac{x^2}{(t-s)^2}$，或 $\mathrm{d}s=\frac{x^2}{z^2}\mathrm{d}z$，以及 $\frac{1}{\sqrt{t-s}}=\frac{\sqrt{z}}{|x|}$．当 s 由 0 变到 t 时，z 由$\frac{x^2}{t}$变到∞，因此，

$$u(x,t)=\frac{|x|}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x^2}{t}}^\infty \mathrm{e}^{-z}z^{-3/2}\mathrm{d}z. \tag{18}$$

取 $a=-\frac{1}{2}$，将 x 变为$\frac{x^2}{t}$，应用(15)式，对 $x\neq 0$，我们得到

$$u(x,t)=2\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/t}-2\frac{|x|}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{x^2}{t}\right). \tag{19}$$

由于在(18)式中，u 是由一个正函数积分得到的，所以对所有(x,t)，它都是正的．进一步地，由于 $2\frac{|x|}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{x^2}{t}\right)\geqslant 0$，所以对 $t>0$ 和所有的 x，有

$$0<u(x,t)\leqslant 2\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/t}$$

(图 3). 在(19)式中取极限 $x\to 0$，得到 $u(0, t)=2\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$，这说明在 $x=0$ 处的温度以正比于$\sqrt{t}$的速度趋近于无穷. 对其他固定的 x，当 $t\to\infty$时，有 $e^{-x^2/t}\to 1$，所以 $u(x, t)\to\infty$的速度正比于$\sqrt{t}$(图 4). 但是，如果在(19)式中固定 $t>0$，我们会看到当 $|x|\to\infty$时，$u(x, t)$快速地趋近于 0. 这些性质如图 4 所示，其中我们画出了对不同 t 值时温度分布的图像.

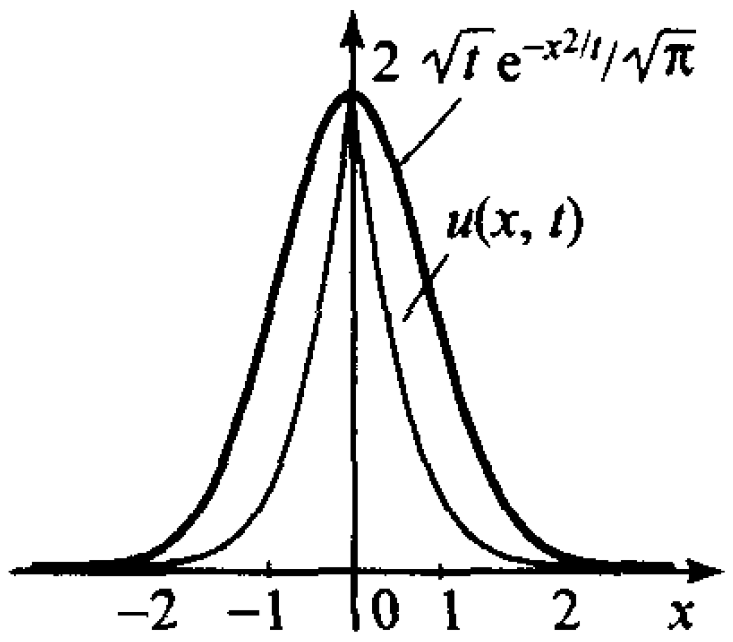


图 3 棒中的温度分布满足

$0<u(x, t)\leqslant 2\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2/t}$

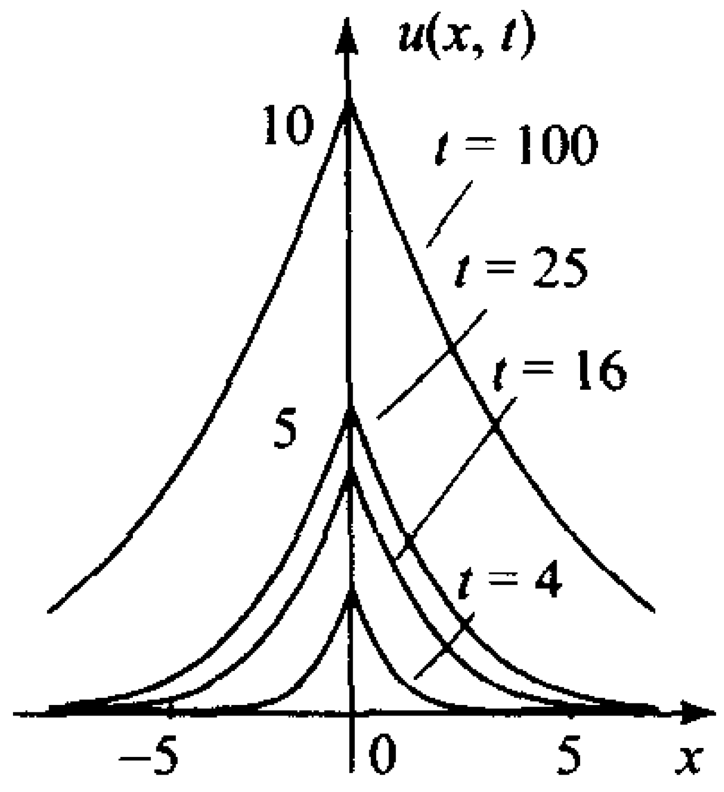


图 4 棒中的温度分布以正比于$\sqrt{t}$的速度趋近于∞ ■

毫不奇怪的是：例 2 中的热源最终将棒中任意点的温度都可以提升到要多高就有多高. 一个有趣的问题是：如果在某个时刻关掉热源，会发生什么？可以预料，温度最终将降低到 0. 下面这个例题就是求解这个问题，并将告诉我们温度是如何变化的.

例 3 短暂热源的效应

如果例 2 中的热源在单位时间后关掉，求解这个问题. 我们修改方程(16)，而考虑非齐次热传导方程

$$u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+\delta_0(x)(\mathcal{U}_0(t)-\mathcal{U}_1(t))\qquad (t>0,-\infty<x<\infty),\tag{20}$$

带有同样的初始条件：$u(x, 0)=0(-\infty<x<\infty)$. 在方程(20)中，$\delta_0(x)(\mathcal{U}_0(t)-\mathcal{U}_1(t))$表示在原点处的热源，对 $0<t\leqslant 1$ 开着，对 $t>1$ 关掉.

467

解 由于我们将与例 2 中的解(记为 $u(x, t)$)比较，所以我们以 $v(x, t)$记本问题的解. 在我们求解之前，直观地，我们有：当 $0<t<1$ 时，对所有 x，有 $v(x, t)=u(x, t)$，因为在这个时间段中，两个问题的条件完全一样.

对 $f(x, t)=\delta_0(x)(\mathcal{U}_0(t)-\mathcal{U}_1(t))$，$c=\frac{1}{2}$，应用定理 2 得

$$\begin{aligned}v(x,t)&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{t-s}}e^{-(x-y)^2/(t-s)}\delta_0(y)(\mathcal{U}_0(s)-\mathcal{U}_1(s))dyds\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-s}}e^{-x^2/(t-s)}(\mathcal{U}_0(s)-\mathcal{U}_1(s))ds.\end{aligned}$$

如果 $0<t<1$，而 s 在区间$(0, t)$上变化，则$\mathcal{U}_0(s)-\mathcal{U}_1(s)=1$，而 v 的公式就化为例 2 中 u 的公式，这就验证了我们的直观想象. 因此，对 $0<t<1$，

$$v(x,t)=u(x,t)=2\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2/t}-2\frac{|x|}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{x^2}{t}\right).$$

如果 $t>1$，而 s 在区间 $(0,\ t)$ 上变化，则如果 $0<s<1$，$\mathcal{U}_0(s)-\mathcal{U}_1(s)=1$，而如果 $1<s<t$，其值为零. 因此，如果 $t>1$，我们有

$$v(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t-s}}e^{-x^2/(t-s)}ds=\frac{|x|}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x^2}{t}}^{\frac{x^2}{t-1}}e^{-z}z^{-3/2}dz,$$

其中我们利用了如例 2 中的变量代换：$z=\frac{x^2}{t-s}$，只是这里的 s 从 0 变到 1，所以 u 从 $\frac{x^2}{t}$ 变到 $\frac{x^2}{t-1}$. 注意到，积分上限不像例 2 那样为 ∞. 由(18)式，我们有

$$\begin{aligned}v(x,t)&=\frac{|x|}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x^2}{t}}^{\infty}e^{-z}z^{-3/2}dz-\frac{|x|}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x^2}{t-1}}^{\infty}e^{-z}z^{-3/2}dz\\&=u(x,t)-u(x,t-1),\end{aligned}$$

因此，得到结论

$$v(x,t)=\begin{cases}u(x,t) & 若\ 0<t<1,\\ u(x,t)-u(x,t-1) & 若\ t>1.\end{cases}$$

在 $t=1$，我们可以用 $u(x,\ 1)$ 或 $u(x,\ 1)-u(x,\ 0)$ 来计算 $v(x,\ 1)$，因为 $u(x,\ 0)=0$. 因此，可以用例 2 的解来表达本题的解. 回到例 2 的解，直观地，由(18)式有：如果 $t_1<t_2$，$u(x,\ t_1)<u(x,\ t_2)$（因为在 t_1 和 t_2 之间，更多的热量流入）. 特别地，对 $t>1$，我们有 $u(x,\ t)>u(x,\ t-1)$，因此，$v(x,\ t)=u(x,\ t)-u(x,\ t-1)>0$，正如所料. ■　468

非齐次热传导方程的通解

结合 7.4 节解和定理 2，我们得到一般非齐次热传导方程的解.

定理 3（一般非齐次热传导方程）　*带有初始条件 $u(x,\ 0)=h(x)(-\infty<x<\infty)$ 非齐次热传导方程(10)的解是*

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x-y,t-s)f(y,s)dyds\\&+\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x-y,t)h(y)dy,\end{aligned}\tag{21}$$

其中，如定理 2，当 $t>0$ 和 $-\infty<x<\infty$ 时，$\phi(x,\ t)=\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/(4c^2t)}$.

证明　令 $u_1(x,\ t)$ 表示(10)式的解，满足初始条件 $u(x,\ 0)=0$；而 $u_2(x,\ t)$ 表示 $u_t=c^2u_{xx}$ 满足初始条件 $u(x,\ 0)=h(x)$ 的解. 直接验证，可得：$u=u_1+u_2$ 满足(10)式，以及初始条件 $u(x,\ 0)=h(x)$. 因此，u 就是所求的解. 由定理 2，u_1 等于(21)式右端的二重积分. 由 7.4 节定理 1，u_2 等于(21)式右端的第二个积分. ■

用类似的方法，可以证明非齐次热传导方程解的下列性质：

- **叠加原理.** 令 $u_1(x,\ t)$ 是 $u_t=c^2u_{xx}+f_1(x,\ t)$ 和 $u(x,\ 0)=0$ 的解；而 $u_2(x,\ t)$ 是

$u_t=c^2u_{xx}+f_2(x,t)$和$u(x,0)=0$的解,则$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$是$u_t=c^2u_{xx}+f_1(x,t)+f_2(x,t)$和$u(x,0)=0$的解.

- **平移原理**. 令$\phi(x,t)$是$u_t=c^2u_{xx}+f(x,t)$和$u(x,0)=0$的解，则$u(x,t)=\phi(x-a,t)$是$u_t=c^2u_{xx}+f(x-a,t)+f_2(x,t)$和$u(x,0)=0$的解.

例 4 热源的平移

求解非齐次热传导方程

$$u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+\delta_1(x)\qquad(t>0,-\infty<x<\infty),\tag{22}$$

带有初始条件$u(x,0)=0(-\infty<x<\infty)$. 在本问题中，热源位于原点右端 1 个单位处. 直观地，本问题的解就是将例 2 中问题的解向右平移 1 个单位(在x变量上). 这也是刚才所说的平移原理的推论. 因此，利用例 2 中的解$u(x,t)$，我们得到本问题的解是

469

$$\phi(x,t)=u(x-1,t)=2\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-1)^2/t}-2\frac{|x-1|}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{(x-1)^2}{t}\right).$$ ■

习题 7.9

在习题 1~6 中，求解给定的热传导问题.

1. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}$，$u(x,0)=\delta_1(x)$.
2. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}$，$u(x,0)=\delta_0(x)+\delta_1(x)$.
3. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+\delta_0(x)+\delta_1(x)$，$u(x,0)=0$.
4. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+\delta_0(x)(\mathcal{U}_0(t)-\mathcal{U}_1(t))+\delta_1(x)(\mathcal{U}_1(t)-\mathcal{U}_2(t))$，$u(x,0)=0$.
5. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+\delta_0(x)$，$u(x,0)=\mathcal{U}_0(x)$.
6. $u_t=\frac{1}{4}u_{xx}+(\delta_0(x)+\delta_1(x))(\mathcal{U}_0(t)-\mathcal{U}_1(t))$，$u(x,0)=0$.
7. 本题给出求解热传导方程$u_t=c^2u_{xx}(t>0,-\infty<x<\infty)$的一个巧妙方法，初始条件为$u(x,0)=f(x)$，其中$f(x)$的傅里叶变换(而不是$f(x)$)是广义函数. 为简单起见，我们考虑具体的例子，$f(x)=x^2$(7.4 节习题 5).

   (a)利用 7.3 节例 2 给出的解的形式，解释为何

   $$u(x,t)=-\frac{d^2}{d\omega^2}\left[e^{-c^2\omega^2t+i\omega x}\right]\bigg|_{\omega=0}.$$

   [提示：x^2的傅里叶变换(作为广义函数)等于$i^2\sqrt{2\pi}\delta_0^{(2)}(\omega)$(7.8 节习题 68).]

   (b)推导公式$u(x,t)=x^2+2c^2t$.
8. 利用前一个习题的方法，证明：$u_t=c^2u_{xx}$，$t>0$，$-\infty<x<\infty$，带有初始条件$u(x,0)=x^4$的解为$u(x,t)=12c^4t^2+12c^2tx^2+x^4$.
9. 令a是实数，求解$u_t=u_{xx}+\cos ax$，带有条件$u(x,0)=0$，其中$t>0$，$-\infty<x<\infty$.
10. 令a是实数，求解$u_t=u_{xx}+\sin ax$，带有条件$u(x,0)=0$，其中$t>0$，$-\infty<x<\infty$.
11. 令$f(x)$是分段光滑的2π-周期函数，求解$u_t=u_{xx}+f(x)$，带有条件$u(x,0)=0$，其中$t>0$，$-\infty<x<\infty$.

用 f 的傅里叶系数来表达你的答案.［提示：利用习题 9 和 10，及叠加原理.］

12. **半直线上的热传导方程**．试证：非齐次热传导方程
$$u_t = c^2 u_{xx} + f(x,t),$$
其中 $t>0$，$-\infty<x<\infty$，带有初始条件 $u(x,0)=0(0<x<\infty)$的解是
$$u(x,t) = \int_0^t\int_0^\infty [\phi(x-y,t-s)-\phi(x+y,t-s)]f(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s,$$
其中 ϕ 如定理 2.［提示：考虑 f 在整个直线上的奇延拓，应用定理 2.］

13. **加权 δ 函数的线性组合**．考虑热传导方程 $u_t=c^2u_{xx}$ $(t>0,\ -\infty<x<\infty)$，带有初始条件 $u(x,0)=\sum_{j=1}^n \alpha_j\delta_{x_j}(x)$，其中 α_j 和 x_j 是实数，$x_j<x_{j+1}$，而 δ_{x_j} 是狄拉克 δ 的平移：$\delta_{x_j}(x)=\delta_0(x-x_j)$．试证：其解为 [470]
$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathrm{e}^{-(x-x_j)^2/(4c^2t)}.$$
［提示：利用 7.8 节(19)式.］

14. **热传导方程解的逼近格式**．考虑热传导方程 $u_t=c^2u_{xx}$ $(t>0,\ -\infty<x<\infty)$，带有初始条件 $u(x,0)=f(x)$，其中 f 分段连续、有界，且在有限区间$[a,b]$之外为零．由 7.4 节，解是 f 和高斯核的卷积．问题是，除了几个例外，这个卷积很难计算．这里，我们介绍一个数值方法，利用 $f(x)$的样本值来逼近解．(这个方法是很粗糙的，利用高斯积分法，可以得到一个更好的格式．参考 T. W. Körner，*Fourier Analysis*，Cambridge University Press，1988.)这种想法是：利用一个与高斯核卷积容易求得的函数逼近 $f(x)$．为此，我们将利用狄拉克 δ 函数的线性组合．虽然，狄拉克 δ 函数不能很好地逐点逼近某个函数，但是它在下面意义下却是个很好的弱逼近．令 x_j 是$[a,b]$上的等距点，$\Delta x=x_{j+1}-x_j$．记 $\phi(x)=\Delta x\sum_{j=1}^n f(x_j)\delta_{x_j}(x)$.

(a)试证：如果 $g(x)$在$[a,b]$上连续，则
$$\int_a^b g(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^n f(x_j)g(x_j)\Delta x.$$
(b)将上面的求和理解为黎曼和，解释为何 $\phi(x)$可以看成 f 的弱逼近：对所有检验函数 g，$\langle\phi,g\rangle\approx\langle f,g\rangle$.

(c)回到热传导方程，如在(a)和(b)中，以 ϕ 代替 f，然后证明：解可以用
$$\Phi(x,t) = \frac{\Delta x}{2c\sqrt{\pi t}}\sum_{j=1}^n f(x_j)\mathrm{e}^{-(x-x_j)^2/(4c^2t)}$$
来逼近．［提示：利用习题 13.］

7.10 杜阿梅尔原理

本节，我们将学习**杜阿梅尔原理**，并利用它给出非齐次热传导方程解的另外一个推导，同时求解非齐次波动方程．这个原理在前面一节定理 2 之后就观察到了．这是一个将非齐次偏微分方程解用带有适当初始或边界条件的齐次方程解的积分来表示的方法.

为验证由杜阿梅尔原理得到的公式，我们必须用链式法则对由积分定义的函数求导，如下列命题所示. [471]

命题 1(积分的微分)　令
$$U(x) = \int_a^x f(x,s)\mathrm{d}s, \tag{1}$$
其中 a 是固定常数，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}U(x) = f(x,x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}f(x,s)\mathrm{d}s. \tag{2}$$

证明 定义二元函数

$$\Phi(x,y) = \int_a^y f(x,s)\mathrm{d}s.$$

则由微积分基本定理，有

$$\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int_a^y f(x,s)\mathrm{d}s = f(x,y).$$

同样，在积分号下微分得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\int_a^y f(x,s)\mathrm{d}s = \int_a^y \frac{\partial}{\partial x}f(x,s)\mathrm{d}s.$$

现在，假设 y 是 x 的函数，记为 $y=y(x)$. 则二维链式法则导出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x,y(x)) &= \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y(x)) + \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\ &= \int_a^{y(x)} \frac{\partial}{\partial x}f(x,s)\mathrm{d}s + f(x,y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\end{aligned}$$

取 $y(x)=x$，则(2)式得证. ■

下面是这个命题的简单例证.

例 1 **由积分定义的函数**

令 $U(x) = \int_0^x \sin(xs)\mathrm{d}s$. 用下面两种不同的方法求出 $U'(x)$：

(a)利用命题 1；(b)计算积分，再微分.

解 (a)对 $f(x, s)=\sin(xs)$，应用命题 1，我们得到

$$\begin{aligned}U'(x) &= \sin(x^2) + \int_0^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\sin(xs)]\mathrm{d}s \\ &= \sin(x^2) + \int_0^x s\cos(xs)\mathrm{d}s \\ &\left(\text{分部积分}: u = s, \mathrm{d}v = \cos(xs)\mathrm{d}s, \mathrm{d}u = \mathrm{d}s, v = \frac{1}{x}\sin(xs).\right) \\ &= \sin(x^2) + \frac{s}{x}\sin(xs)\Big|_0^x - \frac{1}{x}\int_0^x \sin(xs)\mathrm{d}s \\ &= \sin x^2 + \sin x^2 + \frac{\cos(x^2)-1}{x^2} = 2\sin(x^2) + \frac{\cos(x^2)-1}{x^2}.\end{aligned}$$

472

(b)计算积分，我们得到

$$U(x) = \int_0^x \sin(xs)\mathrm{d}s = -\frac{\cos(xs)}{x}\Big|_0^x = \frac{1-\cos(x^2)}{x}.$$

求关于 x 的微分，利用商法则，有

$$U'(x) = \left(\frac{1-\cos(x^2)}{x}\right)' = \frac{2x^2\sin(x^2)-(1-\cos(x^2))}{x^2} = 2\sin(x^2) + \frac{\cos(x^2)-1}{x^2},$$

这与(a)的答案一致. ■

非齐次热传导方程

为导出杜阿梅尔原理，我们给出 7.9 节定理 2 中问题的一个新证明．按照这个定理，非齐次方程的解就是一个齐次方程解的积分；而杜阿梅尔原理恰恰是这个观察的准确叙述．

定理 1(热传导方程的杜阿梅尔原理) 假设对固定 $s>0$，$\phi(x, t, s)$是热传导方程

$$\phi_t = c^2\phi_{xx} \qquad (-\infty < x < \infty, t > 0), \tag{3}$$

带有初始条件

$$\phi(x,0,s) = f(x,s) \tag{4}$$

的解，则函数

$$u(x,t) = \int_0^t \phi(x,t-s,s)\mathrm{d}s \qquad (-\infty < x < \infty, t > 0) \tag{5}$$

是非齐次热传导方程

$$u_t = c^2 u_{xx} + f(x,t) \qquad (-\infty < x < \infty, t > 0), \tag{6}$$

带有初始条件 $u(x, 0)=0$ 的解．

这个定理的结果就是将非齐次方程(6)的求解化为带有非齐次初始条件的齐次方程(3)的求解，而后者可以利用 7.4 节的方法处理．不难验证，(5)就是 7.9 节定理 2 给出的解．

证明 显然，(5)式满足初始条件 $u(x, 0)=0$，因为在(5)中令 $t=0$ 时，积分区间退化为一点，所以积分为零．现在，利用 ϕ 的性质，应用命题 1(对变量作适当重新标记)，我们得到 [473]

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \phi(x,t-s,s)\Big|_{s=t} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\phi(x,t-s,s)\mathrm{d}s \\ &= \overbrace{\phi(x,0,t)}^{=f(x,t)} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\phi(x,t-s,s)\mathrm{d}s \\ &= f(x,t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\phi(x,t-s,s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

在积分号下微分两次得到

$$u_{xx}(x,t) = \int_0^t \phi_{xx}(x,t-s,s)\mathrm{d}s.$$

因此

$$u_t - c^2 u_{xx} = f(x,t) + \int_0^t \overbrace{(\phi_t(x,t-s,s) - c^2\phi_{xx}(x,t-s,s))}^{=0}\mathrm{d}s = f(x,t),$$

因为 ϕ 是(3)的解．因此(6)式得证． ■

例 2 **热传导方程和杜阿梅尔原理**

求解 $u_t=u_{xx}+tx^2 (t>0, -\infty<x<\infty)$，带有条件 $u(x, 0)=0$.

解 正如定理 1 所示，我们考虑热传导方程 $\phi_t=\phi_{xx}$ 和条件 $\phi(x, 0, s)=sx^2$，其中 s 是固定的，$t>0$，$-\infty<x<\infty$．这个问题的解可以用 7.4 节的卷积公式推得，或用前一节习题 7 所描述的广义函数推导．两者都可以得到 $\phi(x, t, s)=s(2t+x^2)$．(如果你没有解过这个方程，现在可以验证该解.)利用(5)式，我们得到

$$u(x,t)=\int_0^t \phi(x,t-s,s)\,ds=\int_0^t s(2(t-s)+x^2)\,ds$$
$$=\int_0^t (2st-2s^2+sx^2)\,ds=s^2t-\frac{2}{3}s^3+\frac{1}{2}x^2s^2\Big|_0^t$$
$$=\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2x^2.$$

显然，u 满足初始条件. 我们来验证方程：$u_t=t^2+tx^2$，$u_{xx}=t^2$；因此，$u_t=u_{xx}+tx^2$. ■

下面，我们来考虑波动方程.

非齐次波动方程

达朗贝尔方法告诉我们：波动方程

$$\phi_{tt}=c^2\phi_{xx}\qquad(-\infty<x<\infty,t>0),\tag{7}$$

474

$$\phi(x,0)=h(x),\quad \phi_t(x,0)=g(x)\tag{8}$$

的解是

$$\phi(x,t)=\frac{1}{2}(h(x+ct)+h(x-ct))+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(z)\,dz.\tag{9}$$

我们的目标就是：利用这个解和前面发展的技巧，求解带有依赖于 x 和 t 的外力 $f(x,t)$时的波动方程. 首先，我们叙述波动方程的杜阿梅尔原理.

定理 2(波动方程的杜阿梅尔原理) 假设对固定 $s>0$，$\phi(x,t,s)$是(齐次)波动方程(7)的解，满足初始条件 $\phi(x,0,s)=0$ 和 $\phi_t(x,0,s)=f(x,s)$，则

$$u(x,t)=\int_0^t \phi(x,t-s,s)\,ds\qquad(-\infty<x<\infty,t>0)\tag{10}$$

是非齐次波动方程

$$u_{tt}=c^2u_{xx}+f(x,t)\qquad(-\infty<x<\infty,t>0)\tag{11}$$

的解，满足初始条件 $u(x,0)=0$ 和 $u_t(x,0)=0$.

证明 应用命题 1，利用 $\phi(x,t,s)$的初始条件，得到

$$u_t(x,t)=\phi(x,t-s,s)\Big|_{s=t}+\int_0^t \phi_t(x,t-s,s)\,ds$$
$$=\int_0^t \phi_t(x,t-s,s)\,ds;$$
$$u_{tt}(x,t)=\phi_t(x,t-s,s)\Big|_{s=t}+\int_0^t \phi_{tt}(x,t-s,s)\,ds$$
$$=f(x,t)+\int_0^t \phi_{tt}(x,t-s,s)\,ds.$$

在积分号下微分两次，得到

$$u_{xx}(x,t)=\int_0^t \phi_{xx}(x,t-s,s)\,ds.$$

因此，

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=f(x,t)+\int_0^t \overbrace{(\phi_{tt}(x,t-s,s)-c^2\phi_{xx}(x,t-s,s))}^{=0}\,ds=f(x,t),$$

因为 ϕ 是(7)的解. 因此(11)式得证. ■ 475

例 3 波动方程和杜阿梅尔原理

求解 $u_{tt}=u_{xx}+e^{-t}\cos x(t>0,\ -\infty<x<\infty)$，满足 $u(x,0)=0$ 和 $u_t(x,0)=0$.

解 按照定理 2，我们考虑实线上的波动方程 $\phi_{tt}=\phi_{xx}$，带有条件 $\phi(x,0,s)=0$ 和 $\phi_t(x,0,s)=e^{-s}\cos x$，其中 s 固定，$t>0$，$-\infty<x<\infty$. 应用达朗贝尔解(9)，我们得到

$$\phi(x,t,s)=\frac{e^{-s}}{2}\int_{x-t}^{x+t}\cos z\,dz=\frac{e^{-s}}{2}[\sin(x+t)-\sin(x-t)]$$
$$=e^{-s}\sin t\cos x.$$

因此，按照(10)式，解为

$$u(x,t)=\int_0^t e^{-s}\sin(t-s)\cos x\,ds$$
$$=\cos x\int_0^t e^{-s}\sin(t-s)\,ds$$
$$=\frac{1}{2}\cos x[e^{-t}-\cos t+\sin t],$$

在求最后那个积分的值时，我们利用了公式

$$\int e^{-s}\sin(t-s)\,ds=\frac{e^{-s}}{2}[\cos(t-s)-\sin(t-s)]+C.$$

可以直接验证 u 事实上就是问题的解. ■

为方便以后查阅，我们将非齐次波动方程的解陈述如下.

定理 3(非齐次波动方程的解) *满足(零)初始条件 $u(x,0)=0$ 和 $u_t(x,0)=0$ 的非齐次波动方程(11)的解是*

$$u(x,t)=\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)}f(y,s)\,dy\,ds\qquad(-\infty<x<\infty,t>0).\tag{12}$$

证明 如杜阿梅尔原理所暗示，我们考虑波动方程(7)和初始条件 $\phi(x,0,s)=0$ 以及 $\phi_t(x,0,s)=f(x,s)$，其中 s 固定. 为求解这个问题，我们应用达朗贝尔方法，得到

$$\phi(x,t,s)=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}f(y,s)\,dy.$$

由定理 2，对 $\phi(x,t-s,s)$ 作关于 s 从 0 到 t 的积分，可以得到(11)式的满足条件 $u(x,0)=0$ 和 $u_t(x,0)=0$ 的解. 这就得到解(12). ■

我们离求解带有任意初始条件的一般非齐次波动方程只有一步之遥了，所要做的只是将达朗贝尔解与定理 3 的解结合起来即可. 它的证明与前一节定理 3 的证明有点类似，略去. 476

定理 4(一般非齐次波动方程) *满足初始条件 $u(x,0)=h(x)$ 和 $u_t(x,0)=g(x)$ 的非齐次波动方程(11)的解是*

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(h(x+ct)+h(x-ct))+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(z)\,dz\tag{13}$$
$$+\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)}f(y,s)\,dy\,ds.$$

在任意给定点(x_0, t_0)，二重积分

$$\int_0^{t_0}\int_{x_0-c(t_0-s)}^{x_0+c(t_0-s)} f(y,s)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s$$

是在 xt 平面上包含所有 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 和 $x_0-c(t_0-t)\leqslant x\leqslant x_0+c(t_0-t)$ 的(x, t)点的区域上计算. 这是一个三角形区域，称为**特征三角形**(图 1)，其底边是特征区间(x_0-ct_0, x_0+ct_0). 因此，如果点(x, t)在特征三角形之外，则力 $f(x, t)$对位移 $u(x_0, t_0)$没有影响. 同样，回顾 3.4 节，在特征区间(x_0-ct_0, x_0+ct_0)之外的任何扰动在点(x_0, t_0)对(13)式右端前面两项没有影响. 所以对通解(13)，在特征三角形之外的任何扰动对(x_0, t_0)点没有影响.

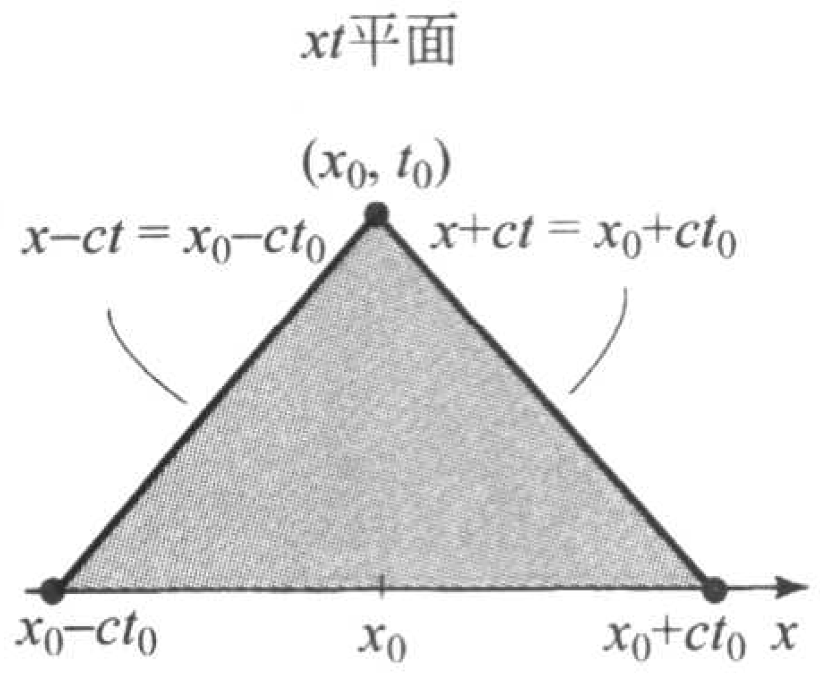


图 1 特征三角形，其底边是特征区间(x_0-ct_0, x_0+ct_0)

习题 7.10

在习题 1～4 中，求出$\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$.

1. $U(x)=\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-(x+s)^2}\,\mathrm{d}s$.

2. $U(x)=\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{xs}\cos(sx)\,\mathrm{d}s$.

3. $U(x)=x^2\displaystyle\int_0^x f(x,s)\,\mathrm{d}s$.

4. $U(x)=(1+x^2)\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{xs^2}\,\mathrm{d}s$.

在习题 5～14 中，求解给定问题.

5. $u_t=u_{xx}+\mathrm{e}^{-t}x^2$
   $u(x, 0)=0$.

6. $u_t=u_{xx}+x\mathrm{e}^{-t}$,
   $u(x, 0)=0$.

477

7. $u_{tt}=u_{xx}+\cos x$
   $u(x, 0)=0,\quad u_t(x, 0)=0$.

8. $u_{tt}=u_{xx}+x\mathrm{e}^{-t}$,
   $u(x, 0)=0,\quad u_t(x, 0)=0$.

9. $u_{tt}=u_{xx}+\cos(t+x)$,
   $u(x, 0)=0,\quad u_t(x, 0)=0$.

10. $u_{tt}=u_{xx}+\cos x\cos t$,
    $u(x, 0)=0,\quad u_t(x, 0)=0$.

11. $u_{tt}=u_{xx}+x\cos t$,
    $u(x, 0)=0,\quad u_t(x, 0)=x$.

12. $u_{tt}=u_{xx}+\cos t\sin x$,
    $u(x, 0)=\sin x,\quad u_t(x, 0)=0$.

13. $u_{tt}=u_{xx}+\delta_0(x)$,
    $u(x, 0)=0,\quad u_t(x, 0)=0$.

14. $u_{tt}=u_{xx}$,
    $u(x, 0)=0,\quad u_t(x, 0)=\mathcal{U}_0(x)-\mathcal{U}_1(x)$.

15. **波动方程的基本解**. 试证：

$$u_{tt}=c^2u_{xx}+\delta_0(x)\delta_0(t)$$

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0$$

的解是 $\phi(x,\ t)=\frac{1}{2c}(\mathcal{U}_0(x-ct)-\mathcal{U}_0(x-ct))$. [提示：应用定理 2，将问题化为一个齐次波动方程.]

16. 利用前面习题中的波动方程的基本解，仿照 7.9 节定理 2 的证明过程，推导定理 3 中的解.

17. 令

$$h(t)=\int_0^t f(t-s)g(s)\mathrm{d}s.$$

推导公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)=f(0)g(t)+\int_0^t f'(t-s)g(s)\mathrm{d}s.$$

478

第8章 拉普拉斯变换和汉克尔变换及其应用

难道就因为不了解消化过程，我就应该拒绝一顿丰盛的晚餐吗？
(用正式的数学运算去评价，而不需要了解它们是如何实现的.)

——奥利弗・赫维赛德

综述 8.1节和8.2节包含了拉普拉斯变换的基本性质，是自封的. 拉普拉斯变换在偏微分方程中的应用在8.3节中介绍，假设大家已经熟悉了本书前面介绍的热传导方程和波动方程的相关边值问题. 8.4节发展了汉克尔变换，它需要4.7节和4.8节贝塞尔函数基本性质等知识. 这节的应用也与前面讨论的边值问题有关.

导读 本章增加了所讨论问题和应用的多样性. 这样，我们就较全面地讨论了热传导和波运动等经典领域所出现的标准边值问题. 那些在常微分方程课程中学过拉普拉斯变换的读者将会发现，它在求解偏微分方程边值问题中起着重要作用，仅次于傅里叶变换. 而那些喜欢贝塞尔函数的读者，将会再次看到它是定义另外一个重要变换(汉克尔变换)的核心.

在前面一章中，我们介绍了傅里叶变换、傅里叶正弦变换和余弦变换，及其在求解无界区域中的偏微分方程的边值问题中的作用. 这些变换所应用的问题都是在笛卡儿坐标系下的. 另一个经常成功应用的变换是拉普拉斯变换，它是本章的第一个论题. 如果问题中有一个变量变化范围是半直线$[0, \infty)$时，就像作正弦变换和余弦变换时一样，我们经常可以对这个变量作拉普拉斯变换以求解问题. 由于这个变换在其他场合的重要应用，我们将对它作一下自封的介绍，包括常微分方程初值问题的求解. 对那些不是笛卡儿几何学的问题，存在更自然、更有用的变换. 例如，在平面或空间中的具有径向对称的无界区域，更合适的坐标系是极坐标、柱面坐标或球面坐标；而对径向变量(r或ρ)，更自然的变换涉及贝塞尔函数. 这个变换，依赖于所涉及的贝塞尔函数的阶ν，称为ν阶汉克尔变换.

8.1 拉普拉斯变换

在本节中，我们给出拉普拉斯变换的定义和基本性质. 作为在偏微分方程应用中的前奏，我们将用它来求解几个简单的常微分方程.

假设$f(t)$对所有$t \geqslant 0$有定义. f的**拉普拉斯变换**是函数

$$\boxed{\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} \, dt.} \tag{1}$$

$\mathcal{L}(f)(s)$的另外一个常用记号是$F(s)$. 作为约定，函数f，g，…是对所有$t \geqslant 0$定义的；而它们的变换F，G，…是定义在s轴上的. 为使积分存在，f不能比指数函数增长得快. 这启发了下面的定义，我们称f是**指数阶的**，如果存在正数a和M，使得

$$|f(t)| \leqslant M e^{at} \quad 对所有\ t \geqslant 0. \tag{2}$$

例如，函数 1，$4\cos 2t$，$5t\sin 2t$，e^{3t}都是指数阶的. 现在，我们给出拉普拉斯变换的存在性的一个充分条件.

定理 1(拉普拉斯变换的存在性) *假设 f 在区间$[0, \infty)$上分段连续，且是指数阶的，即 $|f(t)| \leqslant Me^{at}$ 对所有 $t \geqslant 0$ 成立，则$\mathcal{L}(f)(s)$对所有的 $s>a$ 存在.*

证明 对 $s>a$，我们必须证明

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt < \infty.$$

对如上的 M 和 a，我们有

$$\left|\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt\right| \leqslant \int_0^{\infty} |f(t)|e^{-st}\,dt \leqslant M\int_0^{\infty} e^{at}e^{-st}\,dt$$

$$= M\int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}\,dt = \frac{M}{s-a} < \infty. \quad \blacksquare$$

注意到，因为它在 $t=0$ 处的性态，函数$\frac{1}{\sqrt{t}}$不是指数阶的. 但是，我们将在下面的例 2 中说明：它的拉普拉斯变换$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)(s)$对所有的 $s>0$ 都存在. 因此，定理 1 只是拉普拉斯变换存在的一个充分条件，但不是必要条件.

480

例 1 $\mathcal{L}(1)$，$\mathcal{L}(t)$和$\mathcal{L}(e^{\alpha t})$

利用(1)式，我们计算这些变换. 我们有

$$\mathcal{L}(1)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}, \quad s>0;$$

$$\mathcal{L}(t)(s) = \int_0^{\infty} te^{-st}\,dt = \left(-\frac{t}{s}e^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s^2}, \quad s>0;$$

最后，对 $s>\alpha$，有

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t})(s) = \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t}\,dt = -\frac{1}{s-\alpha}e^{-(s-\alpha)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-\alpha}.$$

注意，$\mathcal{L}(e^{\alpha t})(s)$对 $s \leqslant a$ 没有定义. $\blacksquare$

在计算$\mathcal{L}(t)$时，我们作了一次分部积分. 类似地，通过作 n 次分部积分，可以计算$\mathcal{L}(t^n)$(n 是正整数). 与其这么做，倒不如利用拉普拉斯变换与伽马函数(4.7 节)之间的一个有趣的联系来计算.

例 2 $\mathcal{L}(t^a)$：**伽马函数**

(a)当 $a>-1$，$s>0$ 时，计算$\mathcal{L}(t^a)(s)$.

(b)由(a)推导变换$\mathcal{L}(t)$，$\mathcal{L}(t^2)$，以及更一般地，$\mathcal{L}(t^n)$，其中 n 是正整数.

(c)$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$是多少?

解 (a)由(1)式，我们有

$$\mathcal{L}(t^a)(s) = \int_0^{\infty} t^a e^{-st}\,dt.$$

为与 4.7 节伽马函数的定义(13)式相比较，我们作变量代换 $st=T$，$\mathrm{d}t=\frac{1}{s}\mathrm{d}T$，则

$$\mathcal{L}(t^a)(s)=\int_0^\infty\left(\frac{T}{s}\right)^a \mathrm{e}^{-T}\frac{\mathrm{d}T}{s}=\frac{1}{s^{a+1}}\underbrace{\int_0^\infty T^a\mathrm{e}^{-T}\mathrm{d}T}_{=\Gamma(a+1)}$$

$$=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}\qquad (\text{由 4.7 节(13)}).$$

(b)利用(a)，

$$\mathcal{L}(t)=\frac{\Gamma(2)}{s^2}=\frac{1}{s^2};$$

$$\mathcal{L}(t^2)=\frac{\Gamma(3)}{s^3}=\frac{2}{s^3};$$

更一般地，

[481]

$$\mathcal{L}(t^n)=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}=\frac{n!}{s^{n+1}}.$$

(c)利用(a)，以及 4.7 节(15)式，

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)=\mathcal{L}(t^{-1/2})=\frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$ ■

运算性质

在本节的剩下部分，我们将推导拉普拉斯变换的性质，这将有利于求解微分方程. 我们特别对那些涉及函数、函数变换及其导数的变换的公式感兴趣. 这些公式与傅里叶变换的运算性质有点类似. 因为拉普拉斯变换是由一个在区间[0, ∞)上的积分所定义的，有些公式将用到函数及其导数在 0 点处的值.

定理 2(线性性)　*如果 f 和 g 是函数，而 α 和 β 是数，则*

$$\mathcal{L}(\alpha f+\beta g)=\alpha\,\mathcal{L}(f)+\beta\,\mathcal{L}(g).$$

证明留作习题，其中应该用$\mathcal{L}(f)$和$\mathcal{L}(g)$的定义区域来表达$\mathcal{L}(\alpha f+\beta g)$的定义区域.

例 3　**$\mathcal{L}(\cos kt)$和$\mathcal{L}(\sin kt)$**

这些变换可以直接用(1)式计算出来. 我们的推导将基于欧拉恒等式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}=\cos kt+\mathrm{i}\sin kt$，以及拉普拉斯变换的线性性. 我们有

$$\mathcal{L}(\cos kt)+\mathrm{i}\,\mathcal{L}(\sin kt)=\int_0^\infty(\cos kt+\mathrm{i}\sin kt)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(s-\mathrm{i}k)}\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{e}^{-t(s-\mathrm{i}k)}}{s-\mathrm{i}k}\bigg|_0^\infty=\frac{1}{s-\mathrm{i}k}$$

$$=\frac{s+\mathrm{i}k}{s^2+k^2}=\frac{s}{s^2+k^2}+\mathrm{i}\frac{k}{s^2+k^2}.$$

令实部、虚部分别相等，我们得到

$$\mathcal{L}(\cos kt)=\frac{s}{s^2+k^2}\quad \text{及}\quad \mathcal{L}(\sin kt)=\frac{k}{s^2+k^2}.$$

下面的例 10 给出了另外一个证明. ■

下面这个结果是非常有用的，它说明了拉普拉斯变换将求导变成了 s 的幂. [482]

定理 3(导数的拉普拉斯变换) (i)假设 f 在区间$[0, \infty)$上连续，且如(2)式是指数阶的. 另外，进一步假设 f'在区间$[0, \infty)$上是分段连续的，且为指数阶，则

$$\mathcal{L}(f') = s\,\mathcal{L}(f) - f(0). \tag{3}$$

(ii)更一般地，如果 $f, f', \cdots, f^{(n-1)}$在区间$[0, \infty)$上连续，且如(2)式都是指数阶的，$f^{(n)}$在区间$[0, \infty)$上分段连续且为指数阶，则

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n\,\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0). \tag{4}$$

证明 由于 f 是指数阶的，则对一些正常数 a 和 M，(2)式成立. 对 $s>a$，计算变换 $\mathcal{L}(f')(s)$. 在计算之前，注意到，对 $s>a$，

$$\lim_{t\to\infty} |f(t)|\,\mathrm{e}^{-st} = \lim_{t\to\infty} \underbrace{|f(t)|}_{\leqslant Me^{at}}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-(s-a)t} \leqslant M\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-(s-a)t} = 0,$$

因为 $s-a>0$. 现在，利用(1)式和分部积分，计算得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f')(s) &= \int_0^\infty f'(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \quad (s>a)\\ &= f(t)\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^\infty - (-s)\underbrace{\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t}_{\mathcal{L}(f)(s)}\\ &= -f(0) + s\,\mathcal{L}(f),\end{aligned}$$

这就证明了(i). 重复应用(i)可得(ii). ■

当 $n=2$ 时，(4)给出

$$\boxed{\mathcal{L}(f'') = s^2\,\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0).} \tag{5}$$

下面是定理 3 的反证，它说明拉普拉斯变换将 t 的幂变成导数.

定理 4(变换的导数) (i)假设 $f(t)$是分段连续的，且是指数阶的，则

$$\mathcal{L}(tf(t))(s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}(f)(s). \tag{6}$$

(ii)更一般地，假设 $f(t)$是分段连续的，且是指数阶的，则

$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\mathcal{L}(f)(s). \tag{7}$$

[483]

证明 在积分号下微分得到

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}(f)]'(s) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\\ &= -\int_0^\infty tf(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = -\mathcal{L}(tf(t))(s),\end{aligned}$$

两边同乘以-1 可得结论(i). 充分应用(i)可得(ii). ■

例 4 **变换的导数**

(a)计算$\mathcal{L}(t\sin 2t)$. (b)计算$\mathcal{L}(t^2\sin t)$.

解 (a)利用(6)式和例 3，我们得到

$$\mathcal{L}(t\sin 2t)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{2}{s^2+4}\right]=\frac{4s}{(s^2+4)^2}.$$

(b)类似地，由(7)式和例 3，我们得到

$$\mathcal{L}(t^2\sin t)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]=\frac{2(-1+3s^2)}{(s^2+1)^3}.\qquad\blacksquare$$

下面一个定理说明，乘以函数 $e^{\alpha t}$ 引起变换在 s 轴平移 α 个单位．这个十分重要的性质与 t 轴上的平移(8.2 节定理 1)相对应．

定理 5(s 轴上的平移)　*假设 f 是指数阶的，令 α 是实数，而 a 如(2)式定义．对 $s>a+\alpha$，我们有*

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t}f(t))(s)=F(s-\alpha),$$

其中 $F(s)=\mathcal{L}(f(t))(s)$.

证明　注意 $e^{\alpha t}f(t)$ 也是指数阶的，且将 a 换成 $a+\alpha$，(2)成立．因此，定理 1 保证了对 $s>a+\alpha$，$\mathcal{L}(e^{\alpha t}f(t))$ 存在，我们有

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t}f(t))(s)=\int_0^\infty f(t)e^{\alpha t}e^{-st}\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty f(t)e^{-(s-\alpha)t}\,\mathrm{d}t=F(s-\alpha).\qquad\blacksquare$$

484　在定理 5 中，取 $f=1$，我们得到例 1 中的第三个变换，$\mathcal{L}(e^{\alpha t})=\frac{1}{s-\alpha}$，由于 $\mathcal{L}(1)=\frac{1}{s}$.

拉普拉斯逆变换

现在，我们将计算拉普拉斯变换的过程反过来：对给定函数 $F(s)$，我们寻找函数 $f(t)$，使得它的拉普拉斯变换是 $F(s)$．函数 $f(t)$就称为 $F(s)$的**拉普拉斯逆变换**，记为

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(s))\quad 或简化为\quad f=\mathcal{L}^{-1}(F).$$

就像傅里叶逆变换那样，我们可以给出拉普拉斯逆变换的一个公式．但是这个公式涉及复平面上的积分，对我们来说并不是很有用(参考[1]，第 12 章)．相反，我们可以利用已知的拉普拉斯变换来计算逆变换，如下例所做．我们注意到：任意线性变换的逆仍然是线性的．特别地，我们有

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(\alpha F+\beta G)=\alpha\,\mathcal{L}^{-1}(F)+\beta\,\mathcal{L}^{-1}(G)}.$$

例 5　拉普拉斯逆变换

(a)计算 $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{4+(s-1)^2}\right)$．(b)计算 $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+3}\right)$.

解　(a)由附录 B 中的拉普拉斯变换表(或利用例 3 和定理 5)，我们有

$$\mathcal{L}(e^{at}\sin kt)=\frac{k}{(s-a)^2+k^2}.$$

取 $a=1$ 和 $k=2$，我们得到

$$\mathcal{L}(e^t\sin 2t)=\frac{2}{(s-1)^2+4}.$$

因此

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{4+(s-1)^2}\right)=e^t\sin 2t.$$

(b)受(a)部分的启发，首先记

$$\frac{1}{s^2+2s+3}=\frac{1}{(s+1)^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{(s+1)^2+(\sqrt{2})^2}.$$

现在，取 $a=-1$，$k=\sqrt{2}$，利用(a)中的变换，得到

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{(s+1)^2+(\sqrt{2})^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\sin\sqrt{2}t.$$ ■

485

有理函数和部分分式

刚刚在例 5 中，我们计算了两个有理函数的拉普拉斯逆变换．对于更一般的有理函数，我可以利用计算这些函数积分时的通用技巧．这个技巧是基于事实：有理函数具有**部分分式分解**，即将函数分解成一个多项式和有限个形式更简单的有理函数之和．我们将不证明这个事实，相反我们将通过例题来描述如何进行分解．

这个事实是来自代数的，任何一个多项式 $q(x)$ 可以因式分解为一些线性项和没有实根的二次多项式之积：

$$q(x)=a(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}(x^2+b_2x+c_2)^{n_2}\cdots,\tag{8}$$

其中我们只有有限个因子，m_j 和 n_k 是大于等于 1 的整数，所有的 a_j 是互不相同的，所有的二次因子都是互不相同的，且没有实根．(这个因式分解定理是代数基本定理的推论，后者断言任何一个多项式都可以在复数中分解成线性因子的乘积．如果多项式是实系数的，其复根是成对出现的．现在，如果 a 是一个具有非零虚部的复根，则 $(x-a)(x-\bar{a})=x^2-2\mathrm{Re}(a)x+|a|^2$ 是一个没有实根的二次多项式，这样我们就得到因式分解(8)，其系数都是实的．)

给定一个有理函数 $p(x)/q(x)$，其中 p 和 q 是实系数多项式，对 p 和 q 作形如(8)的分解，约掉公因子．故我们可以假设 p 和 q 没有公因子．不失一般性，假设 p 的阶数比 q 的阶数严格小，否则用 p 除以 q，将这个有理函数写成一个多项式和一个分子的阶数比分母的阶数严格小的有理函数之和．利用 q 的形如(8)的分解，可以得到 p/q 的如下部分分式分解．对(8)式中所出现的每个线性因子 $(x-a)^m(m\geqslant 1)$，添加项

$$\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(x-a)^m},\tag{9}$$

其中，A_1，…，A_m 是待定实数．而对(8)式中所出现的每个二次因子 $(x^2+bx+c)^n(n\geqslant 1)$，添加项

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+bx+c)}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n},\tag{10}$$

其中，B_1，…，B_n，C_1，…，C_n 是待定实数．$p(x)/q(x)$ 的部分分式分解是形如(9)和(10)式的所有项相加．即，$p(x)/q(x)$ 等于所有这些项之和．系数 A_j，B_k 和 C_k 通过通分，再与 p 比较系数可得，或通过观察可得，如下例所示．

486

例 6　部分分式分解

求出下面有理函数的部分分式分解式：

(a) $\dfrac{1}{(x^2+1)(x+1)^2}$.　　　　(b) $\dfrac{4x}{(x^2+1)^2(x-1)}$.

解 (a)部分分式分解式具有形式：

$$\frac{1}{(x^2+1)(x+1)^2}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}. \tag{11}$$

两边同时乘以$(x+1)^2$，然后求在 $x=-1$ 处的值，得到$\frac{1}{2}=A_2$. 两边同时乘以$(x+1)^2$，再对 x 求微分，然后再求在 $x=-1$ 处的值，得到

$$\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\bigg|_{x=-1}=A_1+\overbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{Bx+C}{x^2+1}(x+1)^2\bigg|_{x=-1}}^{=0}\Rightarrow\frac{1}{2}=A_1.$$

将 A_1 和 A_2 的值代入部分分式分解式中，并求在 $x=0$ 处的值，得到

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+C \quad\Rightarrow\quad C=0.$$

对(11)式两边同时乘以 x，再令 x 趋于∞，得到

$$0=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x}{2(x+1)}+\frac{x}{2(x+1)^2}+\frac{Bx^2}{x^2+1}\right]=\frac{1}{2}+B.$$

因此 $B=-\frac{1}{2}$，故

$$\frac{1}{(x^2+1)(x+1)^2}=\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{x}{2(x^2+1)}.$$

(b)记

$$\frac{4x}{(x^2+1)^2(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}. \tag{12}$$

两边乘以$(x-1)$，再令 $x=1$，得到 $A=1$. 两边乘以$(x^2+1)^2$，再令 $x=\pm\mathrm{i}$(其中 $\mathrm{i}^2=-1$)，得到

$$\frac{4\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}=B_2\mathrm{i}+C_2 \qquad (对\ x=\mathrm{i}),$$

$$\frac{4(-\mathrm{i})}{-\mathrm{i}-1}=B_2(-\mathrm{i})+C_2 \quad (对\ x=-\mathrm{i}).$$

487

求解方程，得到 $B_2=-2$ 和 $C_2=2$. 令 $x=0$，得到

$$0=-A+C_1+C_2\Rightarrow C_1=A-C_2=-1.$$

最后，对(12)两边同时乘以 x，然后再令 $x\to\infty$，得到

$$0=A+B_1 \quad\Rightarrow\quad B_1=-1.$$

因此

$$\frac{4x}{(x^2+1)^2(x-1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{-2x+2}{(x^2+1)^2}.$$ ■

下面，利用部分分式，我们计算拉普拉斯逆变换.

例 7 **有理函数的拉普拉斯逆变换**

计算$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s-3}\right)$.

解 **方法1**：如例5(b)，首先，我们有

$$\frac{1}{s^2+2s-3}=\frac{1}{(s+1)^2-2^2}=\frac{1}{2}\,\frac{2}{(s+1)^2-2^2}.$$

由附录B中的拉普拉斯变换表，我们有

$$\mathcal{L}(e^{at}\sinh kt)=\frac{k}{(s-a)^2-k^2}.$$

取 $a=-1$ 和 $k=2$，得到

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s-3}\right)=\frac{1}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2-2^2}\right)=\frac{1}{2}e^{-t}\sinh 2t.$$

方法2：我们利用部分分式. 首先，对分母作因式分解，得 $s^2+2s-3=(s+3)(s-1)$. 令

$$\frac{1}{(s+3)(s-1)}=\frac{A}{(s+3)}+\frac{B}{(s-1)}.$$

两边同时乘以 $(s+3)(s-1)$，则

$$1=A(s-1)+B(s+3).$$

令 $s=1$，再令 $s=-3$，则分别得到 $B=\frac{1}{4}$，以及 $A=-\frac{1}{4}$. 因此

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s-3}\right)=-\frac{1}{4}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right)+\frac{1}{4}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)=-\frac{1}{4}e^{-3t}+\frac{1}{4}e^{t}.$$

容易看出这个变换也等于 $\frac{1}{2}e^{-t}\sinh 2t$，这与前面结果一致. ■

拉普拉斯变换和常微分方程

利用拉普拉斯变换法求解微分方程的关键是利用运算性质，特别是那些与微分有关的. 首先，我们研究一个简单的初值问题. 下面，我们将 $y(t)$ 的拉普拉斯变换记为 $Y(s)$. [488]

例8 **二阶常微分方程**

求解 $y''+y=2$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$.

解 对方程两边作拉普拉斯变换，利用定理3，得到

$$s^2Y-sy(0)-y'(0)+Y=\mathcal{L}(2)=\frac{2}{s}.$$

利用初始条件，得到

$$(s^2+1)Y-1=\frac{2}{s}\quad\Rightarrow\quad Y=\frac{1}{s^2+1}+\frac{2}{s(s^2+1)}.$$

对第二项作利用部分分式的分解，得到

$$Y=\frac{1}{s^2+1}+\frac{2}{s}-\frac{2s}{s^2+1}.$$

最后，作拉普拉斯逆变换，得到 $y=\sin t+2-2\cos t$. ■

这个例题很典型地示例了拉普拉斯变换法. 从一个关于 y 的常系数线性常微分方程出发，拉普拉斯变换得到一个代数方程，由此可以解得 Y. 拉普拉斯变换法最适合在 $t=0$ 时刻给出初始数据的初值问题，这是由于变换作用在微分上的性质确定的. 如果初始数据是在其他时刻

t_0 给出，拉普拉斯变换仍然可以应用，即简单地作变量代换 $\tau=t-t_0$. 下例就说明这个过程.

例 9 时间变量的平移

求解 $y''+2y'+y=t$，$y(1)=0$，$y'(1)=0$.

解 作变量代换 $\tau=t-1$，我们得到初值问题

$$y''+2y'+y=\tau+1,\quad y(0)=0,y'(0)=0,$$

其中此时的导数是对 τ 求的. 这样，我们就可以如例 7 那样做了. 作变换得到

$$s^2Y+2sY+Y=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\quad\Rightarrow\quad Y=\frac{1}{s^2(s+1)}.$$

利用部分分式，我们得

489

$$Y=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}.$$

作拉普拉斯逆变换，我们得到 $y=e^{-\tau}-1+\tau$，因此解为 $y(t)=e^{1-t}+t-2$. ■

作后两个例题涉及的微分方程是常系数的. 拉普拉斯变换也可以用来求解变系数的微分方程. 比如说，如果系数是关于 t 的多项式，则定理 4 说明：变换后一般得到一个关于 Y 的新微分方程. 作为示例，请参考下节的习题 57.

我们以一个有趣的例题结束本节，该例说明如何由微分方程来求拉普拉斯变换. 我们以重新推导 $\cos at$ 的拉普拉斯变换来说明这个方法.

例 10 利用微分方程求拉普拉斯变换

令 a 是一个非零实数，我们知道 $f(t)=\cos at$ 是初值问题 $y''+a^2y=0$，$y(0)=1$，$y'(0)=0$ 的唯一解. 对方程作变换，利用(4)式和初始条件，我们得到

$$s^2Y-sy(0)-y'(0)+a^2Y=0\quad\Rightarrow\quad s^2Y-s+a^2Y=0\quad\Rightarrow\quad Y=\frac{s}{s^2+a^2}.$$

由于 $y=\cos at$ 是解，所以我们得出 $Y=\mathcal{L}(\cos at)=\frac{s}{s^2+a^2}$. 如果计算 $\mathcal{L}(\cos at)$，要用的微分方程是什么? ■

习题 8.1

在习题 1～6 中，通过适当选取数 a 和 M，建立(2)式，进而说明给定函数是指数阶的.

1. $f(t)=11\cos 3t$.
2. $f(t)=\sin 2t+3\cos t$.
3. $f(t)=5e^{3t}$.
4. $f(t)=t^n$.
5. $f(t)=\sinh 3t$.
6. $f(t)=e^{5t}\sinh t$.

在习题 7～24 中，适当利用本节的定理和例题，求出给定函数的拉普拉斯变换.

7. $f(t)=2t+3$.
8. $f(t)=t^2+3t^4$.

9. $f(t)=\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}$.

10. $f(t)=t^2+3t+t^{3/2}$.

11. $f(t)=t^2e^{3t}$.

12. $f(t)=t^4e^{-3t}+e^t$.

13. $f(t)=t\sin 4t$.

14. $f(t)=t^2\cos 2t$.

15. $f(t)=\sin^2 t$.

16. $f(t)=\cos t\sin t$.

17. $f(t)=e^{2t}\sin 3t$.

18. $f(t)=t\sinh 3t$.

19. $f(t)=te^{-t}\sin t$.

20. $f(t)=e^{t+1}\cos t$.

21. $f(t)=(t+2)^2\cos t$.

22. $f(t)=e^{at}t^{3/2}$.

23. $f(t)=e^{at}\sin\beta t$.

24. $f(t)=e^{at}\cos\beta t$.

在习题 25～38 中，求出给定函数的拉普拉斯逆变换.

25. $F(s)=\frac{1}{s^2}$.

26. $F(s)=\frac{1}{s^2-2}$.

27. $F(s)=\frac{4}{3s^2+1}$.

28. $F(s)=\frac{1}{(s-1)^2-2}$.

29. $F(s)=\frac{1}{(s-3)^5}+\frac{s-3}{1+(s-3)^2}$.

30. $F(s)=\frac{1}{(s-1)(s+1)^2}$.

31. $F(s)=\frac{s}{s^2+2s+1}$.

32. $F(s)=\frac{3s+1}{(s^2-2s)^2}$.

33. $F(s)=\frac{2s-1}{s^2-s-2}$.

34. $F(s)=\frac{s-1}{(s+1)(s^2+1)}$.

35. $F(s)=\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$.

36. $F(s)=\frac{s^2+s+3}{(s+2)(s^2+1)^2}$

37. $F(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}$.

490

38. $F(s)=\frac{s}{s^2+3s+2}$.

在习题 39～46 中，利用拉普拉斯变换求解给定初值问题.

39. $y'+y=\cos 2t$,　$y(0)=-2$.

40. $y'+2y=6e^{at}$,　$y(0)=1$, a 是常数

41. $y''+y=\cos t$,　$y(\pi)=0$, $y'(\pi)=0$.

42. $y''-y=1+t^2$,　$y(1)=0$, $y'(1)=1$.

43. $y''+2y'+y=te^{-2t}$,　$y(0)=1$, $y'(0)=1$.

44. $y''+y'+4y=0$,　$y(0)=1$, $y'(0)=1$.

45. $y''-y'-6y=e^t\cos t$,　$y(0)=0$, $y'(0)=1$.

46. $y''+4y'+5y=t^2$,　$y(0)=0$,　$y'(0)=1$.

在习题 47～48 中，求出一个初值问题，使得其唯一解为给定函数，然后利用它计算函数的拉普拉斯变换(见例 10). 取 a 为非零实数.

47. $\sin at$.

48. (a) $\sinh at$.　　(b) $\cosh at$.

8.2 拉普拉斯变换的进一步性质

本节引入一些在研究拉普拉斯变换运算性质中自然产生的一些有用函数. 首先，我们回顾 7.8 节的**单位阶梯函数**或者**赫维赛德阶梯函数**(图 1)

$$\mathcal{U}_0(t-a)=\begin{cases}0 & 若\ t<a,\\ 1 & 若\ t\geqslant a.\end{cases}\tag{1}$$

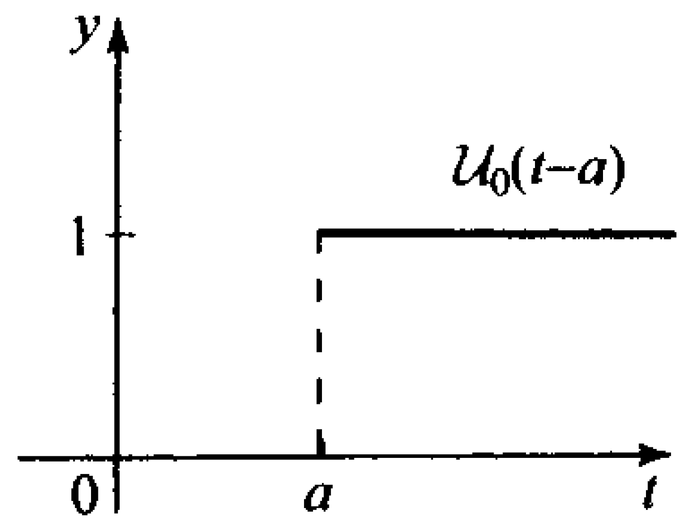


图 1　单位阶梯函数

$\mathcal{U}_0(t-a)$的另外一个记号是$\mathcal{U}_a(t)$，我们在 7.8 节曾用过. 给定函数 $f(t)$，考虑乘积$\mathcal{U}_0(t-a)f(t-a)$. 显式地写出来，我们有

$$\mathcal{U}_0(t-a)f(t-a)=\begin{cases}0 & 若\ t<a,\\ f(t-a) & 若\ t\geqslant a.\end{cases}$$

491

因此，如果 $f(t)$表示一个信号，则$\mathcal{U}_0(t-a)f(t-a)$表示同样一个信号，但是延迟 a 单位时间. 这个简单解释就已经说明了单位阶梯函数在应用中的用处. 另外一个应用包含在下面的定理中.

定理 1(沿 t 轴的平移)　如果 a 是个正实数，则

$$\mathcal{L}(\mathcal{U}_0(t-a)f(t-a))(s)=e^{-as}F(s),$$

其中 $F(s)=\mathcal{L}(f(t))(s)$.

证明　我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathcal{U}_0(t-a)f(t-a))(s)&=\int_a^\infty f(t-a)e^{-st}\,dt\\&=\int_0^\infty f(T)e^{-s(T+a)}\,dT\qquad(其中\ t-a=T,dt=dT)\\&=e^{-as}\int_0^\infty f(T)e^{-sT}\,dT=e^{-as}F(s).\end{aligned}$$

■

例 1　涉及单位阶梯函数的变换

(a)计算$\mathcal{L}(\mathcal{U}_0(t-a))$．(b)计算$\mathcal{L}(f(t))$，其中

$$f(t)=\begin{cases}2 & 若\ 1\leqslant t<4,\\ 0 & 其他\end{cases}$$

(见图 2).

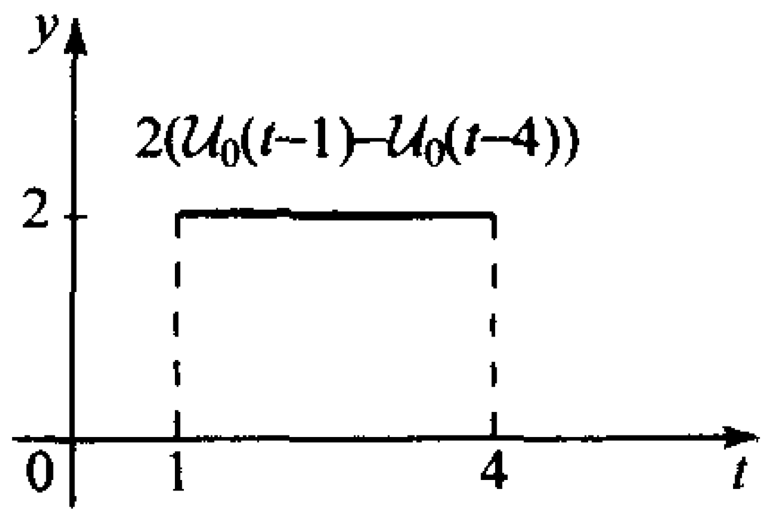


图 2　例 1 中的函数

解　(a)取 $f(t)=1$，利用定理 1，以及前一节的例 1，我们得到

$$\mathcal{L}(\mathcal{U}_0(t-a))=\frac{e^{-as}}{s},\quad s>0.$$

(b)记 $f(t)=2(\mathcal{U}_0(t-1)-\mathcal{U}_0(t-4))$(验证!)，则

$$\mathcal{L}(f(t))=2(\mathcal{L}(\mathcal{U}_0(t-1))-\mathcal{L}(\mathcal{U}_0(t-4)))=\frac{2}{s}(e^{-s}-e^{-4s}),\quad s>0.$$ ■

例 2　斜坡函数

计算如图 3 所示的斜坡函数的拉普拉斯变换.

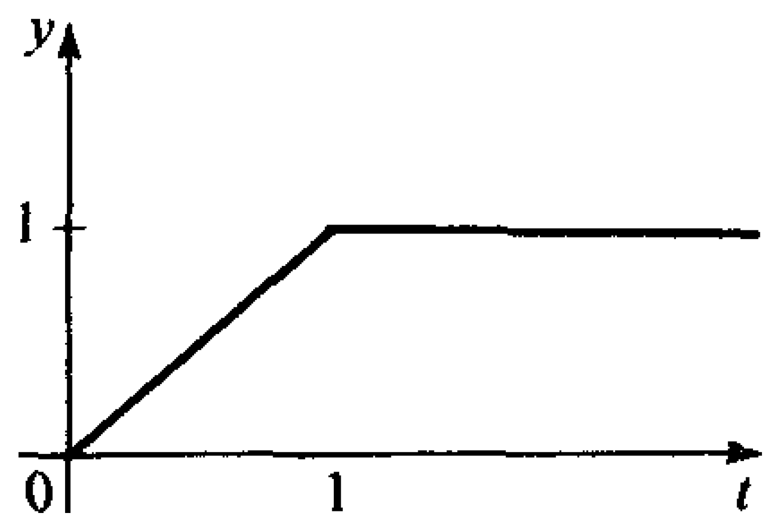


图 3　斜坡函数

解　对 $t>1$，我们有 $f(t)=\mathcal{U}_0(t-1)$，而对 $0\leqslant t\leqslant 1$，我们有 $f(t)=t(\mathcal{U}_0(t)-\mathcal{U}_0(t-1))$. 我们可以将这两个公式结合起来，简单写成

$$f(t)=t(\mathcal{U}_0(t)-\mathcal{U}_0(t-1))+\mathcal{U}_0(t-1).$$

(验证!)我们还不能应用定理 1. 为此，我们将 $f(t)$改写成

$$f(t)=-(t-1)\mathcal{U}_0(t-1)+t\,\mathcal{U}_0(t)=-(t-1)\mathcal{U}_0(t-1)+t.$$ 492

回顾，$\mathcal{L}(t)=\frac{1}{s^2}$. 同样，由定理 1，$\mathcal{L}((t-1)\mathcal{U}_0(t-1))=\frac{e^{-s}}{s^2}$. 因此，

$$\mathcal{L}(f(t))=-\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{1}{s^2}.$$ ■

在下面的例题中，我们求解关于斜坡函数的非齐次微分方程.

例 3　非齐次微分方程

求解 $y''+y=f(t)$，$y(0)=0$，$y'(0)=0$，其中 $f(t)$如例 2 所定义.

解　对方程两边作拉普拉斯变换，利用例 2 的结果，我们得到

$$s^2Y+Y=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s^2};$$

$$Y=\frac{1-e^{-s}}{s^2(s^2+1)}.$$

利用部分分式，或简单地注意到

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{(s^2+1)},$$

我们得到

$$Y=(1-e^{-s})\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}-e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}\right).$$

作拉普拉斯逆变换．对 e^{-s}项，利用定理 1，我们得到

$$y(t)=t-\sin t-\mathcal{U}_0(t-1)[(t-1)-\sin(t-1)].$$

图 4 说明对所有 t 解是有界的，对 $t>1$，是周期重复的．解中出现的 $t-\mathcal{U}_0(t-1)(t-1)$这项就是斜坡函数(见例 2)．特别地，对 $t>1$，这项等于 1．因此，对 $t>1$，解是两个 2π-周期的正弦波以及恒等于 1 的函数之和．这就解释了 $t>1$ 时解的有界性和周期性． ■

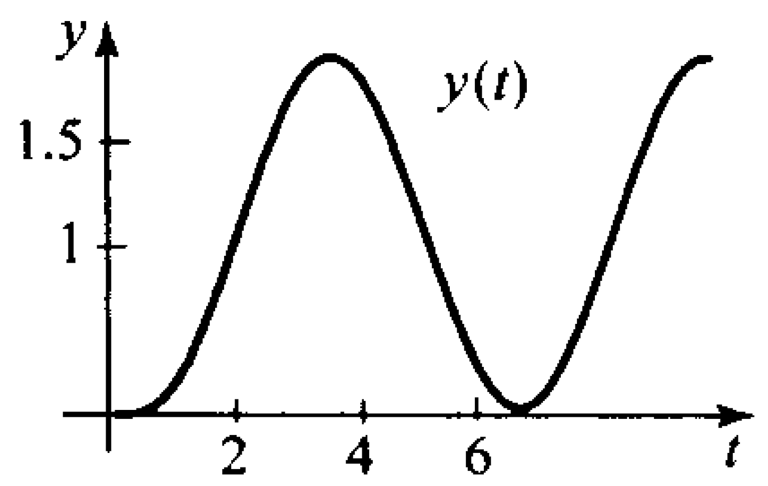


图 4　例 3 的解

下面的例题涉及一个带有间断项的微分方程．

例 4　间断外力项

求解 $y''+4y=f(t)$，$y(0)=1$，$y'(0)=0$，其中外力项 $f(t)$如图 5 所示．

解　外力项可以表示成

493

$$f(t)=1-\mathcal{U}_0(t-1).$$

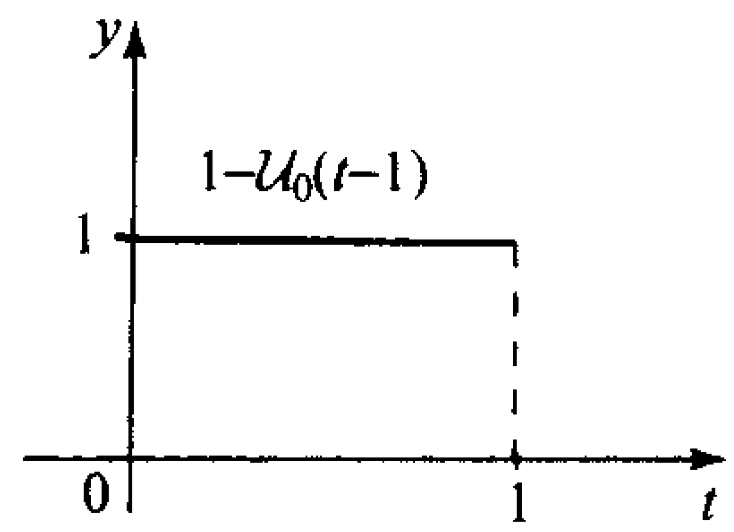


图 5　例 4 中的 $f(t)$

对方程两边作拉普拉斯变换，我们得到

$$s^2Y-s+4Y=\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s};$$

$$Y=\frac{s}{s^2+4}+\frac{1-e^{-s}}{s(s^2+4)},$$

因此，利用部分分式，

$$Y=\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{4}(1-e^{-s})\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right).$$

作拉普拉斯逆变换，对含有 e^{-s}的项，利用定理 1，我们得到

$$y=\cos 2t+\frac{1}{4}(1-\cos 2t)-\frac{1}{4}\mathcal{U}_0(t-1)[1-\cos 2(t-1)]$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos 2t-\frac{1}{4}\mathcal{U}_0(t-1)[1-\cos 2(t-1)].$$

注意到，虽然外力项在 $t=1$ 处间断，但是解对所有 $t>0$ 都是连续的(图 6)．解的二阶导数图像在 $t=1$ 处有个间断，因为 $y''=f(t)-y$.

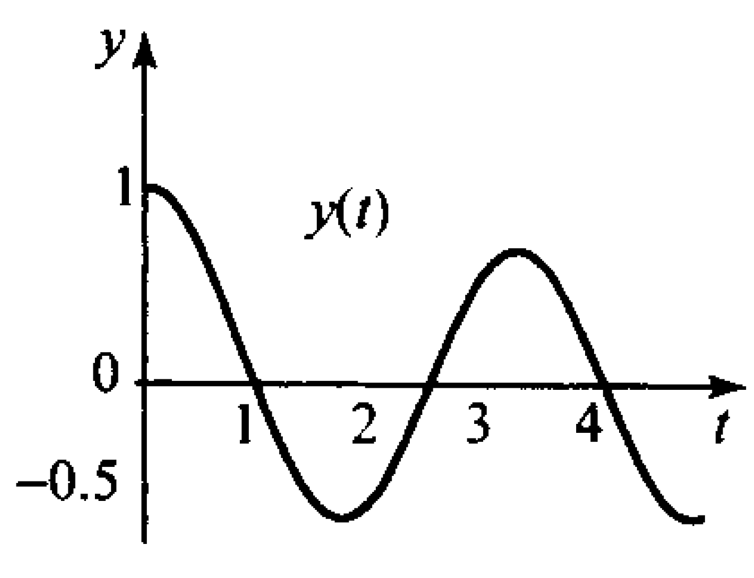


图 6　例 4 中的解 ■

卷积和拉普拉斯变换

给定两个定义在 $t\geqslant 0$ 上的函数 f 和 g，我们定义它们的**卷积** $f*g(t)$为

$$\boxed{f * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau \quad 对所有\ t \geqslant 0.} \tag{2}$$

注意由于卷积是由一个有限区间上的积分所定义的，所以只要，比如说，f 和 g 是分段连续函数，计算 $f * g(t)$ 就没有任何问题，而不管它们在无穷远处增长有多快.

定理 2(卷积的变换) *假设 f 和 g 是分段连续的，且是指数阶的，则*

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\,\mathcal{L}(g).$$

证明 如果对 $t<0$，将函数 f 和 g 延拓成零，则(2)式中的积分与积分

$$\int_0^\infty f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3}$$

完全一样. 因此，在这个证明中，我们假设函数 f 和 g 延拓到整个直线上：对 $t<0$，$f(t)=0$，$g(t)=0$. 我们有 [494]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f * g)(s) &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t g(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (\text{交换积分顺序}) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(u)\mathrm{e}^{-s(u+\tau)}\mathrm{d}u g(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (u = t-\tau, \mathrm{d}u = \mathrm{d}t) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(u)\mathrm{e}^{-su}\mathrm{d}u g(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau = \mathcal{L}(f)(s)\,\mathcal{L}(g)(s).
\end{aligned}$$

■

例 5 **含有卷积的变换**

(a)计算$\mathcal{L}\left(\int_0^t (t-\tau)\sin(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$.

(b)利用卷积，计算$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+4s+5)}\right)$.

解 (a)由定理 2，我们有

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t (t-\tau)\sin\tau\mathrm{d}\tau\right) = \mathcal{L}(t)\,\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{s^2}\frac{1}{s^2+1}.$$

(b)将表达式$\frac{1}{s^2(s^2+4s+5)}$看成两个拉普拉斯变换$\frac{1}{s^2}$和$\frac{1}{s^2+4s+5}$的乘积. 因为

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = t$$

和

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4s+5}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)^2+1)}\right) = \mathrm{e}^{-2t}\sin t,$$

所以有

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+4s+5)}\right)=t*e^{-2t}\sin t=\int_0^t(t-\tau)e^{-2\tau}\sin\tau d\tau.$$

利用分部积分，关于 τ 的积分可以显式地计算出来，最终我们得到

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+4s+5)}\right)=\frac{1}{25}(5t-4)+\frac{4}{25}e^{-2t}\cos t+\frac{3}{25}e^{-2t}\sin t.$$ ■

例 6 利用卷积求解微分方程

将初值问题

$$y''-2y'+5y=f(t),\quad y(0)=0, y'(0)=0$$

的解表示成卷积.

解 对方程作变换，再求出 Y，我们得到

495

$$Y=\frac{F(s)}{s^2-2s+5},$$

其中 $F(s)$是 $f(t)$的拉普拉斯变换. 我们有

$$\frac{1}{s^2-2s+5}=\frac{1}{(s-1)^2+2^2}=\frac{1}{2}\,\frac{2}{(s-1)^2+2^2}.$$

因此

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2}\,\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right)=\frac{1}{2}e^t\sin 2t.$$

作 Y 的拉普拉斯逆变换，并利用定理 2，我们得到

$$y=\frac{1}{2}e^t\sin 2t*f(t)=\frac{1}{2}\int_0^t e^{t-\tau}\sin 2(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$ ■

例 6 说明，在求解带有零初始数据的微分方程时，所有的非齐次项可以同样处理：只是简单地求 $f(t)$与$\frac{1}{2}e^{t-\tau}\sin 2(t-\tau)$的乘积在 0 到 t 区间上的积分即可. 注意，后面这个函数就是 $1/(s^2-2s+5)$拉普拉斯逆变换的平移，其中分母是由微分方程确定的：y''对应于 s^2；$-2y'$对应于$-2s$；而 $5y$ 对应于 5. 换句话说，系统对输入函数(非齐次项)$f(t)$的反应总是与这个函数和由相应的齐次微分方程唯一确定的"响应函数"的卷积有关. 显然，这个附注对所有的非齐次线性微分方程都适用，所以它是对所有这类方程的一般性原理.

狄拉克 δ 函数

为方便读者，我们回顾 7.8 节与狄拉克 δ 函数 $\delta_0(t)$有关的定义和性质. 首先，必须记住的是，$\delta_0(t)$不是通常意义下的函数. 如果将 $\delta_0(t)$解释为在 $t=0$ 时刻作用时间很短但强度很大的外力，则得到一个单位脉冲. 由于脉冲是由积分给出的，所以对任意 $\epsilon>0$，我们得到

$$\boxed{1=\int_0^\epsilon\delta_0(t)dt.}\tag{4}$$

显然，任何函数都不满足这个条件. 定义 δ 函数的一种方法是通过下面的性质，它是(4)式的推广. 令 f 是$[0,\infty)$上的连续函数，而 a 和 b 是任意两个数，则

$$\int_a^b f(t)\delta_0(t)\mathrm{d}t = f(0) \quad 若 a \leqslant 0 \leqslant b \tag{5}$$

和

$$\int_a^b f(t)\delta_0(t)\mathrm{d}t = 0 \quad 若 0 不在[a,b]. \tag{6}$$

496

因此，如果我们对一个连续函数和 δ_0 的乘积在任意一个区间上积分，如果区间包含 0，则我们得到 $f(0)$；否则我们得到 0. 注意到，这确实推广了(4)式，因为此时区间包含 0，而 $f(0)=1$. 对任意数 t_0，令

$$\delta_{t_0}(t) = \delta_0(t-t_0).$$

因此，δ_{t_0} 是 δ_0 平移 t_0 单位.

定理 3(与狄拉克 δ 函数乘积的积分) 假设 f 是区间$[a, b]$上的一个连续函数，则

$$\int_a^b f(t)\delta_0(t-t_0)\mathrm{d}t = \begin{cases} f(t_0) & 如果\ t_0\ 在[a,b], \\ 0 & 如果\ t_0\ 不在[a,b]. \end{cases}$$

证明 令 $u=t-t_0$，$\mathrm{d}u=\mathrm{d}t$，积分变为

$$\int_{a-t_0}^{b-t_0} f(u+t_0)\delta_0(u)\mathrm{d}u.$$

利用(5)和(6)式，我们知道

$$\int_{a-t_0}^{b-t_0} f(u+t_0)\delta_0(u)\mathrm{d}u = \begin{cases} f(t_0) & 如果\ 0\ 在[a-t_0,b-t_0], \\ 0 & 如果\ 0\ 不在[a-t_0,b-t_0]. \end{cases}$$

显然，这与定理的陈述等价. ■

有了定理 3，我们就可以计算含有狄拉克 δ 函数的拉普拉斯变换了. 我们以一个基本例题为例.

例 7 **狄拉克 δ 函数的拉普拉斯变换**

令 $a\geqslant 0$，由拉普拉斯变换的定义，我们有

$$\mathcal{L}(\delta_0(t-a))(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\delta_0(t-a)\mathrm{d}t.$$

由于 a 包含在区间$[0, \infty)$内，所以由定理 3 得到积分等于 e^{-as}. 因此

$$\mathcal{L}(\delta_0(t-a)) = \mathrm{e}^{-as}.$$ ■

定理 3 的另外一个有趣推论是关于与狄拉克 δ 函数的卷积. 假设 f 是$[0, \infty)$上的一个连续函数，利用(2)，我们有

$$f*\delta_0(t) = \int_0^t f(t-\tau)\delta_0(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

由于 0 在区间$[0, t]$内，我们利用(5)式，推得积分等于 $f(t-\tau)$在 $\tau=0$ 点的值，即 $f(t)$. 因此，我们证明了

$$f*\delta_0(t) = f(t).$$

497

这说明狄拉克 δ 函数是函数卷积运算的单位元，就像 1 是数乘的单位元. 我们最后一个例题是含有 δ 函数的微分方程.

例 8　脉冲函数的效应

求解 $y''+4y=\delta_0(t-2)$，$y(0)=0$，$y'(0)=0$.（这表示一个振子一开始是静止的，在 $t=2$ 时它收到一个单位脉冲.）

解　对方程两边作拉普拉斯变换，我们得到

$$s^2Y+4Y=e^{-2s};$$

$$Y=\frac{e^{-2s}}{s^2+4}.$$

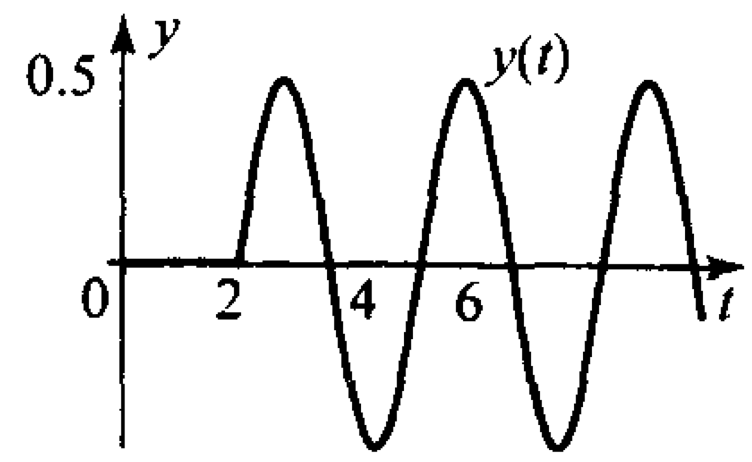


图 7　例 8 中的解

作逆变换，并利用定理 1，我们得到解

$$y(t)=\frac{1}{2}\mathcal{U}_0(t-2)\sin 2(t-2).$$

图 7 的图像说明，解恒等于零，直到时刻 $t=2$，这对应事实：振子开始是静止的，并在那个时刻之前，没有外力作用. 当 $t>2$ 时，振子开始作周期振荡. ■

习题 8.2

在习题 1～6 中，计算给定函数的拉普拉斯变换.

1. $f(t)=\mathcal{U}_0(t-1)-t+1$.
2. $f(t)=(t-1)\mathcal{U}_0(t-1)$.
3. $f(t)=e^{2t}\mathcal{U}_0(t-2)$.
4. $f(t)=t\,\mathcal{U}_0(t-\pi)$.
5. $f(t)=\mathcal{U}_0(t-\pi)\sin t$.
6. $f(t)=\mathcal{U}_0(t-\pi)\cos t\sin t$.

在习题 7～14 中，(a)画出给定函数的图形.（b)用单位阶梯函数来表达函数.（c)计算其拉普拉斯变换.

7. $f(x)=\begin{cases}1 & 若\ 0<t<2,\\ 0 & 若\ t>2.\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases}t & 若\ 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 2-t & 若\ 1\leqslant t\leqslant 2,\\ 0 & 若\ t>2.\end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases}2 & 若\ 2\leqslant t\leqslant 3,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases}t & 若\ 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases}t-1 & 若\ 1\leqslant t\leqslant 2,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases}-\sin t & 若\ \pi\leqslant t\leqslant 2\pi,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases}1 & 若\ 1\leqslant t\leqslant 4,\\ t-5 & 若\ 4\leqslant t\leqslant 5,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases} t & 若\ 0\leqslant t\leqslant 1, \\ 1 & 若\ 1\leqslant t\leqslant 3, \\ 4-t & 若\ 3< t\leqslant 4, \\ 0 & 其他. \end{cases}$

在习题 15～22 中，计算给定函数的拉普拉斯逆变换.

15. $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s^2}$.

498

16. $F(s)=\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2-2}$.

17. $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s^2+1}$.

18. $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{(s-1)^2-1}$.

19. $F(s)=\dfrac{s-3}{1+(s-3)^2}$.

20. $F(s)=\dfrac{e^{-3s}}{(s-1)(s+1)}$.

21. $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s^{3/2}}$.

22. $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{(s-2)^{3/2}}$.

在习题 23～28 中，计算给定的卷积.

23. $1*t$.

24. e^t*e^{-t}.

25. $t*t$.

26. $t*\sin t$.

27. $\sin t*\sin t$.

28. $e^t*\delta_0(t)$.

在习题 29～32 中，将给定函数的拉普拉斯逆变换表达成一个卷积，计算出答案中的积分.

29. $F(s)=\dfrac{1}{s(s^2+1)}$.

30. $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$.

31. $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+1)}$.

32. $F(s)=\dfrac{s}{(s^2-1)(s^2-1)}$.

在习题 33～38 中，求解给定的初值问题.

33. $y''+y=\delta_0(t-1)$，　$y(0)=0$，$y'(0)=0$.

34. $y''-y=(t-2)\mathcal{U}_0(t-2)$，　$y(0)=0$，$y'(0)=0$.

35. $y''+2y'+y=3\delta_0(t-2)$，　$y(0)=1$，$y'(0)=0$.

36. $y''-y=t*\cos t$，　$y(0)=-1$，$y'(0)=0$.

37. $y''+4y=\mathcal{U}_0(t-1)e^{t-1}$，　$y(0)=0$，$y'(0)=0$.

38. $y''+y'+y=\delta_0(t-\pi)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

在习题 39～42 中，将给定初值问题的解表达成一个卷积.

39. $y''+y=f(t)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

40. $y''+y'+y=f(t)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

41. $y''+4y=\cos t$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

42. $4y''+4y'+17y=t$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

专题问题：周期函数. 正如你所知，在计算傅里叶级数时，我们所需的就是函数在长度为一个周期区间上的信息. 在习题 43 中，推导一个周期函数的拉普拉斯变换公式，它使得只需知道函数在一个周期上的取值，就可以计算变换了. 作为专题，完成习题 43 和习题 44～47 中任意一个.

43. 假设 $f(t+T)=f(t)$ 对所有 $t>0$ 成立，即 f 是 T-周期的.

(a)试证：

499

$$\mathcal{L}(f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st}f(t)\,dt.$$

(b)作变量代换 $\tau=t-kT$，得出结论

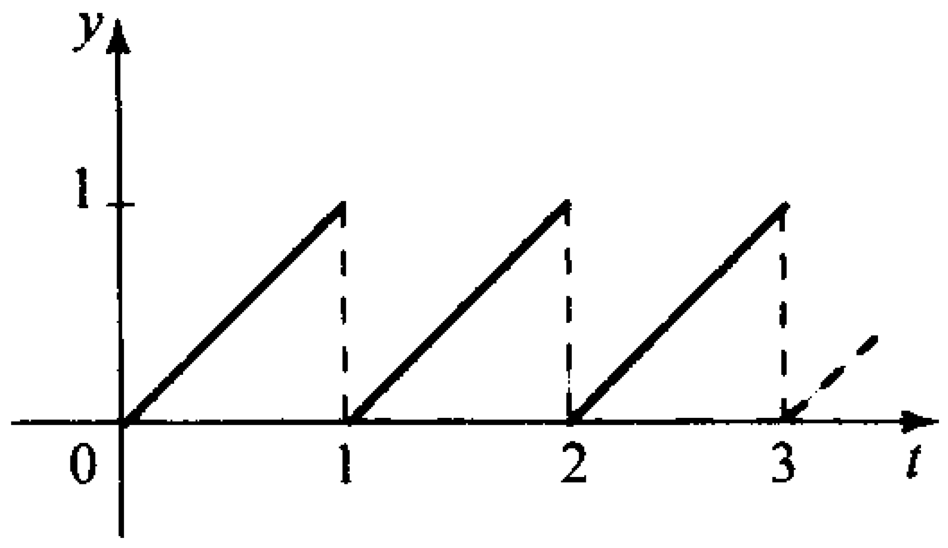
$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^T e^{-st}f(t)\,dt\sum_{k=0}^{\infty}e^{-ksT}.$$

(c)求出(几何)级数的和，得出结论

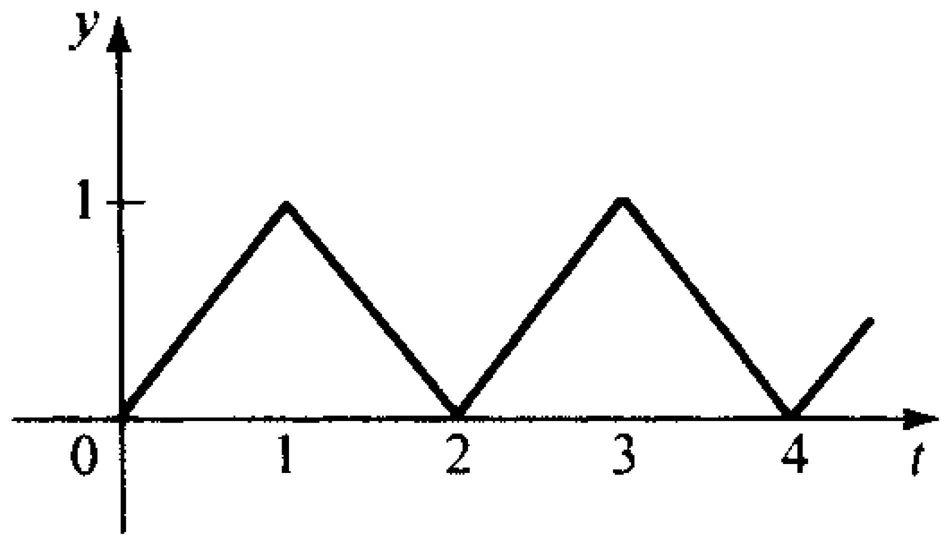
$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{-sT}}.$$

在习题 44～47 中，求出图中给出的函数的拉普拉斯变换，利用习题 43.

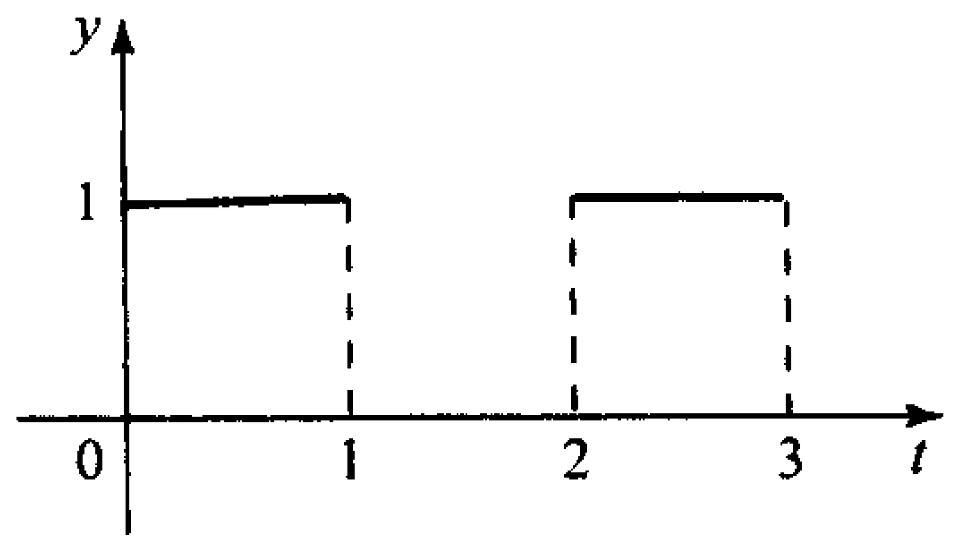
44.



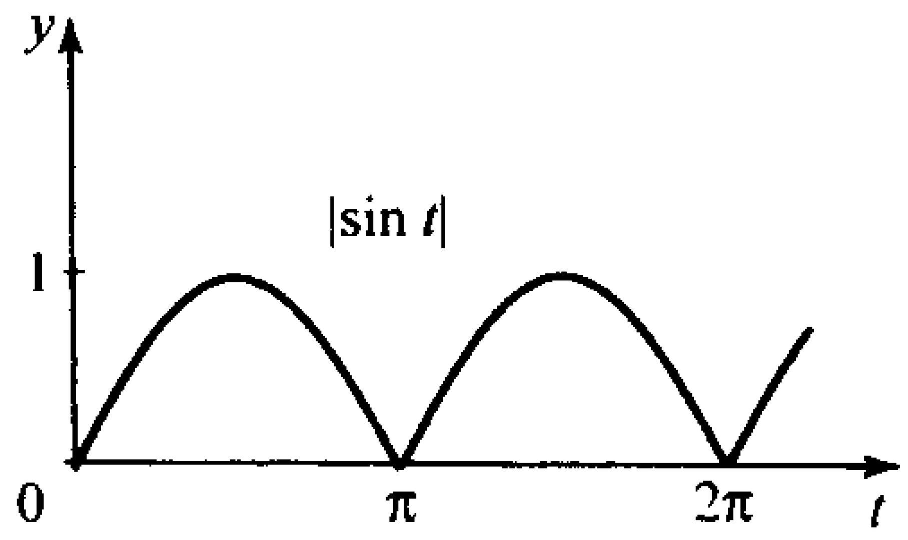
45.



46.



47.



48. 一个由幂级数展开式给出的函数，$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kt^k$ 对所有 t 成立. 试证：

$$\mathcal{L}(f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{k!}{s^{k+1}}.$$

49. 利用习题 48 的结果，试证：$\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$. (另外一种推导请参考下面的习题 56.)

50. **J_0 的拉普拉斯变换.** 回顾 4.7 节，

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kt^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}.$$

(a)利用二项式定理证明

$$\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}=\frac{1}{s}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{-1/2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2s^{2k+1}},\quad s>1.$$

500

(b)利用习题 48 的结果和(a)，证明

$$\mathcal{L}(J_0(t))=\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}.$$

51. 类似习题 50 的过程，证明$\mathcal{L}(J_0(\sqrt{t}))=\frac{e^{-1/4s}}{s}$.

52. **误差函数**. 利用拉普拉斯变换的定义，证明

$$\mathcal{L}(\mathrm{erf}(t))=\frac{2}{s\sqrt{\pi}}e^{\frac{s^2}{4}}\int_{s/2}^{\infty}e^{-u^2}\,du=\frac{1}{s}e^{\frac{s^2}{4}}\mathrm{erfc}\left(\frac{s}{2}\right).$$

关于函数 erf 和 erfc 的定义，请参考 7.4 节(5)式和习题 16.[提示：在写出积分之后，交换积分顺序.]

53. **高斯函数**. 利用拉普拉斯变换和补余误差函数的定义，证明

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{a\sqrt{\pi}}e^{-t^2/4a^2}\right)=e^{a^2s^2}\mathrm{erfc}(as).$$

54. 推导拉普拉斯变换表(附录 B)中的第 37 条.

55. 令 $F(s)$表示 $f(t)$的拉普拉斯变换，建立恒等式

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)=\int_s^{\infty}F(u)\mathrm{d}u.$$

56. 利用习题 55 的结果，推导习题 49 中的拉普拉斯变换.

57. **专题问题：贝塞尔方程的解和拉普拉斯变换.**

(a)试证：对零阶贝塞尔方程作拉普拉斯变换，得到

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[s^2Y-sy(0)-y'(0)]+sY-y(0)-Y'=0.$$

(b)化简 Y 的方程，得到$(s^2+1)Y'=-sY$.

(c)求解关于 Y 的一阶常微分方程，得到 $Y=\frac{K}{\sqrt{s^2+1}}$，其中 K 是一个常数.

(d)利用习题 50 的结果，得出解为 $KJ_0(t)$. 你可能奇怪，由二阶常微分方程，这个方法为什么没有得到第二个解？原因是：应用拉普拉斯变换时，我们假设(未知的)解及其一、二阶导数具有拉普拉斯变换. 由于贝塞尔方程的第二个解 Y_0 在 t 靠近零时，行为像 $\ln t$(4.7 节习题 28)，ty''的行为像$\frac{1}{t}$的常数倍，因而没有拉普拉斯变换，这就解释了为什么这个方法没有得到第二个解.

501

8.3 拉普拉斯变换法

在本节中，我们将利用拉普拉斯变换，求解偏微分方程，就像应用傅里叶变换那样. 在转到例题之前，我们规定一下本节的记号. $u(x,t)$相对于变量 t 的拉普拉斯变换是

$$\mathcal{L}(u(x,t))(s)=U(x,s)=\int_0^{\infty}u(x,t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

利用 8.1 节定理 3，我们得到

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=sU(x,s)-u(x,0)\tag{1}$$

和

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=s^2U(x,s)-su(x,0)-\frac{\partial u}{\partial t}(x,0).\tag{2}$$

记住我们是对变量 t 作拉普拉斯变换，我们同样有

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x,s) \tag{3}$$

和

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x,s). \tag{4}$$

如 7.3 节推导(2)和(3)式那样，这些公式都可以在积分号下求导得到. 同样，为强调在变换微分方程时将 s 视为参数，我们在(3)和(4)式中用了常微分的记号.

现在，我们可以介绍应用了，我们主要处理热传导方程和波动方程的典型例题. 第一个例题模拟一个无限长杆中的热传导，其初始温度是 0°，假设热由杆的一端引入.

502

例 1 半无限杆的热传导方程

求解热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<\infty, t>0, \tag{5}$$

$$u(0,t)=f(t),\quad t>0, \tag{6}$$

$$u(x,0)=0,\quad 0<x<\infty. \tag{7}$$

问题如图 1 所示.

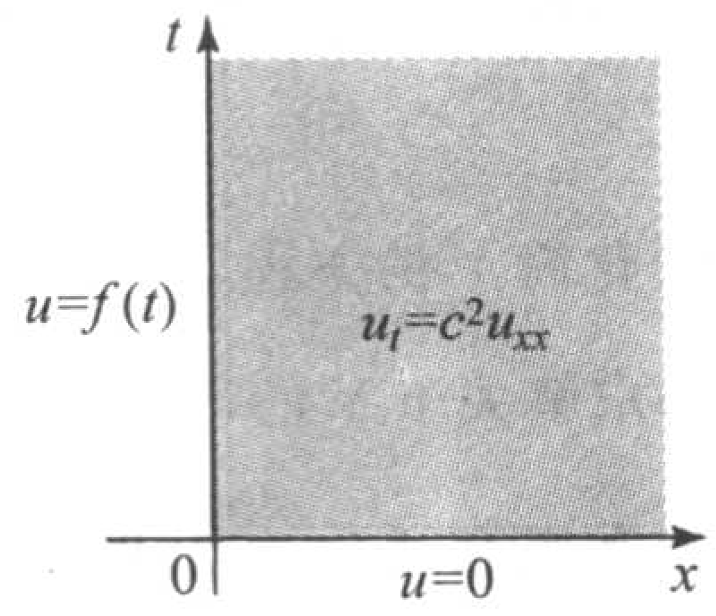


图 1

解 我们对(5)式作关于 t 的拉普拉斯变换. 利用(1)和(4)式，我们得到

$$sU(x,s)-u(x,0)=c^2\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x,s);$$

$$c^2\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}(x,s)-sU(x,s)=0,\qquad \text{由}(7)$$

这个微分方程的通解是

$$U(x,s)=A(s)\mathrm{e}^{\sqrt{s}x/c}+B(s)\mathrm{e}^{-\sqrt{s}x/c},$$

其中 $A(s)$ 和 $B(s)$ 是依赖于 s 的常数(参见附录 A.2). 由于希望当 $s\to\infty$ 时，变换是有界的，我们令 $A(s)=0$. 为确定 $B(s)$，对(6)式作变换，得到 $U(0,\ s)=B(s)=F(s)$，其中 $F(s)$ 表示 f 的拉普拉斯变换. 因此，$B(s)=F(s)$，并且

$$U(x,s)=F(s)\mathrm{e}^{-\sqrt{s}x/c}.$$

现在，由 8.2 节定理 2，清楚可得：$u(x,\ t)$ 是 $f(t)$ 和其拉普拉斯变换为 $\mathrm{e}^{-\sqrt{s}x/c}$ 的函数的卷积. 为求出这个变换，我们利用拉普拉斯变换表(附录 B)的第 41 条：

$$\mathcal{L}\left(\frac{a}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{4t}}\right)=\mathrm{e}^{-a\sqrt{s}}.$$

令 $a=\dfrac{x}{c}$，得到

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{s}x/c}\right)=\frac{x}{2c\sqrt{\pi}t^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4c^2t}}.$$

因此

$$u(x,t)=f(t)*\frac{x\mathrm{e}^{-x^2/4c^2t}}{2c\sqrt{\pi}t^{3/2}}.$$

更显式地，

$$u(x,t)=\frac{x}{2c\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4c^2(t-\tau)}}d\tau. \tag{8}$$

注意，解只依赖于函数 $f(\tau)$在 $0<\tau<t$ 上的值．我们希望如此，因为热源中未来的温度$(\tau>t)$不可能会影响杆的现在温度．■ [503]

(8)式中的卷积积分一般不是很容易计算的．在下面的例题中，我们对常热源的情形作计算．

例 2　具有常热源的热传导问题

在 $f(t)=T_0$ 情形，求解例 1 中的问题．取 $T_0=100$，$c=1$，对不同的 t 值，画出 $u(x, t)$ 的图像，以说明解．

解　在求解之前，我们来直观地考察初始条件和边界条件．已知初始温度为 0°，并在原点引入常值温度 T_0，我们希望温度传遍整个杆，最终在所有点处达到温度 T_0．但是在任何给定时刻 t，如果我们离开热源足够远，其温度将非常接近于零．因此，对任意时刻，杆上的温度分部都将如图 2 中的图像所示．现在，让我们来看看，利用例 1 的结果，这些是否可以解析地推导出来．

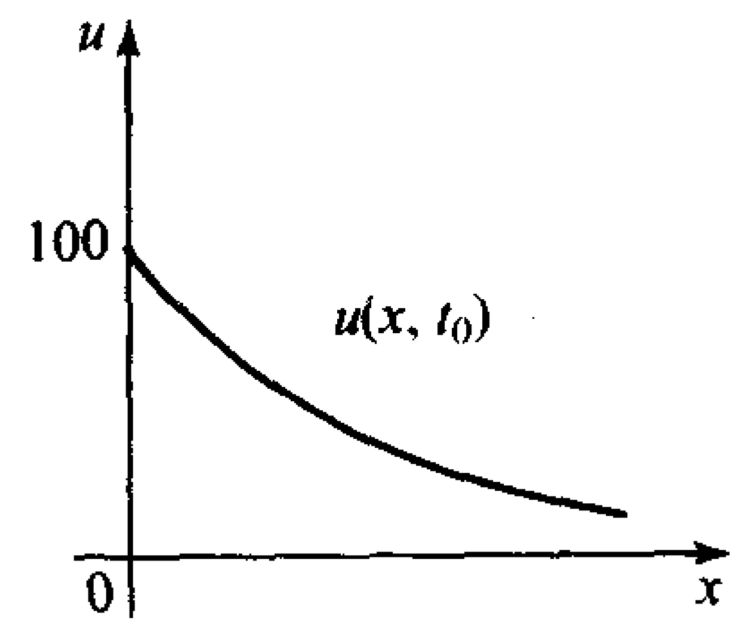


图 2　期望的温度分布

在(8)式中，令 $f(t)=T_0$，作变量代换 $z=x/(2c\sqrt{t-\tau})$，$dz=\frac{x}{4c(t-\tau)^{3/2}}d\tau$，我们得到

$$u(x,t)=T_0\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x/(2c\sqrt{t})}^{\infty}e^{-z^2}dz=T_0\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right),$$

其中 erfc 是 7.4 节习题 16 中引入的补余误差函数．图 3 画出了当 $T_0=100$ 和 $c=1$ 时解 $u(x, t)=100\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$的图像．

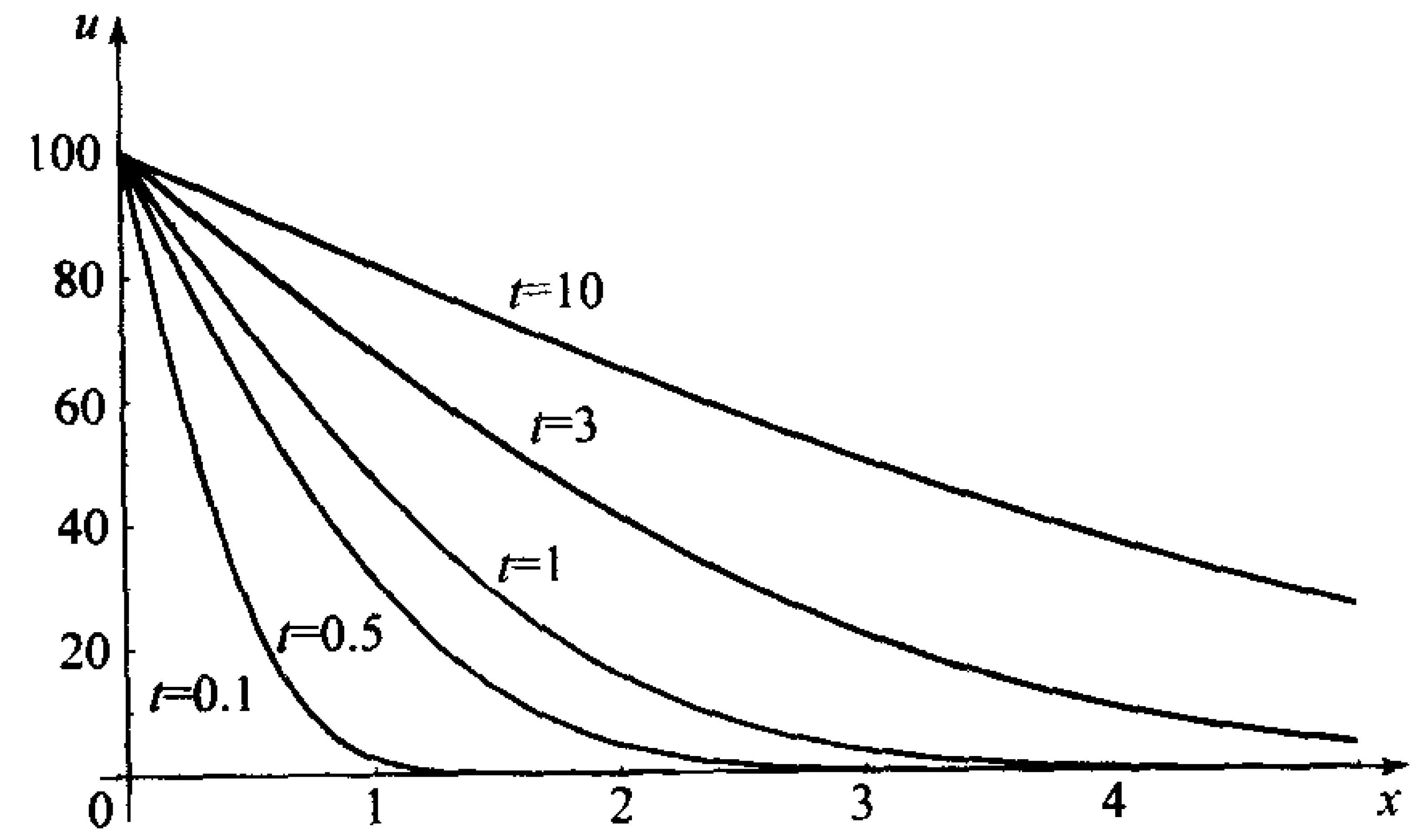


图 3　例 2 中的温度分布 ■

下个例题说明了拉普拉斯变换在求解波动方程时的用处． [504]

例 3　半无限弦的受迫振动

一个半无限弦静止放置在 x 轴上，一端固定在原点．在外力作用下弦自静止开始运动．弦

的运动是由波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t), \quad x > 0, t > 0$$

来描述的，其中 $f(t)$ 表示单位长度上外力的大小.（参见 3.2 节(5)式.）求解这个微分方程，满足边界条件

$$u(0,t) = 0, \quad t > 0$$

和初始条件

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x > 0.$$

解 对微分方程两边作关于 t 的变换，并利用初始条件，我们得到

$$s^2 U(x,s) - su(x,0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = c^2 \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2}(x,s) + F(s);$$

$$-c^2 \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2}(x,s) + s^2 U(x,s) = F(s). \tag{9}$$

这是一个关于变量 x 的二阶线性常系数常微分方程. 与例 1 中所遇到的微分方程不同，这是非齐次的. 其通解是所对应的齐次方程的通解和任何一个特解之和(见附录 A.1，定理 5). 相应的齐次方程的通解是

$$A(s)e^{-\frac{s}{c}x} + B(s)e^{\frac{s}{c}x}.$$

注意到，$F(s)$ 作为 x 的函数是常值的，容易看出，(9)式的一个特解是 $\frac{F(s)}{s^2}$. 因此，(9)式的通解是

$$U(x,s) = A(s)e^{-\frac{s}{c}x} + B(s)e^{\frac{s}{c}x} + \frac{F(s)}{s^2}.$$

由于希望变换对 $s>0$，$x>0$ 是有界的，我们取 $B(s)=0$. 边界条件蕴涵着 $A(s) = -\frac{F(s)}{s^2}$，因此

$$U(x,s) = F(s)\frac{1 - e^{-\frac{s}{c}x}}{s^2}.$$

为计算拉普拉斯逆变换，利用前一节的定理 1 和 2，我们得到

505

$$u(x,t) = f(t) * \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1 - e^{-\frac{s}{c}x}}{s^2}\right) = f(t) * \left[t - \left(t - \frac{x}{c}\right)\mathcal{U}_0\left(t - \frac{x}{c}\right)\right].$$

$\left[\text{注意}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = t,\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\frac{s}{c}x}}{s^2}\right) = \left(t - \frac{x}{c}\right)\mathcal{U}_0\left(t - \frac{x}{c}\right).\right]$其中 $\mathcal{U}_0$ 是赫维赛德阶梯函数. 我们可以将解更显式地写成

$$u(x,t) = \int_0^t f(t-\tau)\left[\tau - \left(\tau - \frac{x}{c}\right)\mathcal{U}_0\left(\tau - \frac{x}{c}\right)\right]\mathrm{d}\tau. \tag{10}$$

■

下面这个例题是例 3 有趣的特例.

例 4 带有重力加速度的弦振动

如果例 3 中的唯一外力是由于重力加速度 g，则微分方程变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g.$$

在与前个例题同样的初始条件和边界条件下，解(11)变为

$$u(x,t)=-g\int_0^t\left[\tau-\left(\tau-\frac{x}{c}\right)\mathcal{U}_0\left(\tau-\frac{x}{c}\right)\right]d\tau$$
$$=-g\left[\frac{1}{2}t^2-\int_0^t\left(\tau-\frac{x}{c}\right)\mathcal{U}_0\left(\tau-\frac{x}{c}\right)d\tau\right].$$

在计算积分 $\int_0^t\left(\tau-\frac{x}{c}\right)\mathcal{U}_0\left(\tau-\frac{x}{c}\right)d\tau$ 的值时，我们利用一些简单的几何考虑. 对固定的 $x>0$，函数 $\left(\tau-\frac{x}{c}\right)\mathcal{U}_0\left(\tau-\frac{x}{c}\right)$ 的图像(作为 τ 的函数)是将 $y=\tau$ 的图像向右平移 $\frac{x}{c}$ 单位而得到的(图 4). 因此，如果 $0<t<\frac{x}{c}$，则 $\left(\tau-\frac{x}{c}\right)\mathcal{U}_0\left(\tau-\frac{x}{c}\right)$ 从 0 到 t 的积分为零. 如果 $t>\frac{x}{c}>0$，则积分等于图 4 中所示的三角形的面积. 可以验证这个面积是 $\frac{1}{2}\left(t-\frac{x}{c}\right)^2$. 因此，我们有

$$u(x,t)=\begin{cases}-\dfrac{g}{2}\left(t^2-\left(t-\dfrac{x}{c}\right)^2\right) & 若\ 0<x<ct,\\ -\dfrac{gt^2}{2} & 若\ x>ct.\end{cases}$$

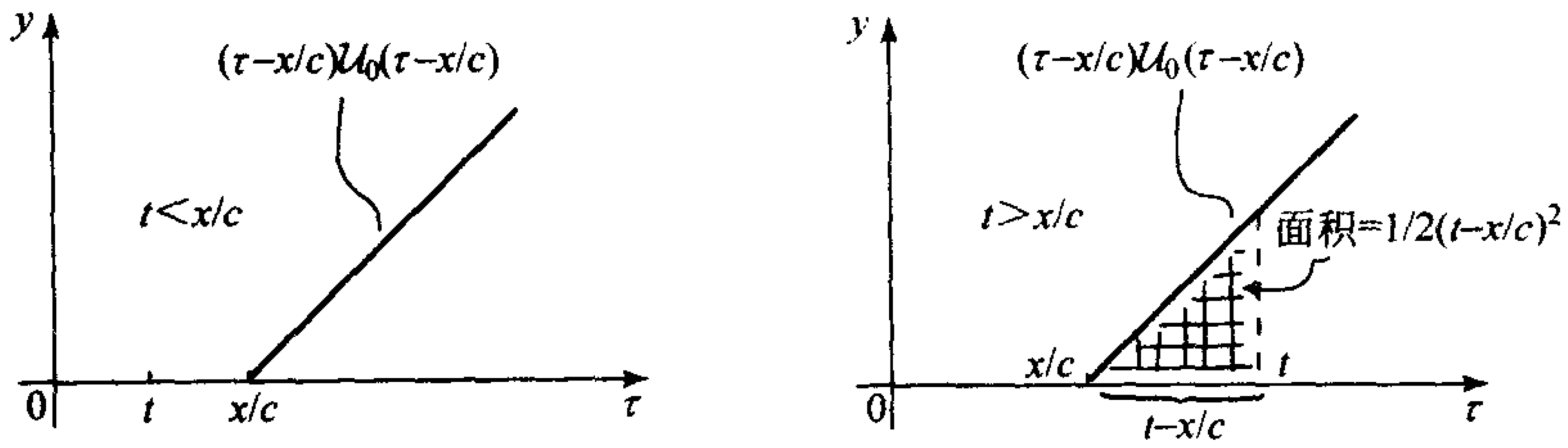


图 4

图 5 画出了不同时刻 t 解的图像. 这个例题模拟了一根半无限的弦自静止开始落下，考虑重力的作用，一端保持固定. 回顾，物体自静止开始落下的位置由 $-gt^2/2$ 给出，我们发现当 x 大于 ct 时，弦就像自由落体一样下落；但是对于 x 较小的那段弦，由于受固定端的影响，下降得慢多了. 注意到，这个效应自固定端以速度 c 向外扩散. [506]

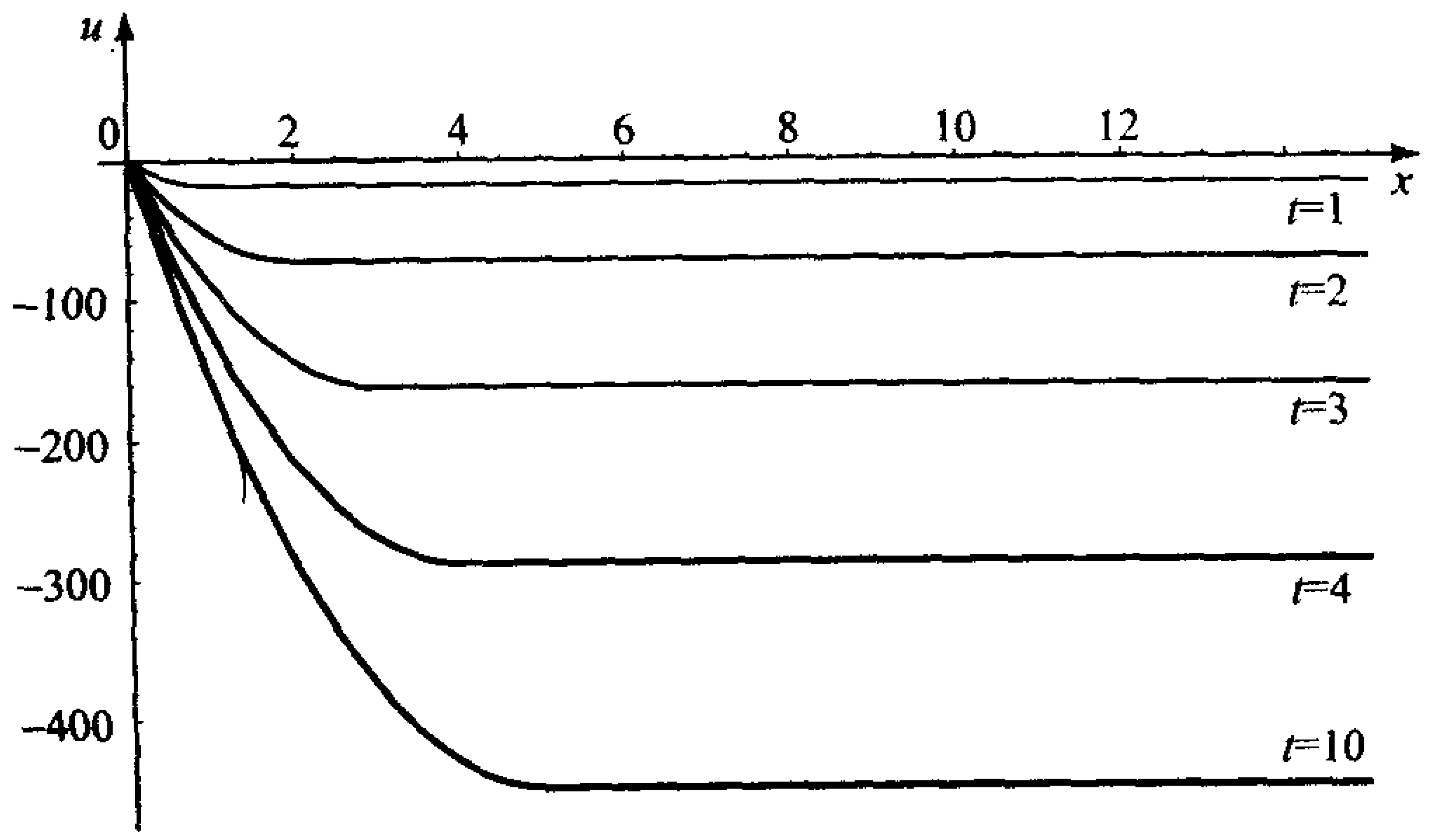


图 5 受重力作用的弦下落

■

习题 8.3

在习题 1～10 中，利用拉普拉斯变换，求解给定边值问题．以积分形式表达解，并尽可能化简．同时尽可能利用本节例题的结果，而不用重复其推导．

1. $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$0<x<\infty$，$t>0$，

   $u(0,\ t)=70$，$t>0$，

   $u(x,\ 0)=0$，$0<x<\infty$．

2. $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$0<x<\infty$，$t>0$，

   $u(0,\ t)=100(1-\mathcal{U}_0(t-1))$，$t>0$，

   $u(x,\ 0)=0$，$0<x<\infty$．

3. $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$0<x<\infty$，$t>0$，

   $u(0,\ t)=100\,\mathcal{U}_0(t-2))$，$t>0$，

   $u(x,\ 0)=0$，$0<x<\infty$．

4. $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$0<x<\infty$，$t>0$，

   $u(0,\ t)=100(\mathcal{U}_0(t-1)-\mathcal{U}_0(t-3))$，

   $u(x,\ 0)=0$，$0<x<\infty$．

5. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+t$，$x>0$，$t>0$，

   $u(0,\ t)=0$，$t>0$，

   $u(x,\ 0)=0$，$\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)=0$，$x>0$．

6. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+e^{-t}$，$x>0$，$t>0$，

   $u(0,\ t)=0$，$t>0$，

   $u(x,\ 0)=0$，$\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)=0$，$x>0$．

7. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-g$，$x>0$，$t>0$，

   $u(0,\ t)=0$，$t>0$，

   $u(x,\ 0)=0$，$\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)=1$，$x>0$．

8. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+t^2$，$x>0$，$t>0$，

   $u(0,\ t)=0$，$t>0$，

   507 $u(x,\ 0)=0$，$\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)=0$，$x>0$．

9. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$x>0$，$t>0$，

   $u(0,\ t)=\sin t$，$t>0$，

$u(x, 0)=0$，$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=1$，$x>0$.

10. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$x>0$，$t>0$，

 $u(0, t)=0$，$t>0$，

 $u(x, 0)=0$，$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=1$，$x>0$.

11. 想象一根很长(半无限)绝热棒，初始温度是 0°，在一端受到电焊的短暂作用后，为确定棒上各点的温度，求解例 1 的边值问题，$f(t)=\delta_0(t)$.

12. 参考例 2，给定数据 $c=1$，$T_0=100$. 估算经过多长时间，$x=5$ 点处的温度升到 10? 经过多长时间，温度升到 20，40，80? 由此，你可以得出什么样的结论? 温度最多可以升到多少?

13. 半无限棒的初始温度是 70°，在 $t=0$ 时，棒的一端给定温度 100°. 为确定棒上各点的温度，求解方程(1)，$c=1$，满足下列条件：

$$u(0,t)=100, t>0, \quad u(x,0)=70, x>0.$$

 整个棒中的温度最终会怎样? 作图来说明你的答案. [提示：仿照例 1 和 2.]

14. 利用拉普拉斯变换，求解边值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin \pi x, \quad 0<x<1, t>0,$$

$$u(0,t)=0, \quad u(1,t)=0, t>0,$$

$$u(x,0)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0, x>0.$$

15. 试证：边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x>0, t>0,$$

$$u(0,t)=T_0, \quad t>0,$$

$$u(x,0)=T_1, \quad x>0$$

 的解由

$$u(x,t)=(T_0-T_1)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right)+T_1=(T_1-T_0)\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right)+T_0$$

 给出.

16. 当 $c=1$，$T_0=100$，$T_1=70$ 时，画出习题 15 解的图像.

8.4　汉克尔变换及其应用

正如我们在第 4 章所看到的，贝塞尔函数和贝塞尔级数是求解极坐标问题的工具. 贝塞尔函数的另外一个应用是在 6.3 节悬链问题中. 所以不出意外，贝塞尔函数在处理无界区域上的类似问题时也会出现. 这里我们将需要一个利用贝塞尔函数来定义的变换，而不是贝塞尔级数. [508]

假设 $f(x)$ 对所有 $x\geqslant 0$ 有定义，$f(x)$ 的 $\nu\geqslant 0$ 阶**汉克尔变换**定义为

$$\boxed{\mathcal{H}_\nu(f)(s)=\int_0^\infty f(x)J_\nu(sx)x\,\mathrm{d}x, \quad s\geqslant 0,} \tag{1}$$

其中 J_ν 是 ν 阶贝塞尔函数(关于贝塞尔函数的背景知识，请参考 4.7 节). 如果 f 在任何有限

区间上是分段光滑的，且$\int_0^\infty \sqrt{x}\mid f(x)\mid \mathrm{d}x<\infty$，则我们有如下的**互反公式**：

$$\boxed{\mathcal{H}_\nu(\mathcal{H}_\nu f)(x)=f(x),} \tag{2}$$

在间断点处满足通常的约定．因此，汉克尔变换是其自身的逆．（参考 G. N. Watson，*A Treatise on the Theory of Bessel Functions*，2nd edition，Cambridge University Press，London，1962.）余弦变换和正弦变换也满足这个性质（参看 7.6 节习题 21）．事实上，这些变换和 $\nu=\frac{1}{2}$ 阶汉克尔变换之间有着密切的联系（见习题 16）．

在本节的应用中还需要如下的运算性质：

运算性质

$$-s\,\mathcal{H}_0(f)(s)=\mathcal{H}_1(f')(s), \tag{3}$$

$$\mathcal{H}_0\left(f'+\frac{1}{x}f\right)(s)=s\,\mathcal{H}_1(f)(s), \tag{4}$$

$$\mathcal{H}_0\left(f''+\frac{1}{x}f'\right)(s)=-s^2\,\mathcal{H}_0(f)(s). \tag{5}$$

为证明这些性质，我们需要 4.8 节贝塞尔函数的如下性质：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(J_0(sx))=-sJ_1(sx)$$

和

$$\int J_0(sx)x\mathrm{d}x=\frac{1}{s}xJ_1(sx)+C.$$

我们对 f 施加如下条件：对任意 s，

509

$$\lim_{x\to 0}f(x)J_0(sx)x=0 \quad 和 \quad \lim_{x\to\infty}f(x)J_1(sx)x=0.$$

由于 J_0 和 J_1 在整个实线上有界，所以如果 f 在零点附近有界，且当 $x\to\infty$ 时趋近于零的速度比 $\frac{1}{x}$ 快，则这些条件满足．

现在，为证(3)式，对 $\nu=0$ 应用(1)式，分部积分得

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0(f)(s)&=\int_0^\infty f(x)J_0(sx)x\mathrm{d}x\\ &\qquad\left(u=f(x),\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x,\mathrm{d}v=J_0(sx)x\mathrm{d}x,v=\frac{1}{s}xJ_1(sx)\right)\\ &=\frac{1}{s}f(x)J_1(sx)x\Big|_0^\infty-\frac{1}{s}\underbrace{\int_0^\infty f'(x)J_1(sx)x\mathrm{d}x}_{\mathcal{H}_1(f')}.\end{aligned}$$

由我们关于 f 的假设，第一项为零，因此，(3)式得证．(4)式的证明类似可得．首先，我们注意到

$$f'+\frac{1}{x}f=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xf(x)].$$

因此

$$\mathcal{H}_0\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xf(x)]\right)(s)=\int_0^\infty \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xf(x)]J_0(sx)x\mathrm{d}x$$

$$\left(u=J_0(sx),\mathrm{d}u=-sJ_1(sx)\mathrm{d}x \quad \mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xf(x)]\mathrm{d}x, v=xf(x)\right)$$

$$=f(x)J_0(sx)x\Big|_0^\infty+s\int_0^\infty f(x)J_1(sx)x\mathrm{d}x$$

$$=s\,\mathcal{H}_1(f)(s).$$

最后，为证明(5)式，我们如下应用(4)式，再用(3)式，得

$$\mathcal{H}_0\left(f''+\frac{1}{x}f'\right)(s)=s\,\mathcal{H}_1(f')(s)=-s^2\,\mathcal{H}_0(f)(s).$$

汉克尔变换的一个非常有用的性质是其**线性性**：

$$\mathcal{H}_\nu(af+bg)=a\,\mathcal{H}_\nu(f)+b\,\mathcal{H}_\nu(g).$$

其证明很简单，留作习题．现在，我们可以介绍应用了．我们以悬链问题(细节参见 6.3 节)为开始．

例 1　无限长悬链的振荡

一条无限长悬链的振荡可以模拟为：假设链是半无限的，其固定端在无限远处．我们还将假设横振动只发生在竖直平面内．如 6.3 节所做，将链放置在 x 轴上，设 x 轴为竖直方向，且方向向上(图 1)．控制链自由运动的边值问题变为 510

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=g\left[x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\right],\quad 0<x<\infty,\quad t>0,$$

$$u(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=v(x),x>0.\qquad(6)$$

这里 g 是重力加速度，$f(x)$是链的初始位移，而 $v(x)$ 是初始速度．为便于求解，我们做变量代换 $z^2=x$，$2z\mathrm{d}z=\mathrm{d}x$，则方程变为

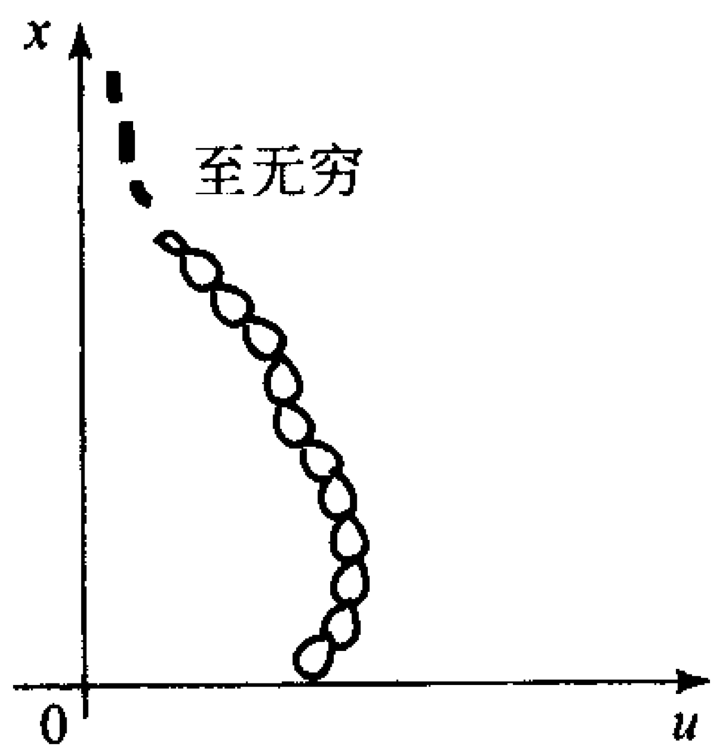


图 1　一条无限长的悬链，固定端在∞

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{g}{4}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z}\right],$$

$$u(z^2,0)=f(z^2),\quad u_t(z^2,0)=v(z^2).$$

(细节请见习题 1.)令 $U(s,t)$表示 $u(z^2,t)$关于变量 z 的零阶汉克尔变换．对新的一组方程作变换，并利用(5)式，我们得到

$$U_{tt}(s,t)=-s^2\frac{g}{4}U(s,t),$$

$$U(s,0)=\mathcal{H}_0(f(z^2))(s),\quad U_t(s,0)=\mathcal{H}_0(v(z^2))(s).$$

求解关于 t 的微分方程，并利用变换后的初始条件，确定其中的任意常数，我们得到

$$U(s,t)=A(s)\cos\left(\frac{\sqrt{g}}{2}st\right)+B(s)\sin\left(\frac{\sqrt{g}}{2}st\right),$$

其中

$$A(s)=\mathcal{H}_0(f(z^2))(s),\quad 及\quad B(s)=\frac{2}{\sqrt{g}s}\mathcal{H}_0(v(z^2))(s).$$

作 U 的汉克尔(逆)变换，可以得到解：

$$u(z^2,t)=\int_0^{\infty}\left[A(s)\cos\left(\frac{\sqrt{g}}{2}st\right)+B(s)\sin\left(\frac{\sqrt{g}}{2}st\right)\right]J_0(zs)s\,\mathrm{d}s.$$

因此，写成 x 变量，我们有

$$u(x,t)=\int_0^{\infty}\left[A(s)\cos\left(\frac{\sqrt{g}}{2}st\right)+B(s)\sin\left(\frac{\sqrt{g}}{2}st\right)\right]J_0(\sqrt{x}s)s\,\mathrm{d}s.$$

将这个答案与有限长链情形答案(6.3 节(10)式)比较，你注意到什么没有？ ■

[511] 悬链问题的数值示例在习题中介绍. 我们下个例题是上半空间内的狄利克雷问题.

例 2 大物体中的稳态温度分布

求解柱面坐标中的边值问题

$$(\nabla^2 u=)u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+u_{zz}=0,\quad r>0,z>0;$$

$$-c^2u_z(r,0)=\begin{cases}k & 若\ 0<r<R,\\ 0 & 若\ r>R.\end{cases}$$

这个边值问题描述的是上半空间中大物体内的稳态温度分布，物体的一个面放置在 $z=0$ 平面上. 热量是通过 $z=0$ 平面上以原点为中心、R 为半径的圆形区域内，以单位面积单位时间上的常数速率 k 引入的，平面上其他部分没有加热(图 2). 由于圆的对称性，上半空间内各点的稳态温度分布只是 r 和 z 的函数.

解 我们以 $U(s, z)$表示 $u(r, z)$关于 r 的零阶汉克尔变换. 对方程作变换，利用(5)式和下面表 1 中的第一条，我们得到

$$-s^2U+\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}z^2}=0,$$

$$-c^2U_z(s,0)=\mathcal{H}_0(k\,\mathcal{U}_0(R-r))(s)=k\frac{R}{s}J_1(Rs),$$

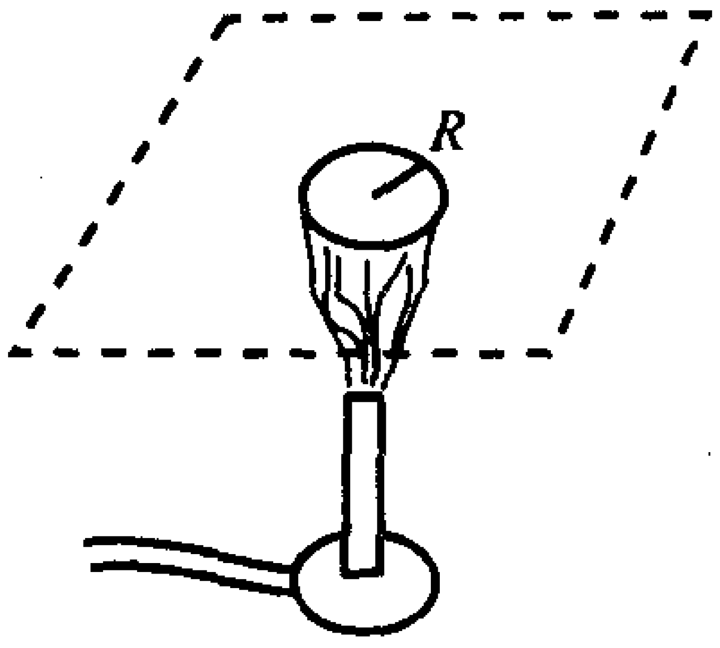


图 2 加热的大物体

其中$\mathcal{U}_0$表示赫维赛德阶梯函数. 这个关于 z 的一阶微分方程的解是

$$U(s,z)=A(s)\mathrm{e}^{-sz}+B(s)\mathrm{e}^{sz}.$$

由于希望变换保持有界，我们取 $U(s, z)=A(s)\mathrm{e}^{-sz}$. 为确定 $A(s)$，我们利用变换后的边界条件，得到

$$-c^2U_z(s,0)=sc^2A(s)=k\frac{R}{s}J_1(Rs);$$

$$A(s)=k\frac{R}{c^2s^2}J_1(Rs);$$

$$U(s,z)=k\frac{R}{c^2s^2}J_1(Rs)\mathrm{e}^{-sz}.$$

解是零阶汉克尔(逆)变换

$$u(r,z)=\frac{kR}{c^2}\int_0^\infty \frac{e^{-sz}}{s}J_1(Rs)J_0(rs)ds. \qquad \blacksquare$$

表 1 列出了零阶汉克尔变换，对完成习题有用. 因为汉克尔变换是其自身的逆变换，这个表可以有两种读法. 例如，由第一条，我们有

$$\mathcal{H}_0\left(\frac{a}{x}J_1(ax)\right)=\mathcal{U}_0(a-s).$$

512

表 1　零阶汉克尔变换

	$f(x)$, $x\geqslant 0$	$\mathcal{H}_0(f)(s)=\int_0^\infty f(x)J_0(sx)x\,dx$, $s\geqslant 0$
1.	$\mathcal{U}_0(a-x)$, $a>0$	$\frac{a}{s}J_1(as)$
2.	$x^{2N}\mathcal{U}_0(a-x)$, $a>0$	$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n 2^n a^{2N-n+1}\frac{N!}{(N-n)!}\frac{J_{n+1}(as)}{s^{n+1}}$
3.	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{s}$
4.	e^{-ax}, $a>0$	$\frac{a}{\sqrt{(s^2+a^2)^3}}$
5.	$\frac{1}{x}e^{-ax}$, $a>0$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$
6.	$e^{-a^2x^2}$, $a>0$	$\frac{1}{2a^2}e^{-s^2/4a^2}$
7.	$\frac{1}{x}\sin ax$, $a>0$	$\frac{\mathcal{U}_0(a-s)}{\sqrt{a^2-s^2}}$

注意到，一个有趣的事实是，函数 $e^{-x^2/2}$ 是其自身的汉克尔变换.（与 7.2 节定理 5 比较.）

习题 8.4

1. 令 $z^2=x$，且 $\tilde{u}(z,t)=u(z^2,t)=u(x,t)$.

(a)利用链式法则，推导 $u_x=\frac{1}{2z}\tilde{u}_z$，$u_{xx}=\frac{1}{4z^2}\tilde{u}_{zz}-\frac{1}{4z^3}\tilde{u}_z$.

(b)参考例 1，验证由(6)式到新微分方程的推导过程.

在习题 2～3 中，利用(1)式以及 4.7 和 4.8 节中有关贝塞尔函数的各种性质，建立下列恒等式. 取 $\nu\geqslant 0$ 和 $a>0$.

2. $\mathcal{H}_\nu(f(ax))(s)=\frac{1}{a^2}\mathcal{H}_\nu(f(x))\left(\frac{s}{a}\right)$.

3. $\mathcal{H}_\nu\left[\frac{1}{x}f\right](s)=\frac{s}{2\nu}[\mathcal{H}_{\nu+1}(f)(s)+\mathcal{H}_{\nu-1}(f)(s)]$

4. (a)利用贝塞尔函数的性质，证明：对 $a>0$，

$$\mathcal{H}_\nu[x^\nu\,\mathcal{U}_0(a-x)]=\frac{a^{\nu+1}}{s}J_{\nu+1}(as).$$

(b)推导表 1 中的第 1 条.

5. 利用 4.3 节习题 9，推导表 1 中的第 2 条.

6. (a)试证：$\mathcal{H}_0\left(\frac{1}{x}e^{-ax}\right)=\mathcal{L}(J_0(ax))(s)$.

(b)由拉普拉斯变换表，推导表 1 中的第 5 条.

7. 在表 1 第 5 条中令 $a\to 0$，验证第 3 条.

8. 在本习题中，我们给出表 1 中的第 6 条的证明概要.

(a)利用 J_0 的级数展开式，得出

513

$$\mathcal{H}_0(e^{-a^2x^2})(s)=\frac{1}{2a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{s^2}{4a^2}\right)^n\int_0^{\infty}t^n e^{-t}\,dt\right].$$

(b)利用伽马函数，证明和式中的积分是 $n!$.

(c)将这个级数与 $\frac{1}{2a^2}e^{-s^2/4a^2}$ 的泰勒级数展开式比较，完成证明.

9. 参考例 1.

(a)取数据 $g=9.8$，$f(x)=0$，$v(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$，描述相应的物理现象.

(b)写下积分形式的解.

(c)取 $x=1$，逼近 $t=0.1,\ 0.2,\ 0.3$ 时的解.

10. 对数据 $g=9.8$，$f(x)=\frac{1}{x}$，$v(x)=0$，重做习题 9.

11. 对给定数值数据 $R=2$，$k=0.5$，$c=0.8$，逼近例 2 中的稳态温度 $u(1,1)$.

12. **大金属板的横振动**. 一块非常大的金属板材，受到施加在其表面上的径向对称压力而发生振动. 在极坐标下的边值问题描述如下：

$$u_{tt}=c^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right)+p(r,t),\quad r>0,t>0,$$

$$u(r,0)=f(r),\quad u_t(r,0)=g(r),\quad r>0,$$

其中 $p(r,t)$ 对应于外加压力除以板材的面质量密度，f 是板材的初始径向对称形状，而 g 是初始径向对称速度.

试证：解(关于 r)的零阶汉克尔变换 $U(s,t)$ 满足

$$U_{tt}=-c^2s^2U+P(s,t),$$

$$U(s,0)=F(s),\quad U_t(s,0)=G(s).$$

13. 参考习题 12，试证：如果压力为零，则解的汉克尔变换是

$$U(s,t)=F(s)\cos(cst)+\frac{1}{cs}G(s)\sin(cst).$$

14. 如果 $c=1$，$p\equiv 0$，$f(r)=(1-r^2)\mathcal{U}_0(1-r)$，$g(r)=0$，求出习题 12 中的解.

15. (a)如果 $c=1$，$p\equiv 0$，$f(r)=\sqrt{1-r^2}\,\mathcal{U}_0(1-r)$，$g(r)=0$，求出习题 12 中的解.

(b)画出不同 t 值时板材的初始形状.

(c)描述原点的运动.

16. 回顾，在 4.7 节有 $J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$，试证：

$$\mathcal{H}_{1/2}(f)=\frac{1}{\sqrt{s}}\mathcal{F}_s(f(x)\sqrt{x}),$$

514

其中 $\mathcal{F}_s$ 是傅里叶正弦变换. 由事实 $\mathcal{F}_s$ 是其自身的逆变换，得到 $\mathcal{H}_{1/2}$ 也是其自身的逆变换.

第9章　有限差分数值方法

数是人类所特有的智力见证.

——巴尔扎克

综述　严格地说，本章的数值方法不需要前面的偏微分方程的知识. 然而，要完全理解这些方法需要对第 3 章所讲的边值问题有所熟悉. 特别地，在 3.3 节、3.5 节、3.7 节和 3.8 节等所阐述的解析解在处理相应的数值解时是有用的. 本章可以紧随第 3 章，放在其后.

导读　9.1 节提出了有限差分方法，并把它用于热传导方程. 9.1 节本质上是为第 9 章的其他各节准备的. 9.2 节把有限差分方法用于波动方程，9.3 节将此法用于拉普拉斯方程. 9.4 节推广了 9.3 节的思想. 为清楚起见，我们选择简单的例子讲述数值方法. 然而要知道，这些方法对复杂的问题同样有效，并且很适合用于实际问题.

假设你正在研究一个具体的热传导问题，想要知道一根杆子上的一些点 x_1，x_2，…，x_m 在时刻 t_1，t_2，…，t_n 的温度. 如果 $u(x,t)$ 表示点 x 在时刻 t 的温度，则你所寻找的就是一张数值表 $u(x_j,t_k)$，其中 $1\leqslant j\leqslant m$ 及 $1\leqslant k\leqslant n$. 当有一个可用的解析解时，你会用它计算 $u(x_j,t_k)$. 然而，在许多实际问题中，不可能计算解析解，因为仅知道一些离散点上的数据.

为避免这种情况，我们可以放弃寻求解析解而求*数值解*. 在这一章，你将学习基于*离散化*原理的数值方法. 所谓离散化一个问题，就是想出一个算法或公式，用它把解在一组离散点上的值计算出来. 例如，在热传导问题中，离散化后得到一个公式，用它进行迭代运算就得到一个数值解.

随着可用于数值计算的具有高精度低成本的计算机的普及，数值方法在工程和科学领域变得越来越重要. 另外，与解析方法相比，数值方法具有可以在较少的制约条件下应用的优点. 例如，热传导方程中的数值方法(9.1 节)，对各种边界条件同样方便使用. 回忆第 3 章，用解析方法处理不同的边值问题时，必须分别考虑具体的边界条件. 还有，用解析方法在直角坐标中求解狄利克雷问题时，必须限制在矩形区域. 在 9.3 和 9.4 节你将看到，数值方法可以用于正则性较弱的区域.

9.1　热传导方程的有限差分法

为了深入理解求解偏微分方程的数值方法，我们从考察一根有限长杆的热传导方程开始. 这个例子将说明有限差分法的关键思想，并通过与 3.5 节中解析解的比较，判断数值方法成功的可能性有多大.

设有一根两端绝热的杆，端点保持零度，让我们回忆它的热边值问题

$$u_t = c^2 u_{xx},\quad 0 < x < L, t > 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, t > 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant L. \tag{3}$$

离散化热传导问题

把问题离散化的思路是：对 x 变量取步长 h，对 t 变量取步长 k，设法在 xt 平面内的网格点上逼近温度 u 的值．比如说，求 u 在分布于 0 与 L 之间的 $n-1$ 个等间隔点上的近似值．取

$$h = L/n,$$

通过取 $x=h$，$2h$，…，$(n-1)/h$，把从 0 到 L 的区间分割为 n 部分．类似地，取一个正数 k，只考虑时间值 $t=0$，k，$2k$，$3k$，…．于是，我们想设计一个数值方法并用它求得函数值

516

$$\boxed{u_{ij} = u(ih, jk), \quad 其中 \quad 0 < i < n, j \geqslant 0} \tag{4}$$

的近似值．即，u_{ij} 将表示 u 在网格点(ih, jk)上的值(见图 1)．

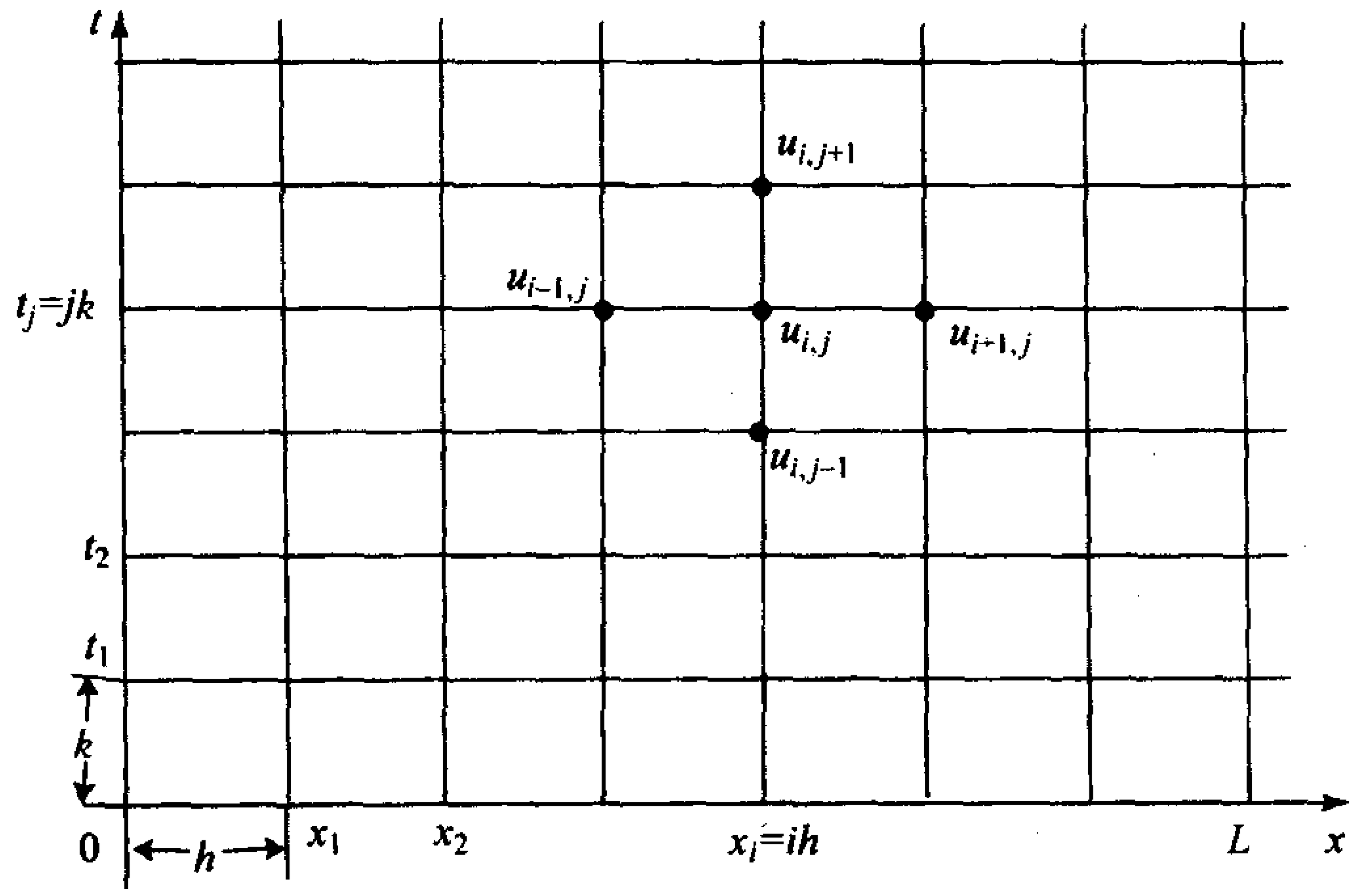


图 1　xt 平面上的网格点．要向前推进时间，只需增加 t_j 的值

至此，基于(1)式，我们要叙述一个规律，用往后一步的时刻的值 $u_{i,j-1}(1 \leqslant i \leqslant n-1)$确定现在时刻的 u_{ij} 的值．为此，可以从下面的极限得到提示：

$$\lim_{k \to 0} \frac{u(x,t+k) - u(x,t)}{k} = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \tag{5}$$

和

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t). \tag{6}$$

上述第一个式子就是 u 关于 t 的偏导数的定义式．第二个式子可以用洛必达法则(两次)验证如下：

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u_x(x+h,t) - u_x(x-h,t)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u_{xx}(x+h,t)+u_{xx}(x-h,t)}{2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

因此，如果 k 充分小，我们有

$$u_t(x,t)\approx\frac{u(x,t+k)-u(x,t)}{k},\tag{7}$$

若 h 充分小，我们有

$$u_{xx}(x,t)\approx\frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}.\tag{8}$$

于是，在网格点$(ih,\ jk)$上，我们有近似值

517

一阶导数的离散化

$$u_t(ih,\ jk)\approx\frac{u(ih,\ jk+k)-u(ih,\ jk)}{k}$$
$$\approx\frac{1}{k}(u_{i,j+1}-u_{ij}).\tag{9}$$

类似地，利用(8)式，有

二阶导数的离散化

$$u_{xx}(ih,\ jk)\approx\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}).\tag{10}$$

近似式(9)叫做一阶偏导数 u_t 的**向前差分近似**，而近似式(10)叫做 u_{xx} 的**中心二阶差分近似**. 后者考虑了 u 在关于网格点$(i,\ j)$的对称点上的值(见图 1). 把近似式(8)和(9)代入(1)，得到

$$u_{i,j+1}-u_{ij}=c^2\frac{k}{h^2}(u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}),$$

这就是**热传导方程的有限差分近似**. 合并同类项并对 u_{ij} 求解，得

热传导方程的离散化

$$u_{i,j+1}=(1-2s)u_{ij}+s(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}),\tag{11}$$

其中，

$$s=\frac{c^2k}{h^2}.\tag{12}$$

由此，我们可以用第 j 个时间步的值 u_{ij}，计算对应于第$(j+1)$个时间步的值 $u_{i,j+1}$.

现在，让我们离散边界和初始条件. 由 $u(x,\ 0)=f(x)$，得

518

初始条件的离散化

$$u_{i0}=u(ih,\ 0)=f(ih),\qquad 0\leqslant i\leqslant n.\tag{13}$$

另外，由边界条件(2)导出

边界条件的离散化

$$u_{0j}=u(0,\ jk)=0,\qquad j>0\tag{14}$$

和

$$u_{nj}=u(nh,\ jk)=u(L,\ jk)=0,\qquad j>0.\tag{15}$$

当用差分方程(11)按时间向前步进时，我们将需要这些边界值，因为计算 $u_{i,j+1}$ 通常需要三个值 $u_{i-1,j}$，u_{ij}，$u_{i+1,j}$. 因此，当 $i=1$ 或 $n-1$，我们需要值 u_{0j}，u_{nj}.

图 2 对这个方法作了图解. u 在 x 轴上的值由初始条件确定. u 在垂线 $x=0$(t 轴)和 $x=L$ 上的值由边界条件确定. u 的所有其他在网格点上的值用(11)式计算.

例 1 端点保持 0°的杆的温度

把一根单位长度的细杆放入沸腾的水中(温度是 100℃). 当全杆达到 100℃后，把杆从沸腾的水中取出. 杆的侧面绝热，在 $t=0$ 时刻，将杆的两端突然浸入保持常温 0℃的一种介质中. 用有限差分格式(11)及边界和初始条件(13)～(15)，求这个问题的解在时刻 $t=0.2$，0.4，0.6，0.8 和 1 的近似值. 取 $c=1/2$，用步长 $h=0.1$(因此 $n=10$)和 $k=0.01$(因此 $s=1/4$). 将你的值与用分离变量法得到的值相比较.

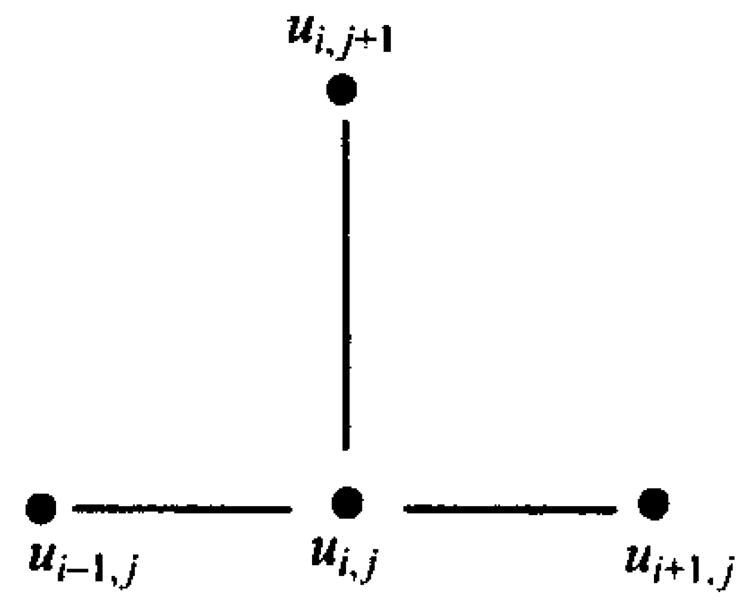


图 2 热传导方程中的按时间向前步进

解 将 $s=1/4$ 代入(11)，得到要求解的边值问题是

$$u_{i,j+1} = (u_{i+1,j} + 2u_{ij} + u_{i-1,j})/4, \tag{16}$$

具有边界条件

$$u_{0j} = u(0,0.01j) = 0, \quad j > 0 \tag{17}$$

和

519

$$u_{10,j} = u(1,0.01j) = 0, \quad j > 0, \tag{18}$$

以及初始条件

$$u_{i0} = u(0.1i,0) = f(0.1i) = 100, \quad 0 \leqslant i \leqslant 10. \tag{19}$$

所有必要的数据都已经具备，现在就可以用有限差分法求解 u 的近似值. 由初始数据可得到 u 在时刻 $t=0.01$ 的值. 此后，用这些值去获得 u 在时刻 $t=0.02$ 的值. 重复这个过程 18 次以上，就得到在 $t=0.2$ 等时刻所要求的值. 在表 1 中列出了由这个过程得到的一些值，它是借助于计算机生成的.

表 1 由有限差分法生成的杆的温度

$t\backslash x$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
0.01	0	100	100	100	100	100	100	100	100	100	0
0.02	0	75	100	100	100	100	100	100	100	75	0
0.03	0	62	94	100	100	100	100	100	94	62	0

表 2 是数值解与由部分和对精确解的近似而得的近似解之间的比较. 这个问题的精确解可由分离变量法(见 3.5 节)得到，它是

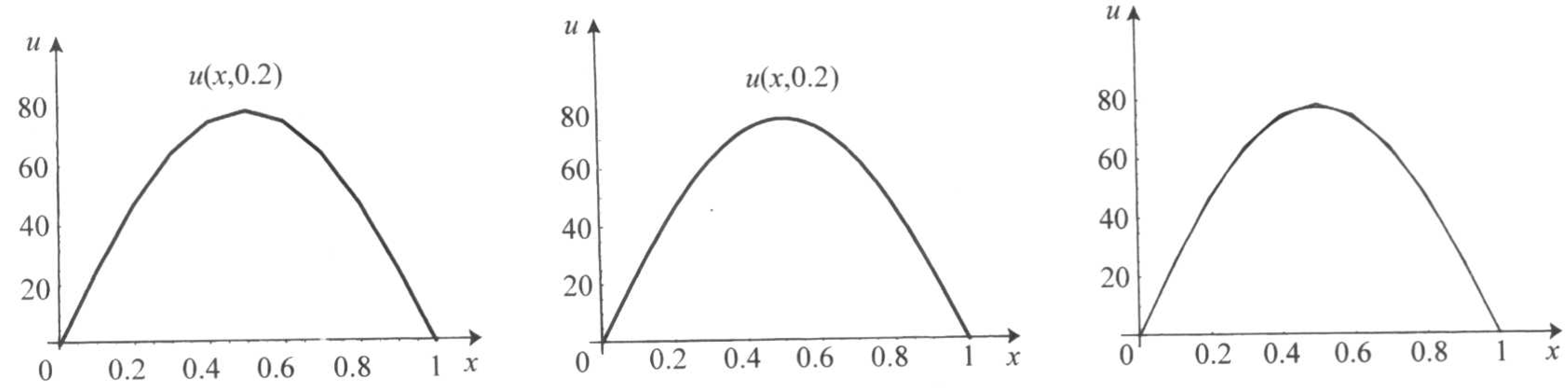
$$u(x,t) = \frac{400}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-(2m+1)^2\pi^2 t/4}}{2m+1}\sin(2m+1)\pi x.$$

表 2　具有两个数值的小方格内包含数值解(上)和解析解(下)的值．所有的值四舍五入取整数

有限差分法与解析解的对比											
$t\backslash x$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0.2	0	25	47	64	75	78	75	64	47	25	0
	0	24	46	63	74	77	74	63	46	24	0
0.4	0	15	28	39	46	48	46	39	28	15	0
	0	15	28	38	45	47	45	38	28	15	0
0.6	0	9	17	24	28	29	28	24	17	9	0
	0	9	17	23	28	29	28	23	17	9	0
0.8	0	6	10	14	17	18	17	14	10	6	0
	0	5	10	14	17	18	17	14	10	5	0
1	0	3	6	9	10	11	10	9	6	3	0
	0	3	6	9	10	11	10	9	6	3	0

520

在用解析解进行近似计算时，部分和取到 $m=30$．图 3b 画出了这个部分和在 $t=1/5$ 时的图像．在图 3a 中，标出了点 $u(0.1i,\ 1/5)$，$i=0,\ 1,\ \cdots,\ 10$，并用直线连接相邻的点，从而得到一个图形，它是在 $t=1/5$ 时对真解的近似．图 3c 将两个图形叠加以进行比较．



a) 由有限差分法在t=0.2生成的温度分布　　b) 由解析解的部分和(取m=30)在t=0.2生成的温度分布　　c) 解析解和数值解的比较

图　3

最后，我们用表 2 中的数据生成曲面 $z=u(x,\ t)(0<x<1,\ 0<t<1)$的三维图形(图 4)．

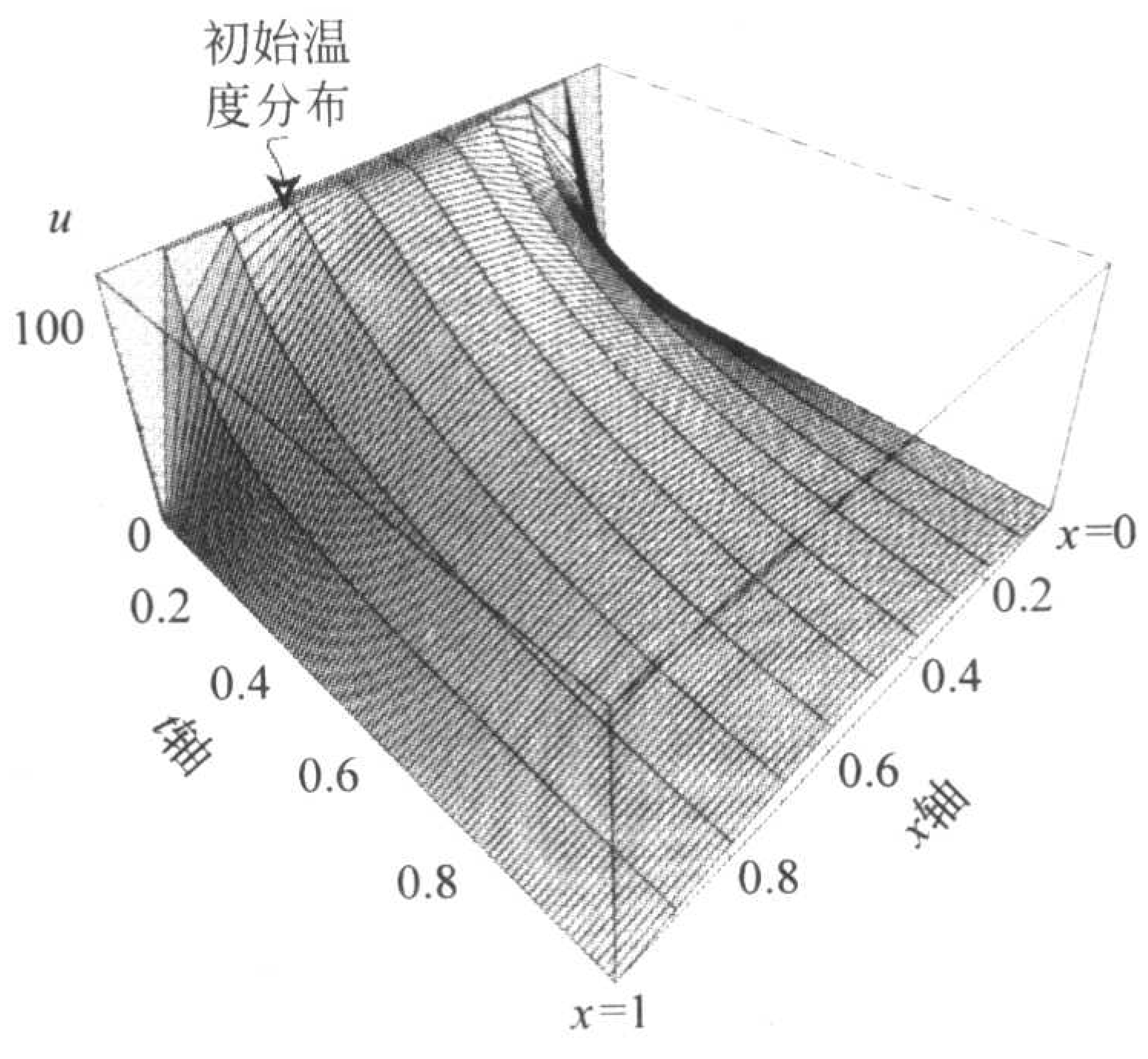


图 4　x 和 t 都变化时的温度分布，用表 2 中的数据做成 ■

在做例 1 时会想到一个重要的问题. 选择 $s=1/4$ 是随意的还是有某种原因? 为了回答这
521 个问题，我们考虑有限差分法的稳定性.

一个稳定性判别准则

当 $s=1/2$，公式(11)具有一个特别简单的形式

$$u_{i,j+1}=\frac{1}{2}(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}).$$

看起来取 $s=1/2$ 是自然的，因为这可使公式简化. 然而，可以证明 s 的更小的正值对精确解有更好的近似. 事实上，可以证明：当 $s>1/2$ 时，热传导方程的有限差分格式(11)是**不稳定的**. 当 $0<s\leqslant 1/2$，这个方案是**稳定的**，即当 $0<s\leqslant 1/2$，这个方法对精确解给出了合理的近似.

作为一个说明，我们重新考虑例 1，对它使用当 $s=1/2$(对应于 $h=0.1$，$k=0.02$)时的有限差分法. 为了进行比较，把结果列在表 3 中，同时列出了当 $s=1/4$ 时该方法的结果以及解析解的值. 表 3 表明了这个方法有效性的极限值是 $s=1/2$，当 $s<1/2$ 时会得到更好的结果.

表 3　含有三个数的小方格，包含有限差分法 $s=1/4$ 时得到的值(上)、$s=1/2$ 时的值(下)及解析解的值(中)

	有限差分法中不同的 s									
$t\backslash x$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0.2	0	25	47	64	75	78	75	64	47	25	0
	0	24	46	63	74	77	74	63	46	24	0
	0	24	49	63	78	78	78	63	49	24	0
0.4	0	15	28	39	46	48	46	39	28	15	0
	0	15	28	38	45	47	45	38	28	15	0
	0	15	29	38	47	47	47	38	29	15	0
0.6	0	9	17	24	28	29	28	24	17	9	0
	0	9	17	23	28	29	28	23	17	9	0
	0	9	18	23	29	29	29	23	18	9	0
0.8	0	6	10	14	17	18	17	14	10	6	0
	0	5	10	14	17	18	17	14	10	5	0
	0	5	11	14	17	17	17	14	11	5	0
1	0	3	6	9	10	11	10	9	6	3	0
	0	3	6	9	10	11	10	9	6	3	0
	0	3	7	9	11	11	11	9	7	3	0

下面说明，当 $s>1/2$ 时热传导方程的有限差分法的不稳定性.

例 2　有限差分法的不稳定性：$s>1/2$ 的情形

这里我们将简单地重复例 1，取 $h=0.1$ 和 $k=0.04$，因此 $s=1$. 由(11)生成的值列在
522 表 4 中.

表 4　$s=1$ 时有限差分法的结果

有限差分法的不稳定性											
$t\backslash x$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
0.04	0	100	100	100	100	100	100	100	100	100	0
0.08	0	0	100	100	100	100	100	100	100	0	0
0.12	0	100	0	100	100	100	100	100	0	100	0
0.16	0	−100	200	0	100	100	100	0	200	−100	0
0.20	0	300	−300	300	0	100	0	300	−300	300	0

注：注意负的温度值的出现．另外，注意数值的大振荡．这些明显的信息表明：当 $s=1$ 时，数值方法是不稳定的．■

一个要提及的问题是，对边界和初始数据在“角点”$(x,\ t)=(0,\ 0)$和$(1,\ 0)$上的不相容性的处理．在例 1 中，我们取 $u_{00}=100=u_{10,0}$；即，对 $0\leqslant i\leqslant 10$ 我们应用(19)，而仅对 $j>0$ 用(17)和(18)．根据同样合理的考虑，可以对这些角点选择其他的处理办法．例如，可以对$j\geqslant 0$选择(17)和(18)而仅对 $0<i<10$ 选用(19)，或者可能更好的做法是取平均值，定义 $u_{00}=50=u_{10,0}$．这些另外的方法在练习中阐述．

非齐次边界条件

有限差分方法对非齐次边界条件同样很有效．即，我们可以考虑方程(1)和初始数据(3)以及由

$$u(0,t)=\phi(t)\quad 和\quad u(L,t)=\psi(t),t>0 \tag{20}$$

给出的边界条件．仿照上述的离散化方法(见(14)和(15))，这个数据转化为

$$u_{0j}=\phi(jk)\quad 和\quad u_{nj}=\psi(jk),j>0, \tag{21}$$

其中，$n=L/h$.

例 3　稳态解

考虑热传导问题(1)、(3)和(20)，取 $c=1/2$，$L=1$，$\phi(t)=0$，$\psi(t)=100$，及 $f(x)=0$．用(11)、(13)和(21)给出的有限差分法逼近这个问题的解．即用边界条件

$$u_{0j}=0\quad 和\quad u_{nj}=100,j>0 \tag{22}$$

以及初始条件

$$u_{i0}=0,\quad 0\leqslant i\leqslant n \tag{23}$$

523

迭代(11)．取 $h=0.1$ 及 $k=0.01$，因此，$n=10$ 及 $s=1/4$．图 5 画出了数值解在时刻 $t=0.1$ 和 $t=1$ 时的温度分布．这是对公式(11)分别迭代 10 次和 100 次而得到的图形．注意，在时刻 $t=1$，已经非常接近稳态解 $u(x,\ t)=100x$．■

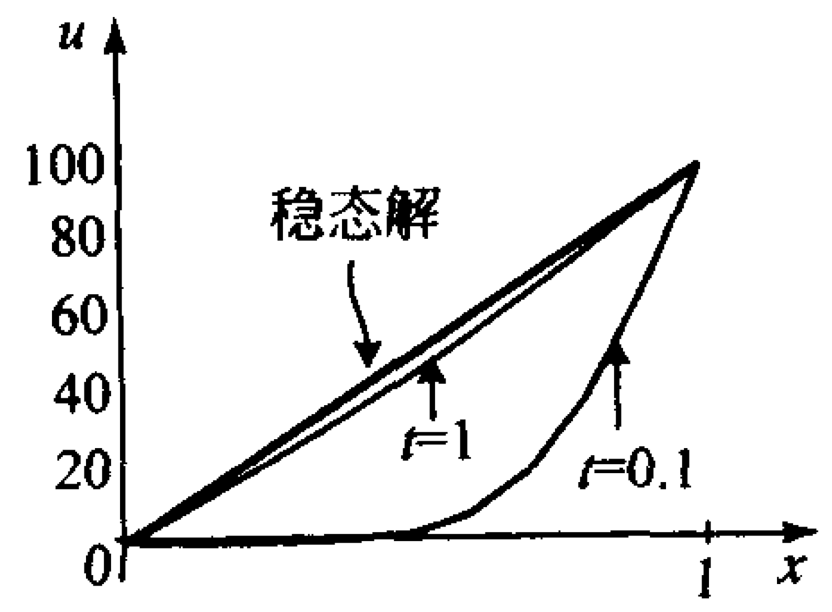


图　5

值得提及的是，当我们用分离变量法求解非齐次问题时，在许多情况中，我们必须把问题分解为几个子问题．不同地，有限差分法的一个好的性质就是，当处理这些非齐次问题时，没有这些额外的麻烦．

习题 9.1

在习题 1～4 中，用给定的初值重做例 1.

1. $f(x)=\begin{cases}100x & 若\ 0<x<1/2,\\ 100(1-x) & 若\ 1/2<x<1.\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}100\sin^2 3\pi x & 若\ 0<x<1/3,\\ 45(1/3-x) & 若\ 1/3<x<1.\end{cases}$

3. $f(x)=\sin\pi x$.

4. $f(x)=x(1-x)$.

在习题 5～8，取 $h=0.1$ 和 $k=0.02$(因此 $s=1/2$)，用给出的初始数据重做例 1.

5. 取习题 1 中的 f.

6. 取习题 2 中的 f.

7. 取习题 3 中的 f.

8. 取习题 4 中的 f.

9. 用习题 1 验证(11)的不稳定性，取 s 的值使 $s>1/2$.

在习题 10～13，把给出的方程离散化. 即，类似于正文中从(1)推出(11)的过程，得到(11)的类似式

10. $u_t=c^2u_{xx}+3u$.

11. $u_t=c^2u_{xx}+2$.

12. $u_t=u_{xx}+u_x+1$.

13. $u_t=2u_x$.

14. 用习题 11 的结果求解由习题 11 中的方程和下面的数据组成的热边值问题：$L=1$，$c=1/2$，$f(x)=0$，$u(0,t)=u(1,t)=0$. 当用有限差分法时，取 $h=0.1$ 和 $k=0.01$. 求在时刻 $t=0.2$，0.4，0.6，0.8 和 1 的近似温度分布.

15. 用洛必达法则验证一阶偏导导数 u_t 在网格点(i,j)的**向后差分近似**

$$u_t(ih,jk)\approx\frac{1}{k}(u_{i,j}-u_{i,j-1})$$

[提示：考虑差商$\dfrac{u(x,t)-u(x,t-k)}{k}$.]

16. 用洛必达法则验证一阶偏导导数 u_t 在网格点(i,j)的**中心差分近似**

524

$$u_t(ih,jk)\approx\frac{1}{2k}(u_{i,j+1}-u_{i,j-1})$$

[提示：考虑差商$\dfrac{u(x,t+k)-u(x,t-k)}{2k}$.]

17. 重做例 1，用边值确定 u_{00} 和 $u_{10,0}$. 即，在“角点”取值 $u_{00}=0=u_{10,0}$ 而不是 $u_{00}=100=u_{10,0}$(如例 1 所做).

18. 重做例 1，取角点上的值为 $u_{00}=50=u_{10,0}$. 于是，我们把角点上的值确定为边界数据和初始数据的平均值. 实际上，本题的答案应该是例 1 和习题 17 的答案的平均(叠加原理).

在习题 19～20 中，求具有非齐次边界条件的热传导方程的近似解. 模仿例 3 求解，但是要用这里给出的边界和初始数据. 取足够大的时间值去观察稳态解.

19. $u(x,0)=0$，$u(0,t)=60$，$u(1,t)=20$.

20. $u(x,0)=400x(1-x)$，$u(0,t)=0$，$u(1,t)=40$.

9.2 波动方程的有限差分法

前一节，我们用有限差分法近似一个有限长杆的热传导问题的解. 本节用同样的思想处理有限长弦的波动方程. 在处理热传导问题时，第$(j+1)$时间步的值由第 j 个时间步的值决定. 这是由于热传导方程关于时间是一阶导数所致. 这里你将看到，由于波动方程关于时间是二阶的，则在第$(j+1)$个时间步的值将由第 j 个时间步和第$(j-1)$个时间步的值来计算.

回忆弦的波动问题，给定在时刻 $t=0$ 时 u 和 u_t 的值. 如我们所说，开始有限差分时需要知道 u 在两个相邻时间步的值. 你将看到，我们可以用 u_t 的初始数据生成 u 在下一个时间步的一组值. 一旦这些值被确定，就可以利用它们以及在时刻 $t=0$ 的值迭代有限差分格式.

回忆 3.3 节中有限长弦的边值问题. 它由波动方程

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, t > 0, \tag{1}$$

边界条件

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, t > 0 \tag{2}$$

和初始数据

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant L \tag{3}$$

组成. 525

离散化波动方程

如前节所做，h 记 x 方向的步长，k 记 t 方向的步长. 我们将在 xt 平面上一个离散的网格点集上，求位移 u 的近似值(见图 1).

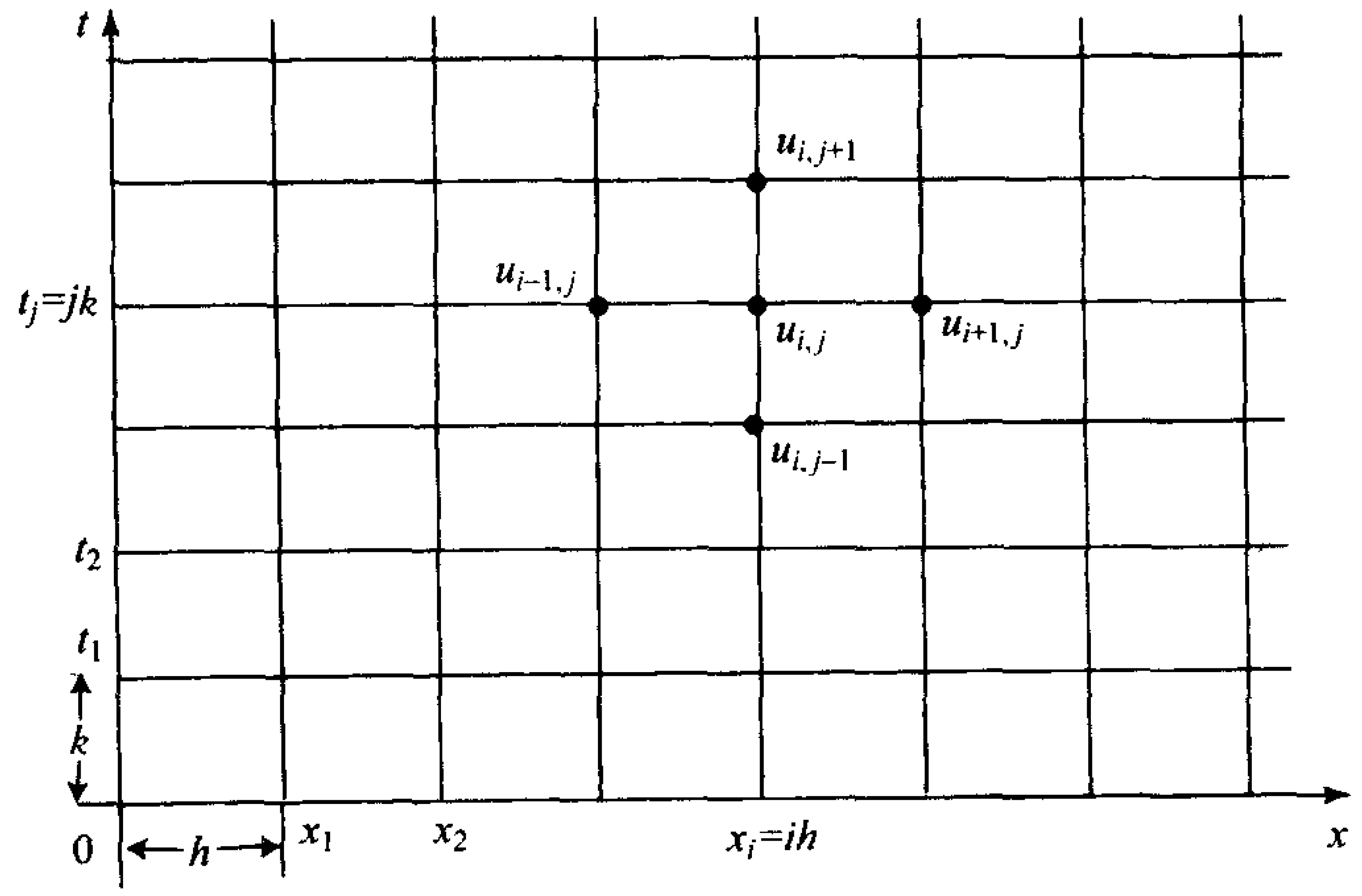


图 1　xt 平面上的网格点

令

$$h = \frac{L}{n},$$

其中，n 是等长的子区间的个数，这些子区间是把区间$(0, L)$等分为 n 份而得到的. 并令

$$u_{ij}=u(ih,jk),\quad 0\leqslant i\leqslant n,\quad j\geqslant 0. \tag{4}$$

因此 u_{ij} 表示 u 在网格点$(ih，jk)$上的值.

要离散(1)式，我们用中心二阶差分近似式(9.1 节(10)式)：

$$u_{xx}(ih,jk)\approx\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}) \tag{5}$$

和

$$u_{tt}(ih,jk)\approx\frac{1}{k^2}(u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1}), \tag{6}$$

526 代入(1)并化简，得到

波动方程的离散化

$$u_{i,j+1}=2(1-s)u_{ij}+s(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})-u_{i,j-1}, \tag{7}$$

其中，

$$s=c^2\frac{k^2}{h^2}. \tag{8}$$

这就是对波动方程的有限差分近似. 与前面的说明一致，我们看到第$(j+1)$个时间步的值是用第 j 个和第$(j-1)$个时间步的值来计算的(见图 2).

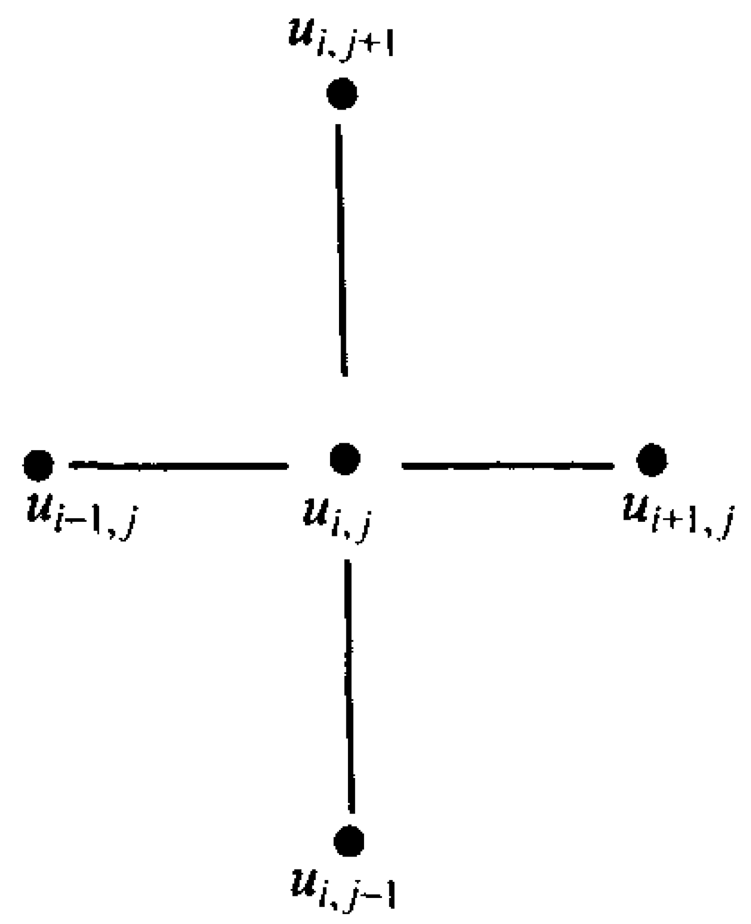


图 2 波动方程中的按时间向前步进

稳定性判别准则

如前一节所述，仅对充分小的正数 s，我们的数值计算方案才是稳定的. 在这种情况下，有限差分格式(7)当 $s>1$ 是**不稳定的**，而当 $0<s\leqslant1$ 是**稳定的**. 因此，当 $0<s\leqslant1$，该方法对精确解给出了合理的近似. 下文的例 1 说明了这个准则.

这里，再一次用临界值$(s=1)$简化(7)式，得到

$$u_{i,j+1}=u_{i+1,j}+u_{i-1,j}-u_{i,j-1}. \tag{9}$$

离散化边界和初始条件

我们首先处理边界条件. 由(2)得

$$\boxed{u_{0j}=u(0,jk)=0,\quad j>0} \tag{10}$$

和

$$\boxed{u_{nj}=u(nh,jk)=u(L,jk)=0,\quad j>0.} \tag{11}$$

另外，由第一个初始条件得到

$$\boxed{u_{i0}=u(ih,0)=f(ih),\quad 0\leqslant i\leqslant n.} \tag{12}$$

现在，我们用初始数据 f 和 g 生成 u 的第二组初值. 为此，最好是用中心一阶差分近似

$$u_t(x,t)\approx\frac{u(x,t+k)-u(x,t-k)}{2k}$$

527 (见 9.1 节习题 16). 令 $t=0$，得

$$g(x)=u_t(x,0)\approx\frac{u(x,k)-u(x,-k)}{2k}.$$

在点 $x=ih$ 计算得

$$u_{i1}-u_{i,-1}=2kg(ih). \tag{13}$$

在(7)中令 $j=0$ 得

$$\begin{aligned}u_{i,1}+u_{i,-1}&=2(1-s)u_{i,0}+s(u_{i+1,0}+u_{i-1,0})\\&=2f(ih)+s(f((i+1)h)-2f(ih)+f((i-1)h)).\end{aligned} \tag{14}$$

(13)与(14)相加，而后除以 2 得到

$$\boxed{u_{i,1}=f(ih)+kg(ih)+\frac{s}{2}(f((i+1)h)-2f(ih)+f((i-1)h)).} \tag{15}$$

这就是第 2 组初始数据，我们需要它以便能够启动对(7)的迭代.

上文对 $u_t(x,0)$引入中心差分近似的办法，迫使我们简洁地处理了对应于网格点$(i,-1)$的值 $u_{i,-1}$(见(13)和(14)). 这样的点叫做**虚拟点**. 它们使 u_t 的初始数据变成关于 $t=0$ 对称的样子. 即，由于有了这些点，我们能够用中心差分而不用向前或向后的差分(两者都不能对称地处理在 $t=0$ 的差分). 当处理已知边界条件 u_x 时，也可望使用虚拟点(例如，处理两端绝热的杆的热传导问题). 在这些情况中，我们会把那些 x 坐标位于正常的网格点之外的点作为虚拟点. 我们将在习题和后文中看到这种情况的例子.

例 1　波动方程的数值解

求问题(1)～(3)的近似解，已知数据如下：$L=6$；$c=1$；弦的初始形状如图 3 所示，并由下式给出：

$$f(x)=\begin{cases}2-2\,|\,x-2\,| & 若\ 1<x<3,\\ 0 & 其他;\end{cases}\quad g(x)=0.$$

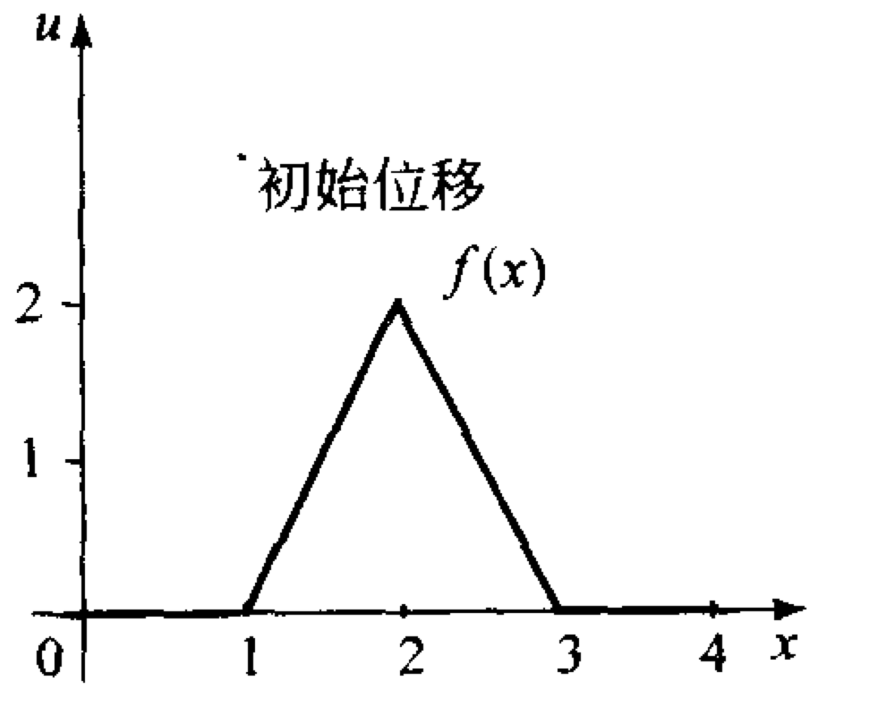


图 3　弦的初始形状

用当 $h=1$ 及 $k=1$(因此 $s=1$ 及 $n=6$)的(7)式. 从时间步 $t=1$ 到 $t=13$ 向前求解. 把解看作 t 的函数，你注意到了什么？当到达弦的端点时，扰动发生了什么变化？另外，把你的解与用分离变量法得到的解析解进行比较.

528

解　因为 $s=1$，由(9)知，需要求解的离散化问题是

$$u_{i,j+1}=u_{i+1,j}+u_{i-1,j}-u_{i,j-1}. \tag{16}$$

用(12)和(15)得到表 1 中的前两行数据.

表 1

i	0	1	2	3	4	5	6
$u_{i,0}$	0	0	2	0	0	0	0
$u_{i,1}$	0	1	0	1	0	0	0

按照(16)式，对给定的 x 求波传播到下一个时间步的值，只需将这个时间步的两个相邻位置的值相加，而后减去在前一个时间步给定位置的值. 按照这个规律，可以无限迭代下去(记

住我们已经固定了端点，所以 u 在 $i=0$ 和 6 处总是 0)．结果列在表 2 中，图形如图 4 所示．这个图是用线段连接相邻的数据点而得到的．

表 2 $s=1$ 的有限差分法

t \ x	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	2	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
2	0	0	0	0	1	0	0
3	0	−1	0	0	0	1	0
4	0	0	−1	0	0	0	0
5	0	0	0	−1	0	−1	0
6	0	0	0	0	−2	0	0
7	0	0	0	−1	0	−1	0
8	0	0	−1	0	0	0	0
9	0	−1	0	0	0	1	0
10	0	0	0	0	1	0	0
11	0	1	0	1	0	0	0
12	0	0	2	0	0	0	0
13	0	1	0	1	0	0	0
14	0	0	0	0	1	0	0

从数值和对应的图形来看，波动从 $t=12$ 开始重复它本身的状态．为了在离散波问题的叙述过程中对这个现象给出严格的证明，需要注意这个迭代过程仅需两行的离散数据，由此按完全相同的方式进行迭代，而不管所考虑的时间．由表 2 可知，$t=12$ 和 13 的数据分别与 $t=0$ 和 1 的数据相等，这就表明离散问题的解会以 12 为周期而周期性地重复它的值和图形．注意，12 也是解析解的周期(见 3.4 节习题 6，那里表明位移 $u(x, t)$ 关于 t 是以 $2L/c$ 为周期的)．

529

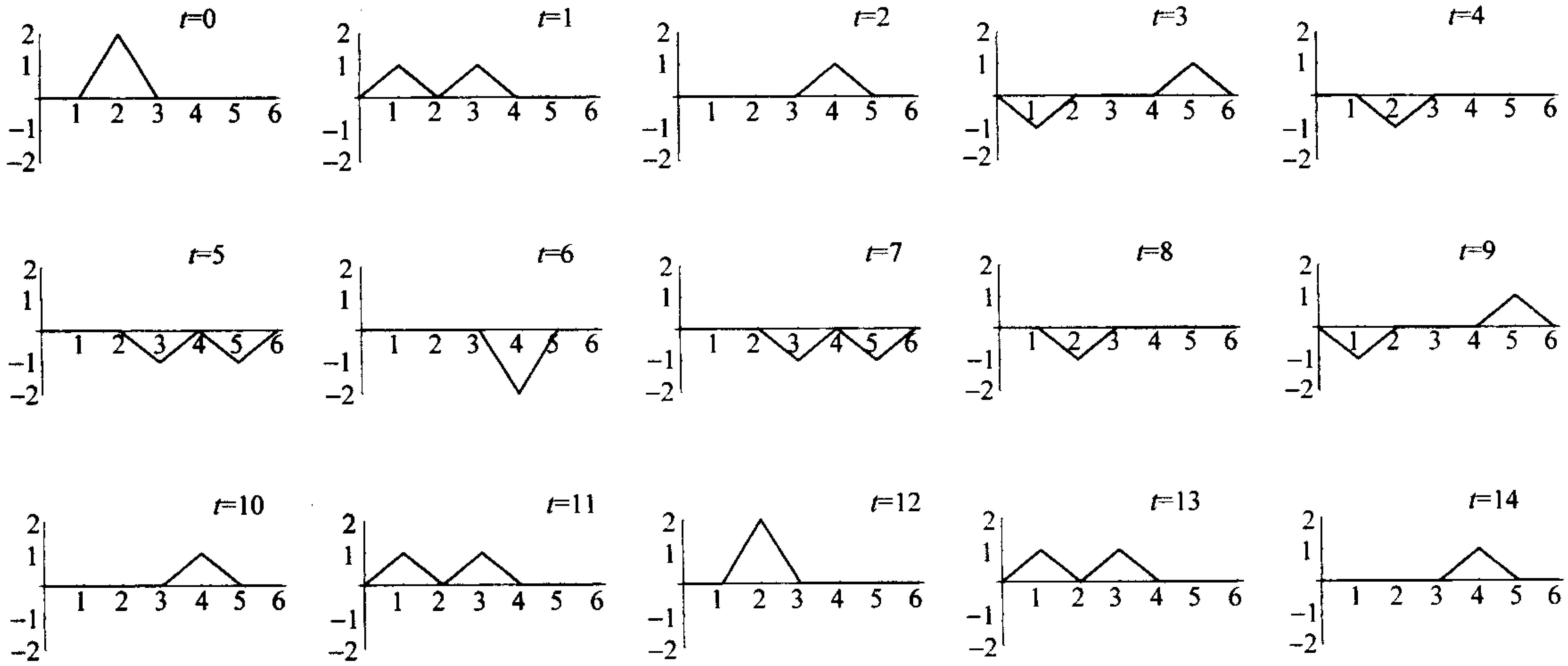


图 4 由有限差分解构造的弦的瞬间形状，这个图形是用线段连接由表 2 提供的相邻的数据点而做成．注意运动的周期性，周期是 $T=2L/c=12$

用 3.3 节的结果知解析解是

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{6}\cos\frac{n\pi t}{6},$$

其中，

$$b_n=\frac{1}{3}\int_0^6 f(x)\sin\frac{n\pi x}{6}\mathrm{d}x=\frac{24}{n^2\pi^2}\left(2\sin\frac{n\pi}{3}-\sin\frac{n\pi}{6}-\sin\frac{n\pi}{2}\right).$$

在图 5 中，对 t 的各个值画出了前 30 项组成的部分和的图形．注意到，当部分和近似相当好的时候，数值解实际上是这两个近似解中更好的一个．事实上，数值解是精确的(如果我们认同图 1 所示的分段线性内插)，部分原因是用了分段线性函数．造成这个事实的其他因素是，步长 h 和 k 的选取，以及在把连续的初值变为离散问题的初始数据时用了中心差分近似．当然，可以从级数解得到更好的近似，这只需在部分和中取更多的项就可实现．最后，也可以从波动方程的达朗贝尔(d'Alembert)解得出一个精确解，只要把初始数据进行奇延拓即可(见 3.4 节)． 530

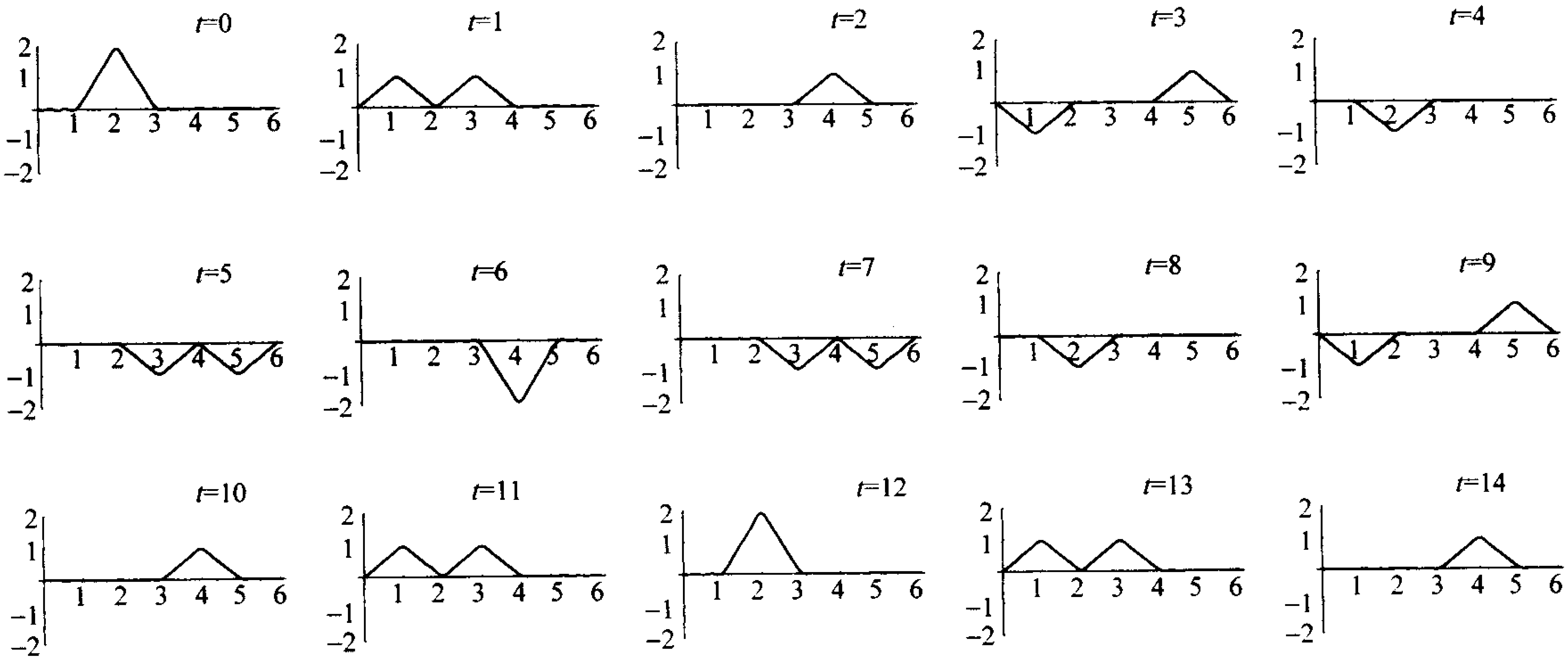


图 5　由解析解构造的弦的瞬间形状，在无穷级数解中取 30 项组成的部分和绘制的图形 ■

作为本节的结束，我们对波动方程中的有限差分方法所产生的误差做一个简要的分析．回顾(15)，你可能发现 $u(x,t)$ 关于第二个变量 t 很像泰勒级数展开(x 固定)，即

$$u(x,k)\approx u(x,0)+u_t(x,0)k+\frac{1}{2}u_{tt}(x,0)k^2$$

$$=f(x)+g(x)k+\frac{1}{2}c^2f''(x)k^2,$$

其中，最后一项用了波动方程把 $u_{tt}(x,0)$ 转化为 $c^2u_{xx}(x,0)=c^2f''(x)$．在最后的表达式中，令 $x=ih$，对 $f''(ih)$ 用中心差分近似，并记住 $s=c^2k^2/h^2$，就得到(15)式的右端．因此，(15)就是用一个二阶泰勒多项式确定 $u_{i,1}$．这是把 $g(ih)$ 等同于 $u_t(ih,0)$ 的中心差分近似的有利之处．如果我们用了向前差分近似，则在(15)中会得到一阶泰勒多项式．即，$u_{i,1}\approx f(ih)+kg(ih)$．事实证明，使用由(15)给出的更精确的近似，则对波动方程，u 和 u_t 的近似所造成的误差至少是 h^2 阶或 k^2 阶．因此，如果我们用(15)，误差将都是二阶或更高． 531

习题 9.2

在习题 1～4 中，给出了波问题(1)～(3)的数据. 用 $s=1$ 和 $n=5$ 把问题离散，并对前三个时间步用手算求解.

1. $L=c=1$，$g(x)=0$，$f(x)=\begin{cases}2x & 若\ 0<x<1/2,\\ 2(1-x) & 若\ 1/2<x<1.\end{cases}$

2. $L=c=1$，$g(x)=0$，$f(x)=\begin{cases}6x & 若\ 0<x<1/3,\\ 3(1-x) & 若\ 1/3<x<1.\end{cases}$

3. 除去 $g(x)=1$，所有数据同习题 1.

4. $L=c=1$，$f(x)=0$，$g(x)=x(1-x)$.

5. 交换例 1 中的 f 和 g，重新考虑这个问题. 用 $s=1$ 和 $n=6$，通过 $t=13$ 计算有限差分解 u_{ij}. 解是周期的吗？周期是多少？

6. **专题问题：无限长弦的有限差分方法**. 在许多方面，张紧的无限长弦比有限长弦更容易处理. 因为在这种情况，没有附加边界条件. 没有边界就没有对复杂物质的反射波，数据只是向外传播.

   (a)复习有限长弦的有限差分法，叙述无限长弦的对应理论.

   (b)用下面的数据检验(a)的结果：$c=1$，$f(x)=e^{-x^2}$，$g(x)=0$. 把你的解与达朗贝尔解相比较(7.3 节的习题 21).

   (c)用数据 $c=1$，$f(x)=e^{-x^2}\cos 2x$，$g(x)=0$ 重做(b).

7. **专题问题：端点绝热的热传导方程的虚拟点**. 如在正文所提到的，在某种意义上虚拟点可以用来处理诸如 $u_x=0$ 一类的边界条件，使得由差分近似导致的误差最小化. 即，此时可以用中心差分而不用向前或向后的差分，从而可以把边界数据做成更对称的样子. 为说明虚拟点在这种环境中的应用，我们考虑一根绝热杆的问题

$$u_t=c^2u_{xx},\quad 0<x<L,t>0,$$
$$u_x(0,t)=0=u_x(L,t),\quad t>0,$$
$$u(x,0)=f(x),\quad 0<x<L.$$

   (a)用中心差分(9.1 节的习题 16)近似边界条件 $u_x=0$，导出迭代方案

532

$$u_{0,j+1}=(1-2s)u_{0j}+2su_{1,j}$$

和

$$u_{n,j+1}=(1-2s)u_{nj}+2su_{n-1,j}.$$

这些公式说明，杆的端点温度是如何按时间向前传播. 注意，这些公式并没有明显地提到虚拟点.

另外，在一个固定的时间步 j，对 $-1\leqslant i\leqslant n+1$，从数据 u_{ij} 开始，可以用热传导方程的差分方法(9.1 节的(7))求下一个时间步的 $u_{i,j+1}$，其中 $0\leqslant i\leqslant n$，然后用 $u_{-1,j+1}=u_{1,j+1}$ 和 $u_{n+1,j+1}=u_{n-1,j+1}$. 最后两个等式提供了对 $u_x=0$ 进行中心差分近似时在两个虚拟点的值. 于是我们得到在时间步 $j+1$ 的值 $u_{i,j+1}$ $(-1\leqslant i\leqslant n+1)$，并且整个过程可以重复进行下去.

注意，用第一种方法时，我们每次仅需计算值 $u_{i,j+1}$，$0\leqslant i\leqslant n$，但必须用修正的公式计算端点的值. 在第二种方法中，对从 0 到 n 的所有 i，都用同一个迭代方案，但是，也必须使用 u 在 $i=-1$ 和 $i=n+1$ 的值，它们分别是 u 在 1 和 $n-1$ 的值的反射.

   (b)用(a)中阐述的有限差分方法，求一根杆的热传导问题的近似解，其中，杆长 $L=4$，两端绝热，初始数据 $f(x)=25x$. 设 $c=1$，取步长 $h=1$，$k=0.5$，通过 8 个时间步计算数值解.

   (c)说明(b)的解是稳态解(可能需要计算另外的时间步). 你的答案与我们所知道的解析的情况一致吗(见

3.6 节)?

8. 用前一个问题中的方法重做例 1 中的波动方程问题，不过对所有的 $t>0$ 边界条件为 $u_x(0, t)=0=u_x(L, t)$. 当一个扰动到达“弦”的一个端点时，会发生什么现象？是反射吗？在什么意义下？

9.3 拉普拉斯方程的有限差分法

本节和下一节，我们将考虑给定边界条件的两个变量的拉普拉斯方程. 即，考虑狄利克雷问题

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{在一个区域 } R \text{ 中}, \tag{1}$$

其中，u 在 R 的边界上具有指定值. 通过对 x 和 y 变量离散化这个方程并找到一个差分格式，用它求得问题的近似解. 就像前两节对热传导方程和波动方程所做的，用对 u_{xx} 和 u_{yy} 的中心二阶差分近似，容易把偏微分方程(1)离散化(9.1 节(10)). 最大的问题将是在离散的问题中处理边界条件. 目前，我们在一个矩形域中考虑问题以降低难度. 在习题中将考虑其他的区域.

我们在由 $0<x<a$，$0<y<b$ 所确定的矩形域中考虑狄利克雷问题，边界数据如图 1 所示. 533

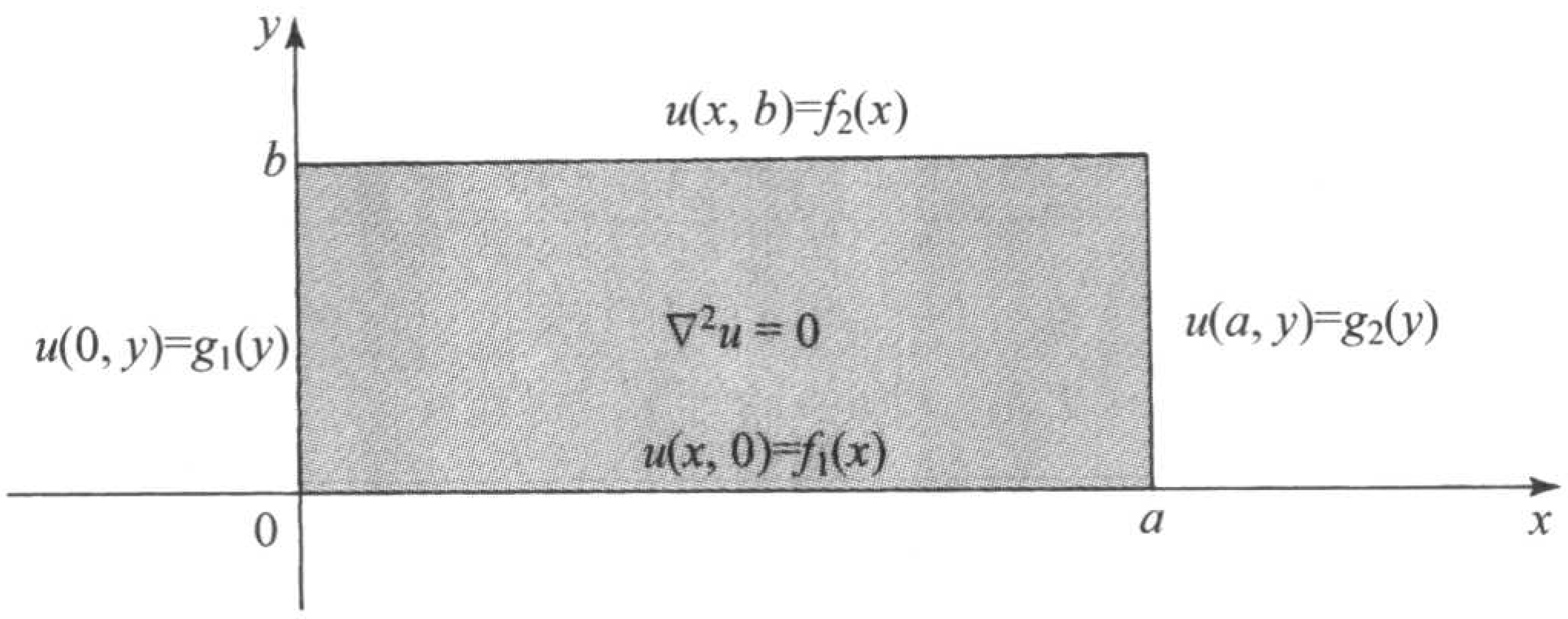


图 1　矩形 R 中的狄利克雷问题

离散化拉普拉斯方程

我们将在矩形域 R 上做一个网格，如图 2 所示. 用 h 记 x 方向的网格尺寸，k 是 y 方向的网格尺寸. 我们将在 xy 平面中一个网格点的离散集上逼近位移 u 的值. 令

$$h = a/m, \quad k = b/n$$

和

$$u_{ij} = u(ih, jk), \quad 0 \leqslant i \leqslant m, 0 \leqslant j \leqslant n. \tag{2}$$

因此 u_{ij} 表示 u 在网格点(ih, jk)上的值. 在此使用中心二阶差分近似(9.1 节的(10))，有

$$u_{xx}(ih, jk) \approx \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) \tag{3}$$

和

$$u_{yy}(ih, jk) \approx \frac{1}{k^2}(u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}). \tag{4}$$

代入(1)并化简，得到拉普拉斯方程的有限差分近似

$$u_{i,j} = \frac{1}{2(h^2+k^2)}(k^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + h^2(u_{i,j+1} + u_{i,j-1})), \tag{5}$$

它表明 u_{ij} 是 u 在四个相邻点的值的加权平均(见图 3).

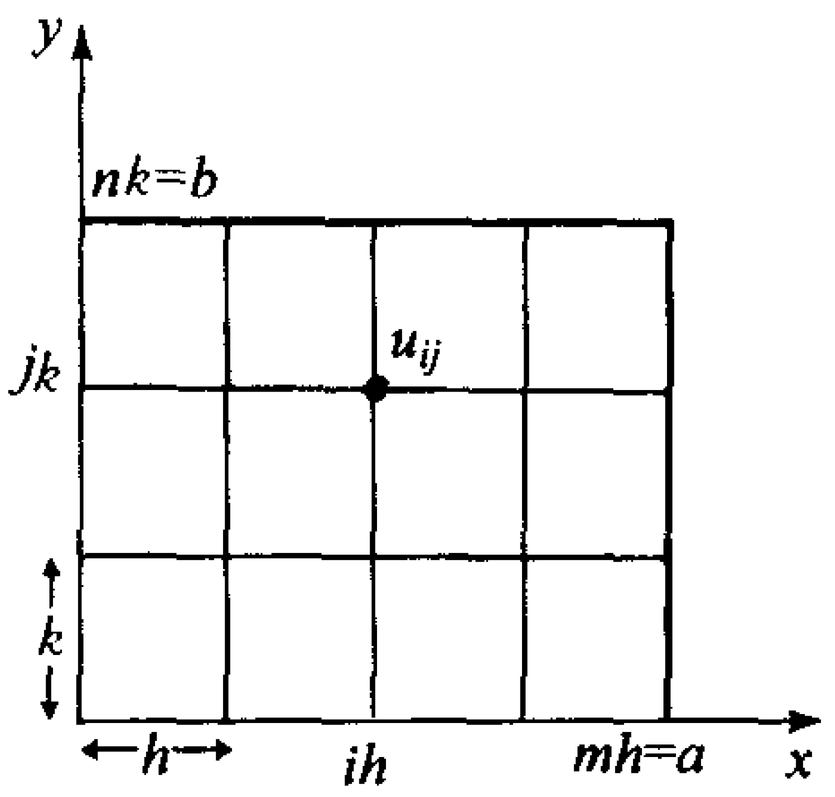


图 2　R 上的网格

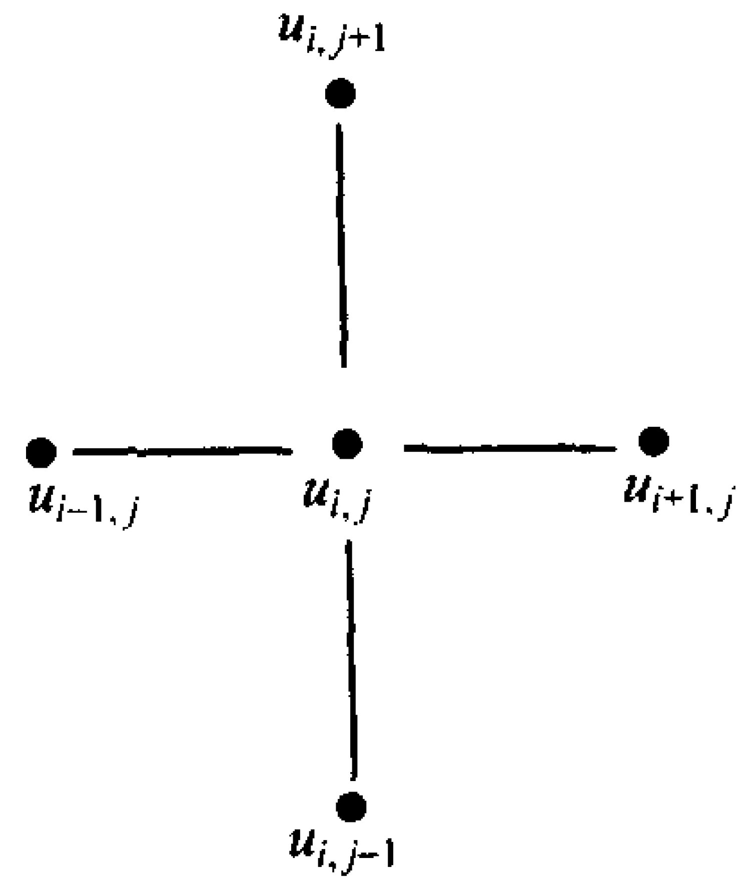


图 3　狄利克雷问题的解的平均值性质

当 $h<k$，x 方向的步长小于 y 方向的，(5)式表明：对网格点 $((i+1)h,\ jk)$ 和 $((i-1)h,\ jk)$ 的权 $k^2/(h^2+k^2)$ 大于对其他两个网格点的权 $h^2/(h^2+k^2)$. 这是所预料的，因为这两个点是四个点中离点 $(ih,\ jk)$ 较近的点.

534

重要的特殊情况是 $h=k$，权都是 1/4，(5)变为

拉普拉斯方程的离散化

$$u_{i,j}=\frac{1}{4}(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}),\tag{6}$$

此式有个很好的解释. 在此情况下，u_{ij} 是网格点 $(ih,\ jk)$ 的四个相邻点上 u 的值的平均(见图 3). 今后我们将在这个简单的假设下进行讨论.

方程(6)给出了 u 在 R 的内部网格点上的值的一个表达式，即用离它最近的四个点上的值来表示. 因为有 $(m-1)(n-1)$ 个内部网格点，故(6)式给出了未知量 u_{ij} 的 $(m-1)(n-1)$ 个方程，其中，$1\leqslant i\leqslant m-1$，$1\leqslant j\leqslant n-1$. 求解离散的狄利克雷问题就转化为求解一个方程组，它由 $(m-1)(n-1)$ 个未知量 u_{ij} 的 $(m-1)(n-1)$ 个方程组成. 事实证明，这个方程组总有唯一解，正如下面的例子所表明的.

当列出由 $(m-1)(n-1)$ 个方程组成的方程组时，我们要从网格的左下角开始，一行一行地取遍所有的指标 $(i,\ j)$. 由线性代数知，方程组可以方便地表示为 $Au=b$，A 是系数的 $(m-1)(n-1)\times(m-1)(n-1)$ 阶矩阵，b 是 $(m-1)(n-1)$ 维列向量，u 是 $(m-1)(n-1)$ 维列向量，它的元 u_{ij} 按上面所说的顺序排列.

设方阵 A 有逆，则问题的解由 $u=A^{-1}b$ 给出. 我们用一个例子说明全过程.

例 1　正方形上的狄利克雷问题

在一个边长为 1 的正方形区域上逼近问题(1)的解，在正方形的上边界给出数据 100，其他三条边界上的数据是 0(图 1).

(a)用上面得到的有限差分格式，取 $m=n=3$.

(b)用上面得到的有限差分格式，取 $m=n=4$，把求得的 u 在正方形中心点的近似值与用解析法求得的值 25 相比较(见 3.8 节的末尾).

(c)把在(b)中求得的值与解析解的值相比较(3.8 节例 2). 即，用解析解求出 9 个值 $u(1/4, 1/4)$，$u(1/2, 1/4)$，$u(3/4, 1/4)$，…，$u(3/4, 3/4)$.

535

解 (a)离散化后的问题如图 4 所示. 用平均值性质(6)和图 4 可以写出 4 个方程(按约定的次序)

$$u_{11} = \frac{1}{4}(u_{21} + u_{12}),$$

$$u_{21} = \frac{1}{4}(u_{11} + u_{22}),$$

$$u_{12} = \frac{1}{4}(u_{11} + u_{22} + 100),$$

$$u_{22} = \frac{1}{4}(u_{21} + u_{12} + 100).$$

注意，这里我们不必担心区域的角点(即，值 u_{00}，u_{30}，u_{03}，u_{33})，因为这些值没有出现在方程中. 按照顺序(1, 1)，(2, 1)，(1, 2)，(2, 2)取遍所有的指标，得到下面形式的方程组：

$$\begin{array}{rrrrl} 4u_{11} & -u_{21} & -u_{12} & & = 0 \\ -u_{11} & +4u_{21} & & -u_{22} & = 0 \\ -u_{11} & & +4u_{12} & -u_{22} & = 100 \\ & -u_{21} & -u_{12} & +4u_{22} & = 100. \end{array}$$

可以用矩阵把这个方程组表示为 $Au=b$，其中，

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{及} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

注意到，A 是对称矩阵且对角线上的元都是 4(这是我们对方程和变量排序的结果). 这个矩阵是所谓**对角占优矩阵**的特殊情况，也就是说，在每一行中对角线上的元(按绝对值)大于该行所有其他元的绝对值的和. 大家知道，这样的矩阵总有逆. 此时，有

$$A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

536

因此，解是

$$u = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = A^{-1}b = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.5 \\ 12.5 \\ 37.5 \\ 37.5 \end{bmatrix}.$$

这个解表示在图 5 中. 注意到每一个内部点的值是它的四个离得最近点的值的平均.

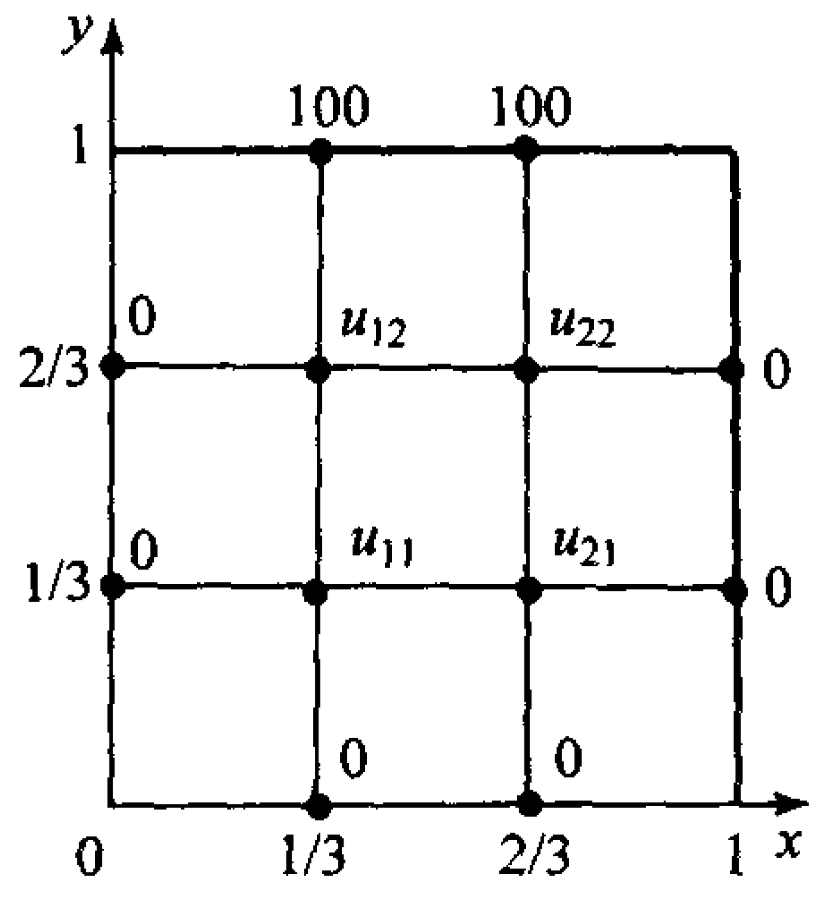


图 4　离散问题的格式图表示

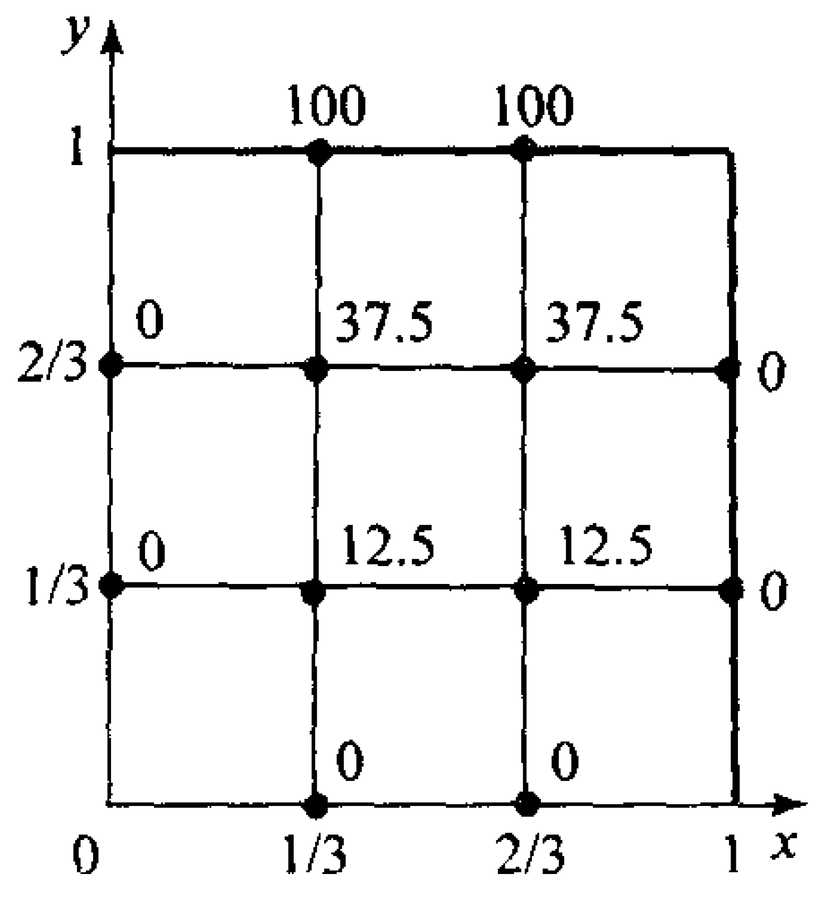


图 5　解的网格图表示

值得一提的是，一旦算得 A^{-1}，对新选择的边界数据稍用功夫就可求出数值解．对新选择的 b，我们只需计算 $A^{-1}b$.

(b)如(a)中的求解过程．得到 9× 9 方程组，表示为 $Au=b$，其中，

$$A=\begin{bmatrix}4&-1&0&-1&0&0&0&0&0\\-1&4&-1&0&-1&0&0&0&0\\0&-1&4&0&0&-1&0&0&0\\-1&0&0&4&-1&0&-1&0&0\\0&-1&0&-1&4&-1&0&-1&0\\0&0&-1&0&-1&4&0&0&-1\\0&0&0&-1&0&0&4&-1&0\\0&0&0&0&-1&0&-1&4&-1\\0&0&0&0&0&-1&0&-1&4\end{bmatrix},\quad u=\begin{bmatrix}u_{11}\\u_{21}\\u_{31}\\u_{12}\\u_{22}\\u_{32}\\u_{13}\\u_{23}\\u_{33}\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\100\\100\\100\end{bmatrix}.$$

借助于计算机，求出矩阵 A 的逆矩阵，得到下述形式的解：

$$u=A^{-1}b=\frac{1}{224}\begin{bmatrix}67&22&7&22&14&6&7&6&3\\22&74&22&14&28&14&6&10&6\\7&22&67&6&14&22&3&6&7\\22&14&6&74&28&10&22&14&6\\14&28&14&28&84&28&14&28&14\\6&14&22&10&28&74&6&14&22\\7&6&3&22&14&6&67&22&7\\6&10&6&14&28&14&22&74&22\\3&6&7&6&14&22&7&22&67\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\100\\100\\100\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}50/7\\275/28\\50/7\\75/4\\25\\75/4\\300/7\\1\,475/28\\300/7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7.14\\9.82\\7.14\\18.75\\25\\18.75\\42.86\\52.68\\42.86\end{bmatrix}.$$

表 1 中表示了这个解．因为在离散化问题中，u_{22} 表示正方形中心的值(回忆 $h=k=1/4$)，故 $u(1/2,1/2)$ 的近似值是 25，这恰恰就是解的精确值.

537

表 1　在每一个小格中，顶部的值是用(b)中的有限差分法得到的，底部的值由解析解计算而得

网格点上的温度		
42.86 $u(1/4, 3/4)$ 43.20	52.68 $u(1/2, 3/4)$ 54.05	42.86 $u(3/4, 3/4)$ 43.20
18.75 $u(1/4, 1/2)$ 18.20	25 $u(1/2, 1/2)$ 25	18.75 $u(3/4, 1/2)$ 18.20
7.14 $u(1/4, 1/4)$ 6.80	9.82 $u(1/2, 1/4)$ 9.54	7.14 $u(3/4, 1/4)$ 6.80

(c)我们用计算机计算解析解

$$u(x,y)=\frac{400}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\pi x}{2k+1}\frac{\sinh(2k+1)\pi y}{\sinh(2k+1)\pi}$$

在 9 个给出的内部网格点上的值(用一直取到 $k=30$ 的部分和)．所得结果连同(b)中的数值近似都列在表 1 中．■

毫无疑问，对狄利克雷问题应用有限差分法时，大部分的工作是求问题中出现的矩阵 A 的逆矩阵．用不同的边界条件做例 1，可以验证，当边界条件改变时，只有向量 b 发生变化．这表明我们可以用有限差分法求解各式各样的狄利克雷问题，而不用重新计算 A^{-1}．事实上，对包括拉普拉斯方程在内的一些方程，可以进行同样的说明，如我们下面所介绍的．

例 2　正方形上的泊松方程

已知边长为 1 的正方形区域上的泊松问题

$$\nabla^2 u=1,$$

边界数据为 0，求近似解．使用有限差分方法，取 $m=n=4$，并把得到的 u 的近似值与 3.9 节例 3 中的解析解相比较．

解　我们用例 1 中的记号．为了把泊松方程离散化，用(3)和(4)并取 $h=k=1/4$，得到

$$\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-4u_{ij})=1.$$

对 u_{ij} 求解得

$$u_{ij}=\frac{1}{4}\left(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-\frac{1}{16}\right),$$

538

此式确定了有限差分格式．边值是

$$u_{i,0}=0\quad 及\quad u_{0,j}=0,\quad i,j>0.$$

要从有限差分格式中求出 u_{ij} 的值，我们组成一个九个未知量 $u_{1,1}$，$u_{2,1}$，$u_{3,1}$，$u_{1,2}$，…，$u_{3,3}$ 的九个方程，这里我们按照例 1 的次序排列．这个方程组可以写为 $Au=b$，这里，A 与例 1(b)中的矩阵相同，b 是其元都是 $-h^2=-1/16$ 的列向量．因此，解是

$$u=A^{-1}b=\frac{1}{224}\begin{bmatrix}67&22&7&22&14&6&7&6&3\\22&74&22&14&28&14&6&10&6\\7&22&67&6&14&22&3&6&7\\22&14&6&74&28&10&22&14&6\\14&28&14&28&84&28&14&28&14\\6&14&22&10&28&74&6&14&22\\7&6&3&22&14&6&67&22&7\\6&10&6&14&28&14&22&74&22\\3&6&7&6&14&22&7&22&67\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/16\\-1/16\\-1/16\\-1/16\\-1/16\\-1/16\\-1/16\\-1/16\\-1/16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-11/256\\-7/128\\-11/256\\-7/128\\-9/128\\-7/128\\-11/256\\-7/128\\-11/256\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.043\\-0.055\\-0.043\\-0.055\\-0.070\\-0.055\\-0.043\\-0.055\\-0.043\end{bmatrix}.$$

在表 2 中，将有限差分法的结果和解析解进行了比较. 在 3.9 节的例 3 中，取级数解的前 30 项组成部分和作为解析解的值.

表 2 在每一个小格中，顶部的值是由有限差分法得到的，底部的值是由解析解计算而得

泊松方程的解		
−0.043 $u(1/4,\ 3/4)$ −0.045	−0.055 $u(1/2,\ 3/4)$ −0.057	−0.043 $u(3/4,\ 3/4)$ −0.045
−0.055 $u(1/4,\ 1/2)$ −0.57	−0.070 $u(1/2,\ 1/2)$ −0.073	−0.055 $u(3/4,\ 1/2)$ −0.057
−0.043 $u(1/4,\ 1/4)$ −0.045	−0.055 $u(1/2,\ 1/4)$ −0.057	−0.043 $u(3/4,\ 1/4)$ −0.045

■

在习题中将发现，本节的方法对不太规则区域上的狄利克雷问题同样容易使用，例如 L 形区域、三角形区域和十字形区域. 最后，我们要提及本节方法的一个明显的缺陷. 如果用有限差分法求一个精确到小数点后几位的近似解，则必须取大量的网格点. 比如说，要把 x 和 y 区间各划分为 100 份(绝不是不可能的)，则将处理一个有 10 000 个方程的方程组，它对应的矩阵有 100 000 000 个元. 事实上，在狄利克雷问题中，即使矩阵 A 可能有很多个零元，它的逆矩阵 A^{-1} 的所有元都非零(见例 1). 即使用计算机求矩阵 A 的逆，很快就遇到存储问题. 在数值线性代数中有些方法分析矩阵 A 的性质，用以简化求它的逆的计算. 代替这个方法，在下一节将介绍新的迭代方法，这些方法对诸如大量网格点等问题会给出满意的解答.

539

习题 9.3

在习题 1～4 中，对边长为 1 的正方形上的狄利克雷问题(1)，用给出的边界数据求它的近似解. 用 $m=n=3$ 离散这个问题并用手算计算数值解. [提示：阅读例 1 后的说明.]

1. $f_1(x)=0$，$f_2(x)=0$，$g_1(y)=100$，$g_2=0$.
2. $f_1(x)=100x$，$f_2(x)=100$，$g_1=g_2=0$.
3. $f_1(x)=e^x$，$f_2(x)=1$，$g_1=g_2=0$.
4. $f_2(x)=\sin\pi x$，$f_1=g_1=g_2=0$.

[将答案与精确解 $u(x, y)=\sin\pi x\dfrac{\sinh\pi y}{\sinh\pi}$相比较.]

5. 用 $m=n=5$ 重做习题 4. 与精确解比较所得结果.

6. 用 $m=n=5$ 重做例 1. 与精确解比较所得结果.

习题 7～10 中，求边长为 1 的正方形上已知方程的近似解，且边界数据为零. 用 $m=n=3$ 离散这个问题并用手算计算数值解. [提示：仿照例 2.]

7. $\nabla^2 u=x+y$.

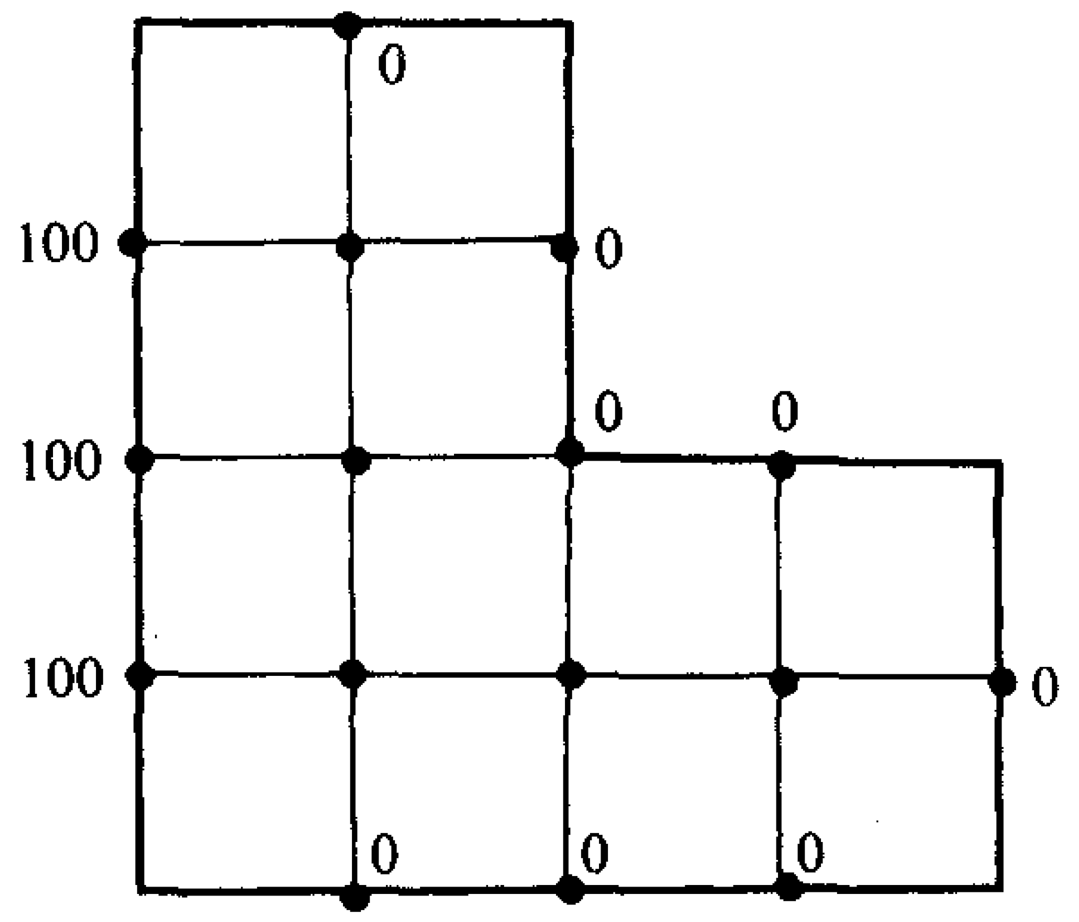
8. $\nabla^2 u=xy$.

9. $\nabla^2 u=u+3$.

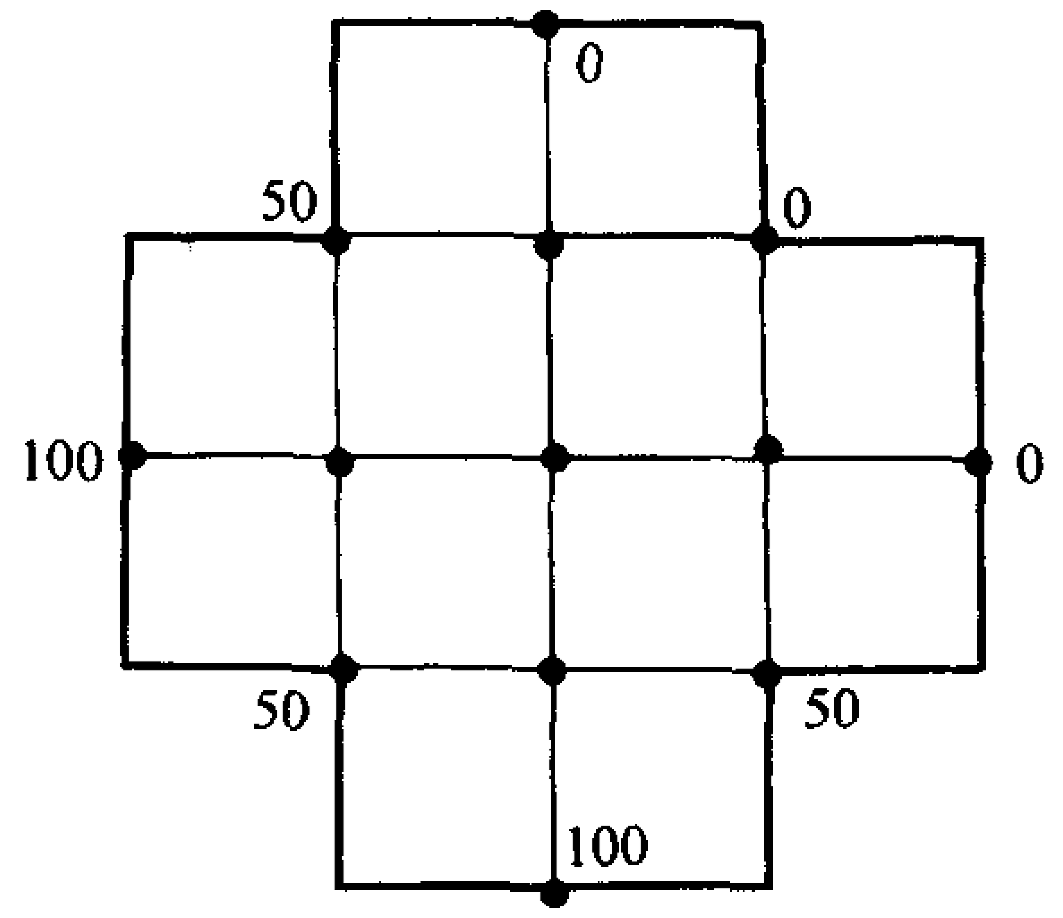
10. $\nabla^2 u=u+x$.

习题 11～14 中，刻画了给定区域上的狄利克雷问题. 求解离散问题：计算 u 在网格的内部点上的值. 可以用计算机解下面的方程组.

11. L 形：

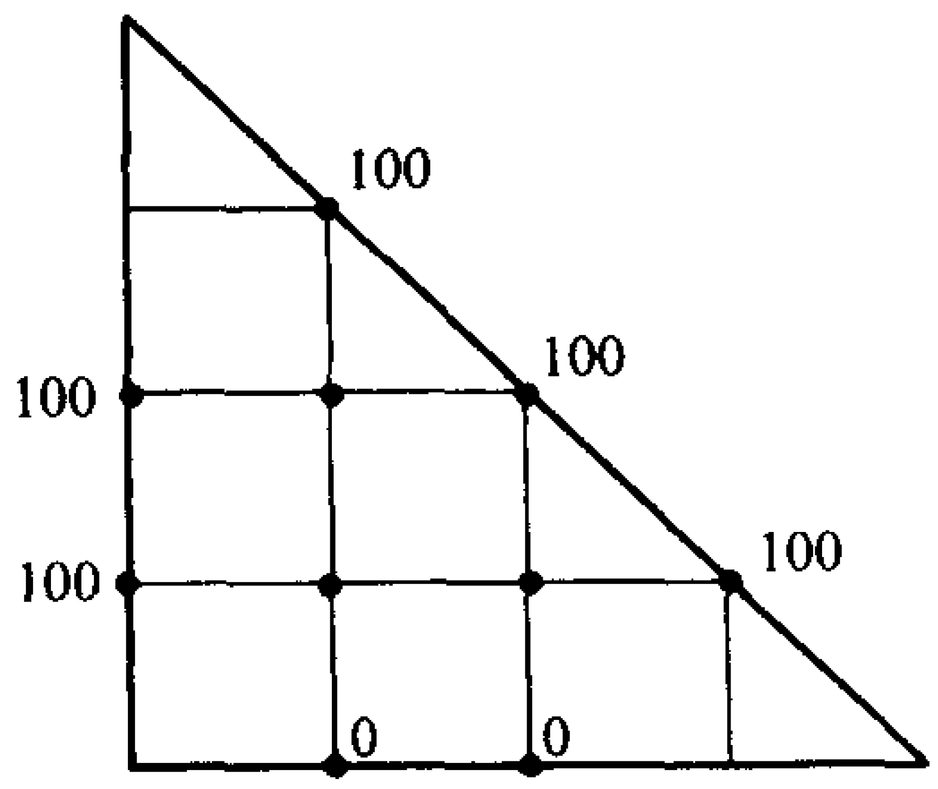


12. 十字形：

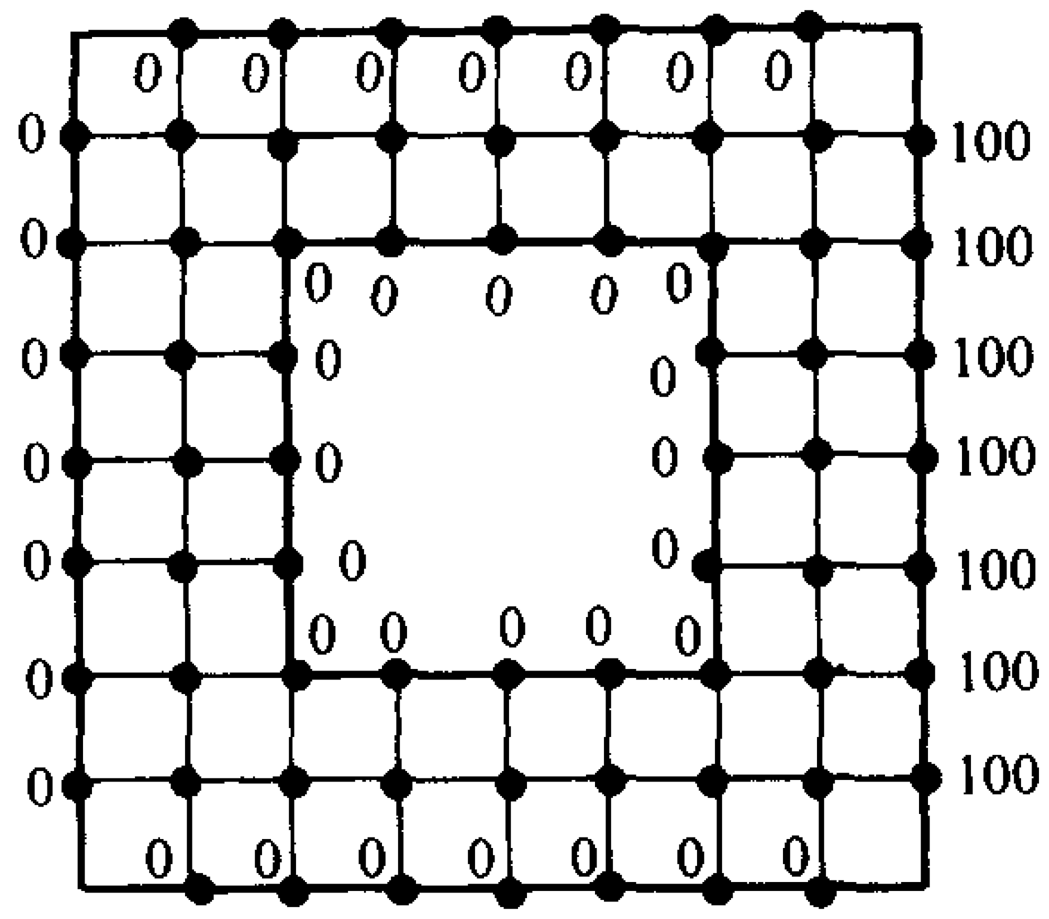


540

13. 等腰直角三角形：



14. 一个矩形标架：



9.4 拉普拉斯方程的迭代法

继续研究定义在矩形域 $0<x<a$，$0<y<b$ 上的拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u = 0, \tag{1}$$

边界数据如 9.3 节的图 1 所示. 如前一节所做，在矩形域上绘制一个网格，令 h 为 x 方向的网格尺寸，k 为 y 方向的网格尺寸(见 9.3 节的图 2). 取 $h=k$ 及 $m=a/h$，$n=b/h$. (1)的离散化形式是

$$u_{ij} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) \tag{2}$$

(见 9.3 节的(6)). 我们的目的是求出近似解 u_{ij}. 想法是假设网格点上存在解的值. 由这个初始假设，使用(2)式产生 u_{ij} 的新的一组值. 重复这个过程直到得到的一组新的 u_{ij} 的值与旧的一组值很接近，这时就停止运算. 得到的是逼近离散狄利克雷问题解的一个数列 u_{ij}. 因为后者是精确解的近似，所以，由迭代方法产生的数列就是精确解的近似.

雅可比迭代

让我们把刚刚叙述的方法形式化. 令 U_{ij}^0 是解的初始假设. 初始假设由于考虑到边界数据而做成，并且要记住，近的边界数据比远的更重要. 也可以用边界温度的平均(见例 1). 用(2)和 U_{ij}^0 生成 U_{ij}^1，它是在第一步迭代后逼近 u_{ij} 的值. 按照(2)迭代下去，得到

541

$$\boxed{U_{ij}^{k+1} = \frac{1}{4}(U_{i+1,j}^k + U_{i-1,j}^k + U_{i,j+1}^k + U_{i,j-1}^k),} \tag{3}$$

其中，$k=0, 1, 2, \cdots$. 当我们感到新的一组值 U_{ij}^{k+1} 与前一组的值 U_{ij}^k 很接近时，就停止迭代. 这个格式叫**雅可比迭代**. 我们用它计算前一节的例 1(b)并比较这些结果.

例 1 雅可比迭代

回到 9.3 节例 1(b)狄利克雷问题的离散模式，用雅克比迭代求近似解. 如前所做，按下面次序列出网格点上的值：从最底下一行开始，由左到右，而后往上依序列出. 有了这个次序，我们用雅可比迭代要逼近的值依次是

7.14,9.82,7.14,18.75,25,18.75,42.86,52.68,42.86

(见 9.3 节例 1(b)). 开始迭代前，对解 U_{ij}^0 须作初始假设. 我们就取 12 个边界点(排除角点)的值的平均. 这给出 $U_{ij}^0=300/12=25$ 对所有 $i, j=1, 2, 3$. 用 $k=0$ 的(3)式迭代一次，得到以下数列：

12.5,18.75,12.5,18.75,25,18.75,37.5,43.75,37.5.

把这个数列和实际的有限差分解比较，在一些点上已经十分接近. 借助于计算机，并反复利用(3)式进行迭代过程. 所得结果列在表 1 中.

表 1 从初始假设(顶行)开始，用雅可比迭代法得到收敛于有限差分解的一些数据集合

雅可比迭代									
k	$U_{1,1}^k$	$U_{2,1}^k$	$U_{3,1}^k$	$U_{1,2}^k$	$U_{2,2}^k$	$U_{3,2}^k$	$U_{1,3}^k$	$U_{2,3}^k$	$U_{3,3}^k$
0	25	25	25	25	25	25	25	25	25
1	12.5	18.75	12.5	18.75	25	18.75	37.5	43.75	37.5
2	9.375	12.5	9.375	18.75	25	18.75	40.62	50	40.62
3	7.812	10.94	7.812	18.75	25	18.75	42.19	51.56	42.19
4	7.422	10.16	7.422	18.75	25	18.75	42.58	52.34	42.58
5	7.227	9.961	7.227	18.75	25	18.75	42.77	52.54	42.77
6	7.178	9.863	7.178	18.75	25	18.75	42.82	52.64	42.82
7	7.153	9.839	7.153	18.75	25	18.75	42.85	52.66	42.85
8	7.147	9.827	7.147	18.75	25	18.75	42.85	52.67	42.85
9	7.144	9.824	7.144	18.75	25	18.75	42.86	52.68	42.86
10	7.143	9.822	7.143	18.75	25	18.75	42.86	52.68	42.86

542

注意到，第九步迭代后，数据变化已经很小，所以第十步迭代后我们就停止迭代. 与实际的有限差分解进行比较，结果令人满意. ■

高斯-赛德尔迭代

一般说来，可以改进雅可比迭代过程的收敛速度，通过考虑用公式(3)，得到的几组新的数值即可. 即，在做出初始假设后，按照公式

$$\boxed{U_{ij}^{k+1}=\frac{1}{4}(U_{i+1,j}^{k}+U_{i-1,j}^{k+1}+U_{i,j+1}^{k}+U_{i,j-1}^{k+1})} \tag{4}$$

迭代. 这里，与(3)式的唯一差别是，$k+1$ 作为上标出现在右边的两项中，它们对应下边的点或中心点左边的点. 这就是所谓的**高斯-赛德尔方法**(也叫**李普曼**(Liebmann)**方法**). 一般说，较之雅可比方法，这个方法对有限差分方法的解将会产生更快的收敛速度，所以，它改进了雅可比方法. 我们用下面的例子说明.

例 2　高斯-赛德尔迭代

为了做比较，我们将用高斯-赛德尔方法重做例 1. 用一个不同的初始假设开始(见这个例子后面的正文)并按照(4)式迭代. 初始假设是

$$(U_{1,1}^0,U_{2,1}^0,U_{3,1}^0,U_{1,2}^0,U_{2,2}^0,U_{3,2}^0,U_{1,3}^0,U_{2,3}^0,U_{3,3}^0)=(0,0,0,50,50,50,50,50,50).$$

用高斯-赛德尔公式进行 16 次迭代后，我们得到数值集合

$$(7.143,9.822,7.143,18.75,25,18.75,42.86,52.68,42.86),$$

进一步的迭代不改变这些数值. 用雅可比方法从同样的初始假设开始，要用 28 次迭代才能得到这些数值. ■

数值方法的迭代效率对所使用的初始假设是相当敏感的. 例如，虽然高斯-赛德尔方法通常比雅可比方法要好，但是检验发现，针对例 1 中的初始假设，使用雅可比方法更好.

逐次超松弛法和热传导方程

我们知道，热传导方程的任何稳态解就是拉普拉斯方程的解. 记住这一点，就可以如下处理狄利克雷问题的解：模拟热传导方程并用非常类似于上述迭代法的过程推进时间步. [543]

二维热传导方程是

$$u_t=c^2(u_{xx}+u_{yy}).$$

用 h 表示网格小方块沿 x 和 y 方向的边长，k 表示时间步的指标. 相邻的时间步由时段 Δ_t 分开，使得 $t_k=k\Delta_t$. 使用关于 t 的一阶导数和关于 x 和 y 的二阶导数的离散表达式，并用高斯-赛德尔方法的思想修正我们的结果，得到

$$\boxed{U_{ij}^{k+1}=U_{ij}^{k}+s(U_{i+1,j}^{k}+U_{i-1,j}^{k+1}+U_{i,j+1}^{k}+U_{i,j-1}^{k+1}-4U_{ij}^{k}),} \tag{5}$$

其中，$s=\Delta_t c^2/h^2$. 注意，用离散时间集合上的热值对(5)式已经做出了具体的解释，可以对它重新给出解释，而不仅是一个迭代格式. 每一个新时间步代表由前面的数据算出的新的数据集合. 这个方法与更早介绍的迭代方法基本上没有差别. 事实上，这个方法仅是高斯-赛德尔方法的一个推广；取 $s=1/4$ 将把(5)化为(4).

因为由(5)算出的值对应于热传导方程的有限差分近似，我们期望当$t\to\infty$(即$k\to\infty$)时这些值应该趋向于相应的热传导方程的稳态解．因此，只要这些格式是稳定的，则由热传导方程就会相当自然地导出求解狄利克雷问题的一个迭代过程．事实上，对(5)式的稳定性分析可得出区间$0<s\leqslant 1/2$．由(5)给出的差分格式就是众所周知的**逐次超松弛**方法．对具有区间$0<s\leqslant 1/2$中的任意一个值的迭代格式(5)，在大多数情况下，将是本节所述迭代格式中最好的一个格式．

在求解边值问题的实际计算中，最好是把本节的方法和前一节的方法结合使用．可以从一个粗网格开始，利用矩阵求逆(或高斯消元法)求解在网格点上的近似值．如果这些值不够充分精确，就用一个更细的网格并转换成迭代方法．用前面确定的数值给初始近似构造一个好的假设，开始进行迭代．如果仍然希望得到更高的精确度，则可以把网格尺寸等分加细并选择更好的初始假设，然后再进行迭代．每次等分加细网格时，使解变得更精确的一个办法是取平均值：网格线中点的值取为两个端点的值的平均，正方形中心的值取为四个角点的值的平均．

544

习题 9.4

1. 用雅可比迭代求解 9.3 节习题 1 中的狄利克雷问题．
2. 用雅可比迭代求解 9.3 节习题 3 中的狄利克雷问题．
3. 用高斯-赛德尔迭代求解 9.3 节习题 1 中的狄利克雷问题．
4. 用高斯-赛德尔迭代求解 9.3 节习题 3 中的狄利克雷问题．
5. (a)求解 9.3 节习题 4，取$m=n=10$．把数值答案与精确解相比较．
   (b)用雅可比迭代解狄利克雷问题．作为初始假设，指定每个内部网格点上的值为 1/4．迭代运算，直到所得答案与(a)中数值解的误差在10^{-2}之内．需要迭代多少次？
   (c)用一个不同的初始假设(不要取(a)的数值解)重做(b)．要考虑边界数据．
6. 用高斯-赛德尔迭代重做例 1(b)，取相同的开始值．与雅可比迭代相比，此法如何？
7. 用高斯-赛德尔迭代重做习题 5(b)和(c)，取相同的开始值．与雅可比迭代相比，此法如何？
8. 用逐次超松弛法重做习题 5(b)和(c)，取相同的开始值．与雅可比迭代相比，此法如何？
9. 用雅可比迭代求解 9.3 节习题 11 中的狄利克雷问题．
10. 用雅可比迭代求解 9.3 节习题 12 中的狄利克雷问题．
11. 用高斯-赛德尔迭代求解 9.3 节习题 13 中的狄利克雷问题．
12. 用高斯-赛德尔迭代求解 9.3 节习题 14 中的狄利克雷问题．

545

第 10 章　抽样和离散傅里叶分析及其在偏微分方程中的应用

基本进展是建立在基本思想的再诠释基础之上的.

——阿尔福来德·怀特海

综述　本章包含了计算傅里叶变换和傅里叶级数，以及求解边值问题的数值技巧. 10.1 节和 10.2 节讨论抽样定理及其应用，本章其他部分并不需要这些知识. 在 10.3 节我们介绍离散傅里叶变换和快速傅里叶变换，在本节的学习中，记住 7.2 节所介绍的傅里叶变换基本性质是有帮助的. 我们将对离散傅里叶变换建立类似的性质. 在 10.4 节，我们说明傅里叶变换和离散傅里叶变换之间的联系. 为理解这个联系，需要完成 10.4 节中与 7.4 节和 7.5 节论题有关的习题.

导读　本章引入了傅里叶变换数值计算中的基本思想. 在许多计算机代数系统中，快速傅里叶变换算法都是作为标准命令的，因此我们希望大家能够利用这个重要算法做数值实践，并了解其有效性. 我们也希望，本章所遇到的应用将会诱导大家到傅里叶变换所能应用的广大领域中探索其他的应用.

迄今为止，傅里叶变换和傅里叶级数显然是应用中十分重要的工具. 利用这些工具来分析函数，需要知道函数在整个区间上的信息. 在现实世界的应用中，函数是通过一个离散值集来度量的. 为分析这些离散函数，我们将引入并利用离散傅里叶变换. 除了其他的重要应用之外，我们将说明如何利用离散傅里叶变换来逼近傅里叶变换，及如何求解边值问题.

自发现快速而又有效的数值计算算法之后，离散傅里叶变换在 20 世纪 60 年代得到了广泛的应用. 这个算法称为快速傅里叶变换，其暗含的思想可以追溯到高斯. 但是正是库利和图基强调了其在基于计算机的傅里叶分析中的重要意义.

本章的另一个论题是抽样定理，这个重要结果由美国工程师克劳德·香农在 20 世纪 40 年代发现，它在传播和信息理论中有着许多应用.

546

10.1　抽样定理

抽样定理是一个令人吃惊的结果，它断言某些函数可以完全由一个在等长区间上的离散度量或抽样集来重建. 这个十分重要的结果有着许多有趣的应用，将在下一节中介绍一些. 首先，回顾傅里叶变换的定义

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x,\quad -\infty<\omega<\infty. \tag{1}$$

现在，利用傅里叶变换的性质，我们来定义一类函数.

有限带宽函数　函数 $f(x)$ 称为**有限带宽的**，如果其傅里叶变换 $\hat{f}$ 在有限区间之外为零. 此

时，存在一个正数 W，使得对所有$|\omega|>W$，有$\hat{f}(\omega)=0$. 这样的数 W 称为 f 的**带宽**.

必须注意的是，仅要求$\hat{f}$在有限区间之外为零，而不是 f 自身. 事实上，可以证明 f 和$\hat{f}$不可能同时在有限区间之外为零. 虽然"绝大多数"的函数都不是有限带宽的，但是我们可以证明，至少本书中讨论的所有函数都可以用有限带宽函数来逼近(参见习题 7 和 8). 这使得有限带宽函数类在应用中特别有用.

前面我们已经遇到许多有限带宽函数，下面是一个在我们的讨论中起着重要作用的简单例子.

例 1 有限带宽函数

(a)函数 $s(x)=\frac{\sin x}{x}$如图 1 所示. 由傅里叶变换表，我们发现

$$\hat{s}(\omega)=\begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}} & 若|\omega|<1,\\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} & 若\ \omega=\pm 1,\\ 0 & 若|\omega|>1.\end{cases}$$

由于对所有 $|\omega|>1$，$\hat{s}$为零，我们得出结论：s 是有限带宽的，带宽为 1(见图 2).

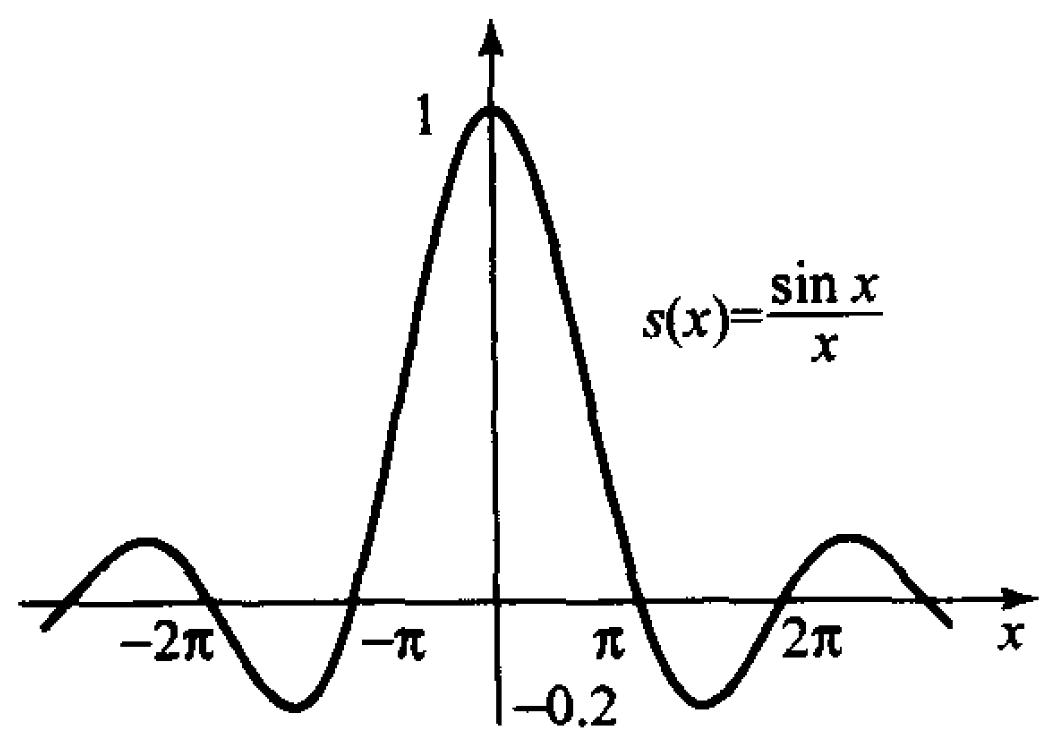


图 1 函数$\frac{\sin x}{x}$是有限带宽的，带宽为 1

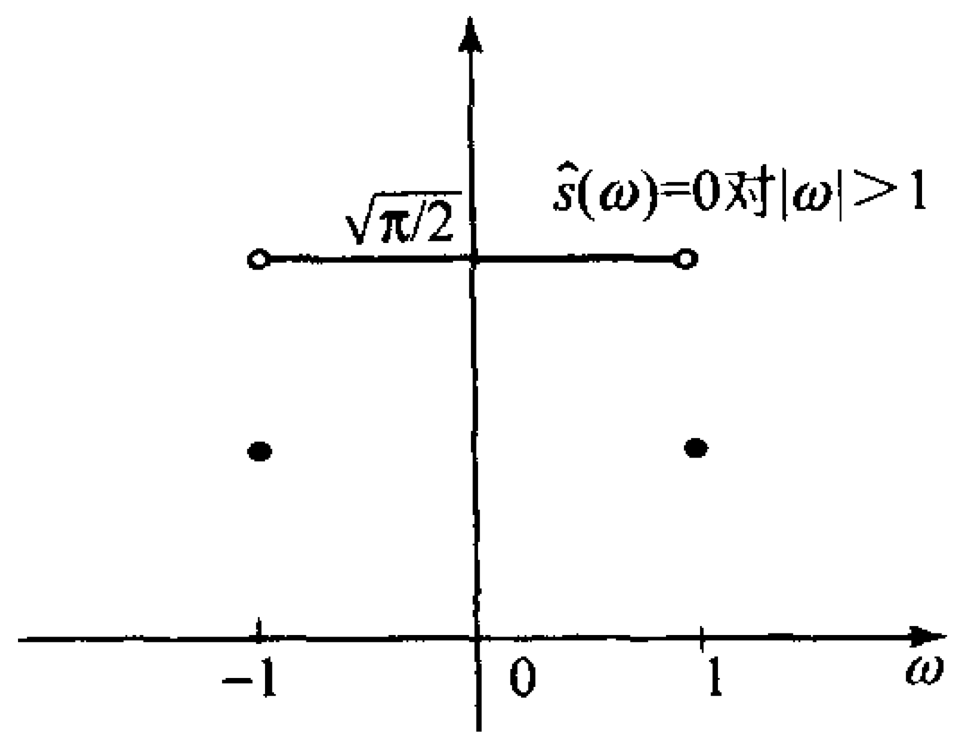


图 2 对所有 $|\omega|>1$，$\frac{\sin x}{x}$的傅里叶变换为零

547

(b)令 $W>0$，考虑函数 $s_W(x)=\frac{\sin Wx}{Wx}$，对不同的 W 值，其图像如图 3 所示. 我们有 $s_W(x)=s(Wx)$,因此 s_W 是函数 s 的伸缩. 同样，由傅里叶变换表，我们发现

$$\hat{s}_W(\omega)=\begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{W} & 若\ |\omega|<W,\\ \frac{1}{2W}\sqrt{\frac{\pi}{2}} & 若\ \omega=\pm W,\\ 0 & 若\ |\omega|>W.\end{cases}$$

由于对所有 $|\omega|>W$，$\hat{s}_W$ 为零，我们得出结论：s_W 是有限带宽的，带宽为 W(见图 4).

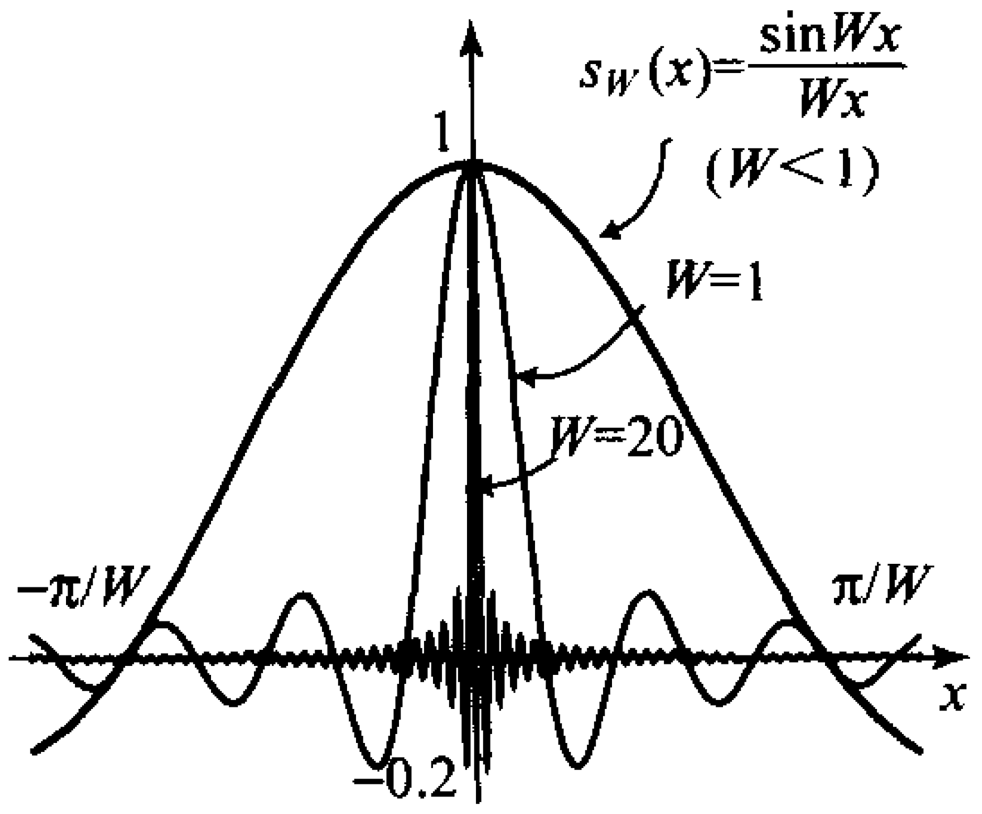


图 3

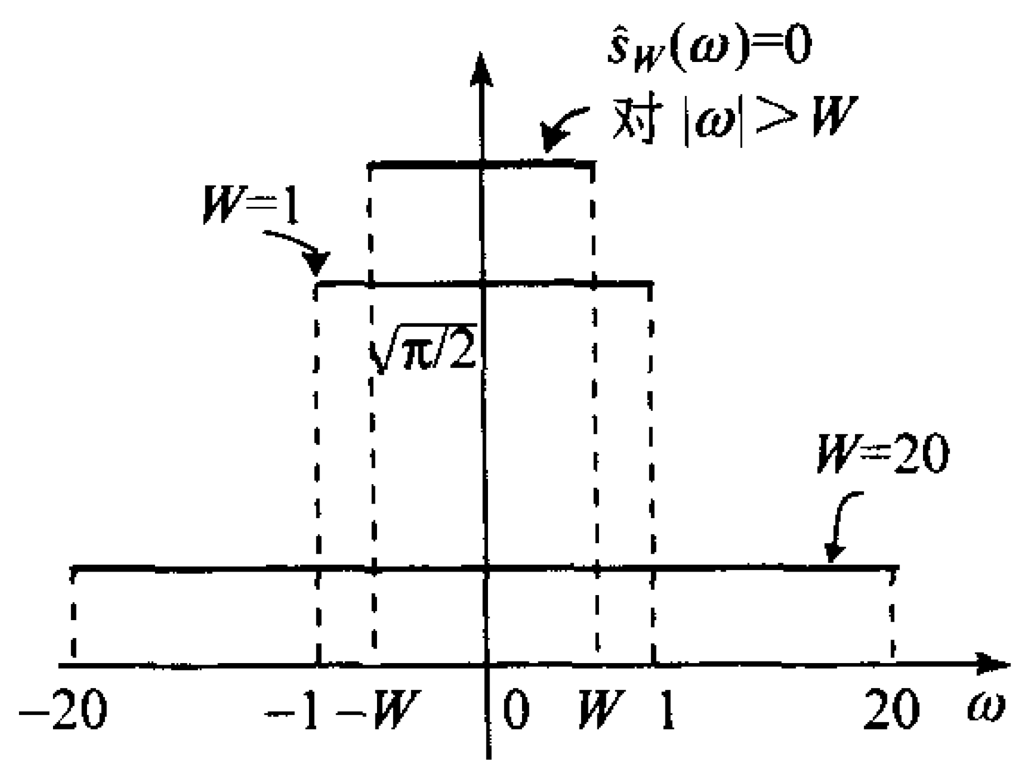


图 4

■

$\sin Wx$ 的频率随着 W 的增加而增加，这使得$\frac{\sin Wx}{Wx}$的图像波动越来越厉害，逐渐向原点集中(图 3). 在傅里叶变换这边，W 的增加引起图像扩展或伸长.

现在，我们列出有限带宽函数的一些性质，它们有助于构造更有趣的例子.

定理 1(有限带宽函数的性质) *假设 a，b 是常数，而 f，g 是函数.*

(a)如果 f 和 g 是有限带宽的，带宽分别为 W_1 和 W_2，则 $af+bg$ 也是有限带宽的，带宽 W 小于等于 W_1 和 W_2 中的较大者.

(b)如果 f 是有限带宽的，带宽为 W，则 f 平移 a 个单位即 $f(x-a)$ 也是有限带宽的，且带宽也为 W.

(c)如果 f 或 g 是有限带宽的，带宽为 W，则卷积 $f*g$ 也是有限带宽的，且带宽也为 W.

证明 部分(a)是直接的，留作习题. 为证明(b)，我们只需回顾

$$\mathcal{F}(f(x-a))(\omega)=\mathrm{e}^{-ia\omega}\hat{f}(\omega).$$

所以，如果对 $|\omega|>W$，$\hat{f}$为零，则对 $|\omega|>W$，$f(x-a)$的傅里叶变换显然也为零. 最后，(c)是事实$\widehat{f*g}=\hat{f}\hat{g}$的直接推论. ■

回顾，例 1(b)中的函数 s_W 是有限带宽的，带宽为 W. 将这个函数平移 $n\pi/W$ 个单位后得到 [548]

$$s_W\left(x-\frac{n\pi}{W}\right)=\frac{\sin(Wx-n\pi)}{(Wx-n\pi)},\tag{2}$$

由定理 1(b)，它也是有限带宽的，带宽为 W. 同样，由定理 1(a)，形如(2)式的函数的任意线性组合仍然是有限带宽的，带宽为 W. 我们即将陈述的强有力的结果是：反过来也成立，即带宽为 W 的任意有限带宽函数，都可以写成形如(2)式的函数的无穷求和. 更进一步，这个和式中的系数就是函数在均匀步长抽样点集上的取值.

定理 2(有限带宽函数的抽样定理) *假设 f 是有限带宽的，带宽为 W，则对所有 x，我们有*

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{n\pi}{W}\right)\frac{\sin(Wx-n\pi)}{(Wx-n\pi)}.\tag{3}$$

因此，f 可以由其抽样值 $f\left(\frac{n\pi}{W}\right)$，$n=0$，$\pm1$，$\pm2$，…完全构造出来.

如果 W 和 W' 是 f 的两个带宽，$W'>W$，则相应于 W' 的级数比相应于 W 的级数在单位长度上需要更多的抽样点，因为 $\frac{\pi}{W}>\frac{\pi}{W'}$. 使(3)式成立，单位长度上的最少抽样点数称为**奈奎斯特取样率**，相应于 f 的最小带宽.

定理 2 的证明在本节末的附录中介绍. 在抽样定理中调换函数和其傅里叶变换的位置，我们可以得到时间有限函数的抽样定理. 这些函数在有限区间之外为零，其准确陈述如下. 其证明可以由抽样定理的证明交换 f 和 $\hat{f}$ 而得到.

定理 3(时间有限函数的抽样定理) 假设对所有的 $|t|>T$，$f(t)=0$，则对所有 ω，我们有

$$\hat{f}(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(\frac{n\pi}{T}\right)\frac{\sin(T\omega-n\pi)}{(T\omega-n\pi)}. \tag{4}$$

因此，$\hat{f}$ 可以由在点 $\frac{n\pi}{T}$，$n=0$，±1，±2，…的抽样完全确定.

549 在下面的例题中，我们说明如何利用抽样定理来逼近有限带宽函数.

例 2 有限带宽函数的抽样

棒的初始温度分布 $f(x)(-\infty<x<\infty)$ 具有带宽 $W=2$. 其部分值如表 1 所示.

表 1

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$
$f(x)$	0.001 765	0.382 839	0.792 567	0.266 685	0.001 474 1	0.033 19

利用抽样定理，逼近点 0.1，0.2，0.8 处的初始温度分布.

解 由于 $f(x)$ 是有限带宽的，带宽为 2，我们可以通过在点 $x=\frac{n\pi}{2}$ 抽样，由(3)式来重构它. 利用表 1 中的值，我们得到

$$\begin{aligned}f(x)&\approx\sum_{n=0}^{5}f\left(\frac{n\pi}{2}\right)\frac{\sin(2x-n\pi)}{(2x-n\pi)}\\&=0.001\,765\,\frac{\sin(2x)}{2x}+0.382\,839\,\frac{\sin(2x-\pi)}{2x-\pi}+0.792\,567\,\frac{\sin(2x-2\pi)}{2x-2\pi}\\&\quad+0.266\,685\,\frac{\sin(2x-3\pi)}{2x-3\pi}+0.001\,474\,1\,\frac{\sin(2x-4\pi)}{2x-4\pi}+0.033\,19\,\frac{\sin(2x-5\pi)}{2x-5\pi}.\end{aligned}$$

现在，我们可以计算所求的值(借助计算器)：

$$f(0.1)\approx0.007\,9,\quad f(0.2)\approx0.015\,9,\quad f(0.8)\approx0.116\,5.$$

f 的部分和逼近 f^* 的图像如图 5 所示. 为了便于比较，我们画出生成表 1 中值的函数 f 的图像.(当然，在实际应用中，f 是未知的，仅知道其抽样值.)

图 5b 说明：f 的部分和在区间 $x>0$ 上比在区间 $x<0$ 上更好地逼近 f. 这是可以预料的，因为所有的抽样点都是在区间 $x\geqslant0$ 上选取的.

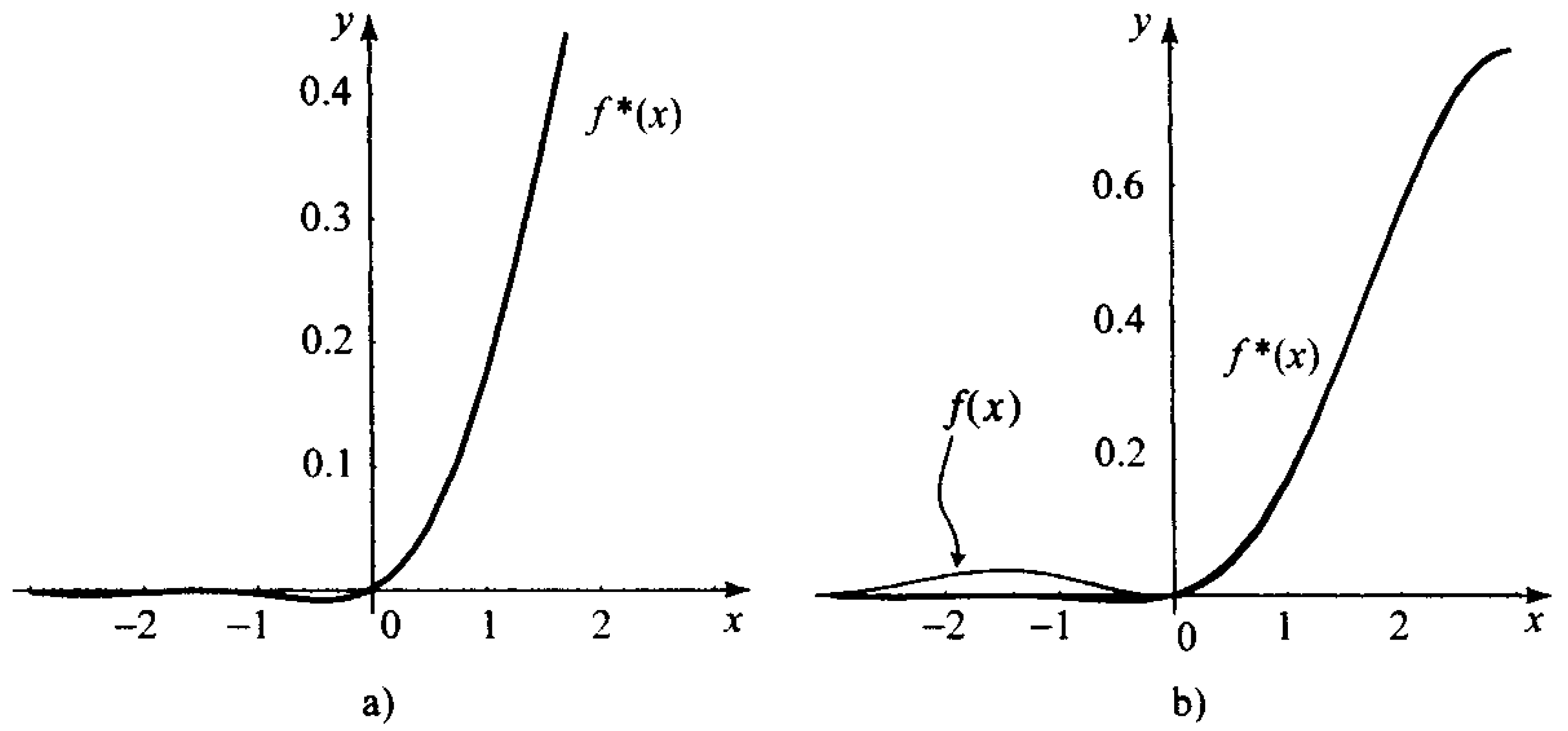


图 5　利用抽样点值来逼近有限带宽函数．在选取抽样点的区间上，我们的逼近更好　■

在本节的其余部分，我们应用抽样定理，仅利用抽样值，计算有限带宽函数的傅里叶变换．在陈述定理之前，我们回顾赫维赛德阶梯函数 [550]

$$\mathcal{U}_0(\omega)=\begin{cases}1 & 若\ \omega>0,\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

利用这个函数的平移，我们有

$$\mathcal{U}_0(\omega-W)=\begin{cases}1 & 若\ \omega>W,\\ 0 & 其他,\end{cases}$$

以及图 6 中的阶梯函数，它由下式给出：

$$\mathcal{U}_0(\omega+W)-\mathcal{U}_0(\omega-W)=\begin{cases}1 & 若\ -W<\omega<W,\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

定理 4（利用抽样表示傅里叶变换）　假设 f 是有限带宽的，带宽为 W，则

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{W}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\mathcal{U}_0(\omega+W)-\mathcal{U}_0(\omega-W))\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{n\pi}{W}\right)e^{-in\frac{\pi}{W}\omega}.\quad(5)$$

因此，为计算带宽为 W 的有限带宽函数的傅里叶变换，我们只需对函数在抽样率为 π/W 的离散点集上作抽样即可．在表达式(5)的右端，对所有 $|\omega|>W$，因子 $\mathcal{U}_0(\omega+W)-\mathcal{U}_0(\omega-W)$ 为零，它所起的作用就是将整个表达式对 $|\omega|>W$ 作截断．

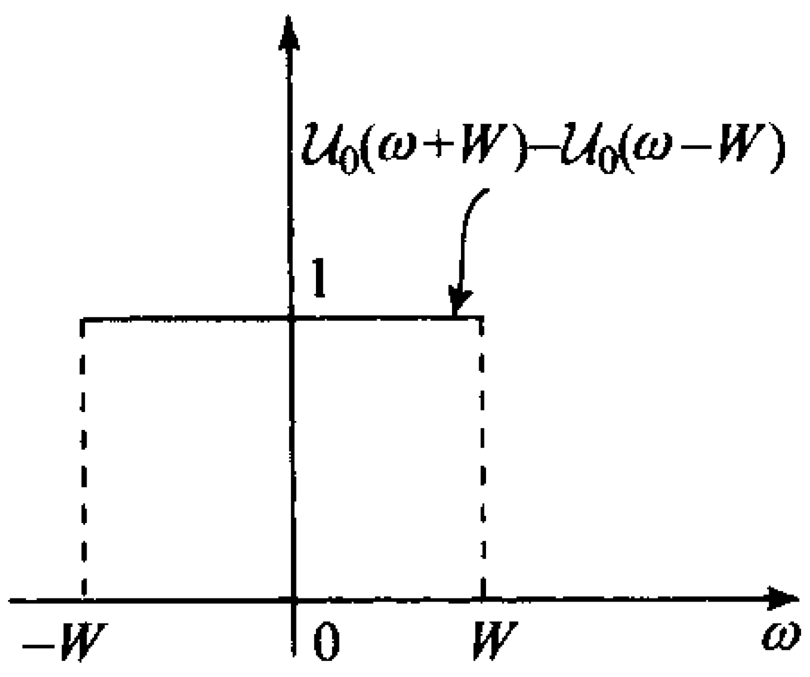


图　6

证明　证明思想就是利用抽样定理，将 f 表示成形如(3)的表达式，然后再利用(1)式，计算傅里叶变换．我们有

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx\\ &=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{n\pi}{W}\right)\overbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(Wx-n\pi)}{(Wx-n\pi)}e^{-i\omega x}\,dx}^{\sin(Wx-n\pi)/(Wx-n\pi)\text{的傅里叶变换}}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{W}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\mathcal{U}_0(\omega+W)-\mathcal{U}_0(\omega-W))\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{W}\right)e^{-in\frac{\pi}{W}\omega}.$$

为验证最后一步，必须说明$\frac{\sin(Wx-n\pi)}{(Wx-n\pi)}$的傅里叶变换是

$$\frac{1}{W}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\mathcal{U}_0(\omega+W)-\mathcal{U}_0(\omega-W))e^{-in\frac{\pi}{W}\omega} = \begin{cases} \frac{1}{W}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-in\frac{\pi}{W}\omega} & 若\ |\omega|<W, \\ 0 & 其他. \end{cases}$$

551 (见习题 5.) ■

定理 4 在边值问题中的有趣应用将在下节介绍.

定理 4 的如下特殊情形是值得注意的.

定理 5(利用抽样表示偶函数的傅里叶变换) 假设 f 是偶数的并且是有限带宽的，带宽为 W，则

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{W}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\mathcal{U}_0(\omega+W)-\mathcal{U}_0(\omega-W))\left[f(0)+2\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{W}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{W}\omega\right)\right]. \tag{6}$$

证明 考虑(5)式中的对称部分和，将相应于 n 和 $-n$ 的两项加起来. 利用 $f\left(-\frac{n\pi}{W}\right)=f\left(\frac{n\pi}{W}\right)$，化简得到

$$e^{in\frac{\pi}{W}\omega}+e^{-in\frac{\pi}{W}\omega} = 2\cos\left(n\frac{\pi}{W}\omega\right).$$ ■

我们以一个数值例子来说明最后两个定理.

例 3 利用抽样计算傅里叶变换

令

$$k(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

由傅里叶变换表，我们有

$$\hat{k}(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{|\omega|}{2}\right) & 若\,|\omega|\leqslant 2, \\ 0 & 其他. \end{cases}$$

如图 7 所示，$\hat{k}$在$[-2, 2]$之外为零，因此，k 是有限带宽的，带宽为 2.
我们将由 f 的抽样值来重构其傅里叶变换，从而验证定理 5 的结论. 应用(6)式，

$$\hat{k}(\omega) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\mathcal{U}_0(\omega+2)-\mathcal{U}_0(\omega-2))\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\omega\right)\right].$$

注意到，除了 $n=0$，所有的偶数项 n 都为零. $\hat{k}$的一个较精确的逼近是，在和式中仅取三个非零项而得到. $\hat{k}$的部分和逼近如图 8 所示. 因此，如果我们并不知道其傅里叶变换，可以通过对函数在六个点 $x=\frac{n\pi}{2}(n=1, 2, \cdots, 6)$作抽样，得到$\hat{k}$的一个较精确的逼近.

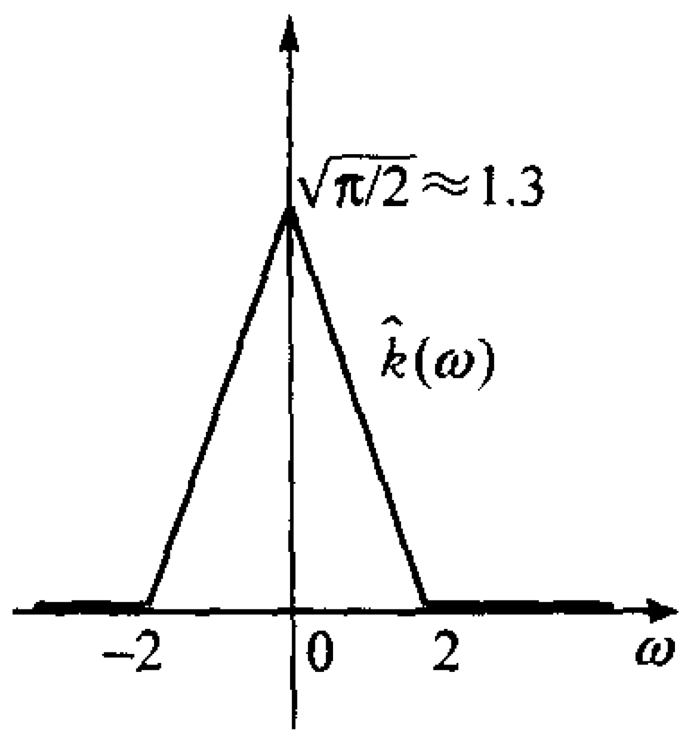


图 7

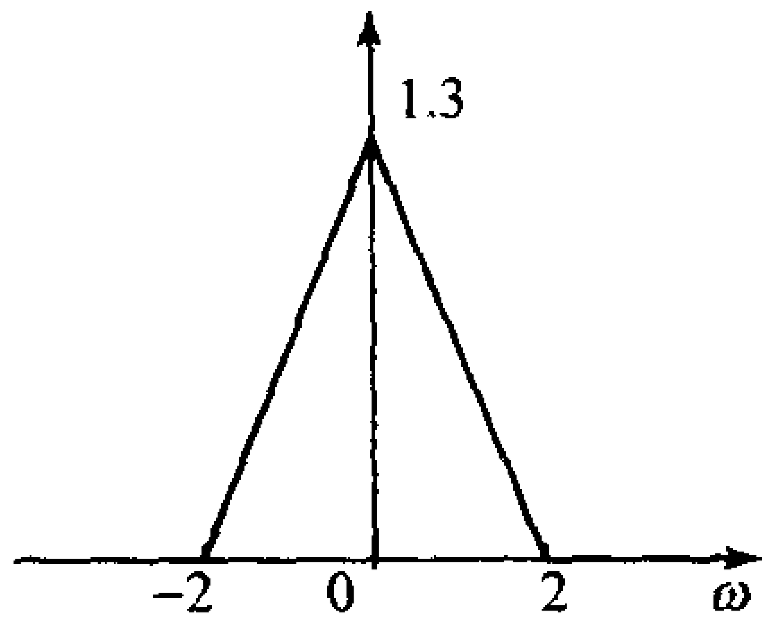


图 8 在抽样级数中取三个非零项得到$\hat{k}$的逼近 ■

附录：抽样定理的证明

由于$\hat{f}$在$[-W, W]$之外为零，由傅里叶逆变换(7.2 节(2)式)，我们有

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-W}^{W}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega. \tag{7}$$

552

同样，由于$\hat{f}$在$[-W, W]$之外为零，我们可以将$\hat{f}$在ω轴上作周期延拓(周期为 $2W$)，然后利用傅里叶级数(2.6 节(3)式)来表达，有

$$\hat{f}(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{n\pi}{W}\omega}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{-n}e^{-i\frac{n\pi}{W}\omega}\quad(|\omega|<W). \tag{8}$$

利用傅里叶系数的定义(2.6 节(4)式)和(7)，我们得到

$$c_{-n}=\frac{1}{2W}\int_{-W}^{W}\hat{f}(\omega)e^{i\frac{n\pi}{W}\omega}\,d\omega=\frac{\sqrt{2\pi}}{2W}f\left(\frac{n\pi}{W}\right). \tag{9}$$

在完成证明之前，我们再计算一个积分．记住欧拉恒等式($e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$)，以及奇函数在关于零对称区间上的积分为零这个事实，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2W}\int_{-W}^{W}e^{-i\frac{n\pi}{W}\omega}e^{i\omega x}\,d\omega&=\frac{1}{2W}\int_{-W}^{W}e^{i(Wx-n\pi)\omega/W}\,d\omega\\&=\frac{1}{2W}\int_{-W}^{W}\cos\left(\frac{Wx-n\pi}{W}\omega\right)d\omega\\&=\frac{\sin(Wx-n\pi)}{Wx-n\pi}.\end{aligned} \tag{10}$$

现在，我们可以如下得到(3)式：

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-W}^{W}\overbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{-n}e^{-i\frac{n\pi}{W}\omega}}^{\hat{f}(\omega)}e^{i\omega x}\,d\omega\quad\text{由(7)和(8)}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-W}^{W}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overbrace{\frac{\sqrt{2\pi}}{2W}f\left(\frac{n\pi}{W}\right)}^{c_{-n}}e^{-i\frac{n\pi}{W}\omega}e^{i\omega x}\,d\omega\quad(\text{由(9)})\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{n\pi}{W}\right)\frac{1}{2W}\int_{-W}^{W}e^{-i\frac{n\pi}{W}\omega}e^{i\omega x}\,d\omega\quad(\text{交换求和与积分的顺序})\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{W}\right)\frac{\sin(Wx-n\pi)}{Wx-n\pi} \quad (\text{由}(10)).$$ ■

习题 10.1

1. 证明定理 1(a)和(c).
2. 利用傅里叶变换表，确定下面函数哪些是有限带宽的. 对这类函数，确定其带宽.

   (a) $f(x)=\frac{\sin 2x}{x}$.　　(b) $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$.

   553

   (c) $f(x)=\mathcal{U}_0(1-|x|)$.　　(d) $f(x)=\frac{\sin^4 x}{x^4}$.

在习题 3～4 中，给出了有限带宽函数 $f(x)$ 的抽样值及其带宽 W.

(a)利用抽样定理，建立 $f(x)$ 的逼近.

(b)验证抽样定理，在这个部分中，函数 $f(x)$ 也已经给出. 画出 $f(x)$ 的图形，并比较 $f(x)$ 和(a)中所得到的逼近函数.

3. (a) $W=4$，

x	0	$\pm\pi/4$	$\pm\pi/2$	$\pm 3\pi/4$	$\pm\pi$
$f(x)$	−0.050 68	−0.244 00	1.730 64	1.922 17	−0.155 55

(b) $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin^2(2(x-2))-\sin^2(x-2)}{(x-2)^2}$.

4. (a) $W=6$，

x	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$
$f(x)$	3.59	0.97	−0.48	0.11	0	0.04	−0.05	0.02	0	0.01	−0.02

(b) $f(x)=\frac{4}{3\sqrt{2\pi}}\frac{\sin^2(3x)-\sin^2\left(\frac{3}{2}x\right)}{x^2}$.

5. 计算 $\frac{\sin(Wx-n\pi)}{Wx-n\pi}$ 的傅里叶变换.
6. 下表包含了带宽为 1 的函数 f 的一组抽样.

x	-4π	-3π	-2π	$-\pi$	0	π	2π	3π	4π
$f(x)$	0	1	0	−1	0	−1	0	1	0

在点 $\omega=0$，± 0.5，± 0.75，± 2 处逼近 $\hat{f}$.

专题问题：用有限带宽函数逼近. 在本节中，我们提到可以用有限带宽函数来逼近任意函数. 完成习题 7 和 8，验证这个结果，习题 9 和 10 给出了另外的证明.

7. **费耶核**. 对 $n=1, 2, 3, \cdots$，定义

$$k_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}n\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}nx\right)}{\frac{1}{2}nx}\right)^2=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}nx\right)}{nx^2}.$$

函数 $k_n(x)$ 称为**费耶核**.

(a)由傅里叶变换表，试证：

$$\hat{k}_n(\omega)=\left(1-\frac{|\omega|}{n}\right)\mathcal{U}_0(n-|\omega|).$$

(b)对不同的 n 值，画出 k_n 的图像，并描述当 n 增加时，这些图像在零附近的性态.

(c)对所有 ω，试证：$\lim\limits_{n\to\infty}\hat{k}_n(\omega)=1$.

(d)画出几个图像，以验证(c)中的结论.

554

8. 在这个习题中，假设所有我们所讨论的函数都是定义在实线上，并都具有傅里叶变换.
   (a)令 k_n 如习题 7 所定义，试证：$f*k_n$ 是有限带宽的.
   (b)利用习题 7(c)，验证事实 $\lim\limits_{n\to\infty} f*k_n(x)=f(x)$. 因此，$f$ 可以用有限带宽函数 $f*k_n$ 逼近.
9. **阿贝尔核**. 对 $n=1, 2, \cdots$，定义

$$h_n(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{n}{1+n^2t^2}.$$

函数 $h_n(x)$ 称为**阿贝尔核**.

(a)试证：$\hat{h}_n(\omega)=e^{-\frac{|\omega|}{n}}$.

(b)利用图像说明事实：当 $n\to\infty$ 时，$h_n(t)$ 的图像越来越向原点集中，而 $\hat{h}_n(\omega)$ 的图像向外扩散.

(c)试证：$\lim\limits_{n\to\infty}\hat{h}_n(\omega)=1$. 由此解释为何 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n*f(x)=f(x)$.

10. **德拉瓦莱-普桑核**. 对 $n=1, 2, \cdots$，定义**德拉瓦莱-普桑核**为 $v_n(t)=2k_{2n}(t)-k_n(t)$，其中 k_n 是费耶核(习题 7). 证明下列结果：

(a)$v_n(t)$ 是有限带宽的，带宽为 $2n$.

(b)
$$\hat{v}_n(\omega)=\begin{cases}1 & 若\ |\omega|<n,\\ 0 & 或\ |\omega|>2n,\\ (-\omega+2n)/n & 若\ n\leqslant\omega\leqslant 2n,\\ (\omega+2n)/n & 若\ -2n\leqslant\omega\leqslant -n.\end{cases}$$

对 $n=1, 2, \cdots, 5$，画出 $\hat{v}_n(\omega)$ 的图像. 可以验证为何 $\hat{v}_n(\omega)$ 称为**帐篷函数**吗？

(c)求出德拉瓦莱-普桑核及其傅里叶变换的显式表达式：

$$v_n(t)=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin^2(nt)-\sin^2\left(\frac{1}{2}nt\right)}{nt^2},$$

$$\hat{v}_n(\omega)=(|2n+\omega|+|2n-\omega|-|n+\omega|-|n-\omega|)/2n.$$

(d)画出 $\hat{v}_1(\omega)$，$\hat{v}_2(\omega)$，$\hat{v}_4(\omega)$.

(e)利用德拉瓦莱-普桑核，如何用有限带宽函数来逼近函数？请验证之.

10.2 偏微分方程与抽样定理

本节我们说明：如何利用抽样定理，用初始或边界的抽样值来求解边值问题. 我们以下面的热传导方程作为例子来说明这个方法：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad -\infty<x<\infty, t>0, \tag{1}$$

带有初始温度分布

555

$$u(x,0)=f(x). \tag{2}$$

由 7.3 节(10)式，我们有解

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{-c^2\omega^2 t}e^{i\omega x}\,d\omega. \tag{3}$$

现在，假设 $f(x)$是有限带宽的，带宽为 W，即假设对 $|\omega|>W$，$\hat{f}(\omega)=0$. 由前一节定理 4，我们有

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{W}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\mathcal{U}_0(\omega+W)-\mathcal{U}_0(w-W))\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{n\pi}{W}\right)e^{-i\frac{\pi}{W}n\omega}. \tag{4}$$

代入(3)式，并利用事实

$$\mathcal{U}_0(\omega+W)-\mathcal{U}_0(\omega-W)=\begin{cases}1 & 若|\omega|<W,\\ 0 & 其他,\end{cases}$$

我们得到

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2W}\int_{-W}^{W}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{n\pi}{W}\right)e^{-i\frac{\pi}{W}n\omega}\right)e^{-c^2\omega^2 t}e^{i\omega x}\,d\omega\\ &=\frac{1}{2W}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{n\pi}{W}\right)\int_{-W}^{W}e^{-c^2\omega^2 t}e^{i\omega\left(x-n\frac{\pi}{W}\right)}\,d\omega.\end{aligned}$$

由于 $e^{-c^2\omega^2 t}e^{i\omega\left(x-n\frac{\pi}{W}\right)}$ 的虚部是 ω 的奇函数，其在对称区间上的积分为零. 因此，我们得到公式

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{W}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{n\pi}{W}\right)\int_{0}^{W}e^{-c^2\omega^2 t}\cos\left(\omega\left(x-n\frac{\pi}{W}\right)\right)d\omega.} \tag{5}$$

这个有用的公式将热传导问题的解用初始温度分布 $f(x)$的抽样值表示出来. 上面我们假设 f 是有限带宽的，一般地，即使 f 不是有限带宽的，其傅里叶变换在无穷远处可能很快趋于零，这样我们可以用有限带宽函数很好地逼近 f，只要取 W 适当大即可. 在这种情形下，我们还是可以利用(5)式，用初始温度分布的抽样值来得到一个近似解. 必须注意的是，在这种情形下(我们仅在一些离散点作抽样)，总是有测量的不确定性. 因此，(对充分大的 W)解是否为有限带宽的，这个近似与 f 值的测量不确定性相比就不那么重要了.

556

我们将通过两个数值例题来说明这些思想.

例 1 用抽样求解热传导问题

(a)利用(5)式，求解初值问题(1)～(2)，其中 $c=1$，以及 $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$.

(b)在(a)中的级数解中取有限项得到近似解，然后画出近似解在 $t=0$，1，2，3，4 时的图像.

解 (a)由前一节例 3，我们知道 f 是有限带宽的，带宽为 $W=2$. 因此，由(5)式，我们得到

$$u(x,t)=2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2}\int_{0}^{2}e^{-\omega^2 t}\cos\left(\omega\left(x-n\frac{\pi}{2}\right)\right)d\omega.$$

因为对偶数 $n\neq 0$，$\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)=0$，只有 $n=0$ 或奇数 n 的项是非零的.

(b)对 n 从 -3 到 3 范围内取值，求出对称部分和，我们得到

$$u(x,t)\approx 2\sum_{n=-3}^{3}\frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2}\int_0^2 e^{-\omega^2 t}\cos\left(\omega\left(x-n\frac{\pi}{2}\right)\right)d\omega.$$

对每个 t 值，近似解是 x 的函数，它由一个可以用计算机系统计算的积分来表示. 近似解在给定 t 值时的图像如图 1 所示. 不出所料，热量是逐渐扩散开，最后趋于零. 在图 2 中，我们给出了近似解作为(x, t)的函数在矩形区域 $-4<x<4$，$0<t<4$ 上的图像.

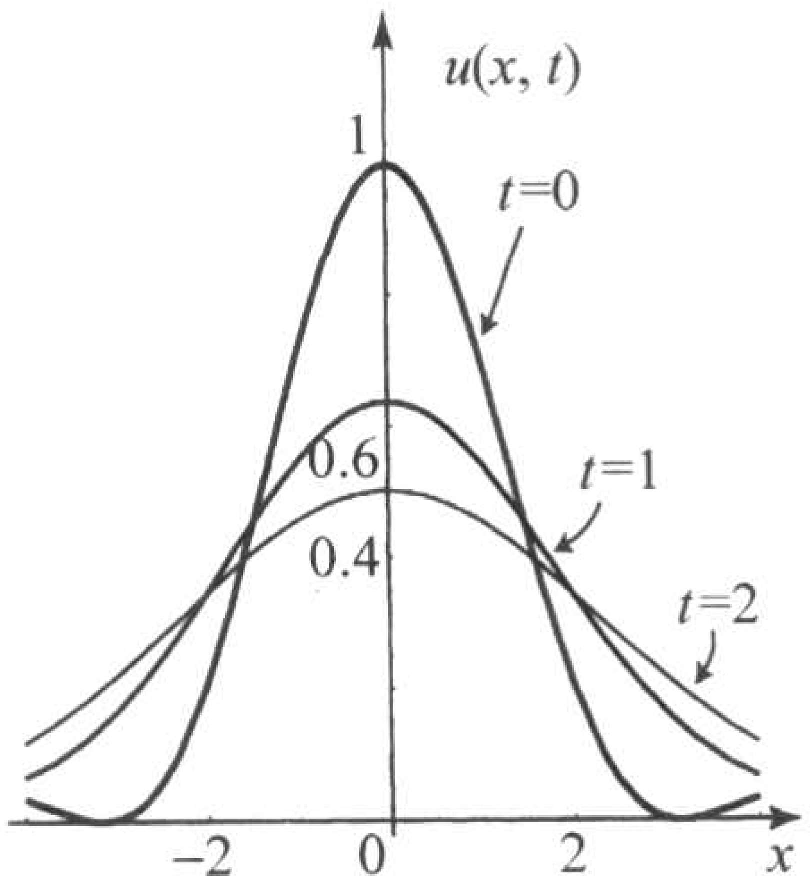


图 1 $u(x, t)$的近似

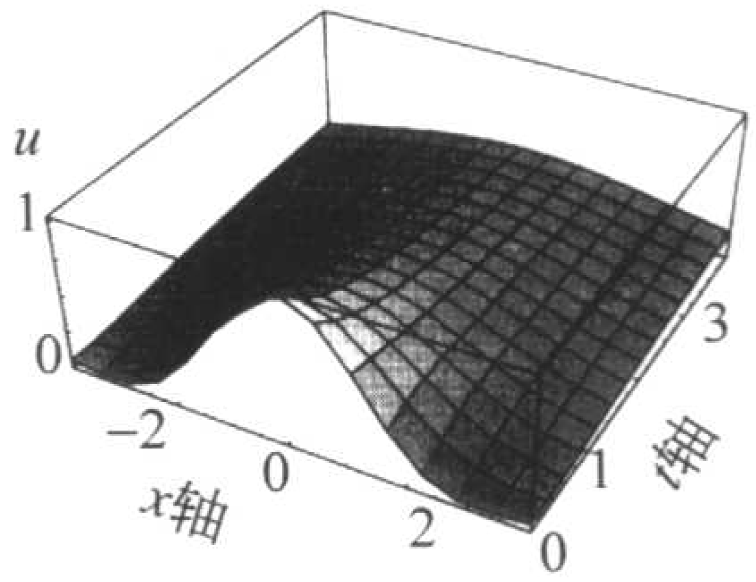


图 2 ■

在下面的例题中，我们考虑热传导问题，其初始温度分布并不是有限带宽的. 我们将说明(5)式仍然可以用来得到一个相当好的近似解.

例 2 带有高斯热分布的热传导问题

考虑初值问题(1)～(2)，其中 $c=1$，以及 $f(x)=e^{-x^2}$. 可以验证：此时，(1)～(2)的精确解为

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4t+1}}e^{-\frac{x^2}{4t+1}},\quad -\infty<x<\infty, t>0.$$

(见 7.4 节习题 24.)由于 $f(x)=e^{-x^2}$ 的傅里叶变换是

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\omega^2/4},$$

我们知道 f 并不是有限带宽的. 但是，因为 $\hat{f}$ 趋近于零非常快，所以可以假设 f 是有限带宽的，试取带宽 $W=2$. (如下所示，这个值的选取得到了满意的数值结果. 如果希望得到更精确的结果，可以取更大的 W 值.)现在，(5)式并不能得到精确解，但是它将得到一个近似解. 由(5)式，我们有

$$u(x,t)\approx\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\int_0^2 e^{-\omega^2 t}\cos\left(\omega\left(x-n\frac{\pi}{2}\right)\right)d\omega.$$

557

取部分和，我们得到

$$u(x,t)\approx\frac{1}{2}\sum_{n=-5}^{5}e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\int_0^2 e^{-\omega^2 t}\cos\left(\omega\left(x-n\frac{\pi}{2}\right)\right)d\omega.$$

(同样，这里部分和的选取也得到了解的满意数值逼近．为得到更好的结果，可以从级数中加入更多的项.)对每一个 t 值，近似解是 x 的函数，它由例 1 中借助计算机系统计算过的积分来表示．近似解在不同 t 值时的图像如图 3 所示．为便于比较，我们也画出了精确解在相同 t 值时的图像．图像说明我们得到了解的一个相当好的逼近．如果希望得到更好的逼近，可以对更大的带宽 W 重复以上过程． ■

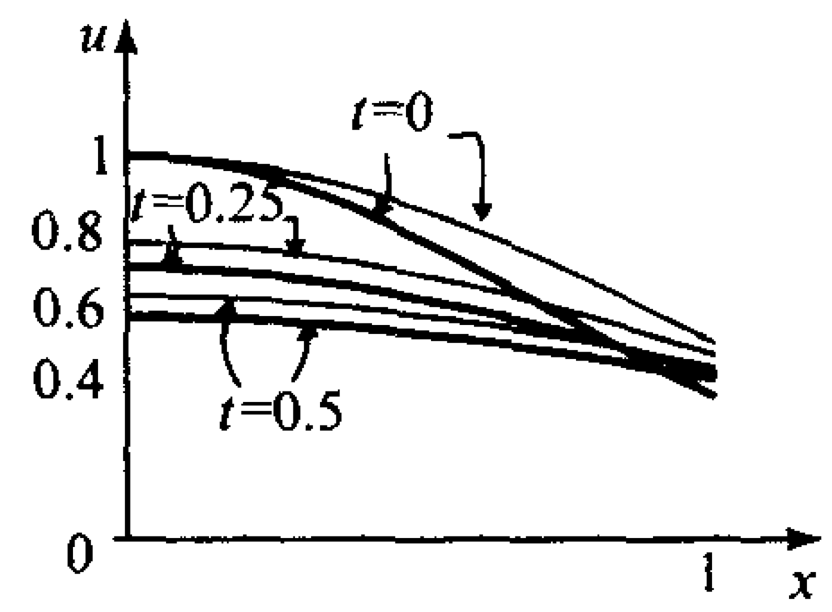


图 3 精确解(粗线)与近似解(细线)的比较

习题 10.2

1. 对 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，重做例 1.

2. 对 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，重做例 2.

3. **专题问题：带有抽样的泊松积分公式**．在这个习题中，我们推导有限带宽函数的泊松积分公式(7.5 节(5)式)的另一种形式，新公式用边界函数的抽样值来表达．

   假设 f 是有限带宽的，带宽为 W，试证：由 7.5 节(1)～(2)给出的狄利克雷问题的解是

$$u(x,y)=\frac{1}{W}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{n\pi}{W}\right)\int_0^W e^{-y\omega}\cos\left(\omega\left(x-n\frac{\pi}{W}\right)\right)d\omega.$$

   [提示：利用 7.5 节中狄利克雷问题的解证明：

$$u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{-y|\omega|}e^{i\omega x}d\omega,$$

   然后利用前一节的定理 4.]

4. (a)试证：$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$不是有限带宽的.

   (b)假设希望利用 f 的抽样值，求解(a)中给出的边界函数为 $f(x)$ 的狄利克雷问题．由于 f 不是有限带宽的，不能应用习题 3 中的公式．但是，因为 f 的傅里叶变换趋于零的速度很快，可以假设 f 是有限带宽的，带宽为 W，其中 W 是待定的，取决于所要达到的精度．按照例 2 的步骤，对不同的 W 值，推导不同的近似解．画出这些解的图像，并与精确解

$$u(x,y)=\frac{1+y}{x^2+(1+y)^2}$$

   作比较．(注：此精确解可以利用 7.5 节的习题 6 推得.)

558

10.3 离散傅里叶变换与快速傅里叶变换

正如在第 7 章所看到的，傅里叶变换是求解边值问题的最重要方法之一．计算傅里叶变换需要知道函数在一个连续集上的值．但是，在实际应用中，函数是根据一个离散集的值来度量的，由于这个原因，必须知道如何从离散集上的度量信息来求解问题和计算傅里叶变换．在 10.1 节，我们学习了抽样定理，这使得可以从一个离散集上的抽样值，来重构函数及其傅里叶变换．这些技巧对有限带宽函数适用，并可以用来逼近更一般的函数．在本节，我们将发展一套由抽样值来计算傅里叶变换的新工具，这些工具是基于所谓的离散傅里叶变换(DFT)．这些变换不仅可以应用到很广泛的函数上，而且还有一个很有效的算法，称为快速傅里叶变换

(FFT)，来计算它. 由于这个很成功的算法，DFT 是逼近傅里叶变换的最常用的方法.

作为作用在序列上的变换，DFT 具有许多与傅里叶变换类似的有趣性质. 在探求这些性质时，记住傅里叶变换相应的性质是有帮助的.

离散傅里叶变换

我们将记 N 个实数或复数有限序列(或 N-**序列**)为

$$x=(x(j))_{j=0}^{N-1}=(x(0),x(1),\cdots,x(N-1)).$$

我们将这个序列看成离散域{0, 1, …, $N-1$}上的函数.

序列的基本运算

如果 x 和 y 是两个序列，我们定义它们的和 $x+y$，以及它们的积 xy 分别为

$$(x+y)(j)=x(j)+y(j)$$

和

$$xy(j)=x(j)y(j).$$

同样，如果 x 是序列，a 是数，则 ax 是指第 j 项为 $ax(j)$的序列. 现在，我们给出一个基本定义.

559

离散傅里叶变换 给定一个 N-序列 $x=(x(0), x(1), \cdots, x(N-1))$，我们定义 x 的 N 点**离散傅里叶变换**(简记为 DFT)为

$$X(k)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}x(j)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} j\frac{k}{N}},\quad k=0,1,\cdots,N-1. \tag{1}$$

因此，N-序列 x 的 DFT 是另一个复数 N-序列 $X=(X(0), X(1), \cdots, X(N-1))$. 我们将同样用记号 $X=\mathcal{F}_N(x)$.

[提示：这里的 DFT 定义可能与其他文献不同.]

注意这个定义与傅里叶变换定义的相似之处. 这里，我们将序列的值乘以一个复指数函数，再在序列的整个定义域上求和. 在傅里叶变换中，我们将函数乘以一个复指数函数，再在函数的整个定义域上求积分. 事实上，通过将在连续区域上的积分适当地转换成离散域上的求和，你可以发现傅里叶变换的许多性质可以变成 DFT 的性质.

例 1 计算 DFT

为计算 $x=(0, 1, 1, -1)$的(四点)DFT，利用(1)式，将 DFT 的四项写成

$$\mathcal{F}_4(x)(k)=\frac{1}{\sqrt{4}}\sum_{j=0}^{3}x(j)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} j\frac{k}{4}},\quad k=0,1,2,3.$$

将 $x(j)$以其值代入，我们得到第一项

$$\mathcal{F}_4(x)(0)=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3}x(j)=\frac{1}{2}(0+1+1+(-1))=\frac{1}{2}.$$

对于第二项，我们有

$$\mathcal{F}_4(x)(1)=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3}x(j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{j\pi}{2}}=\frac{1}{2}(0+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}})$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}+\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi-\cos\frac{3\pi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}.$$

类似地，我们有

$$\mathcal{F}_4(x)(2)=\frac{1}{2}\quad 及\quad \mathcal{F}_4(x)(3)=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}.$$

560 因此，$x=(0, 1, 1, -1)$的 DFT 是 $X=\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}+\mathrm{i}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}-\mathrm{i}\right)$. ■

就像前面所遇到的变换一样，DFT 也具有逆，称为**离散傅里叶逆变换**(IDFT)，由下式给出：

离散傅里叶逆变换

$$\mathcal{F}_N^{-1}(X)(k)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}X(j)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}j\frac{k}{N}},\quad k=0,1,\cdots,N-1. \tag{2}$$

因此，一个 N-序列的 IDFT 是另一个 N-序列. 注意定义式(1)和(2)之间的类似之处. 正如你所期望的，逆变换的作用就是重新得到原来的序列. 这就是下面这个定理所叙述的，其证明放在本节之后的附录中.

定理 1(DFT 的逆)　*对任意一个 N-序列 x，我们有*

$$\mathcal{F}_N^{-1}(\mathcal{F}_N(x))(k)=x(k),\quad k=0,1,\cdots,N-1.$$

作为直接推论，我们得到 DFT 的唯一性，即如果两个 N-序列 x 和 y，满足 $X=Y$，则 $x=y$.

例 2　计算 IDFT

令 X 表示例 1 中的 DFT，利用(2)式，计算 X 的 IDFT，以验证定理 1.

解　对 $X=\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}+\mathrm{i}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}-\mathrm{i}\right)$应用(2)式，我们得到

$$\mathcal{F}_4^{-1}(X)(k)=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3}X(j)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}j\frac{k}{4}},\quad k=0,1,2,3.$$

作适当的计算和化简，我们得到

$$\mathcal{F}_4^{-1}(X)(0)=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3}X(j)=0=x(0);$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_4^{-1}(X)(1)&=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3}X(j)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{j\pi}{2}}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}}+\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\right)(-\mathrm{i})+\frac{1}{2}(-1)+\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\right)\mathrm{i}\right)\\&=1=x(1).\end{aligned}$$

561

类似可得

$$\mathcal{F}_4^{-1}(X)(2)=1=x(2)\quad 及\quad \mathcal{F}_4^{-1}(X)(3)=-1=x(3).$$

因此，正如定理 1 所断言，我们有$\mathcal{F}_4^{-1}(X)=\mathcal{F}_4^{-1}(\mathcal{F}_4(x))=x$. ■

运算性质

正如你所期望的，DFT 和 IDFT 都是**线性的**，即如果 a 和 b 是复数，x 和 y 是 N-序列，则

$$\mathcal{F}_N(ax+by)=a\,\mathcal{F}_N(x)+b\,\mathcal{F}_N(y)$$

和

$$\mathcal{F}_N^{-1}(ax+by)=a\,\mathcal{F}_N^{-1}(x)+b\,\mathcal{F}_N^{-1}(y).$$

下面的性质是讨论 DFT 的周期性，在(1)式中定义 DFT 时，我们限制 k 是集$\{0, 1, 2, \cdots, N-1\}$中的整数. 这个限制使得我们可以将一个 N-序列的 DFT 看成另一个 N-序列. 如果我们允许 k 为任意整数，情况如何？为回答这个问题，记住复指数函数 e^z 是 $2\pi i$-周期的，因此

$$e^{2\pi ij\frac{k+N}{N}}=e^{2\pi ij\frac{k}{N}+2\pi ij}=e^{2\pi ij\frac{k}{N}}e^{2\pi ij}=e^{2\pi ij\frac{k}{N}}.$$

代入(1)式，我们得到

$$X(k)=X(k+N), \tag{3}$$

从而，DFT 是**周期的**，周期为 N. 类似的论证说明 IDFT 也是**周期的**，周期为 N. 必须记住，只有对所有整数 k，计算(1)和(2)式时，周期性才能用的上，而不是仅对 $0, 1, 2, \cdots, N-1$.

下面，我们将一个有限 N-序列与其 N-周期延拓所得到的无穷序列等同起来，即给定一个 N-序列 $x(k)$，$k=0, 1, \cdots, N-1$，我们构造一个无穷 N-周期序列，定义为 $x(k+N)=x(k)$. 我们将利用同一个记号来表示有限和无穷序列，而不加说明.

给定两个 N-序列 x 和 y，我们将它们视为整数集上的 N-周期序列，我们可以定义其卷积如下.

序列的卷积 $$x*y(k)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}x(j)y(k-j),\quad k=0,1,\cdots,N-1. \tag{4}$$

562

由于 x 和 y 是周期的，周期为 N，所以 $x*y$ 也是 N-周期的. 利用下面的定理 2，可以证明卷积是交换的、结合的、分配的(见习题 7). 对于卷积，我们有如下重要的性质.

定理 2(卷积的变换) *对任意两个 N-序列 x 和 y，我们有*

$$\mathcal{F}_N(x*y)=\mathcal{F}_N(x)\,\mathcal{F}_N(y)$$

和

$$\mathcal{F}_N^{-1}(XY)=x*y.$$

证明 注意到，第二个等式是第一个等式和 DFT 的唯一性的推论. 为证明第一个等式，我们利用(1)和(4)，交换求和的顺序，我们得到

$$\mathcal{F}_N(x*y)(k)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{l=0}^{N-1}x(l)\,\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}y(j-l)e^{2\pi ij\frac{k}{N}}.$$

在里面的求和号中平移求和指标，我们得到

$$\mathcal{F}_N(x*y)(k)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{l=0}^{N-1}x(l)\,\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=-l}^{N-l-1}y(j)e^{2\pi i(j+l)\frac{k}{N}}$$

$$= \overbrace{\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{l=0}^{N-1} x(l)\mathrm{e}^{2\pi i l \frac{k}{N}}}^{X(k)} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1} y(j)\mathrm{e}^{2\pi i j \frac{k}{N}}}^{Y(k)} \quad \text{(由习题 10)}$$

$$= X(k)Y(k),$$

这就证明了定理. ■

正如下个例题所示，定理 2 可以用来计算卷积.

例 3　序列的卷积

令 $x=(1，1，1，2)$和 $y=(-1，1，3，-2)$，求 $x*y$.

解　首先利用计算机，计算 DFT 序列 X 和 Y：

$$X = (2.5, -0.5\mathrm{i}, -0.5, 0.5\mathrm{i}) \quad 及 \quad Y = (0.5, -2+1.5\mathrm{i}, 1.5, -2-1.5\mathrm{i}).$$

因此，$XY=(1.25，0.75+\mathrm{i}，-0.75，0.75-\mathrm{i})$，再利用计算机计算 IDFT，我们得到

563

$$x*y = \mathcal{F}_4^{-1}(XY) = (1,2,-0.5,0).$$ ■

快速傅里叶变换

快速傅里叶变换(FFT)是计算离散傅里叶变换的一个有效算法，是图基和库利在 1965 年发现的，被认为是 20 世纪中对数值分析的最重要贡献之一. 为描述这个算法，令 $x=(x_0，x_1，\cdots，x_{N-1})$是一个复数 N-序列，其 DFT 由(1)式给出：

$$X(k) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1} x(j)\mathrm{e}^{2\pi i j \frac{k}{N}}, \quad k = 0,1,\cdots,N-1.$$

我们对完成一个 DFT 所需的运算次数感兴趣. 定义一个**初等运算**为两个复数相乘一次和两个复数相加一次. 显然，按照(1)式来计算 $X(k)$时，需要 N 次初等运算，由于有 N 个这样的数，所以为计算 N-序列 X，需要 N^2 次初等运算. 如果 N 是素数，我们不可能做得更好，但是如果 N 是复合数，比如说，

$$N = N_1 N_2,$$

则我们将证明只需作 $N(N_1+N_2)$次运算就可以计算 DFT 了. 在深入介绍 FFT 算法技巧之前，我们讨论它通常是如何应用的. 用下面将介绍的证明同样可以说明：如果 $N=N_1N_2N_3$，则只需完成 $N(N_1+N_2+N_3)$次初等运算就可以计算 DFT 了；依次类推. 为使利用 FFT 时的节省最大化，实际应用中，我们取 $N=2^\nu$. 那么，计算 DFT 所需的初等运算次数变为

$$N\underbrace{(2+2+\cdots+2)}_{\nu次} = 2\nu N = 2N\ln_2 N.$$

当与用最直接的方法计算 X 所需的运算次数 N^2 比较时，我们发现：当 N 很大时，利用 FFT 的节省是很可观的.

现在，对 $N=N_1N_2$ 情形，我们解释 FFT 的思想. 对 j，$k=0，1，2，\cdots，N-1$，利用长除法，记

$$j = j_1 N_1 + j_2 \quad 及 \quad k = k_1 N_2 + k_2,$$

其中 j_2 和 k_1 是从 0 取到 N_1-1，而 j_1 和 k_2 是从 0 取到 N_2-1. 则

$$\begin{aligned} e^{2\pi i jk/N} &= e^{2\pi i(j_1N_1+j_2)(k_1N_2+k_2)/N} \\ &= e^{2\pi i(j_1k_1+j_1k_2/N_2+k_1j_2/N_1+j_2k_2/N)} \\ &= e^{2\pi i(j_1k_2/N_2+k_1j_2/N_1+j_2k_2/N)}, \end{aligned}$$

564

因为 $e^{2\pi i j_1k_1}=1$. 代入(1)，我们得到

$$X(k)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}x(j)e^{2\pi i(j_1k_2/N_2+k_1j_2/N_1+j_2k_2/N)}.$$

现在，对所有的 $j=0, 1, \cdots, N-1$ 求和，就是对所有的 $j_1=0, 1, \cdots, N_2-1$ 和 $j_2=0, 1, \cdots, N_1-1$ 求和. 因此，

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j_2=0}^{N_1-1}e^{2\pi i(k_1j_2/N_1+j_2k_2/N)}\sum_{j_1=0}^{N_2-1}x(j_1N_1+j_2)e^{2\pi i j_1k_2/N_2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j_2=0}^{N_1-1}e^{2\pi i(k_1j_2/N_1+j_2k_2/N)}C(j_2,k_2), \end{aligned} \tag{5}$$

其中

$$C(j_2,k_2)=\sum_{j_1=0}^{N_2-1}x(j_1N_1+j_2)e^{2\pi i j_1k_2/N_2}.$$

现在，我们可以数数计算所有的 $X(k)$需要多少次初等运算了. 最重要的一步是，注意到每个 $C(j_2, k_2)$都出现在 N_1 个不同 k 的 $X(k)$的计算中，即 $k=k_2$, N_2+k_2, $2N_2+k_2$, $\cdots$, $(N_1-1)N_2+k_2$. 每个 $C(j_2, k_2)$需要 N_2 次初等运算. 由于有 N 个 $C(j_2, k_2)$(记住 $0\leqslant j_2\leqslant N_1-1$, $0\leqslant k_2\leqslant N_2-1$)，我们需要 NN_2 次初等运算来计算所有的 $C(j_2, k_2)$. 计算出所有的 $C(j_2, k_2)$后，我们利用(5)式，计算 $X(k)$. 由(5)式，需要 N_1 次运算来计算 $X(k)$. 由于有 N 个 $X(k)$，我们需要 NN_1 次运算. 因此，运算的总次数为

$$NN_2+NN_1=N(N_1+N_2),$$

即为所求.

附录：定理 1 的证明

首先，我们建立一个有趣的恒等式. 对 $j, k=0, 1, 2, \cdots, N-1$，我们有

$$\sum_{n=0}^{N-1}e^{2\pi i n\frac{j-k}{N}}=\begin{cases}0 & 若\ j\neq k, \\ N & 若\ j=k.\end{cases} \tag{6}$$

注意到，恒等式的第二部分是显然的，因为如果 $j=k$，求和中的每一项都是 1，所以总和为 N. 为证明第一部分，我们记

$$e^{2\pi i n\frac{j-k}{N}}=z^n,$$

其中 $z=e^{2\pi i\frac{j-k}{N}}$. 利用这个记号，显然，(6)式中的求和是一个几何求和，它等于$\frac{1-z^N}{1-z}$. 由于 $z^N=e^{2\pi i(j-k)}=1$，所以求和为 0，即为所求(注意，对 $j\neq k$, $z\neq 1$). 有了(6)式，定理 1 的证明就变得直接了. 利用(1)和(2)，我们得到

565

$$\mathcal{F}_N^{-1}(\mathcal{F}_N(x))(k)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1}\overbrace{\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}x(j)\mathrm{e}^{2\pi i j\frac{n}{N}}}^{X(n)}\mathrm{e}^{-2\pi i n\frac{k}{N}}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}x(j)\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{2\pi i(j-k)\frac{n}{N}}.$$

由(6)式，内层的和为 0，除非 $j=k$，此时的和为 N. 因此，

$$\mathcal{F}_N^{-1}(\mathcal{F}_N(x))(k)=\frac{1}{N}x(k)N=x(k),$$

从而完成证明. ■

习题 10.3

1. 令 $x=(1,\ 2,\ 3)$和 $y=(4,\ -1,\ 0)$，计算：(a)$x+y$，(b)$x-2y$，(c)xy，(d)$x(x+y)$，(e)X，(f)Y.
2. 对给定的 x，计算$\mathcal{F}_3(x)$和$\mathcal{F}_3^{-1}(x)$.

   (a)$x=(0,\ 1,\ 1)$.　(b)$x=(-1,\ 0,\ 1)$.　(c)$x=(-1,\ 1,\ 2)$.

   [提示：对(c)，利用(a)和(b)中所得到的结果.]

在习题 3～4 中，利用例 3 的方法，计算 X，Y 和 $x*y$.

3. $x=(1,\ 2,\ 0,\ 1)$，$y=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$.
4. $x=(0,\ 0,\ 1,\ -1)$，$y=(1,\ 2,\ -1,\ 1)$.
5. 直接由(4)式，计算 $x*y(0)$和 $x*y(1)$，其中 x 和 y 由习题 3 给出. [提示：在执行计算之前，将 y 作周期延拓.]
6. 令 x 和 y 由习题 1 给出，利用(4)式计算卷积，以验证 $x*y=y*x$.
7. 由定理 2，对任意 N-序列 x，y，z，验证：$x*y=y*x$，$x*(y*z)=(x*y)*z$，以及 $x*(y+z)=x*y+x*z$.
8. 利用例 3 的方法，计算 $x*y$，$y*x$，$x*y*z$，其中 x，y 由习题 3 给出，而 $z=(1,\ -1,\ 0,\ 0)$.
9. 以 ϵ 表示第一项为$\sqrt{N}$、其余项都是 0 的 N-序列.

   (a)试证：$\mathcal{F}_N(\epsilon)(k)=1$ 对所有 k 成立.

   (b)由(a)得出结论：$\epsilon*x=x$ 对所有 N-序列 x 成立. 因此，ϵ 是 N-序列卷积运算的单位元.
10. **周期序列的和**.

    (a)假设$(f(n))_{n=-\infty}^{\infty}$是一个 N-周期序列. 试证：对任意 l，

    566

    $$\sum_{n=0}^{N-1}f(n)=\sum_{n=l}^{N+l-1}f(n).$$

    因此，N-周期序列的任意 N 个相邻项的和为常数. 这个结果与 2.1 节定理 1 类似. 仿照 2.1 节习题 18 的证明框架，可以证明它.

    (b)由(a)得出结论：对任意 N-序列 y，我们有

    $$Y(k)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=-l}^{N-l-1}y(j)\mathrm{e}^{2\pi i j\frac{k}{N}}.$$

    [提示：记住 y 是 N-周期的，证明$(\mathrm{e}^{2\pi i j\frac{k}{N}})_{j=-\infty}^{\infty}$也是 N-周期的.]
11. 令 x 是一个 N-序列，而 k 是个整数. 建立 DFT 及其逆的下列性质. 在(a)和(d)部分中，假设 x 是实值的.

    (a)$\mathcal{F}_N(x)(k)=\mathcal{F}_N(x)(-k)$.　(b)$\mathcal{F}_N(x)(-k)=\mathcal{F}_N^{-1}(x)(k)$.

    (c)$\mathcal{F}_N(x)(-k)=\mathcal{F}_N(x)(N-k)$.　(d)$\mathcal{F}_N(x)(N-k)=\overline{\mathcal{F}_N(x)(k)}$.

10.4　傅里叶变换与离散傅里叶变换

在本节中，说明如何利用离散傅里叶变换来逼近傅里叶变换，这将使得我们可以用快速傅里叶变换来数值逼近傅里叶变换．我们所探讨的联系建立在黎曼和对定义傅里叶变换

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x,\quad -\infty<\omega<\infty \tag{1}$$

积分的逼近基础之上．为简化叙述，我们以一个特殊情形开始．

情形Ⅰ：对所有 $x<0$，$f(x)=0$．则(1)式变为

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x,\quad -\infty<\omega<\infty. \tag{2}$$

现在，假设广义积分可以用有限区间上的定积分

$$\hat{f}(\omega)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{M}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x,\quad -\infty<\omega<\infty \tag{3}$$

来逼近，其中 M 是一个充分大的固定数．M 的值越大，对 $\hat{f}$ 的逼近越好．现在，我们用左端黎曼和来逼近定积分，增量为 $\Delta x=\frac{M}{N}$，其中 N 是区间 $[0, M]$ 上的分割数，从而得到

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega)&\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{M}{N}\sum_{j=0}^{N-1}f\left(j\frac{M}{N}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega j\frac{M}{N}}\\&=\frac{M}{\sqrt{2N\pi}}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}f\left(j\frac{M}{N}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega j\frac{M}{N}}.\end{aligned}$$

567

对 $k=0, 1, \cdots, N-1$，计算 $\hat{f}$ 在 $\omega=\frac{2\pi k}{M}$ 的值，我们得到

$$\hat{f}\left(\frac{2\pi k}{M}\right)\approx\frac{M}{\sqrt{2N\pi}}\overbrace{\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N-1}f\left(j\frac{M}{N}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi k}{N}j}}^{\left(f\left(j\frac{M}{N}\right)\right)_{j=0}^{N-1}\text{ 的 IDFT}}.$$

与 IDFT 的定义(10.3 节(2)式)比较，我们发现 $\hat{f}\left(\frac{2\pi k}{M}\right)$ 的值由序列 $\left(f\left(j\frac{M}{N}\right)\right)_{j=0}^{N-1}$ 的离散傅里叶逆变换的倍数给出．用符号来写，我们有

$$\boxed{\hat{f}\left(\frac{2\pi k}{M}\right)\approx\frac{M}{\sqrt{2N\pi}}\mathcal{F}_N^{-1}\left(f\left(j\frac{M}{N}\right)\right)(k),\quad k=0,1,\cdots,N-1.} \tag{4}$$

利用类似的方法，计算 $\hat{f}$ 在负数处的值，我们得到

$$\boxed{\hat{f}\left(-\frac{2\pi k}{M}\right)\approx\frac{M}{\sqrt{2N\pi}}\mathcal{F}_N\left(f\left(j\frac{M}{N}\right)\right)(k),\quad k=0,1,\cdots,N-1.} \tag{5}$$

情形Ⅱ：f 是对所有 x 都有定义的任意函数．回到(1)式，并选取一个充分大的 M，使得

$$\hat{f}(\omega)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-M/2}^{M/2}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x,\quad -\infty<\omega<\infty.$$

将积分分开，并作变量代换，我们得到

$$\hat{f}(\omega)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{M/2}^{M}f(x-M)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x-M)}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{M/2}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x.$$

对 $k=0, 1, \cdots, N-1$，计算在 $\omega=\frac{2\pi k}{M}$ 的值，并利用事实

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi k}{M}(x-M)}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi k}{M}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi k}{M}x},$$

我们得到

$$\hat{f}\left(\frac{2\pi k}{M}\right)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{M/2}^{M}f(x-M)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi k}{M}x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{M/2}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi k}{M}x}\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

568

现在，定义函数 g 为

$$g(x)=\begin{cases}0 & 若\ x<0,\\ f(x) & 若\ 0\leqslant x\leqslant\frac{M}{2},\\ f(x-M) & 若\ \frac{M}{2}\leqslant x\leqslant M,\\ 0 & 若\ x>M.\end{cases} \tag{7}$$

注意到 g 满足情形 I，它是将 f 在 $[-M/2, M/2]$ 之外截断，并将 $[-M/2, 0]$ 上的部分平移到 $[M/2, M]$ 上构成的. 利用(7)式，我们可以将(6)式的右端用 g 表达如下：

$$\hat{f}\left(\frac{2\pi k}{M}\right)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{M}g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi k}{M}x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi k}{M}x}\,\mathrm{d}x=\hat{g}\left(\frac{2\pi k}{M}\right).$$

由于 g 满足情形 I，我们可以利用(4)式来逼近 $\hat{g}$. 因此

$$\boxed{\hat{f}\left(\frac{2\pi k}{M}\right)\approx\frac{M}{\sqrt{2N\pi}}\mathcal{F}_N^{-1}\left(g\left(j\frac{M}{N}\right)\right)(k),\quad k=0,1,\cdots,N-1.} \tag{8}$$

注意这个逼近仅对 $k=0, 1, \cdots, N/2$ 是好的. 参看下面例 1 后面的讨论，特别是(12)式.

这就是我们要找的公式，它用一个离散傅里叶逆变换来表达 f 的傅里叶变换. 注意到，IDFT 事实上是在 $-k$ 处取值的一个离散傅里叶变换，$k=0, 1, 2, \cdots, N-1$. 关于 M，N 和 k 的相对大小，有几个重要说明. 当我们考察数值例子时，这些附注将更有意义.

在下面的例题中，我们用一个熟知的傅里叶变换来验证所得到公式的有效性和精度.

例 1 傅里叶变换的逼近

考虑函数：$f(x)=1$，当 $-1<x<1$ 时；否则 $f(x)$ 为零(图 1). 由傅里叶变换表，我们有

569

$$\hat{f}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega},\quad -\infty<\omega<\infty.$$

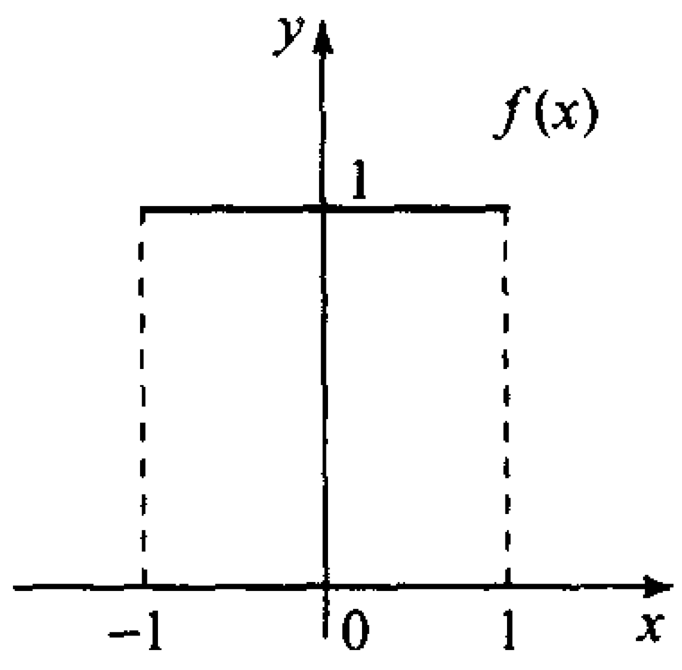


图 1 $f(x)$的图像

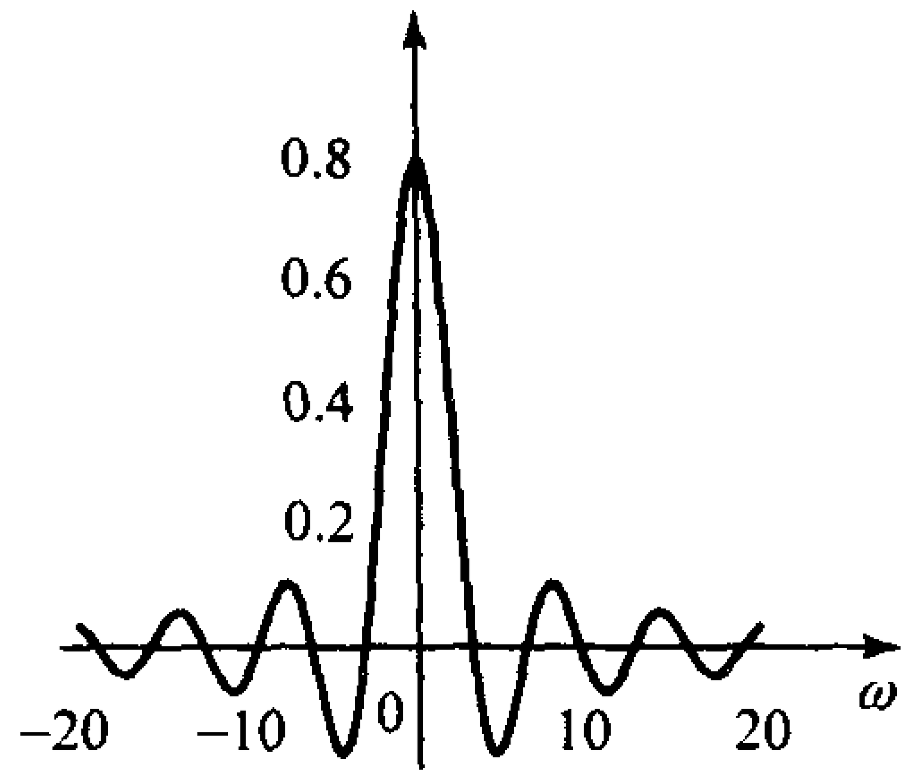


图 2 $\hat{f}(\omega)$的图像

这个变换的图像如图 2 所示. 我们的目标是用一个离散傅里叶变换来逼近$\hat{f}$. 为此目的，对$N=2^6$，$M=10$,我们应用(8)式，计算序列

$$x=\left(g\left(j\frac{10}{2^6}\right)\right)_{j=0}^{2^6-1} \tag{9}$$

的 IDFT，其中 $g(x)$由(7)式给出.（g 的图像如图 3 所示.）这将得到傅里叶变换在点

$$\omega=\frac{2\pi k}{10},\quad k=0,1,2,\cdots,2^6-1 \tag{10}$$

处的逼近值. 所得到的值画在图 4 中，并以线段连接以得到一个连续的图像. 当 k 从 0 变到 2^6-1 时,ω 的值由 0 变到$\frac{2\pi(63)}{10}\approx40$. 为便于比较，在图 5 中，我们将傅里叶变换的图像和图 4 中的图像画在一起. 注意到，这两个图像在 0 附近是相当靠近的；但是在 20 以外，我们所得到的逼近就变得越来越差了. 这个现象有个重要的原因. 回顾，IDFT 是周期的，周期为 N，但是傅里叶变换不是. 因此，一般而言，在超过 $k=\pm N/2$ 点后，不可能得到一个好的逼近. 事实上，由于周期性，我们有

$$\mathrm{IDFT}(x)(-k)=\mathrm{IDFT}(x)(N-k). \tag{11}$$

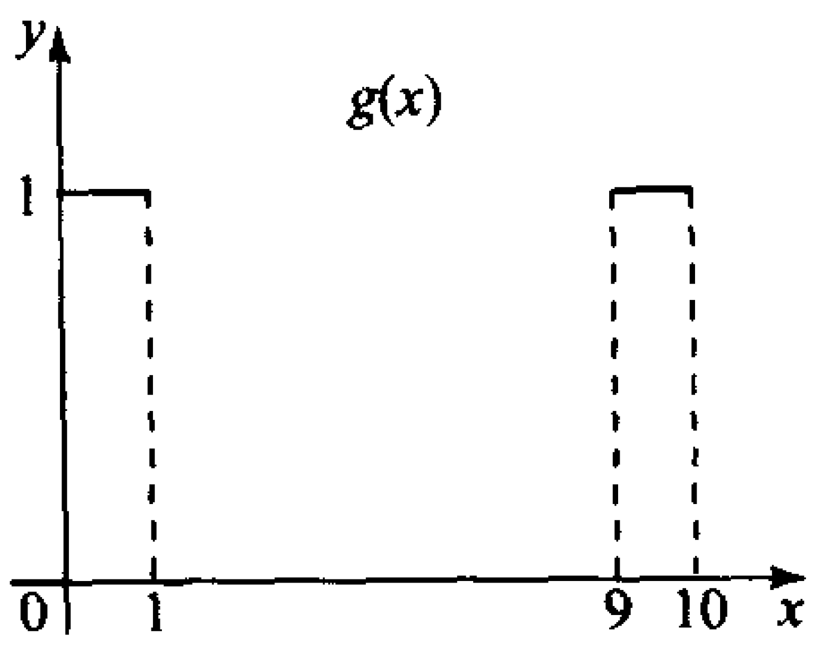


图 3 $g(x)$的图像

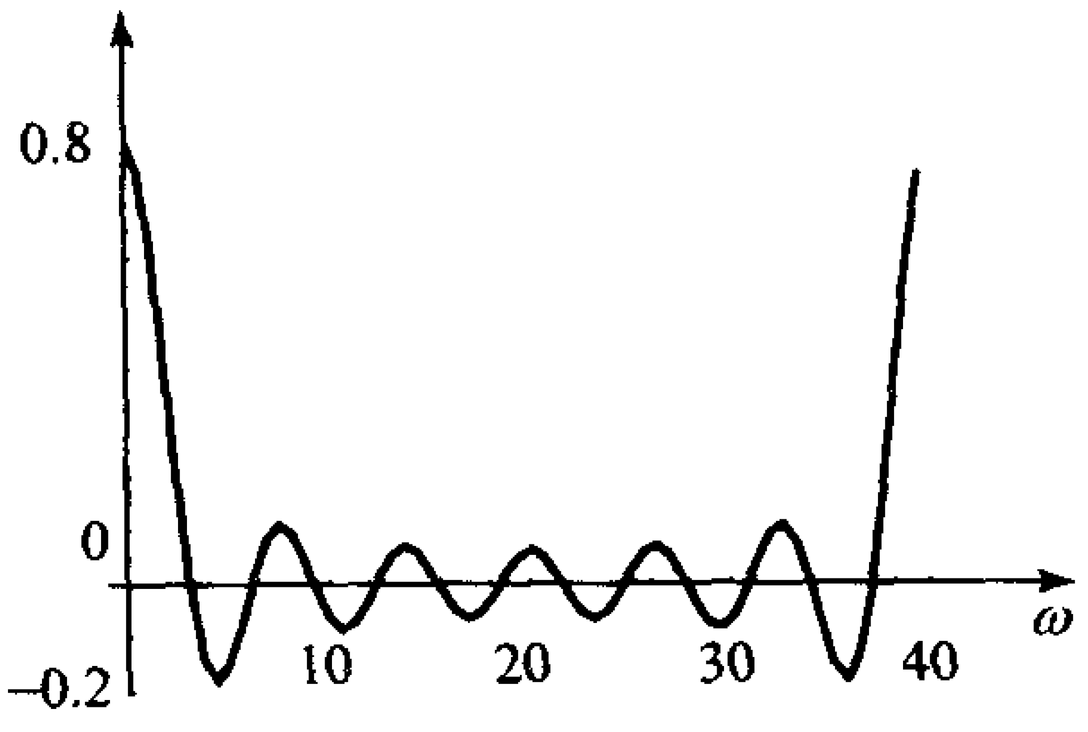


图 4 IDFT 的图像

570

因此，我们期望对应于 $k=N/2$，$N/2+1$，…，$N-1$ 的点处，得到傅里叶变换在$\omega=\frac{-2\pi(N-k)}{10}$处的好的逼近. 这由图 6 表示，其中在图 4 中相应于 ω 区间的后半部分的那段图像(即 ω 介于 20 和 40 之间)被平移到负 ω 轴上. 在图 7 中，我们将图 6 和图 5 中前半部分的

图像结合起来，构成傅里叶变换在区间(−20，20)上的逼近．最后，在图 8 中，我们将傅里叶变换和图 7 中的逼近比较．可以看到，这个逼近在整个区间上都是很好的．增加 N(如取 $N=2^{10}$)，可以得到更好的逼近．

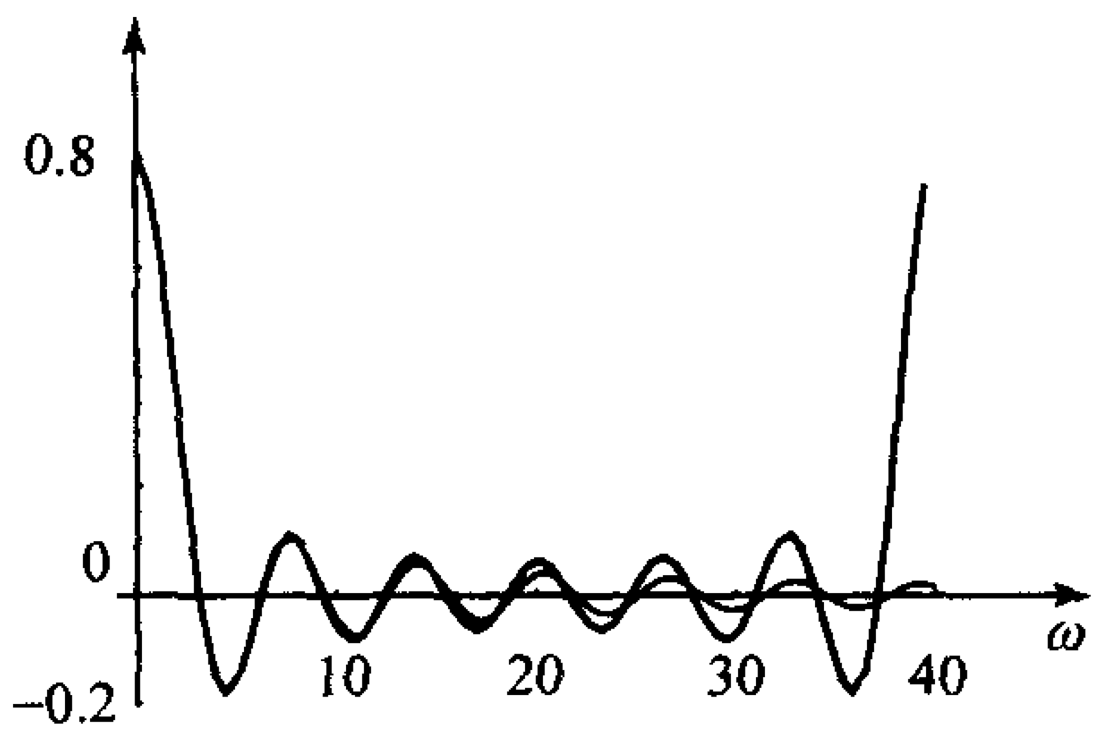


图 5 IDFT 和傅里叶变换的比较

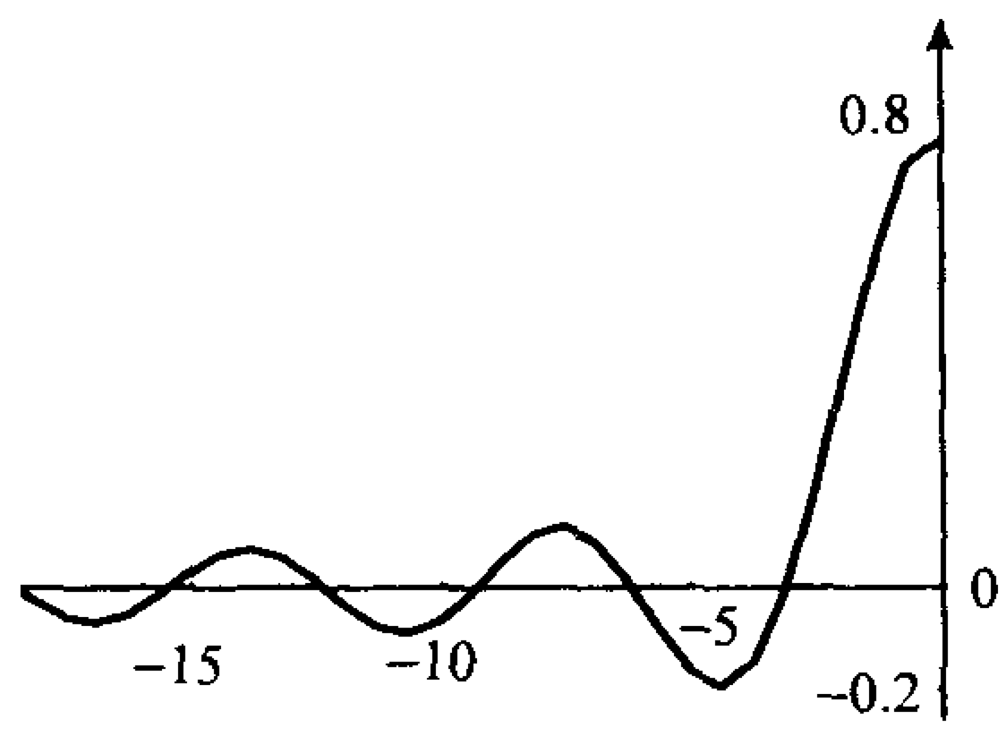


图 6

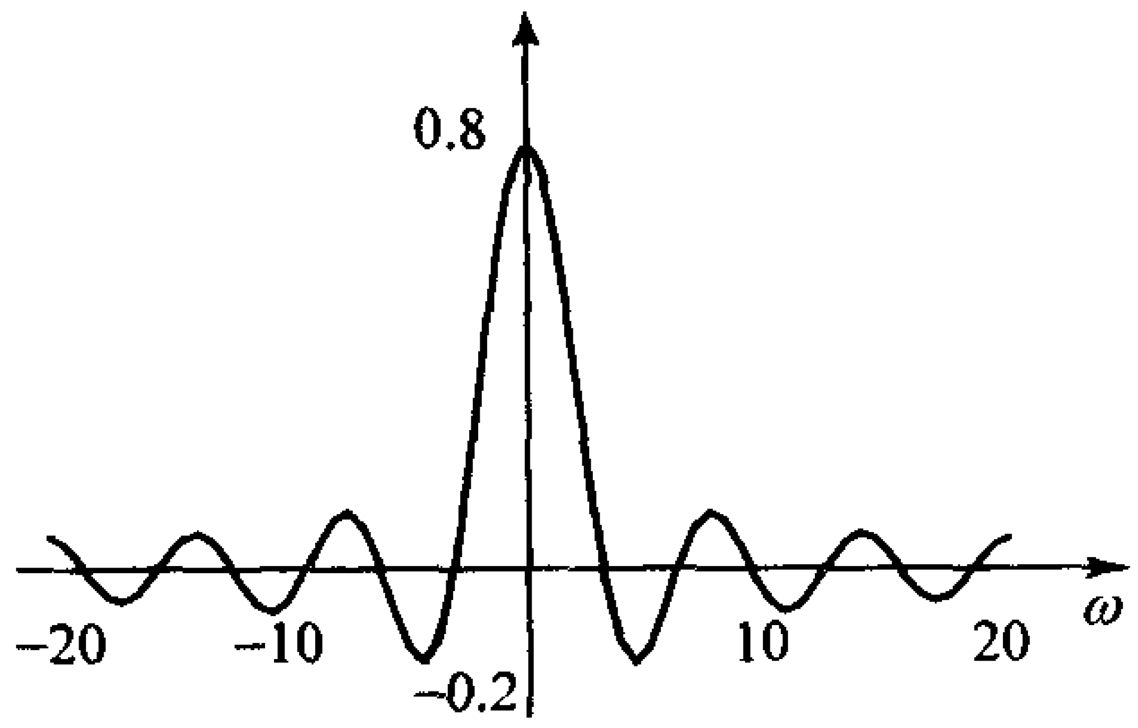


图 7

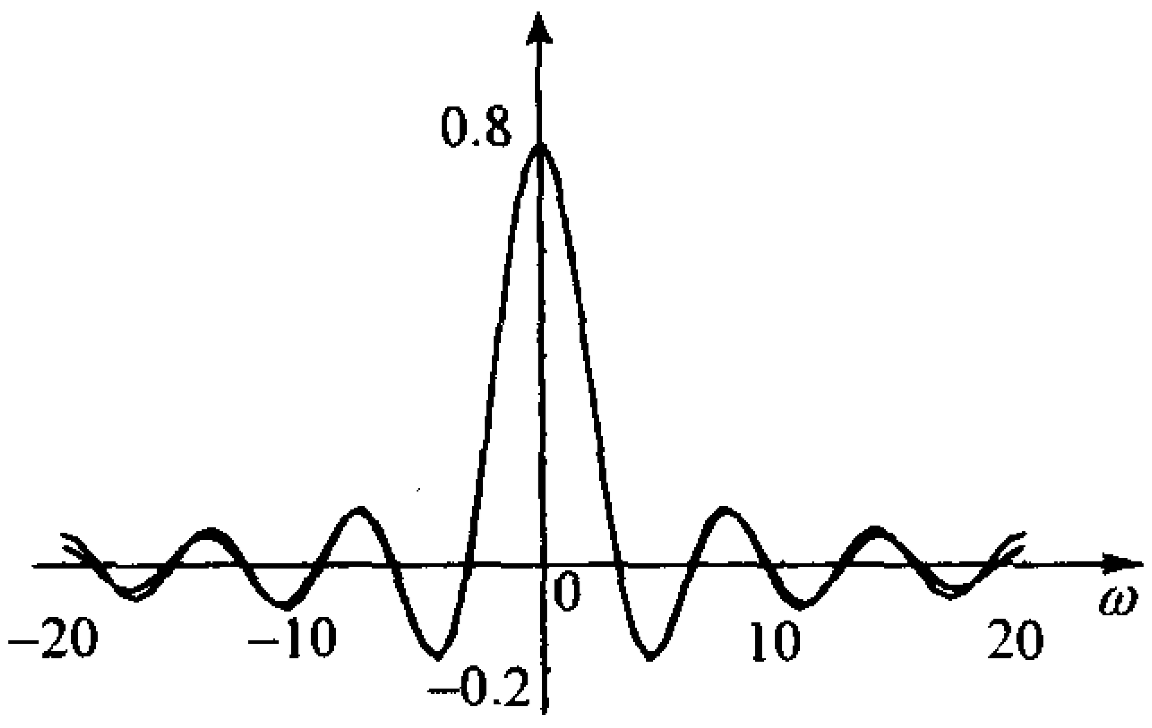


图 8 ■

按照例 1 的步骤，现在，我们将用 IDFT 逼近傅里叶变换的方法要点总结如下．

傅里叶变换的 DFT 逼近

步骤 1： 选择并固定 M 和 N，以备在(8)式中应用．习惯上，选取 N 为 2 的幂次．

步骤 2： 构造(7)式所描述的函数 g．在 ω 轴上，标出点

$$\omega=\frac{2\pi k}{M},\quad k=0,\pm 1,\cdots,\pm N/2.$$

步骤 3： 利用(8)式，在相应于 $k=0$，1，…，$N/2$ 的点 ω 处，逼近傅里叶变换值．

步骤 4： 利用(11)式，在相应于 $k=-1$，…，$-\frac{N}{2}+1$ 的点 ω 处，逼近傅里叶变换值．对 $k=1$，…，$N/2$，如下应用(8)式：

$$\boxed{\hat{f}\left(-\frac{2\pi k}{M}\right)\approx\frac{M}{\sqrt{2N\pi}}\mathcal{F}_N^{-1}\left(g\left(j\frac{M}{N}\right)\right)(N-k).}\tag{12}$$

步骤 5： 为得到更好的结果，对更大的 M 和 N，重复步骤 1～4.

本节的方法可以用来发展一套数值技巧，以便用 IDFT 来逼近傅里叶级数和函数的卷积．

571 这些重要的技巧在习题中介绍．

习题 10.4

在习题 1～4 中，在傅里叶变换表中找出$\widehat{f}$，然后如例 1 那样计算其逼近；画出并比较$\widehat{f}$及其逼近的图像.

1. $f(x)=e^{-x^2}$.
2. $f(x)=e^{-|x|}$.
3. $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$.
4. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.
5. **用 DFT 逼近卷积**．令 f 和 g 是两个定义在实线上的函数，回顾 7.2 节(3)式，卷积公式：$f*g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$.

   (a) 选取一个充分大的数 M，使得 $f*g(x)\approx\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-M}^{M}f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$. 利用左端点黎曼和逼近，得出
   $$f*g(x)\approx\frac{2M}{N\sqrt{2\pi}}\sum_{j=0}^{N-1}f(x-t_j)g(t_j),$$
   其中 $t_j=-M+j\dfrac{2M}{N}$.

   (b) 令 $\mathbf{f}=(f(t_j))_{j=0}^{N-1}$，$\mathbf{g}=(g(t_j))_{j=0}^{N-1}$．将这两个序列作周期延拓，周期为 N．对 $m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$，令 $x_m=m\dfrac{2M}{N}$．试证：$f(x_m-t_j)=\mathbf{f}(t_{m-j})$．(这里我们用记号 $\mathbf{f}(x_m)$代替 $\mathbf{f}(m)$，因为前者更具启发性.)得出结论
   $$f*g(x_m)\approx\frac{2M}{\sqrt{2\pi}N}\mathbf{f}*\mathbf{g}(x_m).$$
   这个公式提供了用 DFT 逼近两个函数卷积的一种方法，因为我们知道两个序列的卷积可以用 DFT 来计算.

在习题 6～7 中，直接计算卷积 $f*g$，然后利用习题 5 的结果求出其逼近；画出并比较函数 $f*g$ 及其逼近的图像.

6. $f(x)=g(x)=\mathcal{U}_0(x+1)-\mathcal{U}_0(x-1)$(见 7.2 节习题 3).
7. $f(x)=xe^{-x^2}$，$g(x)=e^{-x^2}$(见 7.2 节习题 45).
8. **傅里叶级数和 DFT 的关系**．在本题中，我们将讨论傅里叶级数的形式(2.6 节)．假设 f 是 T-周期函数，并令 c_k 表示 f 的傅里叶系数(2.6 节(4)式).

   (a) 试证：$c_{-k}\approx\dfrac{1}{N}\sum\limits_{j=0}^{N-1}f\left(j\dfrac{T}{N}\right)e^{2\pi ijk/N}$.

   (b) 令 $\mathbf{f}=\left(f\left(j\dfrac{T}{N}\right)\right)_{j=0}^{N-1}$，试证：$c_{-k}\approx\dfrac{1}{\sqrt{N}}\mathcal{F}_N(\mathbf{f})(k)$，类似地有 $c_k\approx\dfrac{1}{\sqrt{N}}\mathcal{F}_N^{-1}(\mathbf{f})(k)$．(根据经验，这个公式对 $|k|\leqslant N/8$ 效果很好.)

   (c) 得出结论：$f(x)\approx\dfrac{1}{\sqrt{N}}\sum\limits_{|k|\leqslant N/8}\mathcal{F}_N^{-1}(\mathbf{f})(k)e^{2\pi ikx/T}$.

在习题 9～10 中，画出 f 和由习题 8(c)给出逼近的图像，以验证习题 8 结果的有效性.

9. $f(x)=\dfrac{1}{2}(\pi-x)$对 $0<x<2\pi$，$T=2\pi$.
10. $f(x)=\sin x$ 对 $-\pi<x<\pi$，$T=2\pi$.

572

第11章 量子力学引论

现象的最终真理寓于其数学描述中，只要没有瑕疵，我们对现象的理解就是绝对的．我们冒险超越数学公式．

——詹姆斯·琼斯爵士

综述 在 11.1 节和 11.2 节，我们将用分离变量法，求解不定常的薛定谔方程的特殊情形．这个问题的求解过程需要埃尔米特和拉盖尔多项式．这些多项式的基本性质在 11.4 节中介绍，以备需要时参考；11.4 节的完整讨论并不作为本章的预修知识．5.4 节所介绍的球面调和函数将在 11.2 节中用到．但是，如拉盖尔和埃尔米特多项式，这些材料并不需要预先学习，只是在需要时作为参考．7.2 节所介绍的傅里叶变换，在 11.3 节中起着关键性作用．

导读 本章考虑傅里叶变换和分离变量法在量子力学问题中的应用．因此，它给出了量子力学知识的一个简单介绍，并说明了本书所发展的方法的应用范围之广．在学完本章之后，读者可以阅读任何一本关于量子力学的书，并可以发现许多这里根本没有涉及的有趣应用．

至今为止，我们考虑了物理和工程中的最经典论题：主要有热(或扩散)传导方程、波动方程、拉普拉斯方程以及泊松方程．现在，我们举一些出现在量子理论中的有趣论题．在 11.1 节，首先简单介绍量子力学的基本概念和术语，并说明薛定谔方程是如何出现的，然后运用分离变量法解之．在 11.2 节中，介绍我们的工具和方法在量子力学中最成功的应用：氢原子模型．在 11.3 节，介绍量子力学与傅里叶变换之间的联系，然后由此导出海森伯格不定性原理．最后一节是关于正交多项式的补充材料，这些多项式将用来求解我们的量子力学模型中的偏微分方程．本章的应用使我们有机会将分离变量法应用到一个崭新且有趣的背景中．事实上，11.2 节所介绍的氢原子模型是量子力学几个主要成功案例之一．

573

11.1 薛定谔方程

在经典力学中，当我们知道初始位置和速度之后，物体在某个外力作用下的运动轨迹就可以完全确定了．牛顿第二运动定律($F=ma$)奠定了这个理论的基础．它是推导控制物体运动(如，弹簧上的质点、振动着的弦或膜、悬链)的微分方程的关键．在 20 世纪初，人们就已经发现，基于牛顿定律的经典模型不能准确描述非常细小物体的运动，如电子等．事实上，人们不能同时准确测量到一个原子粒子的位置和速度(参见 11.3 节的海森伯格不定性原理)．由于这个与经典力学的显著不同之处，以及粒子状态不能够绝对确定地决定，一种基于统计观点的新理论产生了．这个革命性的理论，称为量子力学，假定原子粒子的位置只能以某个确定的概率来确定．

博恩统计解释

考虑在某个力场作用下单个电子沿 x 轴运动的情形. 在量子力学中，我们对这个电子赋予一个非负函数 $\rho(x)$，称为**概率密度函数**，它给出在给定区间[a，b]上发现该电子的概率. 这个统计解释是由麦克斯·博恩在 1926 年引入的，因此，

$$\text{电子在区间}[a,b]\text{上的概率} = \int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x.$$

因为全概率为 1，我们有 $\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\,\mathrm{d}x = 1$. 在图 1 中，这个概率就是介于 $x=a$ 和 $x=b$ 之间 ρ 图像下的阴影部分的面积.

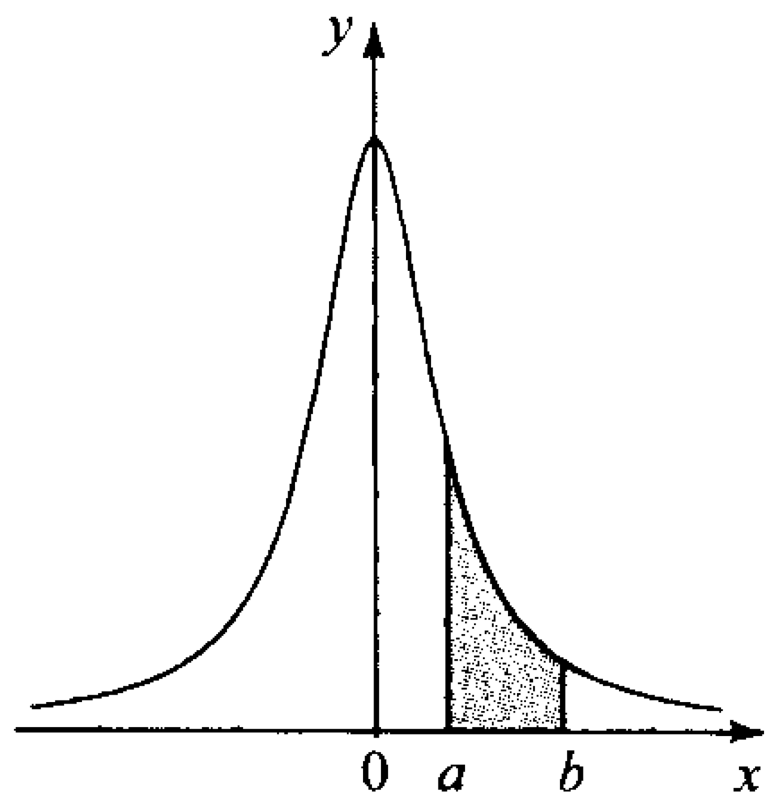


图 1　作为面积的概率

一个非常重要的量是电子的**波函数**，$\psi(x)$，这个函数的信息使我们可以预测出电子的全部性态. 我们可以利用它来确定电子动量和速度的概率密度，以及其他各种量. 例如，量子力学的一个基本公理说，位置密度 ρ 可以用波函数 ψ 由下式计算：

$$\boxed{\rho(x) = |\psi(x)|^2 = \psi(x)\,\overline{\psi(x)}.} \tag{1}$$

574

考虑到 ρ 是概率密度这个事实，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x = 1. \tag{2}$$

电子的动量概率密度与波函数 ψ 的傅里叶变换有关，这个联系将在 11.3 节中探讨.

对力场作用下粒子在两个或三个方向上的运动，同样的定义也适用；另外，我们可能必须考虑对时间的依赖性，此时，概率密度是两个、三个或更多个变量的函数. 例如，对于具有不定常的波函数 ψ、在三个方向运动的粒子，在区域 D 内在给定时刻 t 发现该粒子的概率是

$$\iiint_D |\psi(x,y,z,t)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{3}$$

因此，对给定 t，粒子位置的概率密度是

$$\boxed{\rho(x,y,z,t) = |\psi(x,y,z,t)|^2.}$$

下面我们提出如何求出波函数这个基本问题.

不定常的薛定谔方程

量子力学的一个事实是：波函数 $\psi(x,\ y,\ z,\ t)$是**薛定谔方程**

$$\boxed{\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi + V(x,y,z)\psi} \tag{4}$$

的解，其中 $\hbar$ 是**普朗克常数**($\hbar=1.054\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$)，$\mu$ 是粒子的质量，V 是力场的与时间无关的位能(因此，$F=-\nabla V$). 就像牛顿定理对经典力学的重要性一样，薛定谔方程实际上就是量子力学中的一条公理，它导出正确的物理结论，并可以用来解释许多原子水平的现象.

[**严格地讲，普朗克常数指的是 $h=6.626\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$，它是由普朗克于 1900 年引入的，**

用来解释黑体辐射问题，五年后被爱因斯坦用来解释光电效应. 常数 $\hbar$ 等于 $h/(2\pi)$，在量子力学中是一个更为基本的常数.]

用分离变量法求解

在具体应用中，我们必须对具体的位能 V，求解(4)式，满足给定初始波函数

575

$$\psi(x,y,z,0) = f(x,y,z). \tag{5}$$

现在，我们将简单地对(4)式应用分离变量法，而不指明位能 V 或初始条件(5).

令 $\psi = u(x,\ y,\ z)T(t)$，代入(4)式，由通常的方法，我们得到变量分离的方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{T'}{T} = E$$

和

$$\frac{1}{u}\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 u + V(x,y,z)u\right] = E,$$

其中 E 是分离常数. 化简，我们得到

$$T' = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}ET, \tag{6}$$

以及 u 的**定常薛定谔方程**

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 u + V(x,y,z)u = Eu.} \tag{7}$$

容易验证，(6)式的解是简单的调和函数

$$\boxed{T(t) = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar},} \tag{8}$$

其中 A 是常数. 方程(7)很难求解，其解仅能对一些重要的位能 V 求出来，本章将介绍一些.

稳态和通解

在量子系统中，分离常数 E 具有能量的单位. E 的一个容许值或**特征值**，是使得(7)式具有非平凡的可规范化解，其中的**可规范化**是指函数 f 在无穷远处趋于零，且 $|f|^2$ 在整个空间上具有有限积分. 我们称一个可规范化函数 f 为**规范化的**，如果 $|f|^2$ 的全积分为 1. (4)式相应于 E 的一个容许值的乘积解为

$$\boxed{\psi(x,y,z,t) = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}u(x,y,z).} \tag{9}$$

(4)式的这种解称为具有能量级 E 的一个**稳态**. 对一个稳态，虽然 ψ 是不定常的，但概率密度

576

$$|\psi(x,y,z,t)|^2 = |A|^2|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}|^2|u(x,y,z)|^2 = |A|^2|u(x,y,z)|^2$$

却不是，这就是"稳"字的由来. 但是，这对(4)式的任意解显然是不正确的.

为进一步求解，必须知道位能 V 和(5)式中的初始波函数. 但是，在我们的讨论中，尝试 6.2 节的施图姆-刘维尔理论，可以得到一些启示. 为此，我们考虑一维问题

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi, \tag{10}$$

$$\psi(x,0) = f(x). \tag{11}$$

这里，我们寻找形如 $\psi(x, t)=u(x)T(t)$ 的乘积解，其中 T 由(8)式给出．由(7)式，我们得到 u 的方程

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}u'' + V(x)u = Eu, \tag{12}$$

其中 E 是分离常数．方程(12)可以写成施图姆-刘维尔形式(6.2 节(1)式)

$$u'' + [q(x) + \lambda]u = 0, \tag{13}$$

其中

$$q(x) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}V(x), \quad \lambda = \frac{2\mu E}{\hbar^2}. \tag{14}$$

E 的容许值集合称为**谱**．由于在大多数的应用中，我们对在无穷区间$(-\infty, \infty)$上求解(13)式感兴趣，一般而言，这个施图姆-刘维尔问题将是奇异的(参见 6.2 节的术语)．我们可以利用 6.2 节的结果来得到(13)式解的性质．按照该节的记号，在(13)式中，$r(x)=1$．因此，由 6.2 节的定理 2，解将关于权函数 $r(x)=1$ 在区间$(-\infty, \infty)$上正交．除此之外，其他的性质都没有，(13)的谱可能如 6.2 节的定理 1 那样是离散的，也可能是连续的(例如，它可能由包含所有的 $\lambda\geqslant 0$，或所有的 $\lambda\leqslant 0$ 组成)；或者它可能是一部分离散的，一部分连续的．

本章的大部分应用涉及具有离散谱 E_1，E_2，E_3，…的薛定谔方程，记(13)相应的解为 u_1，u_2，u_3，….叠加乘积解，(10)～(11)的通解变为

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-iE_n t/\hbar} u_n(x), \tag{15}$$

577

其中

$$\psi(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(x). \tag{16}$$

由正交性，用通常的方法可以确定(16)式中的系数

$$A_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)u_n(x)\,dx \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} u_n^2(x)\,dx.$$

我们以一个涉及傅里叶级数的例题来说明这些思想.

例 1　无穷方井

一个被限制在区间$[0, L]$内自由运动的小粒子的波函数满足一维薛定谔方程(4)，具有位能

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } 0 \leqslant x \leqslant L, \\ \infty, & \text{否则}. \end{cases}$$

在区间$[0, L]$之外，位能取无穷，是表示一个非常大(无穷)的力阻止粒子弹到这个区间之外(图 2)．我们的目标就是求出波函数 $\psi(x, t)$，满足给定的初始波函数

$$\psi(x,0) = f(x). \tag{17}$$

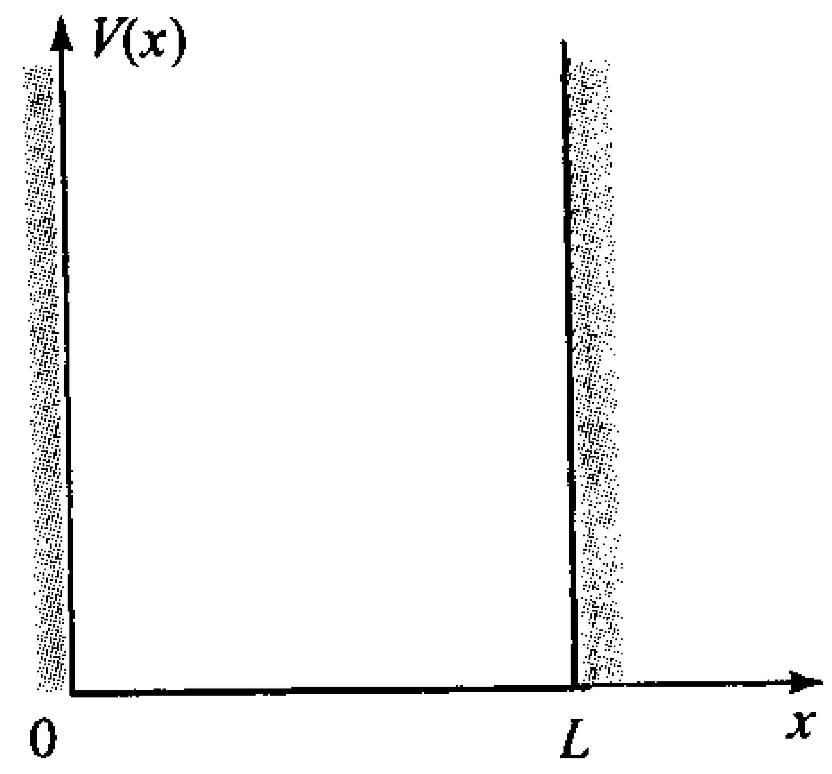


图 2　无穷方井位能

显然，在区间$[0, L]$之外，发现该粒子的概率为 0．因此，

对 $x<0$ 或 $x>L$，$\psi(x, t)=0$. 对 $0\leqslant x\leqslant L$，定常薛定谔方程(7)变为

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}=Eu \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{2\mu E}{\hbar^2}u, \quad 0<x<L.$$

注意到，在区间$[0, L]$之外，u 必定为 0，因为 $\psi(x, t)=u(x)T(t)$，而由(8)式，T 不为零. 如果 $E=0$，则 $u(x)=ax+b$；如果 $E<0$，则

$$u(x)=a\mathrm{e}^{\lambda x}+b\mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad 其中 \lambda=\sqrt{-\frac{2\mu E}{\hbar^2}}.$$

最后，如果 $E>0$，则

$$u(x)=a\cos\lambda x+b\sin\lambda x, \quad 其中 \lambda=\sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}. \tag{18}$$

此时，我们必须决定哪个函数可以得到解. 回顾，前面应用分离变量法时，利用边界条件剔除一些解. 这里，我们将用一个看似合理的条件：$u(x)$是连续的. 由于 u 在 $x=0$ 和 $x=L$ 处为零(回顾，u 在区间$[0, L]$之外恒为零)，我们有 $u(0)=0$ 和 $u(L)=0$. 容易验证，当 $E>0$ 时，会有非平凡解，且具有形式(18). 进一步地，条件 $u(0)=0$ 蕴涵着 $a=0$；而条件 $u(L)=0$ 蕴涵着

578

$$\sin\lambda L=0 \quad 或 \quad \lambda L=n\pi, \quad n=1,2,\cdots.$$

由这个以及(18)式，我们得到特征值

$$E=E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2\mu L^2}, \quad n=1,2,\cdots,$$

以及相应的特征函数

$$u_n(x)=b_n\sin\frac{n\pi}{L}x.$$

由(16)和(17)式，我们得到

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{L}x.$$

因此，b_n 是 f 的傅里叶正弦系数，

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x, \quad n=1,2,\cdots.$$

(参考 2.4 节(3)、(4)式.)综合所有结果，我们得到波函数

$$\psi(x,t)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n t/\hbar}, & 如果 0\leqslant x\leqslant L,\\ 0 & 如果 x<0 或 x>L,\end{cases}$$

其中 b_n 和 E_n 如上给出. ■

习题 11.1

1. 由(4)式，推导(6)和(7).
2. 确定常数 A，以规范 ψ.

(a) $\psi(x)=Ae^{-x^2}$.

(b) $\psi(x, y)=Ae^{-(x^2+y^2)}$.

(c) $\psi(x)=\begin{cases}Ae^{2ix}x(1-x) & 若\ 0<x<1,\\ 0 & 其他.\end{cases}$

3. **用例1作实验**. 在时刻 $t=0$ 时，无穷方井($L=1$)中的粒子由波函数 $\psi(x, 0)=f(x)=Ax(1-x)(0\leqslant x\leqslant 1)$ 表达. 下面讨论中，取 $\frac{\hbar}{2\mu}=1$.

(a)确定常数 A，以规范 f.

(b)在时刻 $t=0$ 时，在区间[0, 1/2]上发现该粒子的概率是多少?

(c)表示该粒子的波函数是什么?

(d)求出在时刻 $t=1$ 时，在区间[0, 1/2]上发现该粒子概率的近似值.

579

专题问题：量子调和振子. 本专题需要11.4节的埃尔米特微分方程的知识. 首先，让我们回顾经典力学中的无阻尼弹簧–质点系统. 令 m 表示系统的质量，而 k 表示弹簧常数. 由虎克定律，恢复力为 $F=-kx$. 因此，由牛顿第二运动定律，我们有 $m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$. $\left(此时的位能是\ V(x)=\frac{1}{2}kx^2.\right)$求解微分方程，我们得到 $x(t)=Ae^{i\omega t}+Be^{-i\omega t}$，其中 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$，而 A 和 B 是常数，其值可以由弹簧–质点系统的初始条件确定.

现在，我们转到**量子调和振子**，它是弹簧–质点系统在量子力学中的类似物. 它模拟了一个质量为 μ 的粒子在由位能 $V(x)=\frac{1}{2}\kappa x^2$ 给定的恢复力作用下，沿 x 轴的微小振动. 此时，薛定谔方程(4)变为

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi+\frac{1}{2}\kappa x^2\psi, \tag{19}$$

其中 $\psi=\psi(x, t)$是未知的波函数. 我们对满足给定初始波函数

$$\psi(x,0)=f(x) \tag{20}$$

的前提下求解方程感兴趣. 变量分离的方程由(6)式和一维定常薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}u''+\frac{1}{2}\kappa x^2u=Eu \tag{21}$$

组成. 这个方程可由(7)式中令 $V(x)=\frac{1}{2}\kappa x^2$ 而得到. 在求解(21)时，我们要求解是可规范的. 下一步就是说明其与埃尔米特微分方程之间的联系(11.4节(1)式).

4. **埃尔米特函数**.

(a)试证：替换 $\phi(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}y(x)$将埃尔米特方程，11.4节(1)式，变成 $\phi''+(2n+1-x^2)\phi=0$，$-\infty<x<\infty$.

(b)得出结论：(a)中方程的解为 $\phi_n(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)$，$n=0, 1, 2, \cdots$，这些被称为**埃尔米特函数**.

(c)试证：当 $m\neq n$ 时，$\int_{-\infty}^{\infty}\phi_m(x)\phi_n(x)dx=0$. [提示：11.4节定理1.]

(d)试证：$\int_{-\infty}^{\infty}|\phi_m(x)|^2dx=2^nn!\sqrt{\pi}$. 因此，埃尔米特函数在区间$(-\infty,\infty)$上平方可积，且在无穷远处趋于0. [提示：11.4节定理1.]

最后注意到：可以证明，仅当 $\lambda=2n+1$，$n=0, 1, 2, \cdots$时，微分方程 $\phi''+(\lambda-x^2)\phi=0$ 在区间$(-\infty, \infty)$上具有可规范解. 此时，正如刚才所示，解为埃尔米特函数的常数倍.

5. (a)回到(21)式，试证：变量代换 $x=\sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}s$，其中 $\kappa=\mu\omega^2$，将方程变为

[580]

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - s^2\right)u = 0. \tag{22}$$

(b)利用习题 4，得出结论：仅当

$$E = E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0,1,2,\cdots$$

时，(21)的可规范解存在. 对每个 E_n，我们有解

$$u_n(x) = e^{-\frac{\mu\omega x^2}{2\hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}x\right), \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

6. **量子调和振子的埃尔米特级数解**.

(a)试证：(19)式的乘积解为

$$\psi_n(x,t) = A_n e^{-iE_n t/\hbar} e^{-\frac{\mu\omega x^2}{2\hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}x\right).$$

(b)利用习题 4 的结果，试证：(19)和(20)的解为

$$\psi(x,t) = e^{-\frac{\mu\omega x^2}{2\hbar}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-iE_n t/\hbar} H_n\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}x\right),$$

其中

$$A_n = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}} \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{\mu\omega x^2}{2\hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}x\right) dx.$$

7. 在本问题中，我们取$\frac{\mu\omega}{\hbar}=1$，考虑初值问题(19)～(20)，初始波函数为

$$f(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(a)规范 $f(x)$.

(b)近似求出在区间[−1，1]上发现振子的概率.

(c)求出波函数.

(d)位置概率密度是多少？(注意到，它与时间无关.)

(e)近似求出 $t=1$ 时刻在区间[−1，1]上发现振子的概率.

(f)求出 a 的近似值，以使 $t=1$ 时刻，在区间[$-a$，a]上发现振子的概率至少为 90%.

8. 对 $f(x)=Ae^{-\frac{x^2}{2}}[1+\sqrt{2}x]$重做习题 7.（与前一道习题比较，(d)中的概率密度不是与时间无关的.）

11.2 氢原子

前一节，讨论了量子力学的几个一般性原理. 我们将薛定谔方程作为解释有关粒子在原子水平上的行为的公理. 虽然一般而言这不可能得出一个显式解，但是本节我们将在一个简单而重要的氢原子情形下介绍其完全解. 这个解也作为理解更复杂结构的模型.

[581]

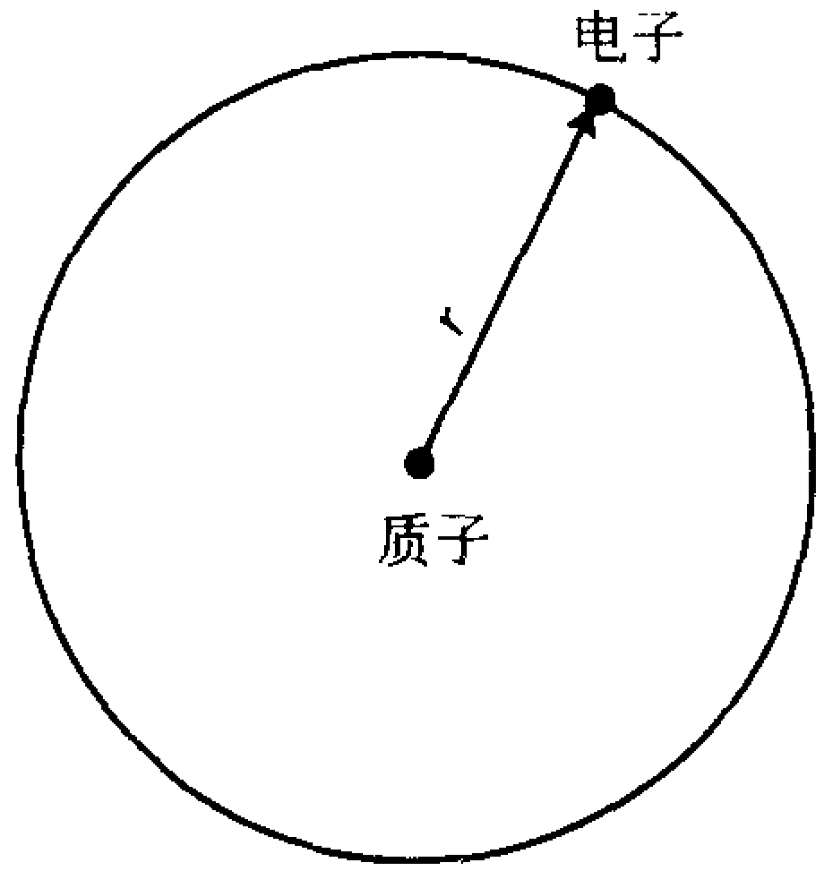


图 1 氢原子

回顾，原子由原子核和电子组成，原子核则由质子和中子组成. 在氢原子中，我们有一个电子和仅由一个质子组成的原子核. 由于质子比电子重得多(大约重 1 864 倍)，所以它运动得及其缓慢. 因此，我们可以认为原子核是固定不动的，集中考察电子的运动(图 1).

不定常薛定谔方程

在我们的氢原子模型中，电子在围绕质子的轨道上运动，吸引力为$-\varepsilon^2/r$，其中r是电子与质子间的距离，而ε是质子的电荷．由于力是位能的负梯度，所以质子的吸引力具有势能

$$V=-\frac{\varepsilon^2}{r}.$$

代入11.1节的(4)式，我们得到氢原子的不定常薛定谔方程：

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi-\frac{\varepsilon^2}{r}\psi,} \tag{1}$$

其中μ是电子的质量．在求解这个方程时，采用球面坐标(r,θ,ϕ)是方便的，因为位能V在该坐标系中具有简单的表达式．如前一节，我们将要求ψ的空间部分是可规范化的，即记

$$\psi=u(r,\theta,\phi)T(t),$$

我们要求u在无穷远处趋于零，且$|u|^2$在整个空间上具有有限积分．在(1)式中分离变量，我们得到方程

$$\boxed{T'=-\frac{i}{\hbar}ET,} \tag{2}$$

以及关于u的**定常薛定谔方程**

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2u-\frac{\varepsilon^2}{r}u=Eu} \tag{3}$$

(参见11.1节的(6)和(7))．由前一节，我们知道(2)式的解为

$$\boxed{T(t)=Ae^{-iEt/\hbar},} \tag{4}$$

582

其中A是常数．困难的是求解(3)和确定分离常数E，其解将涉及球面调和函数(第5章)和拉盖尔多项式(11.4节)．

球面调和函数与薛定谔方程

利用拉普拉斯的球面坐标形式，4.1节(8)式，(3)式变为

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}+\csc^2\theta\frac{\partial^2u}{\partial\phi^2}\right)\right]-\frac{\varepsilon^2}{r}u=Eu. \tag{5}$$

利用分离变量法求解这个方程，我们令

$$u(r,\theta,\phi)=R(r)Y(\theta,\phi),$$

并代入(5)式．将R部分从Y部分分离出来，我们得到

$$\boxed{\frac{\partial^2Y}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}+\csc^2\theta\frac{\partial^2Y}{\partial\phi^2}+\eta Y=0} \tag{6}$$

和

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[R''+\frac{2}{r}R'-\frac{\eta}{r^2}R\right]-\frac{\epsilon^2}{r}R=ER,}\tag{7}$$

其中 η 是分离常数. 由 5.3 节的定理 4，我们将(6)看作是球面调和函数的微分方程. 当分离常数由

$$\eta=\eta_n=n(n+1),\quad n=0,1,2,\cdots\tag{8}$$

给出时，它具有非平凡解. 对每个 $\eta_n=n(n+1)$，我们有 $2n+1$ 个解，球面调和函数

$$Y_{n,m}(\theta,\phi),\quad m=-n,-n+1,\cdots,n-1,n.\tag{9}$$

将 $\eta_n=n(n+1)$代入(7)式，我们得到**径向方程**：

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[R''+\frac{2}{r}R'-\frac{n(n+1)}{r^2}R\right]-\frac{\epsilon^2}{r}R=ER.}\tag{10}$$

在确定分离常数 E 时，我们利用量子物理的一个事实：有界解(对应于一个电子和一个质子结合在一起)仅在负能量级上出现. 因此，我们在(10)式中取 $E<0$. 现在，我们用两个代换来说明(10)式与拉盖尔微分方程(11.4 节)有关. 首先，我们作代换

583

$$s=\alpha r,\quad w(s)=R(s/\alpha),\quad 其中\ \alpha=\sqrt{-\frac{8\mu E}{\hbar^2}}.\tag{11}$$

这将(10)式变成

$$\frac{d^2w}{ds^2}+\frac{2}{s}\frac{dw}{ds}-\frac{n(n+1)}{s^2}w-\frac{1}{4}w+\frac{\nu}{s}w=0,\tag{12}$$

其中

$$\nu=\frac{2\mu\epsilon^2}{\alpha\hbar^2}=\frac{\epsilon^2}{\hbar}\sqrt{\frac{\mu}{-2E}}.\tag{13}$$

然后，我们作代换

$$w(s)=s^n e^{-s/2}y(s),\tag{14}$$

这将(12)式变为

$$s\frac{d^2y}{ds^2}+[2(n+1)-s]\frac{dy}{ds}+(\nu-n-1)y=0.\tag{15}$$

这两个变换的细节是直接的，留作习题. 方程(15)是**广义拉盖尔微分方程**(11.4 节(13)式)，取 $\alpha=2n+1$，并以 $\nu-n-1$ 代替 n. 当 $\nu-n-1$ 是非负整数时，即 ν 是满足

$$\nu\geqslant n+1\tag{16}$$

的非负整数，由 11.4 节，我们知道(15)具有次数为 $\nu-n-1$ 的多项式解，记为

$$y(s)=L_{\nu-n-1}^{2n+1}(s),$$

称之为 $\nu-n-1$ 次和 $2n+1$ 阶的**广义拉盖尔多项式**(参见 11.4 节，(13)和(14)式). 从此处开始，我们取 ν 满足(16)式，因为对所有其他的 ν，可以证明相应的乘积解 $\psi=RYT$ 不是平方可积的，因而不是可规范化的. 利用(14)和(11)式代换回去，我们得到

$$w(s)=w_{\nu n}(s)=s^n e^{-s/2}L_{\nu-n-1}^{2n+1}(s),\tag{17}$$

以及(10)式的解

$$R_{\nu n}(r)=\mathrm{e}^{-(\alpha r)/2}(\alpha r)^{n}L_{\nu-n-1}^{2n+1}(\alpha r),\tag{18}$$ 584

其中

$$\alpha=\frac{2\mu\varepsilon^{2}}{\nu\hbar^{2}}.\tag{19}$$

函数 $R_{\nu n}$ 称为氢原子在稳态时的**径向波函数**(或简单地，**径向函数**). 习惯上，引入距离用一个**玻尔半径**(单位为米)

$$a=\frac{\hbar^{2}}{\mu\varepsilon^{2}}=0.529\times10^{-10}m\tag{20}$$

的倍数来度量的标尺. 在这个标尺下，径向函数变为

$$\boxed{R_{\nu n}(r)=\mathrm{e}^{-\frac{r}{\nu a}}\left(\frac{2}{\nu a}r\right)^{n}L_{\nu-n-1}^{2n+1}\left(\frac{2}{\nu a}r\right).}\tag{21}$$

(参见径向波函数的图像——图 2.)

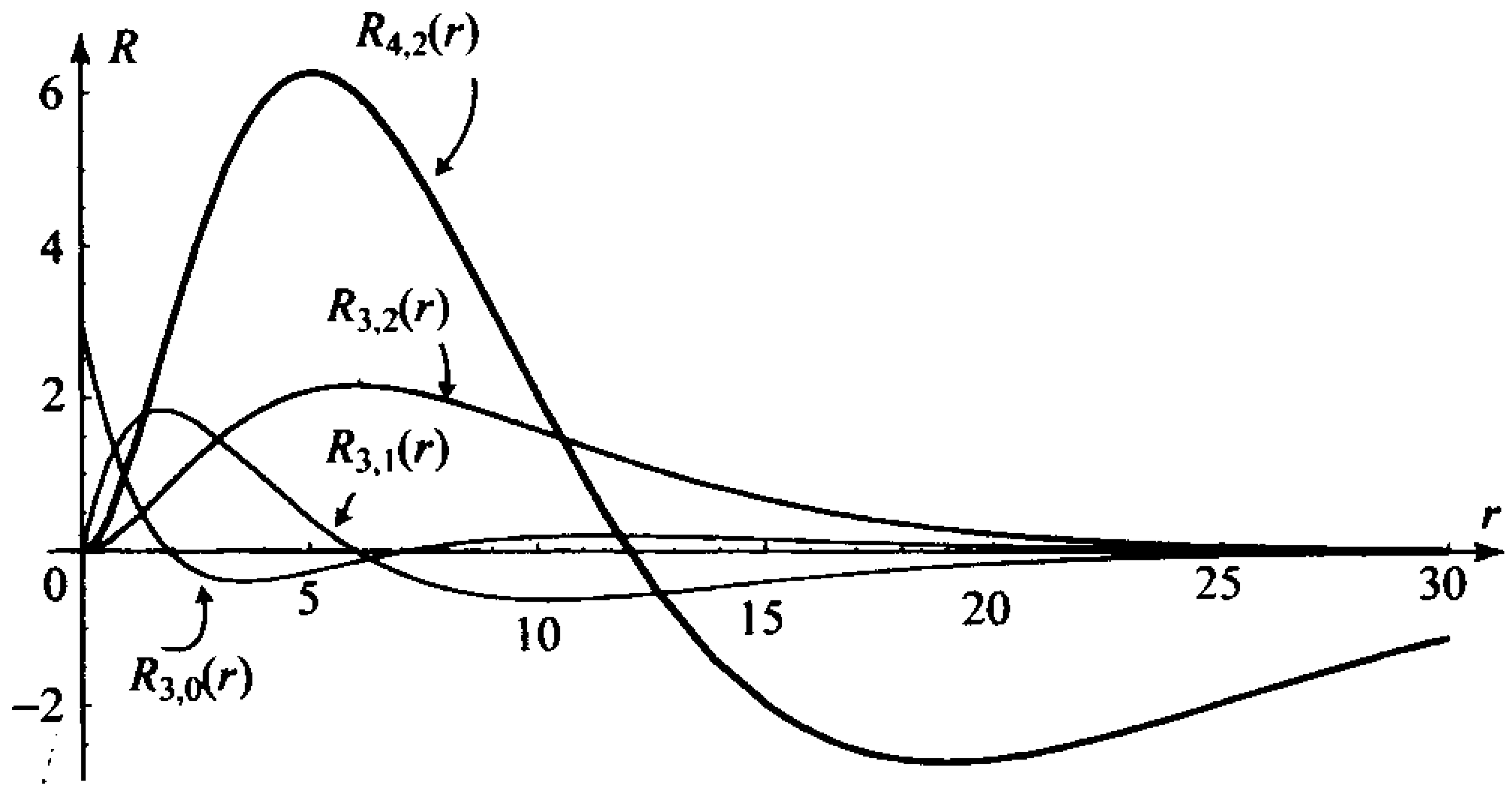


图 2 氢原子在稳态时的径向波函数，距离 r 是用玻尔半径来度量的((21)式中 $a=1$)

现在，我们可以汇集一些结果，并得到一些重要结论.

定理 1(氢原子的能级和边界状态) (i)氢原子的边界状态具有负能量

$$E_{\nu}=-\frac{\varepsilon^{4}\mu}{2\hbar^{2}}\frac{1}{\nu^{2}},\quad \nu=1,2,3,\cdots.$$

(ii)每个能级 E_ν 相应于 ν^2 个有界状态：

$$u_{\nu nm}(r,\theta,\phi)=R_{\nu n}(r)Y_{n,m}(\theta,\phi),\quad |m|\leqslant n<\nu,\tag{22}$$

其中径向函数 $R_{\nu n}(r)$ 如(21)式定义，而 $Y_{n,m}(\theta,\phi)$ 是球面调和函数. 585

证明 为证(i)，在(13)式中解出 E. 为证(ii)，利用(5)的乘积解. 由于对每个 n，(6)具有 $2n+1$ 个特征函数，而 n 取遍 0 到 $\nu-1$，我们得到总数为

$$\sum_{n=0}^{\nu-1}(2n+1)=\nu^{2}$$

个边界状态. ■

氢原子能级构成一个离散集合这个事实是由尼尔斯·玻尔在 1913 年证明的，这在发现薛定谔方程之前. 事实上，这作为基于薛定谔方程的量子力学的一个重要证据.

玻尔的模型被观察氢原子受激后发射离散频率的光的实验所证实. 最低级的能量，对应于

$\nu=1$，称为**基能量**，对应于原子在**基态**. 但是，电子可以存在于数个能级 E_ν，$\nu\geqslant 2$. 我们有

$$E_\nu=\frac{E_1}{\nu^2},\quad \nu=1,2,3,\cdots.$$

基能量 E_1 大约为 -13.6 电子伏特. 这个能量也称为**联结能**，因为它要求电子联结于质子.

定理 2(不定常波函数和概率分布) (i)在氢原子中能级为 E_ν 的电子的不定常波函数是

$$\psi_{\nu nm}(r,\theta,\phi,t)=A_{\nu n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\nu t/\hbar}R_{\nu n}(r)Y_{n,m}(\theta,\phi), \tag{23}$$

其中

$$A_{\nu n}=\sqrt{\left(\frac{2}{a\nu}\right)^3\frac{(\nu-n-1)!}{2\nu(\nu+n)!}},\quad |m|\leqslant n<\nu,\nu=1,2,\cdots. \tag{24}$$

(ii)能级为 E_ν 的电子位置的概率密度为

$$\rho_{\nu nm}(r,\theta,\phi)=A_{\nu n}^2R_{\nu n}^2(r)\,|Y_{n,m}(\theta,\phi)|^2. \tag{25}$$

证明 只要在(22)式中包含时间分量(4)，我们就可以得到(23). 这在只差一个常数 $A_{\nu n}$ 意义下确定了波函数. 为确定 $A_{\nu n}$，我们利用 $|\psi_{\nu nm}|^2$ 是概率密度这个事实，因此其在整个 3 维空间上的积分为 1. 我们有

$$\begin{aligned}|\psi_{\nu nm}|^2&=|A_{\nu n}|^2\,|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\nu t/\hbar}|^2\,|R_{\nu n}(r)|^2\,|Y_{n,m}(\theta,\phi)|^2\\&=|A_{\nu n}|^2\,|R_{\nu n}(r)|^2\,|Y_{n,m}(\theta,\phi)|^2,\end{aligned}$$

由于对所有 t，$|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\nu t/\hbar}|=1$. 我们现在令 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_{n\nu m}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=1$,计算这个积分,以确定 $A_{\nu n}$. 在球面坐标中,我们有 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$. 因此，

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}|A_{\nu n}|^2\,|R_{\nu n}(r)|^2\,|Y_{n,m}(\theta,\phi)|^2\sin\theta r^2\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=1.$$

由 5.3 节(6)式，关于 θ 和 ϕ 的积分等于 1. 利用(21)式，然后作变量代换 $u=\dfrac{2}{\nu a}r$，我们得到

$$|A_{\nu n}|^{-2}=\left(\frac{a\nu}{2}\right)^3\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-u}u^{2n+2}[L_{\nu-n-1}^{2n+1}(u)]^2\mathrm{d}u. \tag{26}$$

为完成(24)式的证明，我们将建立下面的恒等式：

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{\alpha+1}[L_N^{\alpha}(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(N+\alpha+1)}{N!}(2N+\alpha+1). \tag{27}$$

在(27)式中，取 $N=\nu-n-1$ 和 $\alpha=2n+1$，代入(26)式，我们得到

$$|A_{\nu n}|^{-2}=\left(\frac{a\nu}{2}\right)^3\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{(\nu-n-1)!}2\nu=\left(\frac{a\nu}{2}\right)^3\frac{(\nu+n)!}{(\nu-n-1)!}2\nu,$$

这就完成了证明. 剩下证明(27)式，我们将在本章的最后一节证明拉盖尔多项式满足递推关系

$$(N+1)L_{N+1}^{\alpha}(x)-(2N+\alpha+1-x)L_N^{\alpha}(x)+(N+\alpha)L_{N-1}^{\alpha}(x)=0$$

(11.4 节(20)式). 对这个方程乘以 $x^{\alpha}L_N^{\alpha}(x)\mathrm{e}^{-x}$，并从 0 到∞积分. 利用 11.4 节定理 5，化简即可得到所需的恒等式. ■

球面调和函数的绝对值平方在球面上的积分等于 1(5.3 节(6)式)，这个事实可以用来化简氢原子中能级为 E_ν 的电子在以质子为中心的球形区域中出现的概率. 事实上，令 p_s 表示距离质子 s 个玻尔半径之内的电子出现的概率，则由(25)式，

$$p_s=\int_0^{sa}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}A_{\nu n}^2R_{\nu n}^2(r)\,|Y_{n,m}(\theta,\phi)|^2r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{sa} A_{\nu n}^2 R_{\nu n}^2(r) r^2 \mathrm{d}r.$$

因此，对球形区域，电子位置的概率仅依赖于径向函数．对某些的 n 值，这个概率可以用不完全伽马函数显式地计算出来(见习题7)． 587

例1 基态(能量最低的状态)

(a)推导原子基态的波函数．

(b)推导电子位置的概率密度，验证其在整个三维空间上的积分为1．

(c)在距离质子两个玻尔半径以内发现电子的概率是多少？

(d)求出 s 的近似值，使得在距离质子 s 个玻尔半径以内以90%的概率发现电子．

解 (a)在定理2中取 $\nu=1$(因此 $n=0$ $m=0$)，利用(21)式和球面调和函数表(5.3节习题1)，得到

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_1 t/\hbar} \mathrm{e}^{-r/a}.$$

(b)电子位置的概率密度是

$$\rho_{100}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\pi a^3} \mathrm{e}^{-2r/a}.$$

关于在整个空间上的积分，我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho_{100}(r,\theta,\phi) r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{\pi a^3}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-2r/a} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r \\ &= \frac{4}{a^3}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2r/a} r^2 \,\mathrm{d}r = 1,\end{aligned}$$

这可以借助计算机来验证，或作两次分部积分．

(c)在距离质子两个玻尔半径以内发现电子的概率是

$$\int_0^{2a}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho_{100}(r,\theta,\phi) r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r = \frac{4}{a^3}\int_0^{2a} \mathrm{e}^{-2r/a} r^2 \,\mathrm{d}r = 1 - \frac{13}{\mathrm{e}^4} \approx 0.76.$$

(d)如(c)部分，在距离质子 s 个玻尔半径以内发现电子的概率是

$$p_s = \frac{4}{a^3}\int_0^{sa} \mathrm{e}^{-2r/a} r^2 \,\mathrm{d}r = \mathrm{e}^{-2s}(\mathrm{e}^{2s} - 1 - 2s - 2s^2).$$

作为 s 的函数，p_s 的图像如图3所示，不出所料，当 $s\to\infty$ 时，图像趋于1．在2和3之间，它就达到0.9．借助计算机，我们发现当 $s\approx 2.7$ 时 $p_s=0.9$．

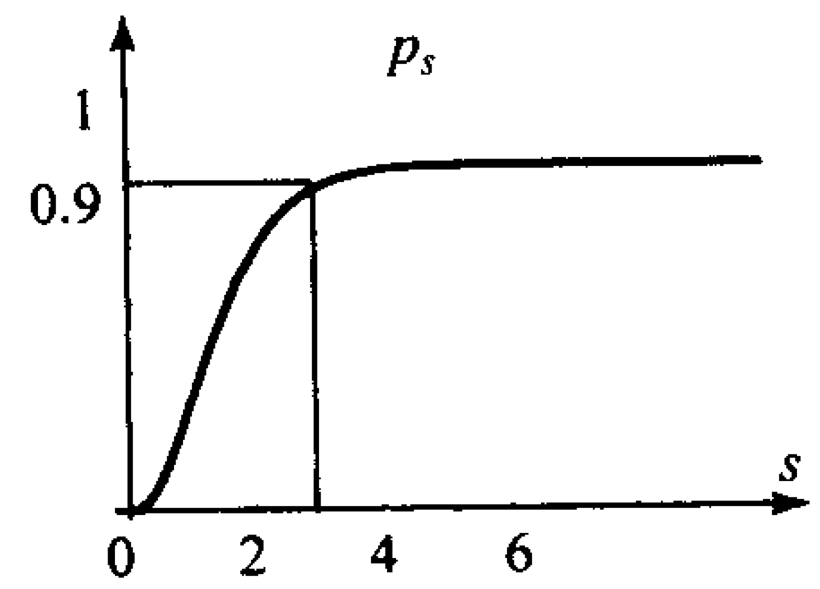


图3 p_s 的图像 ■ 588

习题 11.2

1. 由(5)式推导(6)和(7)式．
2. 由(10)式推导(12)式，而由(12)式推导(15)式．
3. 利用11.4节(16)式，推导下列广义拉盖尔多项式的列表．

$L_0(x)=1\quad L_1(x)=1-x\quad L_2(x)=\frac{1}{2}(2-4x+x^2)\quad L_3(x)=\frac{1}{6}(6-18x+9x^2-x^3)$

$L_0^1(x)=1\quad L_1^1(x)=2-x\quad L_2^1(x)=\frac{1}{2}(6-6x+x^2)\quad L_3^1(x)=\frac{1}{6}(24-36x+12x^2-x^3)$

$L_0^2(x)=1\quad L_1^2(x)=3-x\quad L_2^2(x)=\frac{1}{2}(12-8x+x^2)\quad L_3^2(x)=\frac{1}{6}(60-60x+15x^2-x^3)$

$L_0^3(x)=1\quad L_1^3(x)=4-x\quad L_2^3(x)=\frac{1}{2}(20-10x+x^2)\quad L_3^3(x)=\frac{1}{6}(120-90x+18x^2-x^3)$

4. 对 $\nu=1,2,\cdots,5$，推导径向函数的列表.
5. 求出能级 E_2 上的所有四个状态的不定常波函数.
6. 求出能级 E_3 上的所有状态的不定常波函数.
7. (a)试证：在能级 E_ν 上，相应于 $n=\nu-1$ 状态的电子位置概率是

$$\rho_{\nu nm}=\left(\frac{2}{a\nu}\right)^3\frac{1}{2\nu}e^{-\frac{2r}{\nu a}}\left(\frac{2r}{\nu a}\right)^{2n}|Y_{n,m}|^2.$$

(b)对 $a>0$，$x>0$，从 7.9 节回顾不完全伽马函数

$$\Gamma(a,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{a-1}\mathrm{d}t.$$

试证：在距离质子 s 个玻尔半径以内发现电子的概率是

$$p_{\nu s}=1-\frac{1}{(2\nu)!(2\nu-1)!}\Gamma\left(1+2\nu,\frac{2s}{\nu}\right).$$

(c)取 $\nu=1,2$，对 $s>0$，画出 $p_{\nu s}$ 的图像. 关于图像，你有什么发现？解释之.

(d) 取 $s=1$，对 $\nu>1$，画出 $p_{\nu s}$ 的图像. 对高级能级，在距离质子一个玻尔半径以内发现电子的概率，你有什么发现？

589 8. 对 $\nu=2$，$n=1$，$m=1$，重做例 1 的(a)～(d).

11.3 海森伯格不定性原理

本节我们将证明量子力学中的一个著名结果，它断言：人们不可能同时确定电子(或任何粒子)的位置和速度. 也就是说，对位置信息增加，导致对速度或动量信息的减少. 关于电子的这个神秘事实，就是所谓的海森伯格不定性原理. 它是通过傅里叶变换来证明的，事实上，它就是傅里叶变换的一个性质的重新叙述.

普朗舍尔定理和帕塞瓦尔定理

回顾，定义在整个实线上的函数 f 是平方可积的，如果 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t<\infty$. 由于我们将允许取复值的函数，所以当写 $|f|$ 时，是指 $\sqrt{f\bar{f}}$. f 的傅里叶变换将记为 $\hat{f}$.

定理 1(帕塞瓦尔定理)　假设 f 和 g 是实线上的平方可积函数，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\,\overline{\hat{g}(\omega)}\,\mathrm{d}\omega.\tag{1}$$

在帕塞瓦尔定理中，取 $f=g$，我们得到普朗舍尔定理.

定理 2(普朗舍尔定理) 假设 f 是实线上的平方可积函数，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega. \tag{2}$$

帕塞瓦尔定理的证明 利用傅里叶逆变换(7.2 节(2)式)，记 $g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\hat{g}(\omega)\mathrm{d}\omega$，并回顾$\overline{e^{i\omega t}} = e^{-i\omega t}$. 现在，假设我们可以交换积分顺序，我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\overline{\hat{g}(\omega)}\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(\omega)}\overbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\mathrm{d}t}^{=\hat{f}(\omega)}\mathrm{d}\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\mathrm{d}\omega,\end{aligned}$$

这就证明了定理. ■

在转到本节主要应用之前，我们举例说明如何基于普朗舍尔定理计算某些重要积分. [590]

例 1 用普朗舍尔定理计算积分

利用事实：$f(x)=\frac{\sin ax}{x}$的傅里叶变换是

$$\hat{f}(\omega)=\begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{如果} -a<\omega<a, \\ 0 & \text{如果} |\omega|>a,\end{cases}$$

由普朗舍尔定理得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_{-a}^{a}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 \mathrm{d}\omega = 2a\,\frac{\pi}{2} = a\pi.$$

特别地，当 $a=1$ 时，我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi.$$ ■

海森伯格不定性原理

首先，我们探求傅里叶变换和量子力学之间的联系. 考虑沿 x 轴运动的电子，由 11.1 节，我们知道，对这个电子，赋予一个波函数 $f(x)$，可以用公式

$$\rho(x) = |f(x)|^2$$

来生成电子的位置概率密度函数 $\rho(x)$. 量子力学的一个事实是：电子动量的概率密度函数也以一种非常内蕴的方式与波函数 f 相联系. 为表达这个关系，令

$$g(p) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\hat{f}\left(\frac{p}{\hbar}\right), \quad -\infty < p < \infty, \tag{3}$$

其中 $\hbar$ 是普朗克常数. 因此，$g(p)$是 f 的傅里叶变换的常数倍. 利用普朗舍尔定理，可以验证$|g(p)|^2$ 是概率密度(习题 16)，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} | g(p) |^2 \mathrm{d}p = 1.$$

函数 $| g(p) |^2$ 是电子的**动量概率密度**. 因此,

591

$$\text{动量在}[c,d]\text{上的概率} = \int_c^d | g(p) |^2 \mathrm{d}p.$$

现在, 我们引入一个非平凡函数 f 关于一点 a 的**不确定性**概念, 为

$$\Delta_a f = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 | f(x) |^2 \mathrm{d}x \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} | f(x) |^2 \mathrm{d}x. \tag{4}$$

为理解这个定义, 暂时将 $| f(x) |^2$ 理解为电子的概率密度, 因此, (4)式右端分母的积分为 1. 假设在 a 点附近极有可能发现该电子, 此时, 概率密度 $| f(x) |^2$ 集中在 a 点附近, 而在远离 a 点处其值非常小. 因而, 对所有的 x, $(x-a)^2 | f(x) |^2$ 值非常小, 因此, 此时 $\Delta_a f$ 非常小. 因此, 我们对电子的位置知道的越多(即, 在 a 附近发现电子的概率越大), 不定性 $\Delta_a f$ 的程度越低. (图 1 说明了 $a=0$ 时的情形.)另一方面, 如果 $| f(x) |^2$ 在远离 a 点处非常大(这对应于在 a 点附近发现电子的可能性很小), 类似的讨论可知, 此时不定性 $\Delta_a f$ 很大. (参见图 2, $a=0$ 情形.)

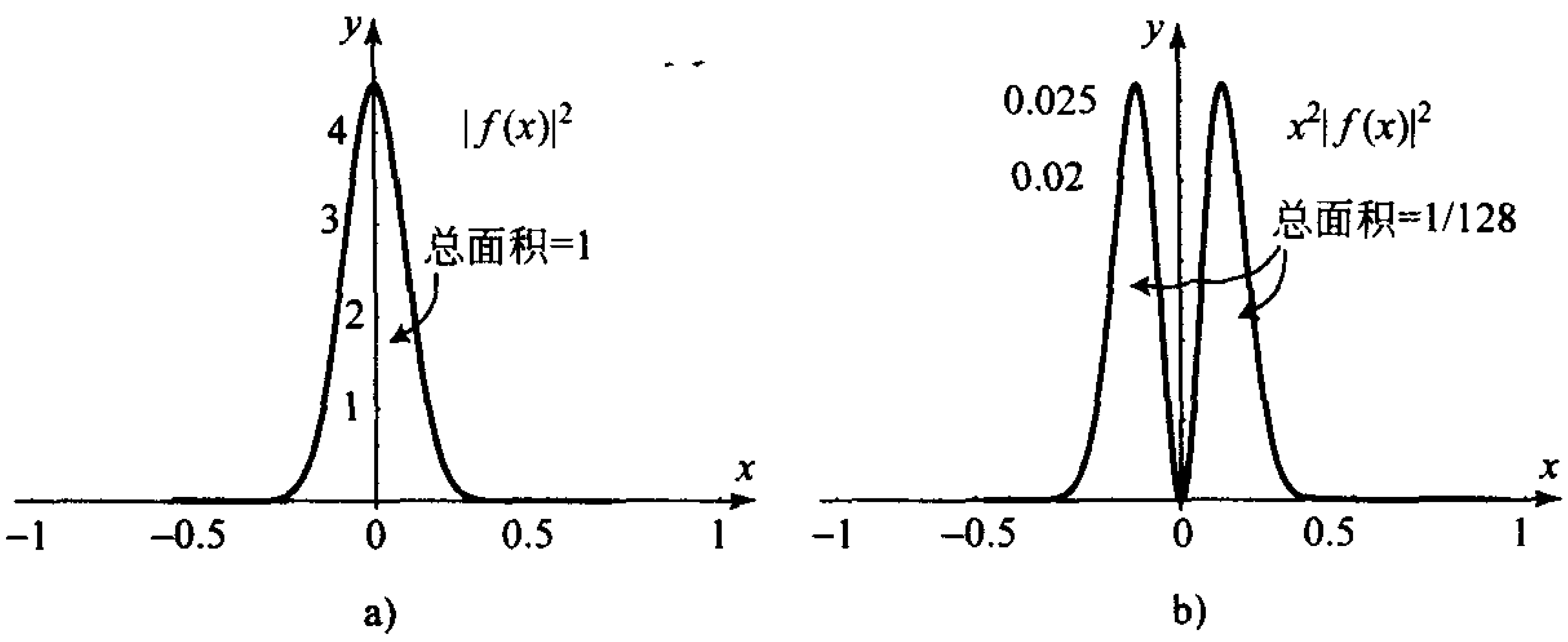


图 1 低不定性的概率密度 a 中 $| f(x) |^2$ 的图像集中在 0 点附近, 因而, b 中的函数 $x^2 | f(x) |^2$(画的比例不一样)几乎恒等于 0, 其图像之下、x 轴之上的面积很小

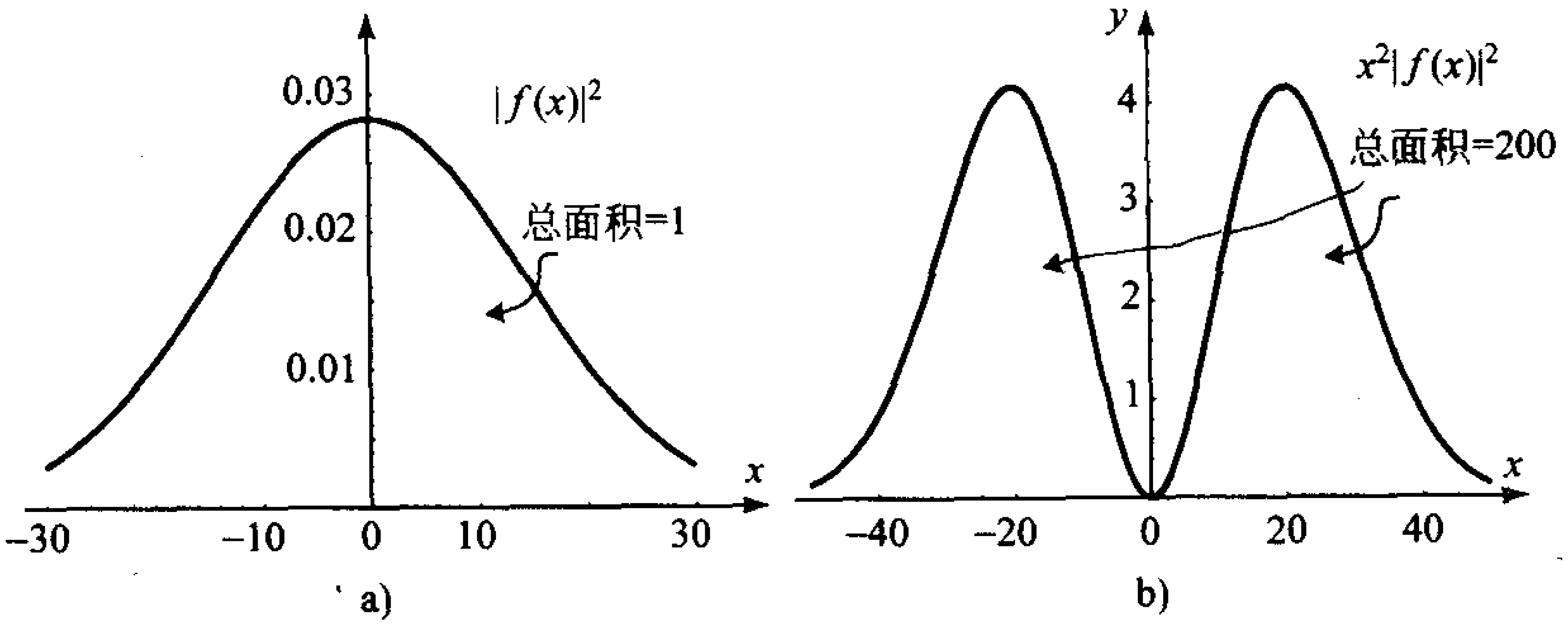


图 2 具有很高不定性的概率密度. a 中的图像是在整个直线上铺开的

海森伯格不定性原理的准确数量估计是说：对任意 a(在 x 轴上)和任意 α(在 p 轴)，

$$\Delta_a f \Delta_\alpha g \geqslant \frac{\hbar^2}{4}. \tag{5}$$

因此，关于某点 a 的不定性 $\Delta_a f$ 减小到 0，会导致动量不定性 $\Delta_\alpha g$ 关于所有 α 值都增加，反之亦然. 因此，一个电子的位置是精确确定的，必然具有很不确定的动量密度. [592]

我们将证明(5)式伸缩后的形式，则由习题 13 中叙述的变量代换即可得到(5)式. 我们需要下面这个关于平方可积函数的不等式，称为**柯西-施瓦茨不等式**：

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\right|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2\mathrm{d}x.$$

其证明概要在习题 15 中给出.

定理 3(海森伯格不等式) *假设 f 是实线上不恒为零的平方可积函数，则*

$$\Delta_a f \Delta_\alpha \hat{f} \geqslant \frac{1}{4} \tag{6}$$

对所有 x 轴上的 a 和所有 ω 轴上的 α 成立.

证明 为简化证明，我们将假设 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x|f(x)|^2=0$. 首先，考虑 $a=\alpha=0$ 情形. 分部积分，并记住$\overline{f(x)}f(x)=|f(x)|^2$，我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,\overline{f(x)}f'(x)\mathrm{d}x = x|f(x)|^2\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}(|f(x)|^2 + xf(x)\,\overline{f'(x)})\mathrm{d}x.$$ [593]

因此，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty}(x\,\overline{f(x)}f'(x) + xf(x)\,\overline{f'(x)})\mathrm{d}x.$$

最后的积分项具有形式 $z+\bar{z}$，其中 $z=x\,\overline{f(x)}f'(x)$. 利用事实 $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$(这里 $\mathrm{Re}(z)$表示 z 的实部)，以及柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\mathrm{d}x = -2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}(x\,\overline{f(x)}f'(x))\mathrm{d}x;$$

因此，

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 &\leqslant 4\left(\int_{-\infty}^{\infty}|x\,\overline{f(x)}f'(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2\\ &\leqslant 4\left(\int_{-\infty}^{\infty}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f'(x)|^2\mathrm{d}x\right)\\ &= 4\Delta_0 f\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}|f'(x)|^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中最后的等式是因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x = \Delta_0 f\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\mathrm{d}x.$$

由普朗舍尔定理和 7.2 节定理 2，得到

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f')(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \Delta_0 \hat{f} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \Delta_0 \hat{f} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.\end{aligned}$$

与前一个不等式联立，我们得到

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx\right)^2 \leqslant 4\Delta_0 f \Delta_0 \hat{f}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx\right)^2.$$

两边同时除以 $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx\right)^2 \neq 0$，我们得到

$$1 \leqslant 4\Delta_0 f \Delta_0 \hat{f}, \tag{7}$$

这就是我们要证明的. 对(7)式作平移可得一般形式(习题 14). ■

例 2 **高斯函数的海森伯格不等式**

以例说明定理 3，取 $a=\alpha=0$，以及

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-x^2/4\sigma^2}, \quad \sigma > 0.$$

解 利用 7.2 节定理 5，我们有

594

$$\hat{f}(\omega) = \left(\frac{2\sigma^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\sigma^2\omega^2}.$$

同样，由 7.2 节(4)式，有 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. 利用这个恒等式和变量代换，我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = 1.$$

现在，运用普朗舍尔定理，我们推得

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1.$$

由(4)式，我们有

$$\Delta_0 f = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2\sigma^2} dx = \sigma^2$$

和

$$\Delta_0 \hat{f} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \left(\frac{2\sigma^2}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 e^{-2\sigma^2\omega^2} d\omega = \frac{1}{4\sigma^2},$$

其中我们运用了习题 10 中的结果以计算积分. 因此，$\Delta_0 f \Delta_0 \hat{f} = \frac{1}{4}$. ■

例 2 说明，任何高斯函数都可达到海森伯格不等式的下界. 本例所用的函数给出了海森伯格不

等式的一个具体说明．在图 3a 和 b 中，对不同的σ值画出了f和$\hat{f}$的图像．注意到，当σ递减到 0 时，$f(x)$的图像越来越集中于 0 附近，而$\hat{f}$的图像则越来越散开．当我们增加σ的值时，相反的事情发生．这就给出了图形证据，说明我们不可能同时确定一个函数及其傅里叶变换，这基本上就是海森伯格不等式所断言的．

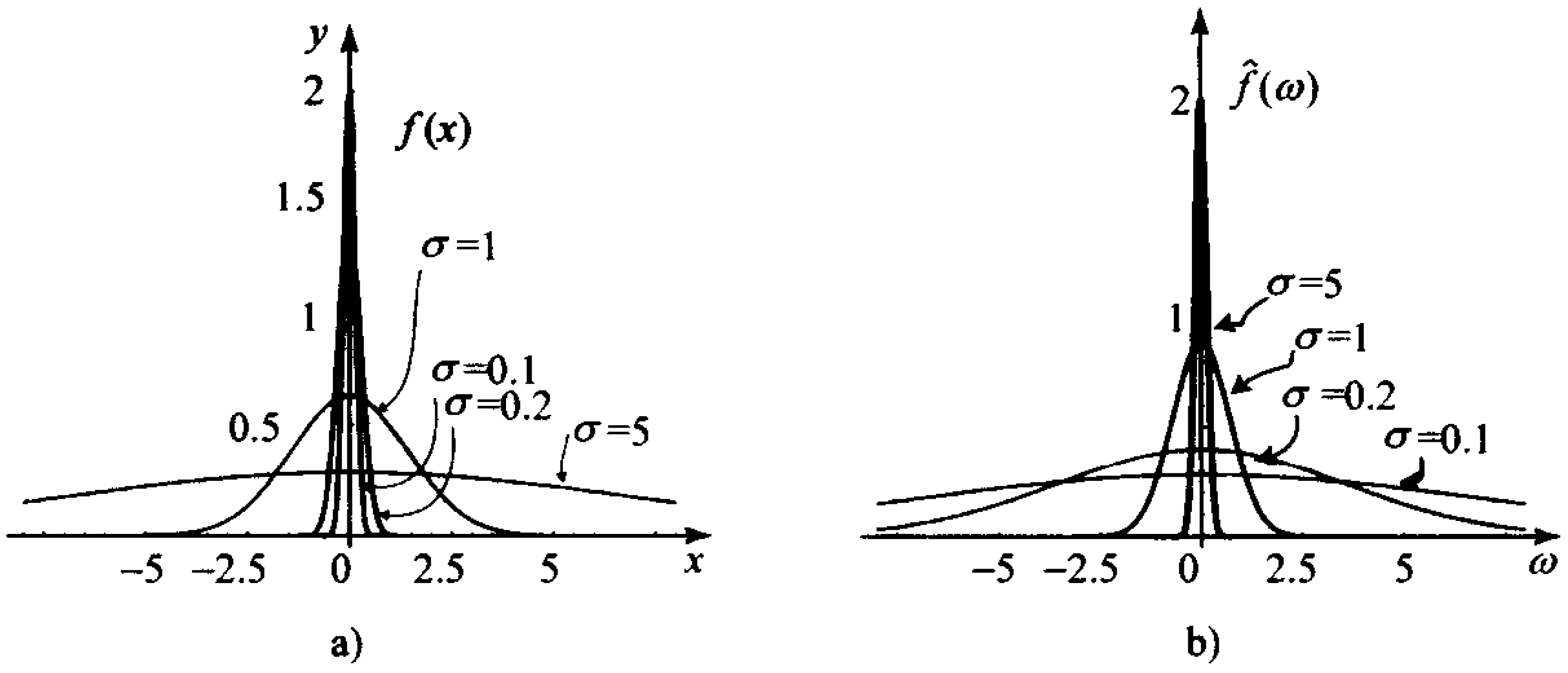


图 3　$f(x)$的图像越集中，$\hat{f}(\omega)$的图像越散开；反之亦然

由于海森伯格不等式事实上是关于一般波的一个论断，所以除了量子力学以外，它也出现在其他科学分支中．关于其在信号处理和电子工程中的应用，请参考 Athanasious Papoulis, *The Fourier Integral and Its Applications*, McGraw-Hill, 1962. 595

习题 11.3

在习题 1～4 中，利用普朗舍尔定理或帕塞瓦尔定理，以及已知的傅里叶变换，计算给定的积分．

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} \mathrm{d}x$.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 \mathrm{d}x$.

3. $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{(1+x^2)} \mathrm{d}x$.

4. $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)} \mathrm{d}x$.

在习题 5～8 中，对给定函数，验证海森伯格不等式，取 $a=\alpha=0$.

5. $f(x)=\mathrm{e}^{-2x^2}$.

6. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

7. $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. ［提示：习题 1.］

8. $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$.

9. (a)积分 $I_n=\int_0^{\infty} x^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x, n=0,1,2,\cdots$，在应用中经常出现．在概率论中，它们称为**高斯矩**．为计算它们，令 $t=x^2$，验证：$I_n=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$，其中伽马函数如 4.7 节定义．

(b)更一般地，如果 $a>0$，利用(a)和变量代换，验证：

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax^2}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2a^{(n+1)/2}}.$$

10. 对 $a>0$，由习题9得出结论：

$$\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-ax^2}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{a^{(n+1)/2}} & \text{如果 } n \text{ 是偶数,} \\ 0 & \text{如果 } n \text{ 是奇数.} \end{cases}$$

11. 利用习题10的结果和伽马函数的有关知识，计算积分：

(a) $\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.　　(b) $\int_{-\infty}^\infty x^4 e^{-x^2}\,dx=3\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

12. 对函数 $f(x)=xe^{-x^2}$，验证海森伯格不等式，取 $a=\alpha=0$.

13. 利用定理3，证明(5)式. [提示：利用(3)式证明 $\Delta_a g=\hbar^2\Delta_{\frac{a}{\hbar}}\hat{f}$.]

14. 对两个任意给定数 a 和 α，以及一个平方可积函数 f，令 $F(x)=e^{-i\alpha x}f(x+a)$.

(a)试证：$\int_{-\infty}^\infty |F(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2 dx$.

(b)试证：$\Delta_0 F=\Delta_0 f$，以及 $\Delta_0\hat{F}=\Delta_0\hat{f}$. [提示：$\hat{F}(\omega)=e^{ia(\omega+\alpha)}\hat{f}(\omega+\alpha)$.]

(c)完成定理3的证明.

15. **柯西-施瓦茨不等式的证明**. 我们将采用内积记号：$(f,g)=\int_{-\infty}^\infty f(x)\overline{g(x)}dx$ 和 $\|f\|=\sqrt{(f,f)}$. 该不等式等价于 $|(f,g)|\leqslant\|f\|\|g\|$.（这个不等式对任意内积都成立.）

(a)对所有的实数 t，试证：

596

$$0\leqslant\|f+tg\|^2=\|f\|^2+2t\mathrm{Re}(f,g)+t^2\|g\|^2.$$

（注意到 $(g,f)=\overline{(f,g)}$，因而 $(f,g)+(g,f)=2\mathrm{Re}(f,g)$.）

(b)假设 (f,g) 是实的，且 $\|g\|\neq 0$.（如果 $\|g\|=0$，不等式两边都为零，因此不需任何证明了.）取 $t=-\frac{(f,g)}{\|g\|^2}$，由(a)得出结论：

$$0\leqslant\|f\|^2\|g\|^2-(f,g)^2,$$

这就证明了该不等式此时成立.

(c)对一般情形证明不等式. [提示：对适当的 r 和 θ，记 $(f,g)=re^{i\theta}$，考虑函数 $F(x)=e^{-i\theta}f(x)$.]

16. 令 $g(p)$ 如(3)式定义，利用(2)式和普朗舍尔定理，说明 $|g(p)|^2$ 是概率密度函数.

11.4　埃尔米特多项式和拉盖尔多项式

本节，我们利用施图姆-刘维尔理论研究两类重要的多项式：埃尔米特多项式和拉盖尔多项式. 就像前面多次遇到的那样，这些特殊函数出现在常微分方程的求解过程中，具有许多正交性性质和展开定理.

埃尔米特方程和埃尔米特多项式

对 $n=0, 1, 2, \cdots$，n **阶埃尔米特微分方程**是

$$\boxed{y''-2xy'+2ny=0,\quad -\infty<x<\infty.}\tag{1}$$

这个二阶变系数线性微分方程可以用幂级数法求解(附录 A.5). 我们假设解具有形式 $y=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m$ 代入(1)式,并化简,我们得到系数的二步递推关系如下:

$$\boxed{a_{m+2}=\frac{2m-2n}{(m+2)(m+1)}a_m,\quad m=0,1,2,\cdots.}\tag{2}$$

因此,a_0 确定了 a_2,a_4,…,而 a_1 确定了 a_3,a_5,…. 由(2)式,我们有 $a_{n+2}=0$,因而,$a_{n+4}=a_{n+6}=\cdots=0$. 因此,有一个解是 n 次多项式. 如果我们通过令

$$\boxed{a_n=2^n}\tag{3}$$

对多项式解规范化,得到**埃尔米特多项式**,记为 $H_n(x)$. 利用(2)和(3)式,可以证明

$$\boxed{H_n(x)=n!\sum_{j=0}^{M}\frac{(-1)^j(2x)^{n-2j}}{j!(n-2j)!},}\tag{4}$$

597

其中,当 n 是偶数时,$M=\frac{n}{2}$,而当 n 是奇数时,$M=\frac{n-1}{2}$. 正如在 5.5 节(9)式对拉盖尔多项式所做的那样,可以推出这个显式表达式. 利用(4)式,我们得到(图 1)

$$H_0(x)=1,\quad H_1(x)=2x,\quad H_2(x)=4x^2-2,\quad H_3(x)=8x^3-12x,\cdots.$$

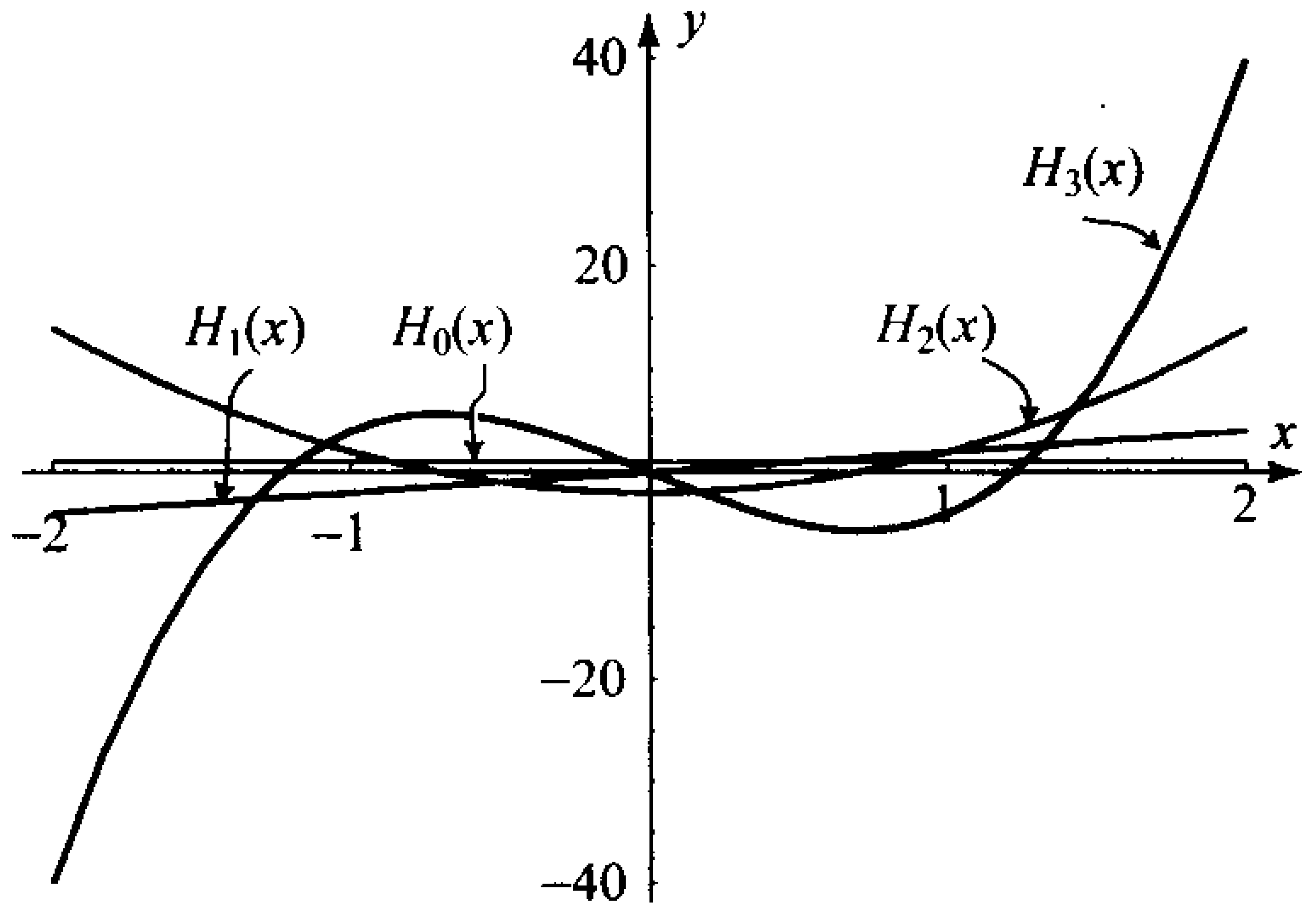


图 1 埃尔米特多项式

施图姆-刘维尔理论和正交性

显然,(1)式不能直接写成 6.2 节(1)式给出的施图姆-刘维尔形式,但是,在(1)式两边同时乘以 e^{-x^2},得到(等价的)方程

$$e^{-x^2}y''-2xe^{-x^2}y'+2ne^{-x^2}y=0,$$

它可以写成**施图姆-刘维尔形式**

$$(e^{-x^2}y')'+2ne^{-x^2}y=0.$$

按照 6.2 节(1)式的记号,我们令 $p(x)=e^{-x^2}$,$r(x)=e^{-x^2}$. 应用 6.2 节定理 2 可知,埃尔米特多项式在区间$(-\infty,\infty)$上关于权函数 e^{-x^2} 正交. 更确切地,我们有如下重要结果.

定理 1(埃尔米特多项式的正交性) (i)对非负整数 m 和 n,$m\neq n$,我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx=0.$$

(ii)对所有 $n=0, 1, 2, \cdots$，我们有

598

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2^n n!\sqrt{\pi}.$$

正如前面指出，第一个结论是施图姆-刘维尔理论的推论．习题 10 给出了(ii)的一个证明概要．这些正交关系式可以用来根据埃尔米特多项式对函数作展开(参见 6.2 节定理 3)．

定理 2(埃尔米特级数展开)　如果 f 在 $(-\infty, \infty)$ 上分段光滑，且

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x < \infty,$$

则我们有**埃尔米特级数展开**

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j H_j(x),$$

其中**埃尔米特系数** A_j 为

$$A_j = \frac{1}{2^j j!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)H_j(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

对任意 x，如果 f 在 x 处连续，埃尔米特级数收敛到 $f(x)$；否则收敛到 $[f(x+)+f(x-)]/2$．

我们对 f 所施加的可积性条件表达为：f 关于权函数 e^{-x^2} 平方可积．这个条件保证定义系数的(5)式中的积分存在．关于 e^{-x^2} 平方可积的函数有：有界函数；多项式函数；形如 e^{ax+b} 的指数函数．正如对其他正交级数展开式所做的那样，可以由定理 1 的正交性给出埃尔米特系数(5)式的一个形式推导(见习题 11)．

例 1　埃尔米特级数展开

习题 14 推导了埃尔米特级数

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\mathrm{e}^{1/4}\,2^{2k+1}(2k+1)!}H_{2k+1}(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{6}$$

图 2 中的图像说明了级数的收敛性，这个事实由定理 2 所保证．

599

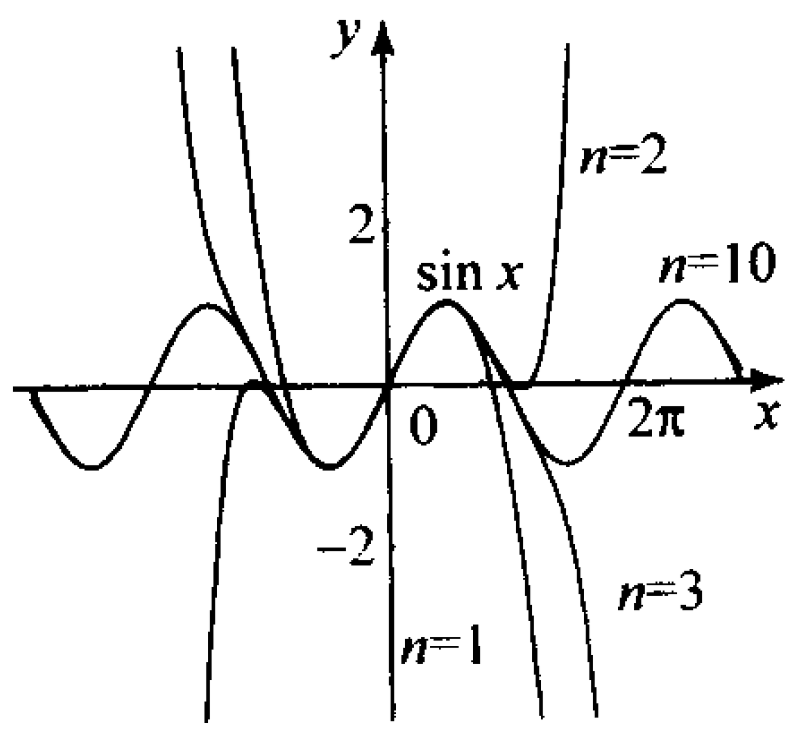


图 2　k 取到 n 项的埃尔米特级数部分和 ■

拉盖尔方程和拉盖尔多项式

对 $n=0, 1, \cdots$，n **阶拉盖尔微分方程**是

$$\boxed{xy'' + (1-x)y' + ny = 0, \quad 0 < x < \infty.} \tag{7}$$

利用弗罗贝尼乌斯法(附录 A.6)，我们求解这个二阶线性微分方程．$x=0$ 点是一个正则奇点，指标方程为 $r(r-1)+r=0$，它具有一个二重指标根 $r=0$．由弗罗贝尼乌斯法(情形 2)提示，我们尝试形如 $y=\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ 的解．代入(7)式，并化简，我们得到系数的两步递推关系如下：

$$\boxed{a_m = \frac{m-1-n}{m^2}a_{m-1}, \quad m = 1,2,\cdots.} \tag{8}$$

我们有 $a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=0$，因此，一个解是 n 次多项式．令

$$\boxed{a_n = \frac{(-1)^n}{n!},}\tag{9}$$

我们对多项式解作规范化，得到 n **次拉盖尔多项式**：

$$\boxed{L_n(x) = n!\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{(j!)^2(n-j)!}x^j.}\tag{10}$$

由这个公式，我们可以推导前面几个拉盖尔多项式(图 3)：

$$L_0(x) = 1,\quad L_1(x) = 1-x,\quad L_2(x) = (2-4x+x^2)/2,\cdots.$$

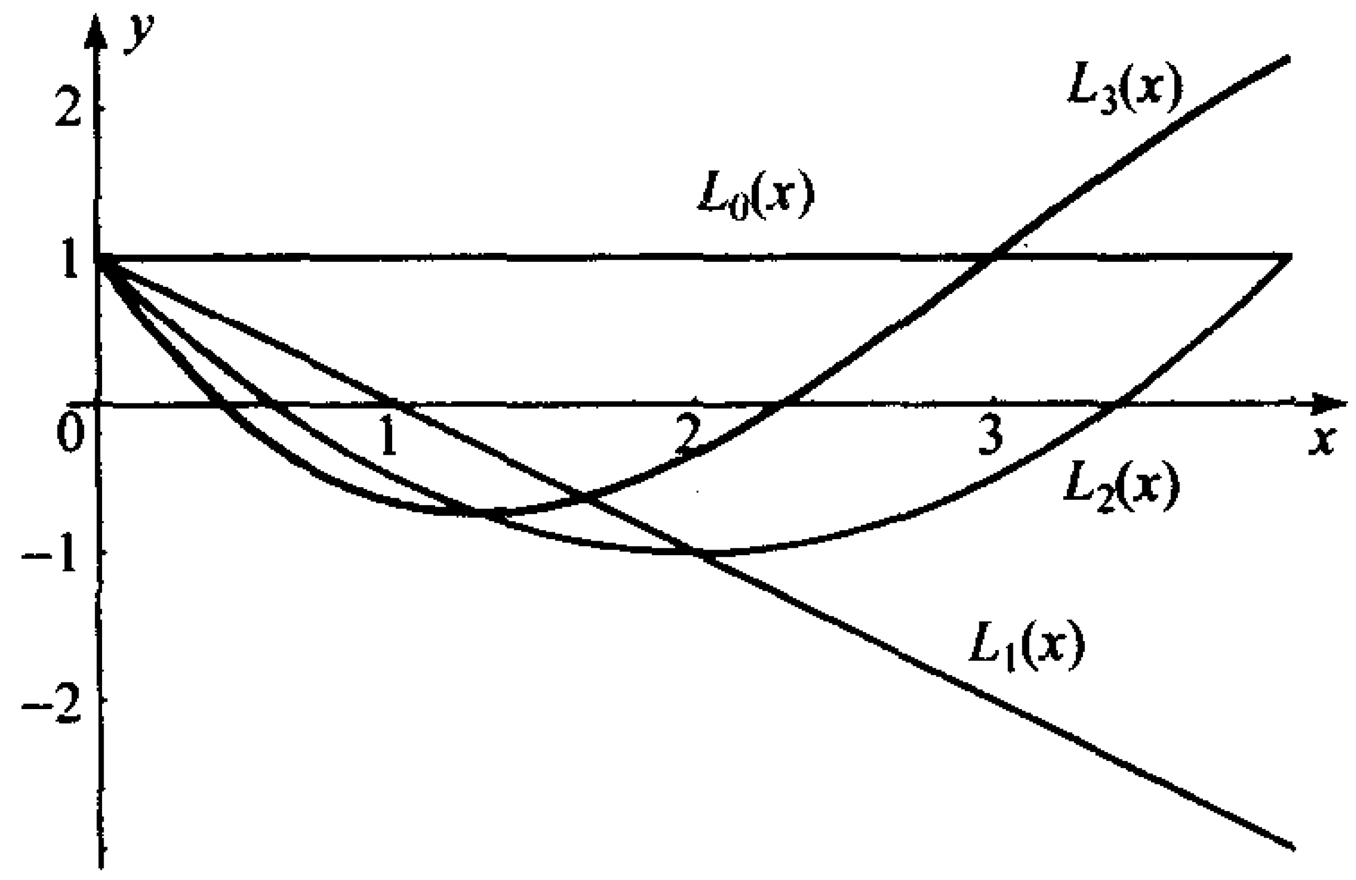


图 3　拉盖尔多项式

600

施图姆-刘维尔理论和正交性

对(7)式乘以 e^{-x}，我们得到(等价的)方程

$$xe^{-x}y'' + (1-x)e^{-x}y' + ne^{-x}y = 0,$$

这可以写成**施图姆-刘维尔形式**

$$(xe^{-x}y')' + ne^{-x}y = 0.$$

因此，拉盖尔多项式是区间(0，∞)上的奇异施图姆-刘维尔问题的特征函数．因而，我们有关于权函数 $p(x)=e^{-x}$正交关系和级数展开等结论．这些结果确切叙述如下．

定理 3(拉盖尔多项式的正交性)　(i)对非负整数 m 和 n，$m\neq n$，我们有

$$\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}dx = 0.$$

(ii)对所有 $n=0，1，2，\cdots$，我们有

$$\int_0^\infty L_n^2(x)e^{-x}dx = 1.$$

定理 3 的结论(i)是施图姆-刘维尔理论(6.2 节定理 2)的直接推论．在习题 23 中，要求利用拉盖尔多项式的性质，确切地，用习题 22 的结果，直接证明定理 3 的结论(i)和(ii)．

定理 4(拉盖尔级数展开)　假设 f 在$[0，\infty)$上分段光滑，且 $\int_0^\infty |f(x)|^2e^{-x}dx < \infty$，则我们有**拉盖尔级数展开**

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}A_jL_j(x),$$

其中拉盖尔系数 A_j 为

$$A_j=\int_0^{\infty}f(x)L_j(x)e^{-x}dx. \tag{11}$$

601 对任意 $0<x<\infty$，如果 f 在 x 处连续，拉盖尔级数收敛到 $f(x)$；否则收敛到$[f(x+)+f(x-)]/2$.

例 2 拉盖尔级数展开

习题 24 推导了拉盖尔级数

$$e^{-x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}L_k(x),\quad 0<x<\infty, \tag{12}$$

图 4 中的图像说明了拉盖尔级数的收敛性，这也是定理 4 所保证的. ■

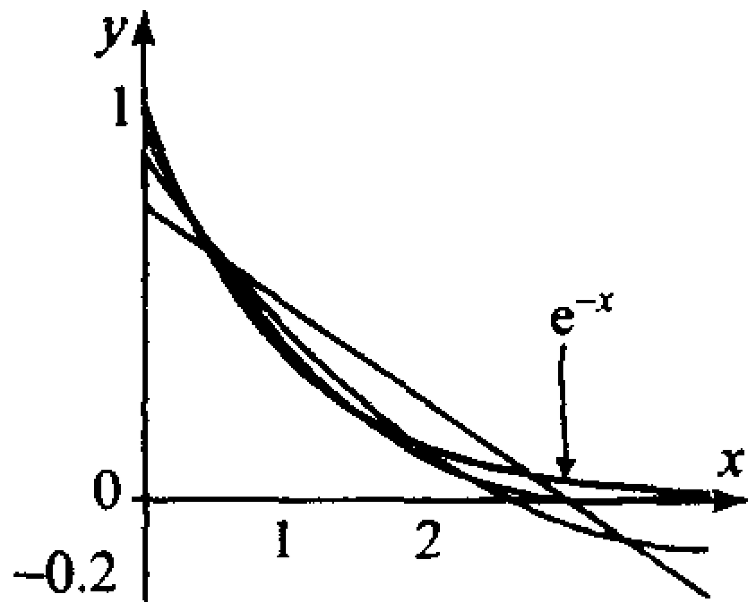


图 4 k 取到 1，2，3 项的拉盖尔级数部分和

埃尔米特多项式和拉盖尔多项式具有许多共同性质，如递推关系式、罗德里格斯型公式等，这些以及其他有趣性质将在习题中探讨.

广义拉盖尔多项式

在 11.2 节求解氢原子的波函数时，我们遇到所谓的**广义拉盖尔微分方程**：

$$\boxed{xy''+(\alpha+1-x)y'+ny=0,\quad 0<x<\infty,} \tag{13}$$

其中，$n=0,1,2,3,\cdots$，α 是实数，且 $\alpha>-1$. 显然，当 $\alpha=0$ 时，(13)式简化为(7)式. 利用弗罗贝尼乌斯法，可以证明(13)式具有多项式解，作适当的规范化之后，称为 **n 次 α 阶广义拉盖尔多项式**，由下式给出：

$$\boxed{L_n^{\alpha}(x)=\Gamma(\alpha+n+1)\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!(n-j)!\Gamma(\alpha+j+1)}x^j,} \tag{14}$$

其中 Γ 表示伽马函数(见 4.7 节). 容易验证，对所有的 α，(14)中的首项系数都是$(-1)^n/n!$，且当 $\alpha=0$ 时，(14)式就简化为(10)式. 因此我们有

$$L_n^0(x)=L_n(x).$$

广义拉盖尔多项式可由罗德里格斯型公式给出(参见定理 7)，它们满足和拉盖尔多项式一样的 602 正交关系式. 可以验证，当 $\alpha=0$ 时，本节后面的结论就化为关于拉盖尔多项式的了.

定理 5(广义拉盖尔多项式的正交性) (i)对非负整数 $m\neq n$，有

$$\int_0^{\infty}L_m^{\alpha}(x)L_n^{\alpha}(x)e^{-x}x^{\alpha}dx=0.$$

(ii)对所有 $n=0,1,2,\cdots$，有

$$\int_0^{\infty}[L_n^{\alpha}(x)]^2e^{-x}x^{\alpha}dx=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}.$$

利用习题 22 中的有趣公式，可以证明该定理，我们将细节留作习题 23.

定理 6(广义拉盖尔级数展开) 假设 f 在$[0,\infty)$上分段光滑，且$\int_0^\infty |f(x)|^2 e^{-x}x^\alpha\,dx<\infty$，则有广义拉盖尔级数展开

$$f(x)=\sum_{j=0}^\infty A_j L_j^\alpha(x),$$

其中广义拉盖尔系数 A_j 为

$$A_j=\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\int_0^\infty f(x)L_j^\alpha(x)e^{-x}x^\alpha dx. \tag{15}$$

对任意 $0<x<\infty$，如果 f 在 x 处连续，拉盖尔级数收敛到 $f(x)$；否则收敛到$[f(x+)+f(x-)]/2$.

广义拉盖尔多项式也可由罗德里格斯型公式

$$\boxed{L_n^\alpha(x)=\frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[x^{n+\alpha}e^{-x}],\quad n=0,1,2,\cdots} \tag{16}$$

给出. 随后我们给出证明，作为一个有趣的例子，我们来计算一个广义拉盖尔级数.

例 3 **广义拉盖尔级数展开**

令 $\alpha>-1$，$f(x)=x^\mu$，$\mu>-\frac{1}{2}(\alpha+1)$，则 f 满足定理 6 的条件. 其 α 阶广义拉盖尔级数展开具有形式

$$x^\mu=\sum_{j=0}^\infty A_j L_j^\alpha(x)\quad(0<x<\infty),$$

603

其中，由(15)式和罗德里格斯公式，我们有

$$\begin{aligned}A_j&=\frac{j!}{\Gamma(j+\alpha+1)}\int_0^\infty e^{-x}x^{\mu+\alpha}L_j^\alpha(x)dx\\&=\frac{j!}{\Gamma(j+\alpha+1)}\int_0^\infty e^{-x}x^{\mu+\alpha}\frac{x^{-\alpha}e^x}{j!}\frac{d^j}{dx^j}[x^{j+\alpha}e^{-x}]dx\\&=\frac{1}{\Gamma(j+\alpha+1)}\int_0^\infty x^\mu\frac{d^j}{dx^j}[x^{j+\alpha}e^{-x}]dx.\end{aligned}$$

分部积分 j 次，我们可以计算最后的积分值，每次利用事实：$x^{k+\alpha}e^{-x}$(k 为正整数)的原函数在 $x=0$ 处为零，以及 $x\to\infty$时，其值趋于零. 因此，我们有

$$A_j=\frac{(-1)^j}{\Gamma(j+\alpha+1)}\mu(\mu-1)\cdots(\mu-j+1)\int_0^\infty x^{\mu+\alpha}e^{-x}dx.$$

由伽马函数的定义，我们知道最后的积分等于 $\Gamma(\mu+\alpha+1)$，因此

$$A_j=\frac{(-1)^j\Gamma(\mu+\alpha+1)}{\Gamma(j+\alpha+1)}\mu(\mu-1)\cdots(\mu-j+1).$$

因而，对 $0<x<\infty$，

$$x^\mu=\Gamma(\mu+\alpha+1)\sum_{j=0}^\infty\frac{(-1)^j}{\Gamma(j+\alpha+1)}\mu(\mu-1)\cdots(\mu-j+1)L_j^\alpha(x).$$

利用伽马函数的性质，系数可以进一步化简，参见习题 25. ■

下面，我们介绍几个有用的公式，再证明(16)式.

定理 7(广义拉盖尔多项式公式) 我们有

$$[L_n^\alpha(x)]' = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x); \tag{17}$$

$$L_n^\alpha(x) = \frac{x}{n}[L_{n-1}^\alpha(x)]' + \left(1+\frac{\alpha}{n}-\frac{x}{n}\right)L_{n-1}^\alpha(x); \tag{18}$$

$$[L_n^\alpha(x)]' = [L_{n-1}^\alpha(x)]' - L_{n-1}^\alpha(x); \tag{19}$$

$$(n+1)L_{n+1}^\alpha(x) - (2n+\alpha+1-x)L_n^\alpha(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) = 0. \tag{20}$$

604

(16)式及定理 7 的证明 (17)式可由(14)式直接得到，留作习题. 在证明余下的恒等式时，我们首先证明(16)式右端所定义的函数是个 n 阶多项式，首项系数为 $a_n=(-1)^n/n!$. (这部分可由归纳法得到，留作习题.)然后，我们证明这些多项式满足(18)、(19)、(20)，且是(13)的解. 由于它们与广义拉盖尔多项式具有同样的首项系数，所以它们必是广义拉盖尔多项式. 这就证明了(16)式，且完成了定理 7 的证明.

在证明中，我们将利用记号 D^n 表示 $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$. 为从(16)式证明(18)式，如下利用莱布尼茨微分法则，有

$$\begin{aligned} n!\,\mathrm{e}^{-x}L_n^\alpha &= x^{-\alpha}D^n[x x^{\alpha+n-1}\mathrm{e}^{-x}] \\ &= x^{-\alpha}(xD^n[x^{\alpha+n-1}\mathrm{e}^{-x}] + nD^{n-1}[x^{\alpha+n-1}\mathrm{e}^{-x}]), \end{aligned}$$

因而

$$L_n^\alpha = x^{-\alpha+1}\frac{\mathrm{e}^x}{n!}D^n[x^{\alpha+n-1}\mathrm{e}^{-x}] + \overbrace{\frac{\mathrm{e}^x}{(n-1)!}x^{-\alpha}D^{n-1}[x^{\alpha+n-1}\mathrm{e}^{-x}]}^{=L_{n-1}^\alpha}. \tag{21}$$

以(16)式的 $n-1$ 情形出发，对

$$x^\alpha\mathrm{e}^{-x}L_{n-1}^\alpha = \frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}[x^{\alpha+n-1}\mathrm{e}^{-x}]$$

两边作微分，我们得到

$$x^\alpha\mathrm{e}^{-x}[L_{n-1}^\alpha]' + (\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x} - x^\alpha\mathrm{e}^{-x})L_{n-1}^\alpha = \frac{1}{(n-1)!}D^n[x^{\alpha+n-1}\mathrm{e}^{-x}].$$

同乘以 $x^{-\alpha+1}\frac{\mathrm{e}^x}{n}$，并化简，我们得到

$$x^{-\alpha+1}\frac{\mathrm{e}^x}{n!}D^n[x^{\alpha+n-1}\mathrm{e}^{-x}] = \frac{x}{n}[L_{n-1}^\alpha]' + \frac{\alpha}{n}L_{n-1}^\alpha - \frac{x}{n}L_{n-1}^\alpha.$$

代入(21)式，化简可得(18)式. 现在，我们证明(19)式. 由(16)式出发，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-x}L_n^\alpha &= \frac{1}{n!}x^{-\alpha}D^{n-1}D[x^{\alpha+n}\mathrm{e}^{-x}] \\ &= \frac{\alpha+n}{n!}x^{-\alpha}D^{n-1}[x^{\alpha+n-1}\mathrm{e}^{-x}] - \frac{1}{n!}x^{-\alpha}D^{n-1}[x^{\alpha+n}\mathrm{e}^{-x}]. \end{aligned}$$

因此

$$L_n^\alpha=\frac{\alpha+n}{n}L_{n-1}^\alpha-\frac{1}{n!}x^{-\alpha}\mathrm{e}^xD^{n-1}[x^{\alpha+n}\mathrm{e}^{-x}].$$

两边微分，并利用(16)和(17)式化简得到

$$\begin{aligned}[L_n^\alpha]'&=\frac{\alpha+n}{n}[L_{n-1}^\alpha]'-L_n^\alpha-\frac{1}{n!}(x^{-\alpha}\mathrm{e}^x-\alpha x^{-\alpha-1}\mathrm{e}^x)D^{n-1}[x^{\alpha+n}\mathrm{e}^{-x}]\\&=\frac{\alpha+n}{n}[L_{n-1}^\alpha]'-L_n^\alpha-\frac{x}{n}L_{n-1}^{\alpha+1}+\frac{\alpha}{n}L_{n-1}^{\alpha+1}\\&=\frac{\alpha+n}{n}[L_{n-1}^\alpha]'-L_n^\alpha+\frac{x}{n}[L_n^\alpha]'-\frac{\alpha}{n}[L_n^\alpha]',\end{aligned}$$

605

进一步化简可得(19)式. 关于(20)式，在(19)式中解出$[L_{n-1}^\alpha]'$，代入(18)式，得到

$$L_n^\alpha=\frac{x}{n}[L_n^\alpha]'+\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)L_{n-1}^\alpha.\tag{22}$$

在(18)式中将n换成$n+1$，并利用(22)式消去$[L_n^\alpha]'$，化简可得(20)式. 最后，我们证明：满足(18)和(19)式的函数是(13)的解. 微分(18)式，再将n换成$n+1$：

$$[L_{n+1}^\alpha]'=\frac{x}{n+1}[L_n^\alpha]''+\frac{1}{n+1}[L_n^\alpha]'+\left(1+\frac{\alpha}{n+1}-\frac{x}{n+1}\right)[L_n^\alpha]'-\frac{1}{n+1}L_n^\alpha.$$

在(19)式中以$n+1$代替n，以消去$[L_{n+1}^\alpha]'$，然后化简可知L_n^α满足(13). ■

习题 11.4

埃尔米特多项式

1. 利用(4)式，推导埃尔米特多项式H_0，H_1，H_2，H_3.
2. 利用幂级数法(附录 A.5)，推导递推关系(2).
3. 作为6.2节定理2的应用，证明定理1的正交关系(i). 必须叙述和验证可以使用该定理的条件.

罗德里格斯公式. 在习题8中，将验证n次埃尔米特多项式由下面的罗德里格斯型公式

$$H_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2},\quad n=0,1,2,\cdots\tag{23}$$

给出，其中，一个函数的0阶导数就是函数本身. 这个公式具有许多有趣的推论，我们将在下面的习题中探讨.

4. 推导H_0，H_1，H_2，H_3，以验证(23)式.
5. (a)由(23)式出发，验证：

$$(-1)^n\mathrm{e}^{-x^2}H_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

(b)得出结论

$$\begin{aligned}(-1)^n\mathrm{e}^{-x^2}H_n(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-x^2}H_{n-1}(x)\}\\&=(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-x^2}(-2xH_{n-1}(x)+H_{n-1}'(x)).\end{aligned}$$

(c)化简以得到下面的归纳公式：

$$H_n(x)=2xH_{n-1}(x)-H_{n-1}'(x),\quad n=1,2,\cdots.\tag{24}$$

606

6. **专题问题：埃尔米特多项式的递推关系**. 本题的目的就是证明下面的递推关系，它给出了不同次数的埃尔米特多项式之间的联系. 对$n=1$，2，…，我们有

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x).\tag{25}$$

(a)为简化记号，我们将用 D^n 代替$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$. 利用(23)式，证明

$$e^{-x^2}H_{n+1}(x) = -2(-1)^{n+1}D^n(xe^{-x^2}).$$

(b)利用莱布尼茨微分法则(参见5.6节的附录)，得到

$$e^{-x^2}H_{n+1}(x) = 2(-1)^n[xD^n e^{-x^2} + nD^{n-1}e^{-x^2}].$$

(c)推导递推关系式(25).

7. (a)利用(25)式，证明：

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$$

因此，当 n 为偶数时，H_n 为偶数；而当 n 为奇数时，H_n 为奇数. [提示：用归纳法证明.]

(b)当 n 为奇数时，由(a)得出结论 $H_n(0)=0$.

(c)利用归纳法，和事实 $H_0(0)=1$，以及(25)式，证明：

$$H_{2m}(0) = (-1)^m \frac{(2m)!}{m!}.$$

8. 在本习题中，我们将证明：由(23)式给出的函数事实上就是埃尔米特多项式. 为此，我们将证明：这些函数是 n 次多项式；首项系数为 2^n；满足微分方程(1). 所证的结论由埃尔米特多项式是唯一满足这些性质的多项式这个事实得到. 为清楚起见，我们记(23)、(24)和(25)中的函数为 $p_n(x)$，而将记号 $H_n(x)$ 留着表示埃尔米特多项式(4).

(a)利用 $p_0(x)=1$ 这个事实和(24)式，证明：$p_n(x)$ 事实上是一个 n 次多项式. [提示：用归纳法证明.]

(b)由归纳法证明：$p_n(x)$ 中 x^n 的系数是 2^n.

(c)在(24)式中，以 n 代替 $n+1$，减去(25)式的结果，得到

$$p_n'(x) = 2np_{n-1}(x). \tag{26}$$

微分(24)式，再利用(26)式，得到

$$2np_{n-1}(x) = 2xp_{n-1}'(x) + 2p_{n-1}(x) - p_{n-1}''(x).$$

移项可得 p_n 是(1)的解.

9. **与埃尔米特多项式乘积的积分**. 试证：

607

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)H_n(x)e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x)e^{-x^2}\mathrm{d}x, \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

(为使积分收敛，我们要求 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f^{(k)}(x)x^m e^{-x^2}=0$ 对所有非负整数 k 和 m 成立.)[提示：利用(23)式，反复运用分部积分.]

10. **定理 1 的证明.**

(a)利用习题 9，证明定理 1 的(i). [提示：不失一般性，设 $m<n$，在习题 9 中取 $f=H_m$.]

(b)利用习题 9，证明定理 1 的(ii). [提示：同时需要(3)，以及 4.7 节习题 35.]

11. **埃尔米特系数**. 利用埃尔米特多项式的正交性，验证(5)式.

12. 证明：

$$\int e^{-x^2}H_n(x)\mathrm{d}x = -e^{-x^2}H_{n-1}(x) + C.$$

[提示：利用(1)的施图姆-刘维尔形式.]

13. (a)令

$$\mathcal{U}_0(x) = \begin{cases} 1 & 如果\ x>0, \\ 0 & 如果\ x<0 \end{cases}$$

表示海维赛德单位阶梯函数，试证：

$$U(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}2^{2k+1}(2k+1)!k!}H_{2k+1}(x).$$

[提示：习题 12 和 7(c).]

(b)画出几个部分和的图像，讨论级数的收敛性，描述级数在 $x=0$ 处的性态.

14. **专题问题.** 在本题中，将推导(6)式.

(a)试证：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin x H_{2k+1}(x)e^{-x^2}dx=2(-1)^k\int_0^{\infty}\cos x e^{-x^2}dx.$$

[提示：习题 9.]

(b)由积分

$$2\int_0^{\infty}\cos x e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{e^{1/4}}$$

得出(6)式.（该积分在 7.2 节结尾处利用傅里叶变换计算过.）

(c)画出几个部分和的图像，并讨论 $\sin x$ 的埃尔米特级数的收敛性.

15. **专题问题：埃尔米特多项式的生成函数** 对任意实数 x 和 u，我们有

$$e^{2xu-u^2}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{u^n}{n!}.$$

608

(a)证明：

$$\frac{d^n}{du^n}e^{-(x-u)^2}\Big|_{u=0}=(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}=e^{-x^2}H_n(x).$$

(b)计算 $e^{-(x-u)^2}$ 在 $u=0$ 处的泰勒级数展开式，然后推出生成函数的公式.［提示：$e^{2xu-u^2}=e^{x^2}e^{-(x-u)^2}$.］

16. (a)推导埃尔米特级数展开

$$e^x=e^{1/4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}H_n(x).$$

[提示：习题 15.]

(b)运用图像说明埃尔米特级数的收敛性.

17. (a)在习题 15 中取 $u=i/2$，推导埃尔米特级数展开

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{e^{1/4}2^{2k}(2k)!}H_{2k}(x).$$

(b)画出几个部分和的图像，以说明级数的收敛性.

拉盖尔多项式

18. 利用(10)，推导拉盖尔多项式 L_0，L_1，L_2，L_3.
19. 利用弗罗贝尼乌斯法(附录 A.6)，推导递推关系式(8).
20. 利用 6.2 节的定理 2，证明本节定理 3 的正交关系.
21. 由(14)式证明(17)式.
22. **与拉盖尔多项式乘积的积分.** 对 $n=0,1,2,\cdots$，建立公式

$$\int_0^{\infty}f(x)L_n^{\alpha}(x)x^{\alpha}e^{-x}dx=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{\infty}f^{(n)}(x)x^{\alpha+n}e^{-x}dx,$$

这里 f 满足：$\lim_{x\to\infty}f^{(k)}(x)x^m e^{-x}=0$ 对所有非负整数 k 和 m 成立.［提示：分部积分.］

23. 利用习题 22，证明定理 5(进而定理 3).［提示：同时，需要应用(14)式.］
24. **广义拉盖尔多项式的生成函数.** 对任意实数 x 和所有 $-1<t<1$，我们有

$$\frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^{-(\alpha+1)}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}L_n^{\alpha}(x)t^n.$$

这个公式的推导完全类似于推导埃尔米特多项式和拉盖尔多项式的生成函数. 作为应用，取 $\alpha=0$，推导 e^{-x} 的拉盖尔级数展开.

609

25. 证明：例题 3 的拉盖尔级数展开式可以写成

$$x^{\mu}=\Gamma(\mu+\alpha+1)\Gamma(\mu+1)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j}L_{j}^{\alpha}(x)}{\Gamma(\alpha+j+1)\Gamma(\mu-j+1)}.$$

(a)解释为何当 μ 是非负整数时，这个级数只有有限项. [提示：回顾对非正整数的伽马函数的定义.]

(b)当 $\mu=1/2$ 时，尽量化简上述展开式.

(c)画出几个部分和的图像，以说明(b)中的结果.

26. 考虑拉盖尔级数展开式

$$x^{-\alpha/2}J_{\alpha}(2\sqrt{x})=e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+\alpha+1)}L_{k}^{\alpha}(x),\quad(0<x<\infty),$$

其中 $\alpha\geqslant 0$.

(a)当 $\alpha=0$ 时，尽量化简上述展开式.

(b)画出几个部分和的图像，以说明(a)中的结果.

27. 利用(4)和(14)式，推导下面的恒等式，它将埃尔米特多项式和拉盖尔多项式联系起来了.

610

$$L_{n}^{-1/2}(x)=\frac{(-1)^{n}}{2^{2n}n!}H_{2n}(\sqrt{x});\quad L_{n}^{1/2}(x)=\frac{(-1)^{n}}{2^{2n+1}n!}\frac{H_{2n+1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

第 12 章　格林函数和共形映射

人们不能回避数学公式的独立存在性以及自己的智商，他们更聪明，但我们比最初提出公式的人获益更多.

——亨利希·赫兹

综述　本章需要微积分中的格林定理，将在 12.1 节引述并证明. 本章的目的就是引入求解拉普拉斯方程和泊松方程的方法，因此，3.8 节、3.9 节、4.4 节和 7.5 节对本章而言是非常有用的. 12.5～12.8 节需要复数和复值函数的知识，所需的材料在 12.5 节作了简述. 12.5 节和 12.6 节可以独立于本章其他部分学习. 12.7 节和 12.8 节基于本章的其他小节.

导读　在本章中，我们引入求解狄利克雷问题和泊松方程的新方法：格林函数和诺伊曼函数，以及共形映射. 粗略地说，给定区域 Ω 的格林函数是一个仅依赖于 Ω 的函数，可以用来求解 Ω 上的任意一个狄利克雷问题和泊松问题，同样，实线上的泊松核可以用来求解上半平面中的狄利克雷问题. 共形映射就像是一个变量代换，它将一个给定区域上的狄利克雷问题变换成另一个区域上容易求解的问题，就像变量代换将复杂积分变成简单积分一样.

本章的方法是新的，但是目标仍然一样：求解边值问题. 为引出本章的结论，回顾 7.5 节的泊松积分公式. 这里我们将推出一些类似的公式，它们可以用来求解平面上任意(单连通)区域上的狄利克雷问题和诺伊曼问题. 就像泊松积分，这些公式包含了解的一些信息.

在 12.1 节和 12.2 节，我们从微积分中的格林定理开始，仅运用分部积分等技巧，推导两个恒等式，称为格林第一和第二恒等式. 然后，应用这些公式得到拉普拉斯方程解的重要性质. 在 12.3 节，修改公式，引入格林函数. 利用格林函数，经过简单的运算，即可得到狄利克雷问题和泊松方程解的公式(泊松型积分公式).

这些值得注意的公式增加了我们对狄利克雷问题解性质的理解，更重要的是，它们引导我们去探究其与解析函数理论之间的联系，得到了两个重要的结果：在利用解析函数的变量代换下，拉普拉斯方程的不变性(12.6 节)；格林函数与解析函数的复合(12.7 节). 前者导出共形映射这个强有力的方法，而后者导出计算格林函数的巧妙方法.

为简化叙述，我们仅讨论二维问题模型. 更多高维问题也可以处理，我们希望本章作为深入学习更高级理论的引子.

12.1　格林定理和恒等式

本节，我们证明格林定理，并推导两个恒等式，称为格林第一和第二恒等式. 然后，我们导出几个应用，它们展示出本章的风格. 首先，我们回顾导出线积分的一些基本定义.

参数曲线　令 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$ 是关于 t 在闭区间 $[a, b]$ 上的连续、分段光滑函数. 方程

$x=x(t)$和 $y=y(t)$称为参数 t 的参数方程．当 t 在$[a, b]$上变化时，点$(x(t), y(t))$画出一条**参数曲线**，或简单地说**曲线**．有时，为了方便，令 $C(t)=(x(t), y(t))$，称这个曲线为曲线 C．点$(x(a), y(a))$称为 C 的**起点**，而点$(x(b), y(b))$称为 C 的**终点**．曲线称为**闭的**，如果其终点等于起点；即，$(x(a), y(a))=(x(b), y(b))$．图 1 描述的是单位圆上的一段弧，由方程$x(t)=\cos t$ 和 $y(t)=\sin t$ 参数化，其中 t 在区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$上．

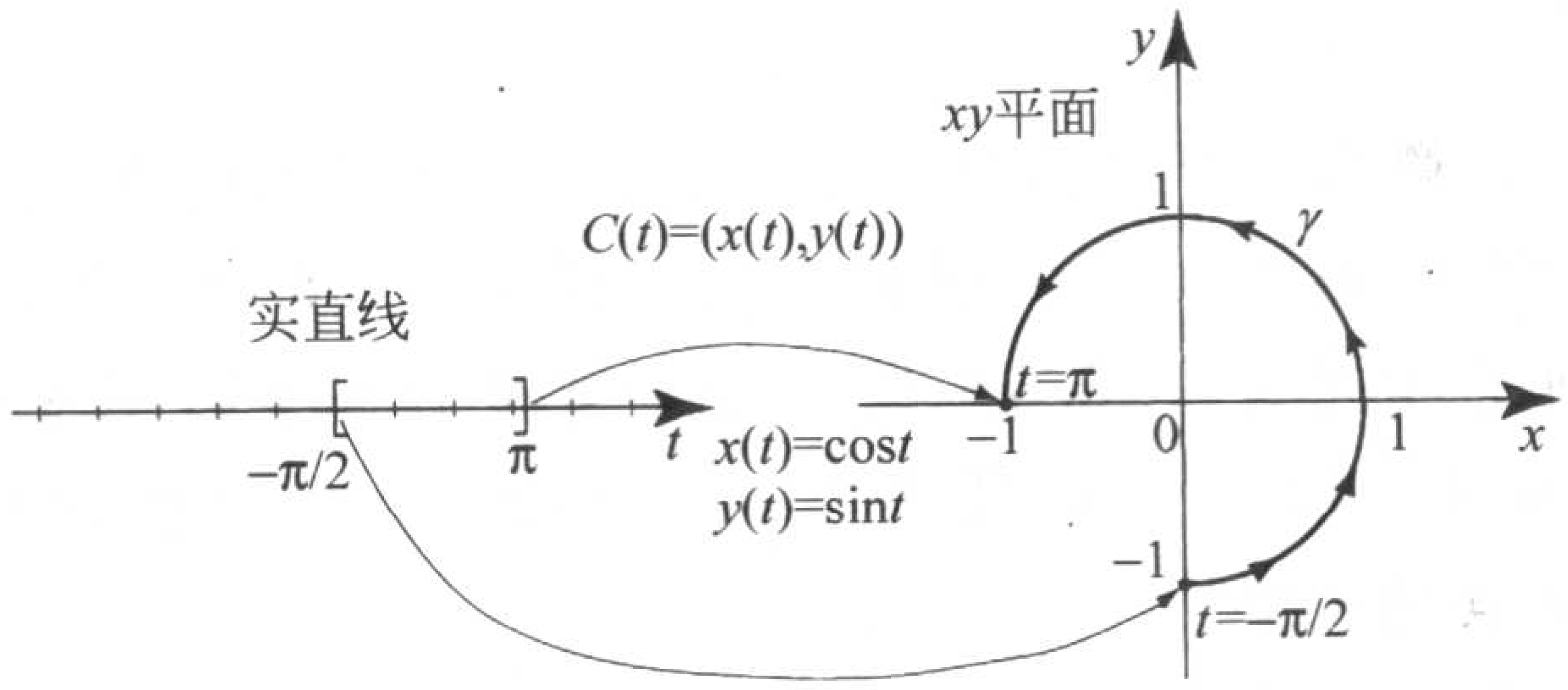


图 1　参数区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$映到圆上的弧．起点是$(0, -1)$，终点是$(-1, 0)$．为得到闭曲线，我们利用区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

简单曲线　一个闭曲线称为**简单的**，如果它没有与自身相交．即如果 C 是简单的，且对$[a, b]$上某个 $t_1<t_2$，$C(t_1)=C(t_2)$，则 $t_1=a$，以及 $t_2=b$．简单曲线也称为**若尔当曲线**，是以法国数学家卡米尔・若尔当(1838—1922)的名字来命名的．若尔当证明了一个著名的定理，即一条简单曲线 C 将平面分为两个部分：一个有界且包含在 C 内部；另一个无界，是 C 的外部(见图 2)．

定向　若尔当定理使我们可以定义简单曲线 C 的定向．沿着 C 运动，如果内部区域在你的左边，则是沿着 C 的**正向**运动；否则就是沿着 C 的**负向**运动．我们以 $-C$ 记 C 的**反曲线**，它是沿着与 C 相反的方向运动．

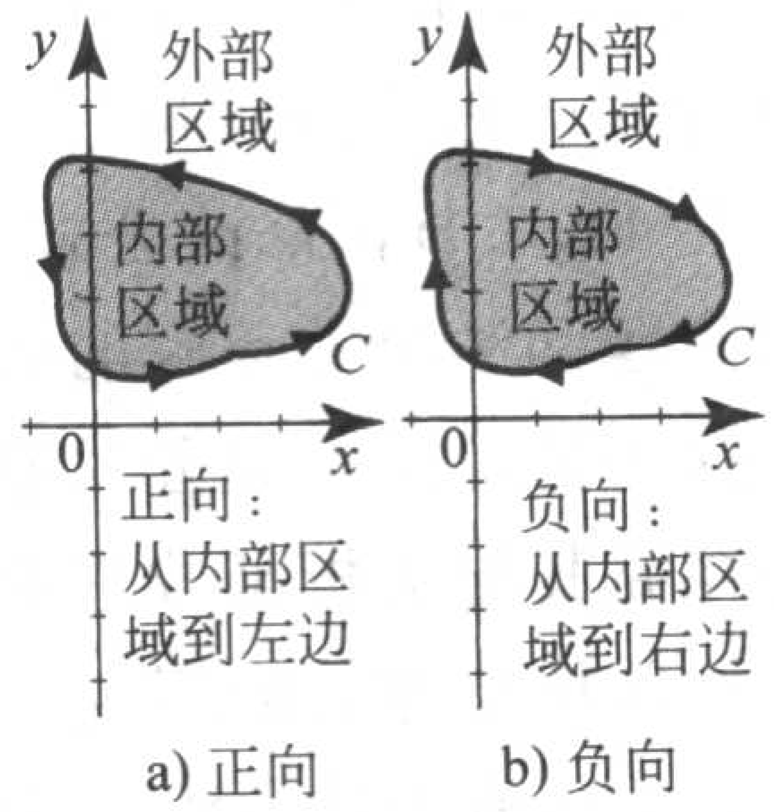
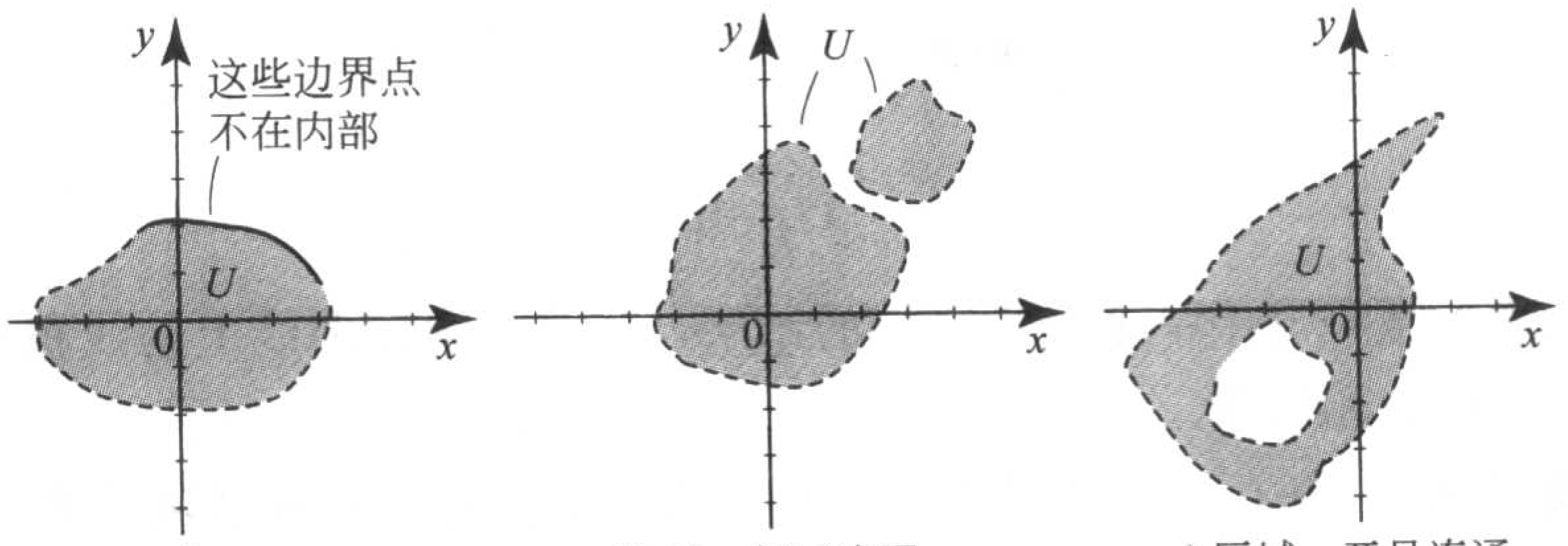


图 2　简单曲线

开集和区域　平面的子集 U 是**开的**，如果对 U 中的任意一点(x_0, y_0)，存在一个以(x_0, y_0)为中心的开圆盘 D 完全包含在 U 内．换句话说，U 是开的，如果 U 的任意一点都是内点．因此，如果 U 是开的，则它不能包含边界点，因为边界点不是内点(图 3)．复平面上子集 S 称为**连通的**，如果 S 中的任意两点(x_0, y_0)和(x_1, y_1)可以用完全包含在 S 内的折线段连接．(折线段是指由有限条直线段首尾相接而成的曲线．)如果一个集合是开的和连通的，则称为**区域**．

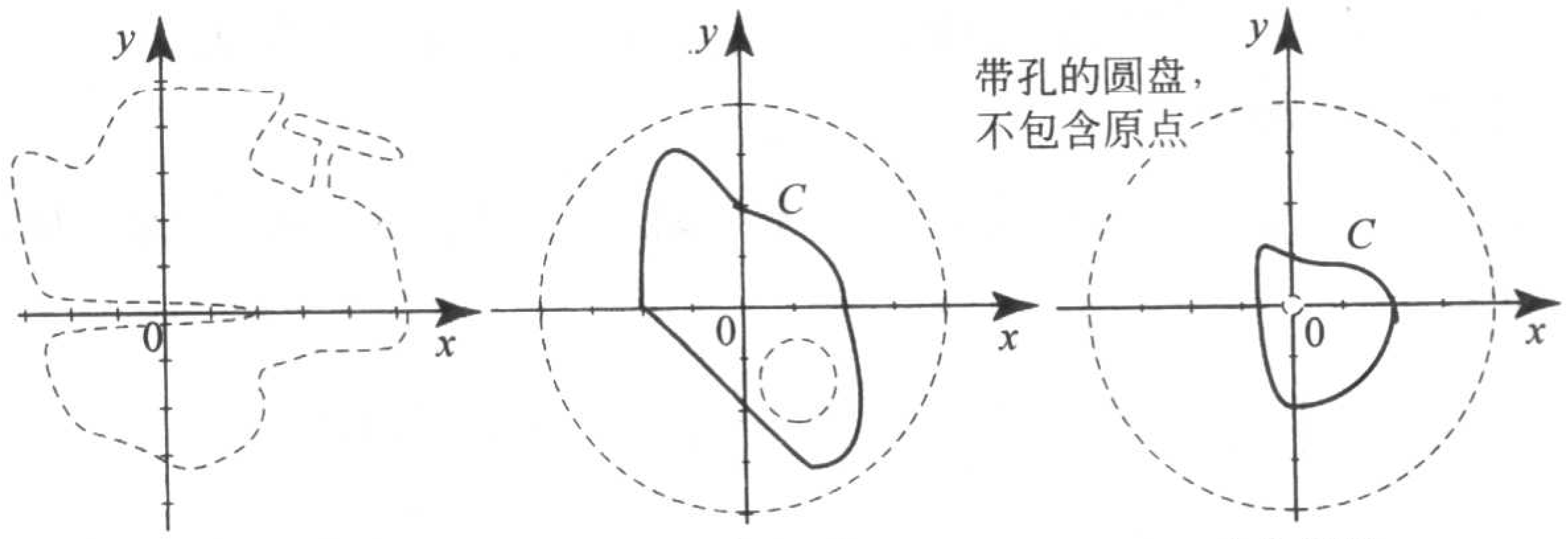
612

单连通区域　平面上区域 D 称为**单连通的**，如果 D 内的任意一个简单曲线的内部区域都包含在 D 内．以图形来说，D 是单连通的，如果它内部没有洞(图 4)．不是单连通的区域，称为**多连通的**．



a) 非开　b) 开，但不连通　c) 区域：开且连通

图 3



a) 单连通　b) 多连通　c) 多连通

图 4　在 b 和 c 中，我们画出了一条内部不全在区域内的曲线

线积分　如果 C 是由 $(x(t),\ y(t))$，$a\leqslant t\leqslant b$ 所参数化的曲线，而 $f(x,\ y)$ 是 C 上的连续函数，我们定义 f 在 C 上的线积分为

$$\boxed{\int_C f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.} \tag{1}$$

我们感兴趣的另外两个积分为

$$\boxed{\int_C f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x(t),y(t))x'(t)\mathrm{d}t} \tag{2}$$

和

$$\boxed{\int_C f(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b f(x(t),y(t))y'(t)\mathrm{d}t.} \tag{3}$$

613

线积分具有许多与黎曼积分类似的性质，我们对关于 $\mathrm{d}x$ 的积分陈述几条性质，类似恒等式对关于 $\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}s$ 的积分同样成立．积分是线性的：

$$\int_C (af(x,y)+bg(x,y))\mathrm{d}x=a\int_C f(x,y)\mathrm{d}x+b\int_C g(x,y)\mathrm{d}x.$$

积分对曲线是可加的：如果 C 是由 C_1 和 C_2 首尾相接而成的，则

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{C_1} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{C_2} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

如果 $-C$ 是 C 的反向曲线，则

$$\int_{-C} f(x,y)\mathrm{d}x = -\int_C f(x,y)\mathrm{d}x.$$

格林定理

格林定理是多元微积分中一个令人吃惊的结果，它将一个闭曲线上的线积分与由曲线所界定的区域上的二重积分相联系.

定理 1(**格林定理**) 令 C 是一条具有正定向的简单曲线，其内部区域为 D. 令 $M(x, y)$ 和 $N(x, y)$ 在 C 和 D 上连续，且具有一阶连续偏导数，则

$$\int_C (M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y) = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4}$$

首先，我们举例说明这个定理的应用，而将它的证明放到本节的末尾.

例 1 **线积分表示的面积**

令 C 是一条具有正定向的简单曲线，其内部区域为 D(图 5)，则 D 的面积可由下面三个积分中任意一个表示：

$$\int_C -y\mathrm{d}x, \quad \int_C x\mathrm{d}y, \quad \frac{1}{2}\int_C (-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y). \tag{5}$$

解 对第一个积分，取 $M(x, y) = -y$，$N(x, y) = 0$，应用格林定理，由于 $M_y = -1$，$N_x = 0$，其中下标表示偏导数，则

$$\int_C -y\mathrm{d}x = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = D \text{ 的面积},$$

即为所证. 类似地，取 $M = 0, N = x$，应用格林定理，得到 $\int_C x\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = D$ 的面积. 将(5) 中的前两个积分相加，

614

再除以 2，我们得到第三个积分也等于 D 的面积. ■

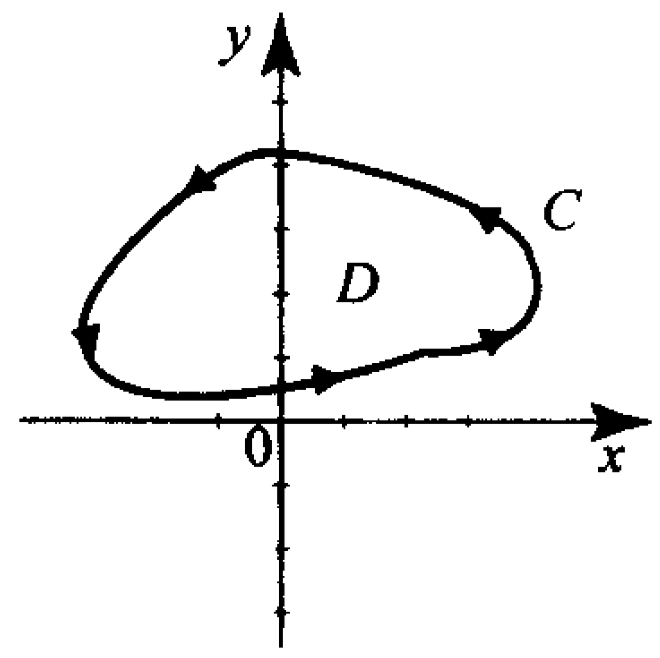


图 5 例 1 中线积分表示的面积

例 2 **验证格林定理**

令 C 为具有正定向的中心在原点的单位圆周，对 $M(x, y) = y^2$ 和 $N(x, y) = -x$，验证格林定理.

解 为验证格林定理，我们计算恒等式(4)两边的积分，并说明它们相等. 我们有 $M_y = 2y$，以及 $N_x = -1$，则(4)式变为

$$\int_C (y^2\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y) = \iint_D (-1 - 2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

为计算线积分，对圆作参数化

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

则 $\mathrm{d}x = -\sin t\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}y = \cos t\mathrm{d}t$，积分变为

$$\int_C (y^2\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y) = -\int_0^{2\pi} (\sin^3 t + \cos^2 t)\mathrm{d}t = -\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^3 t + \cos^2 t)\mathrm{d}t,$$

其中我们利用了 2.1 节的定理 1，改变了积分区间. 由于 $\sin^3 t$ 是奇函数，它在对称区域上的积分为零. 同时，

$$-\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=-\pi.$$

因此，线积分的值为$-\pi$. 为计算二重积分，由区域的形状，使用极坐标更为方便：$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$0\leqslant r\leqslant 1$，且 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，则

$$\iint_D(-1-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\int_0^1(-1-2r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta=-\pi.$$

至此格林函数验证完毕. ■

多连通区域

为后面的应用，我们将需要在多连通区域上的格林定理，其叙述如下. 令 C 是一个简单闭曲线，C_1，C_2，…，C_n 是包含在 C 内部的简单闭曲线，且任意两个 C_j 的内部区域没有公共点. 我们还要求 C 是正定向的，其他的 C_j 都是负定向的. 令 Ω 是由 C 的内部、C_1，C_2，…，C_n 的外部所界定的区域(图 6). 为了方便，我们称曲线 C，C_1，C_2，…，C_n 的全体是 Ω 的边界，记这个边界为 Γ. 因此，

$$\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}x=\int_C f(x,y)\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^{n}\int_{C_j}f(x,y)\mathrm{d}x,$$

其中 C_j 是负定向的. 对关于 $\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}s$ 的积分，赋予类似的意义.

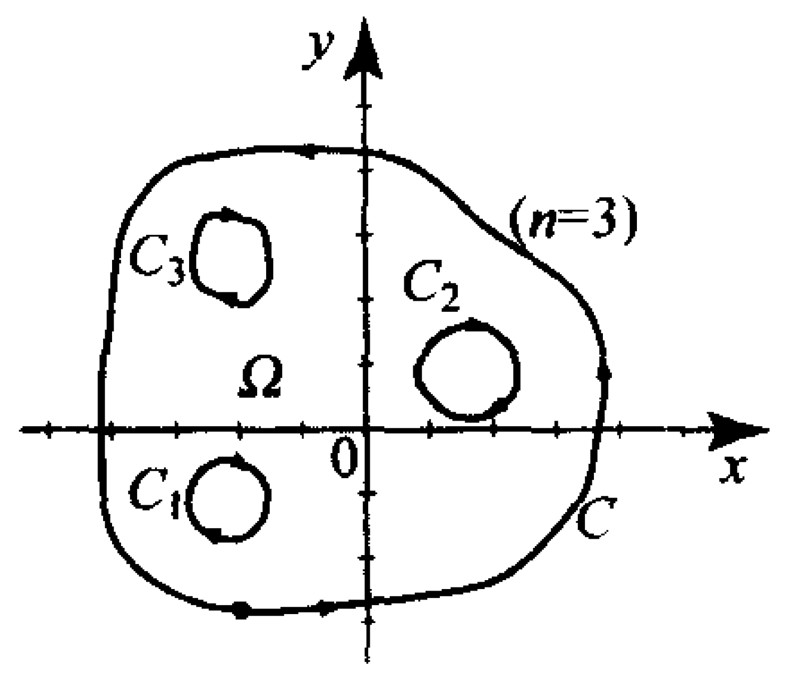


图 6 一个典型的多连通区域：正定向的外曲线，负定向的内部曲线

615

定理 2(多连通区域的格林定理) 令 Ω 是一个多连通区域，其边界为 Γ，如上所述. 假设 $M(x,y)$和 $N(x,y)$在 Ω 和 Γ 上连续，且具有一阶连续偏导数，则

$$\int_\Gamma M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=\iint_\Omega\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{6}$$

证明可以转化为定理 1 情形.（参见本节的附录.）

例 3 多连通区域的格林定理

令 C 为具有正定向的中心在原点的单位圆，令 C_1 为具有负定向的中心在原点、半径为$\frac{1}{2}$的圆(图 7). 计算积分

$$I=\int_C\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\int_{C_1}\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x.$$

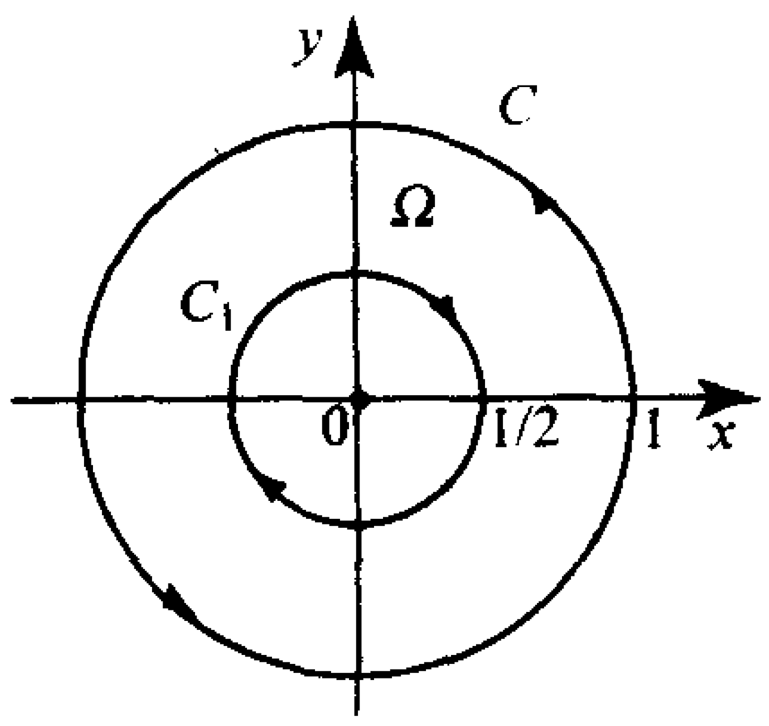


图 7 例 3 的图像

解 令 Ω 为由 C 和 C_1 所界定的区域. 对 $M=\frac{y}{x^2+y^2}$，$M_y=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，$N=0$，$N_x=0$，应用(6)式，我们得到

$$I=\iint_{\Omega}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Ω 为由 C 和 C_1 所界定的环形区域. 利用极坐标：$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$，$\frac{1}{2}\leqslant r\leqslant1$，以及 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，我们有

$$\begin{aligned}I&=\iint_{\Omega}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{r^2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)}{r^4}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\overbrace{(\sin^2\theta-\cos^2\theta)}^{-\cos2\theta}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{r}\mathrm{d}r\\&=-\ln2\int_0^{2\pi}\cos2\theta\,\mathrm{d}\theta=0.\end{aligned}$$

■

格林恒等式

在求解狄利克雷问题和诺伊曼问题时，我们要求在 Ω 内寻找一个调和函数，其在边界上的值或法向导数值预先给定. 格林定理将线积分和二重积分相联系，因此从某种意义上说，它由函数在边界上的值给出了函数在该区域内的取值信息. 本章的目的就是灵活地运用格林定理，以说明利用边界上的线积分可以解决狄利克雷和诺伊曼问题. 为此，我们推导两个重要的公式，称为格林第一和第二恒等式.

616

让我们回顾法向导数的含义，如果 $u(x,y)$是一个定义在曲线 C 上的函数，$x(t)$和 $y(t)$是曲线的参数化，则 u 的法向导数$\left(\text{记为}\frac{\partial u}{\partial n}\right)$是 u 关于单位法向量的方向导数：

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\nabla u\cdot n=(u_x,u_y)\cdot\frac{(y'(t),-x'(t))}{\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}},\tag{7}$$

其中，在这个表达式中，我们记曲线 C 的法向量是向量$(y'(t),-x'(t))$，其范数是 $\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}$. 回顾(1)式中的记号，$\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$，对曲线 C 上的点，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s&=(u_x,u_y)\cdot(y'(t),-x'(t))\mathrm{d}t=u_xy'(t)\mathrm{d}t-u_yx'(t)\mathrm{d}t\\&=-u_y\mathrm{d}x+u_x\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{8}$$

现在，我们可以陈述并证明以下两个重要的恒等式.

定理 3(格林恒等式) 令 Ω 是一个多连通区域，其边界为 Γ，如定理 2 所述(图 8). (特别地，外侧曲线是正定向的，内部的曲线是负定向的.)令 $u(x,y)$和 $v(x,y)$在 Ω 及其边界 Γ 上具有二阶连续偏导数，则我们有**格林第一恒等式**

$$\iint_{\Omega}(u\nabla^2v+\nabla u\cdot\nabla v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\Gamma}u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s\tag{9}$$

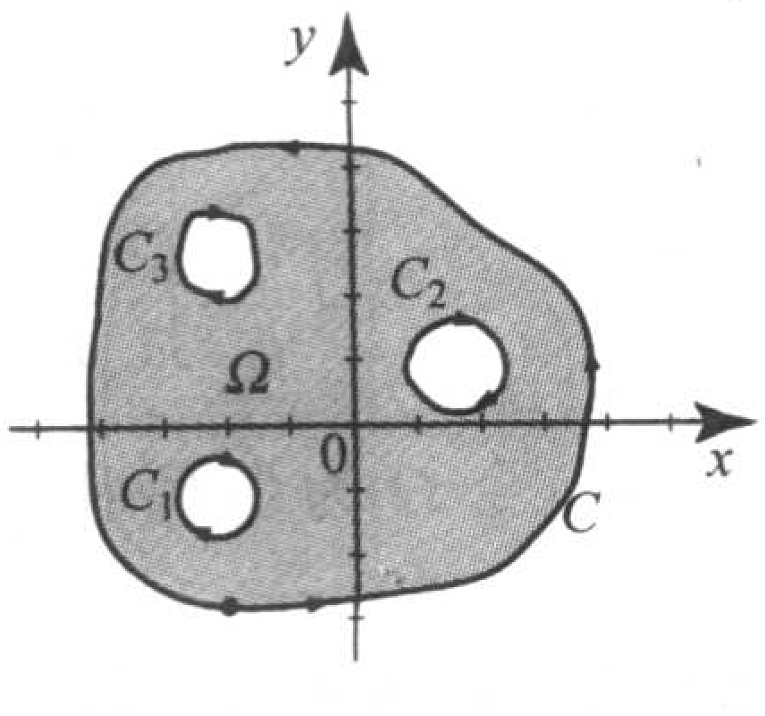


图 8 定理 3 中的区域

和格林第二恒等式

$$\iint_{\Omega}(u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\Gamma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s. \tag{10}$$

证明 对 $M(x, y) = -uv_y$，$N(x, y) = uv_x$，$M_y = -u_y v_y - uv_{yy}$，$N_x = u_x v_x + uv_{xx}$，应用格林定理，得到

$$\iint_{\Omega}(u(v_{xx} + v_{yy}) + (u_x v_x + u_y v_y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\Gamma} u(-v_y\mathrm{d}x + v_x\mathrm{d}y). \tag{11}$$

上式左端的积分与(9)式左端的积分一样，而右端的积分与(9)右端的积分一样，因为(8)式. 因此，(9)式成立. 为证(10)式，我们在(9)交换 u 和 v 的位置，得到

$$\iint_{\Omega}(v\nabla^2 u + \nabla u \cdot \nabla v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\Gamma} v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s.$$

与(9)式相减，我们得到(10)式. ■ 617

在边值问题中的应用

现在，我们推导格林恒等式的几个有趣应用. 除了其本身的重要性外，这些应用展示了本章其他小节的风格.

例 4 拉普拉斯积分的格林公式

这个公式说明：如果 v 在一个如定理 2 所述、边界为 Γ 的单连通或多连通区域 Ω 上具有一阶和二阶连续偏导数，则

$$\iint_{\Omega}\nabla^2 v(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\Gamma}\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s.$$

为证明这个公式，只需在格林第一恒等式中取 $u=1$ 即可. ■

例 5 诺伊曼问题中的相容性条件

令 Ω 是如定理 2 所述、边界为 Γ 的单连通或多连通区域. 假设 u 在 Ω 上是调和的，即 u 在 Ω 上具有一阶和二阶连续偏导数，且在 Ω 上，$u_{xx} + u_{yy} = 0$，则 u 的法向导数在边界上的积分必为零，即调和函数 u 在边界上的法向导数不能是任意的，它们必须满足相容性条件

$$\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s = 0.$$

为证明这个事实，只需在格林第二恒等式中取 $v=1$ 即可. ■

对剩下的应用，我们将需要如下结果，其证明可以在任何一本关于向量微积分的课本上找到(或参见[1]，2.1 节).

命题 1 *假设 $u(x, y)$ 是一个定义在区域 Ω 上的函数，对 Ω 内的所有点 (x, y)，$u_x(x, y)=0$ 和 $u_y(x, y)=0$，则 u 在 Ω 上必为常数.*

现在，我们可以证明在一个单连通或多连通区域 Ω 上狄利克雷问题解的唯一性.

定理 4(狄利克雷问题解的唯一性) *令 Ω 是一个单连通或多连通区域，其边界为 Γ，如定*

理 3 所述．如果 u_1 和 u_2 是 Ω 上的调和函数，且在边界 Γ 上，$u_1=u_2$，则在 Ω 上，$u_1=u_2$.

证明 令 $u=u_1-u_2$，则 u 在 Ω 上调和，且在 Γ 上，$u=0$．我们必须证明 u 在 Ω 上为零．取 $u=v$，应用格林第一恒等式，以及事实 $\nabla^2 u=0$，我们得到

$$\iint_\Omega \nabla u\cdot\nabla u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\Gamma u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s.$$

但是在 Γ 上，$u=0$，且 $\nabla u\cdot\nabla u=u_x^2+u_y^2$，因此，

618

$$\iint_\Omega (u_x^2+u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

一个非负连续函数积分为零的唯一可能就是这个函数恒为零．因此，$u_x^2+u_y^2=0$，而这蕴涵着：在 Ω 上，$u_x=0$ 和 $u_y=0$．由命题 1，我们得出结论：u 是常数．但是这个常数在边界上必为零，因此，在 Ω 上，$u=0$. ■

在前面的证明中，我们证明了：如果 u 在 Ω 上调和，则

$$\boxed{\iint_\Omega (u_x^2+u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\Gamma u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s.} \tag{12}$$

由这个恒等式得到：如果在边界 Γ 上 $\frac{\partial u}{\partial n}=0$，则

$$\iint_\Omega (u_x^2+u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

和前面的讨论一样，我们得出结论：在 Ω 上，$u=C$．因此，如定理 4，诺伊曼问题在相差一个常数的意义下唯一．

定理 5（诺伊曼问题解的唯一性） 令 Ω 是一个单连通或多连通区域，其边界为 Γ，如定理 3 所述．如果 u_1 和 u_2 是 Ω 上的调和函数，且在边界 Γ 上，$\frac{\partial u_1}{\partial n}=\frac{\partial u_2}{\partial n}$，则在 Ω 上，$u_1=u_2+C$.

格林恒等式在狄利克雷问题和诺伊曼问题中的更多应用将在下节给出.

附录：定理 1 和定理 2 的证明

我们将在曲线 C 是**光滑标准曲线**的情形下证明定理 1，其中标准曲线是指没有一条垂直或水平直线与 C 相交多于两点．然后，我们指出如何将这个结果推广到更一般情形.

如图 9 所示，给定一条标准曲线 C，我们可以找到一个区间 $[a, b]$，以及 $[a, b]$ 上的两个可微函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，使得 C 由顶部 C_1（它是 $f(x)$ 的图像）以及底部 C_2（它是 $g(x)$ 的图像）所组成．由于 C 是正定向的，当 x 由 a 变到 b 时，C_1 的反向由 $(x, f(x))$ 所参数化；而 C_2 由 $(x, g(x))$ 所参数化．因此，

$$-\int_{C_1} M(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b M(x,f(x))\mathrm{d}x;$$

$$\int_{C_2} M(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b M(x,g(x))\mathrm{d}x.$$

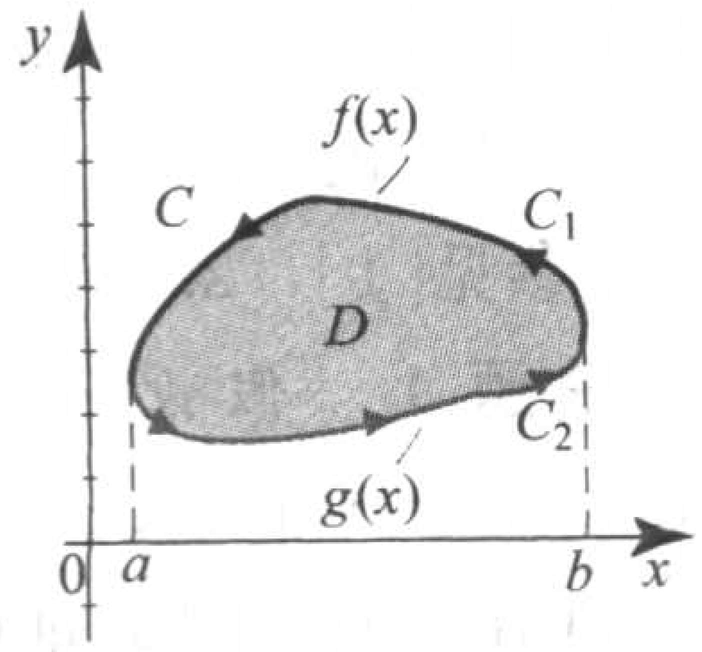


图 9 标准曲线 C

同样，如果 D 是 C 的内部，则

$$\iint_D \frac{\partial M}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{\partial M}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^b (M(x,f(x)) - M(x,g(x)))\mathrm{d}x$$
$$= -\int_{C_1} M(x,y)\mathrm{d}x - \int_{C_2} M(x,y)\mathrm{d}x = -\int_C M(x,y)\mathrm{d}x.$$

619

类似地，我们可以证明

$$\iint_D \frac{\partial N}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_C N(x,y)\mathrm{d}y,$$

将最后两个式子相减，即得这种情形下的格林定理. 对任意简单曲线 C，我们将 C 内部区域分成若干个以正定向标准曲线为边界的区域. 令 $C_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$表示所得到的边界曲线，而 D_j 表示包含在 C_j 内部的区域. 图 10 说明了这种构造，$n=4$. 每一条曲线由 C 上的一部分和不在 C 上的部分组成. C 上的部分只以正定向经过一次，而不在 C 上的部分，则以相反方向经过两次. 因而，所有 C_j 上的积分之和仅是 C 上的积分，因为不在 C 上的部分的积分相互抵消. 应用标准曲线时的格林定理，再将积分相加，我们得到

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{C_j}(M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y) = \sum_{j=1}^{n}\iint_{D_j}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

但是，就像我们刚才所讨论的，左边等于 $\int_C (M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y)$，而右边等于 $\iint_D\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，因为 D_j 互不相交且覆盖 D. 因此，这种情形下的格林定理得证.

利用类似与定理 1 的证明思想，多连通区域格林定理(定理 2)的证明可由单连通区域的情形得到. 回顾，区域 Ω 的边界 Γ 由一个外部曲线 C 和内部曲线 $C_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$组成. 利用折线 L_1，相反方向来回走两次，将外部曲线 C 和 C_1 连接. 类似地，利用折线 L_2，将 C_1 和 C_2 连接. 依次下去，利用折线 L_{j+1}，相反方向来回走两次，将 C_j 和 C_{j+1} 连接. 最后，利用折线 L_{n+1}，相反方向来回走两次，将 C_n 和 C 连接. 这种构造方式得到两个简单闭曲线 Γ_1 和 Γ_2，如图 11 所示. 令 Ω_j 表示 $\Gamma_j(j=1,\ 2)$的内部区域. 对曲线 Γ_1 和 Γ_2 应用定理 1，再将结果加起来：

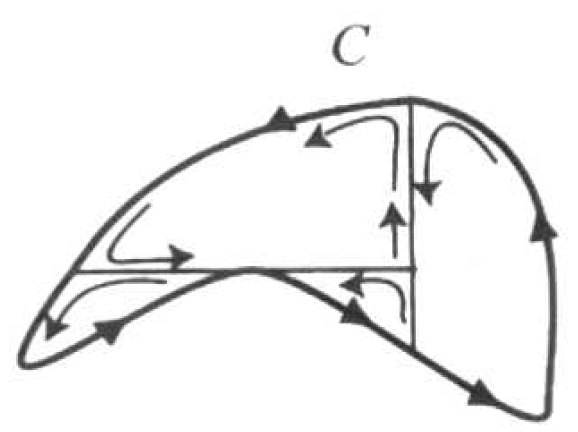


图 10

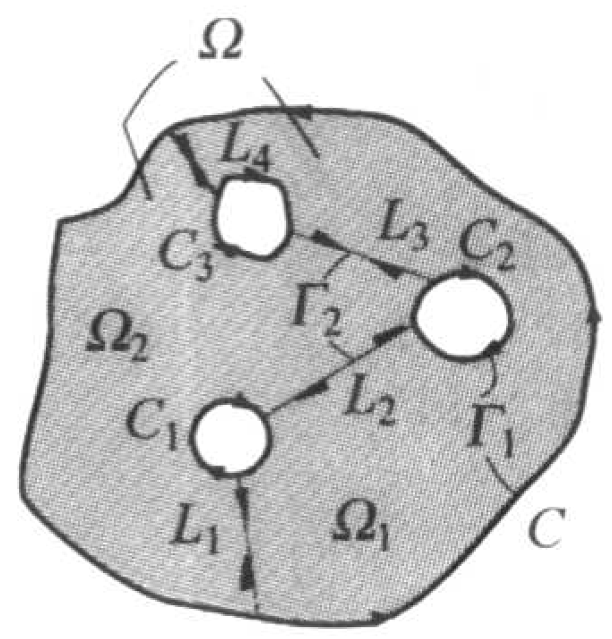


图 11 每段折线 L_j 以相反方向来回走两次，因此，L_j 上的积分为零

$$\sum_{j=1}^{2}\int_{\Gamma_j}(M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y)=\sum_{j=1}^{2}\iint_{\Omega_j}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{D}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

但是，折线 L_j 上的积分相互抵消，因为这些部分是以相反方向走两次的. 因此，左边的和等于

620 $\int_{\Gamma}(M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y)$，定理 2 得证.

习题 12.1

在习题 1～4 中，对给定的函数 M 和 N，以及曲线 C，验证格林定理，即计算(4)式两端，并证明它们相等.

1. $M=xy$，$N=y$，C 如图 12 所示.
2. $M=x^2y$，$N=x+y$，C 如图 12 所示.
3. $M=x-y$，$N=y^2$，C 如图 13 所示.

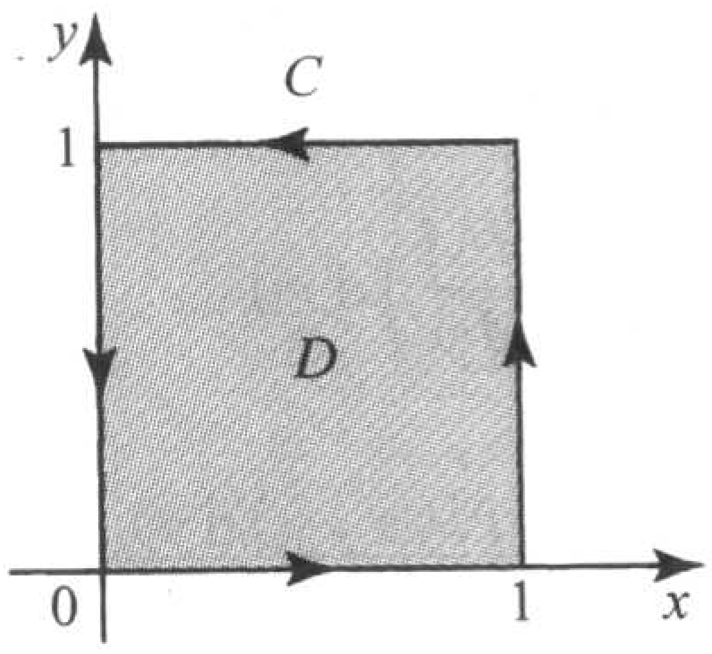


图 12

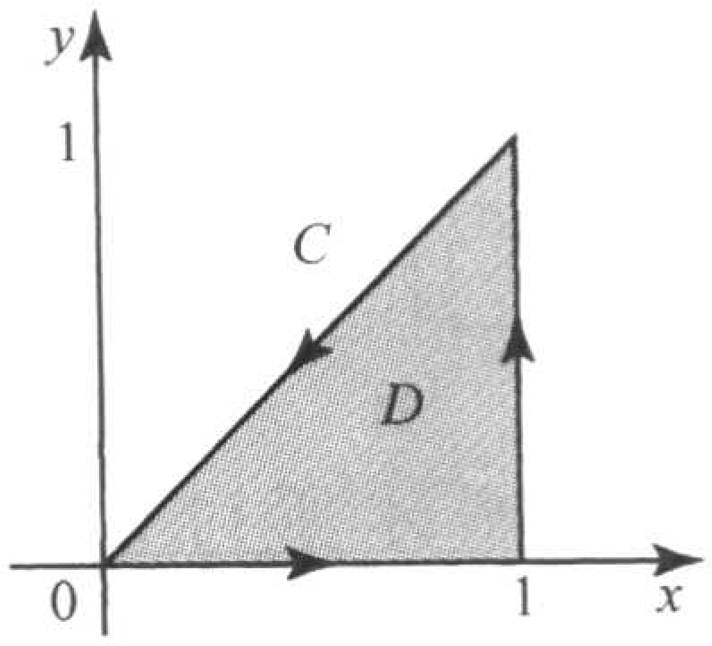


图 13

4. $M=x^2-y^2$，$N=2xy$，C 如图 14 所示.

在习题 5～8 中，对给定的函数 M 和 N，验证格林定理(定理 2)，其中曲线 Γ(如图 15 所示)由两个圆周 C_1 和 C_2 组成.

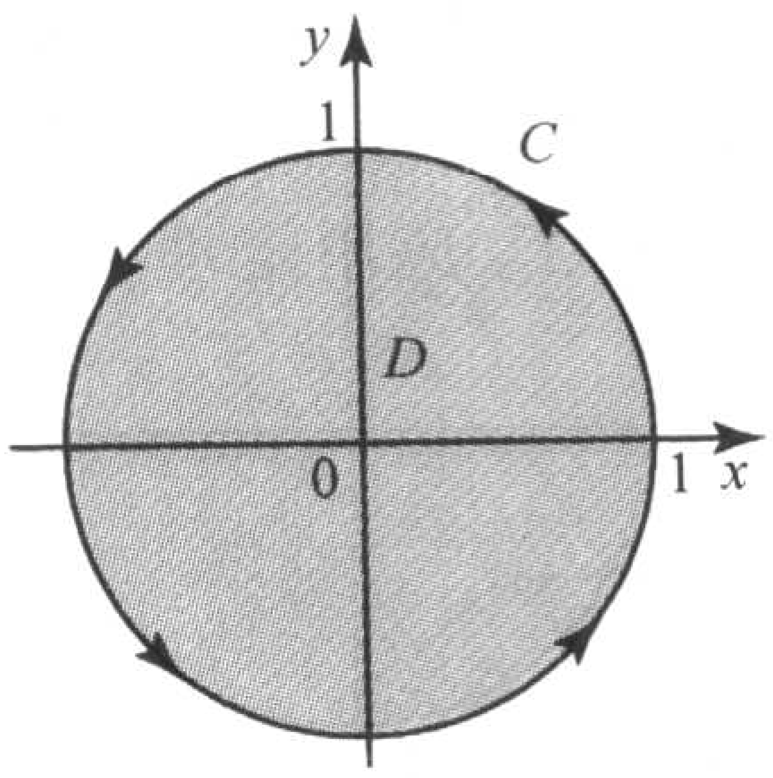


图 14

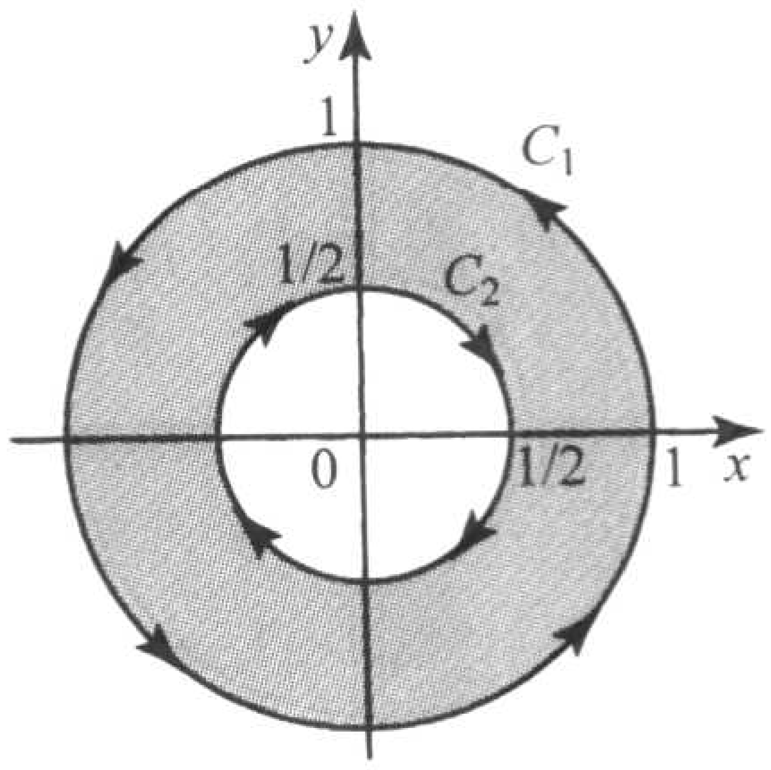


图 15

5. $M=0$，$N=x$.
6. $M=-y$，$N=x$.
7. $M=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$，$N=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.
8. $M=\dfrac{1}{x^2+y^2}$，$N=0$.

在习题 9～12 中，利用格林恒等式，计算给定的积分.

9. $\int_C y\,\dfrac{\partial x}{\partial n}\mathrm{d}s$,其中 C 如图 12 所示.

10. $\int_C \dfrac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}s$,其中 $f(x,y)=x^2-2x+y^2$,C 如图 12 所示.

11. $\int_C (x+y)\,\dfrac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}s$,其中 $f(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y$,$C$ 如图 12 所示.

12. $\int_C x\,\dfrac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}s$,其中 $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$,C 如图 15 所示.

13. **多连通区域的面积**. 令 Ω 和 Γ 如定理 2 所述，试证：Ω 的面积由下列积分之一给出：

$$\int_\Gamma -y\mathrm{d}x,\quad \int_\Gamma x\mathrm{d}y,\quad \frac{1}{2}\int_\Gamma(-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y).$$

14. 令 C 是包含原点的正定向简单曲线，计算：

$$\int_C \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}.$$

[提示：令 C_r 是绕原点的负定向圆，包含在 C 内，应用定理 2.]

15. 在定理 3 的记号下，假设 u 在 Γ 上是调和的，且 $v=0$，试证：

$$\iint_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

16. 在定理 2 的记号下，假设 u 在 Ω 上是调和的，试证：

$$\int_\Gamma\left(\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x-\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right)=0.$$

621

17. 将椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的面积表达成线积分，并求出该面积. [提示：利用例 1 中的某个积分.]

18. 将内摆线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的面积表达成线积分，并求出该面积(图 16). [提示：利用(5)式中的第三个积分.]

19. 考虑极坐标下的诺伊曼问题：在单位圆盘上，$\nabla^2u=0$；且当 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 时，$\dfrac{\partial u}{\partial r}(1,\theta)=\sin\theta$，而当 $\pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 时，$\dfrac{\partial u}{\partial r}(1,\theta)=0$. 这个问题有解吗？解释之.

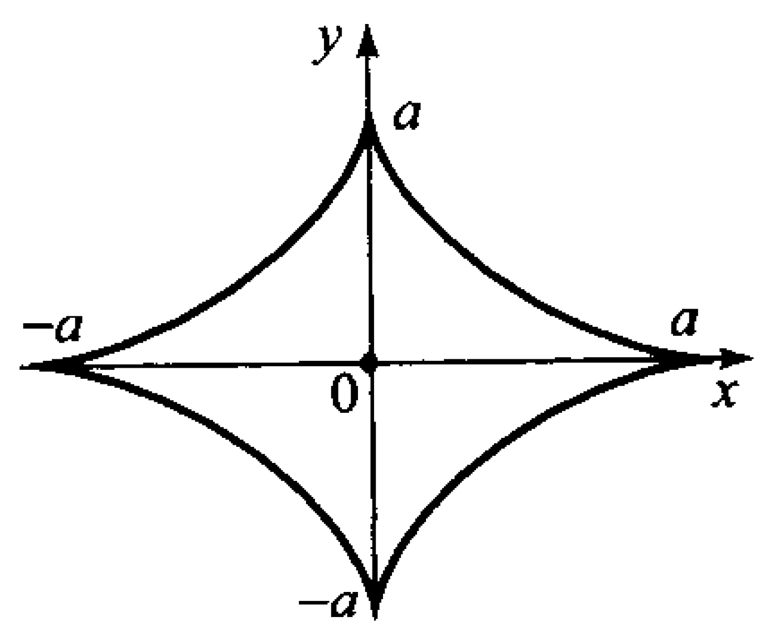


图 16　习题 18 中的内摆线：$x(t)=a\cos^3t$，$y(t)=a\sin^3t$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$

20. **专题问题：狄利克雷原理**. 令 Ω 如定理 3 中的单连通或多连通区域，边界为 Γ. 令 $h(x,y)$ 对 Γ 上的 (x,y) 有定义，令 $u(x,y)$ 表示狄利克雷问题：在 Ω 上，$\nabla^2u=0$；在 Γ 上，$u=h$，的(唯一)解. 在 Ω 上定义的函数 ϕ 的**能量**是非负实数

$$E(\phi)=\frac{1}{2}\iint_\Omega|\nabla\phi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\nabla\phi=(\phi_x,\phi_y)$ 是 ϕ 的梯度. 狄利克雷原理是说：在所有满足狄利克雷边界条件：在 Γ 上 $v=h$ 的函数 $v(x,y)$ 中，使得能量积分取到最小值的函数是调和函数 u. 即，如果在 Γ 上，$v=h$，则 $E(v)\geqslant E(u)$. 按照下面给出的步骤，证明该原理.

(a)记 $v=u+(v-u)=u+w$，其中在 Γ 上，$w=0$. 试证：$|\nabla v|^2=|\nabla u|^2+2\nabla u\cdot\nabla w+|\nabla w|^2$.

(b)利用习题 15，试证：$E(v)=E(u)+E(w)$；因为 $E(w)\geqslant 0$，得出结论 $E(v)\geqslant E(u)$.

12.2 调和函数和格林恒等式

本节，我们将推导调和函数的几条经典性质，包括高斯平均值性质、最大模和最小模原理等. 利用对数函数，这些结果是格林恒等式(12.1 节)的直接推论. 为此，我们首先介绍对数函数的两个简单而重要的性质.

命题 1(对数函数的法向导数) 对$(x, y)\neq(x_0, y_0)$，令

$$v(x,y)=\frac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2).$$

令C_r是以(x_0, y_0)为圆心、$r>0$为半径的正定向圆(图 1)，则对所有$(x, y)\in C_r$，有

$$\frac{\partial v}{\partial n}(x,y)=\frac{1}{r}.$$

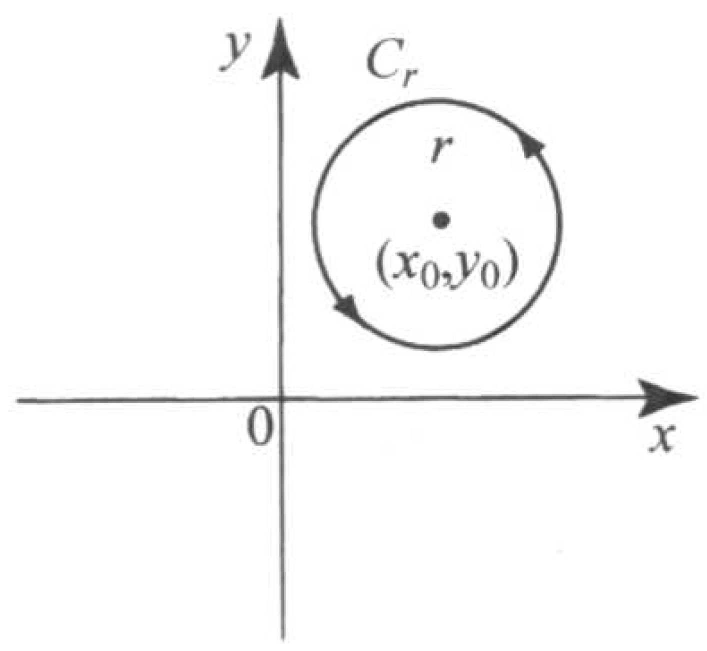


图 1 圆 C_r

证明 对C_r作参数化：$x(t)=x_0+r\cos t$，$y(t)=y_0+r\sin t$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$；则 $x't=-r\sin t$ 和 $y'(t)=r\cos t$，$\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}=r$. 因此，$C_r$上的单位法向量是$\frac{1}{r}(r\cos t, r\sin t)=(\cos t, \sin t)$. 我们有

622

$$v_x=\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \quad 和 \quad v_y=\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

对$(x, y)\in C_r$，有

$$\frac{\partial v}{\partial n}(x,y)=(v_x,v_y)\cdot(\cos t,\sin t)\Big|_{x=x_0+r\cos t,\,y=y_0+r\sin t}$$

$$=\left(\frac{r\cos t}{r^2(\cos^2 t+\sin^2 t)},\frac{r\sin t}{r^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}\right)\cdot(\cos t,\sin t)=\frac{1}{r},$$

即为所证. ■

下面的性质在前面已经多次用过.

命题 2(对数函数的调和性) 函数 $v(x, y)=\frac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)$在所有点$(x, y)\neq(x_0, y_0)$处调和.

证明 很快可以看出这个性质的方法是将函数 v 平移成$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\frac{1}{2}\ln r$. 利用拉普拉斯的极坐标形式$\nabla^2 f=f_{rr}+(1/r)f_r+(1/r^2)f_{\theta\theta}$，可知 $\ln r$ 对 $r\neq 0$ 满足拉普拉斯方程. 因此，它的平移 $v(x, y)$对$(x, y)\neq(x_0, y_0)$满足拉普拉斯方程. ■

现在，我们证明调和函数的高斯平均值性质. 这条性质是说，调和函数 u 在任意一点(x_0, y_0)处的值，等于 u 在任意一个以(x_0, y_0)点为圆心的圆上的平均值.

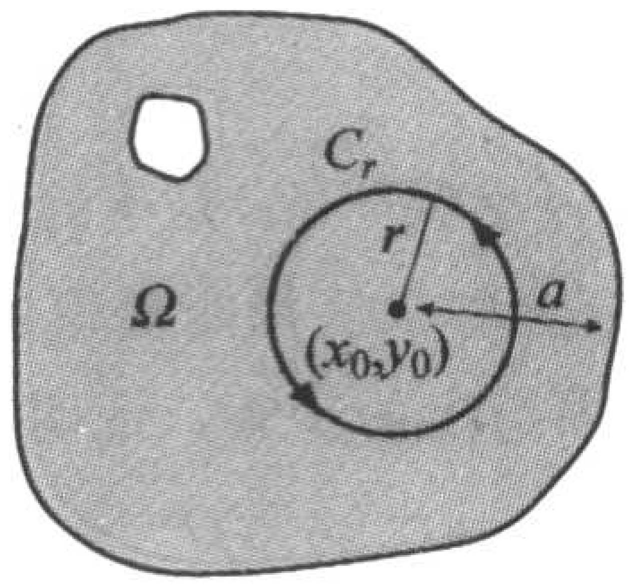


图 2 圆周 C_r 及其内部区域都包含在 Ω 内，$0\leqslant r<a$

定理 1(高斯平均值性质) 假设 u 在区域 Ω 上调和，令(x_0, y_0)为 Ω 内的任意一点，$r>0$ 是任意实数，使得以 $r>0$ 为半径、(x_0, y_0)为圆心的闭圆盘包含在 Ω 内(图 2)，则

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos t,y_0+r\sin t)\mathrm{d}t. \tag{1}$$

一个函数在 Ω 的所有点处满足(1)，称为在 Ω 内满足**平均值性质**.

证明 对 $r\geqslant 0$，考虑下面的函数

$$\phi(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos t,y_0+r\sin t)\mathrm{d}t,$$

其中 r 在某个小区间内，比如$[0,a]$，使得以 $r=a$ 为半径、(x_0, y_0)为圆心的圆盘包含在 Ω 内. 对 $r>0$，$\phi(r)$等于 u 在以 r 为半径、(x_0, y_0)为圆心的圆 C_r 上的平均值. 并且，对 $r=0$，

$$\phi(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0,y_0)\mathrm{d}t=u(x_0,y_0).$$

623

因为 ϕ 是连续函数 u 的积分，所以它本身也是 $r\in[0,a]$的连续函数. 我们的目标是证明 ϕ 就是常数. 这样，我们将得到 $\phi(r)=\phi(0)=u(x_0, y_0)$，这正是定理所断言的.

只需对所有的 $0<r_1<r_2\leqslant a$ 证明 $\phi(r_1)=\phi(r_2)$. 然后，由 ϕ 的连续性，等式 $\phi(r_1)=\phi(r_2)$ 对所有 $0\leqslant r_1<r_2\leqslant a$ 成立. 这个证明巧妙地利用了格林恒等式和对数函数的性质. 对 C_r 作参数化：$x(t)=x_0+r\cos t$，$y(t)=y_0+r\sin t$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，$\mathrm{d}s=r\mathrm{d}t$. 则(1)式右端变为

$$\phi(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos t,y_0+r\sin t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi r}\int_{C_r}u\,\mathrm{d}s.$$

因此，为证明 $\phi(r_1)=\phi(r_2)$对所有 $0<r_1<r_2\leqslant a$ 成立，只需证明

$$\frac{1}{r_2}\int_{C_{r_2}}u\mathrm{d}s-\frac{1}{r_1}\int_{C_{r_1}}u\mathrm{d}s=0,$$

其中 C_{r_1} 和 C_{r_2} 分别是以(x_0, y_0)为圆心、r_1 和 r_2 为半径的圆. 利用命题 1 的结果，在 C_{r_1} 上，有

$$\frac{1}{r_1}\int_{C_{r_1}}u\mathrm{d}s=\int_{C_{r_1}}u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s,$$

其中 $v=\frac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)$. 类似地，在 C_{r_2} 上，有

$$\frac{1}{r_2}\int_{C_{r_2}}u\mathrm{d}s=\int_{C_{r_2}}u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s.$$

因此，

$$\phi(r_2)-\phi(r_1)=\int_{C_{r_2}}u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s-\int_{C_{r_1}}u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s=\int_{\Gamma_{r_1,r_2}}u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s,$$

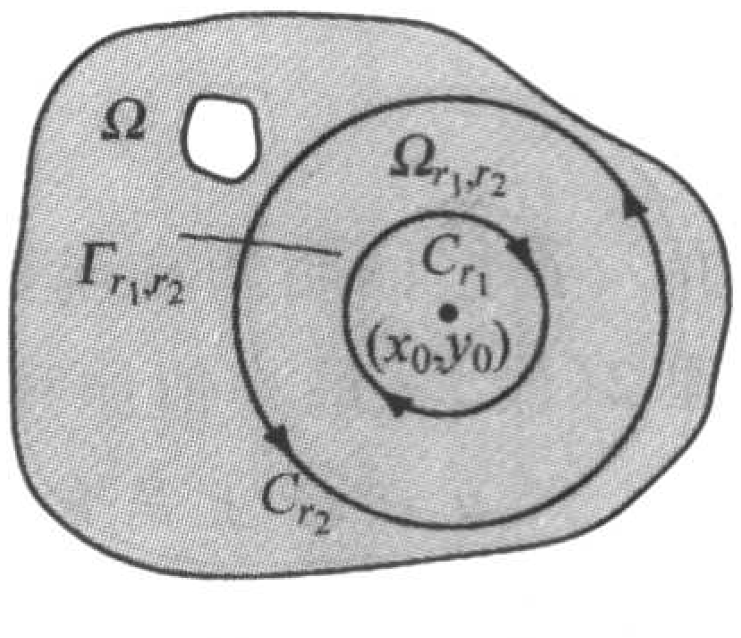


图 3 由 C_{r_1} 和 C_{r_2} 构成的边界 Γ_{r_1,r_2}

其中 Γ_{r_1,r_2} 是由负定向的内圆周 C_{r_1} 和正定向的外圆周 C_{r_2} 所构成的环状区域 Ω_{r_1,r_2} 的边界(图 3). 由于 u 和 v 在 Ω_{r_1,r_2} 内都是调和的，由格林第二恒等式，有

$$\int_{\Gamma_{r_1,r_2}}u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s=\int_{\Gamma_{r_1,r_2}}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s,$$

因为此时格林恒等式的左端为零. 现在，利用事实：在 C_{r_1} 上，$v=\ln r_1$；以及在 C_{r_2} 上，$v=\ln r_2$，我们得到

$$\int_{\Gamma_{r_1,r_2}} v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\int_{C_{r_2}} v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s-\int_{C_{r_1}} v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$$

$$=\ln(r_2)\overbrace{\int_{C_{r_2}}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s}^{=0}-\ln(r_1)\overbrace{\int_{C_{r_1}}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s}^{=0}=0,$$

因为调和函数的相容性条件(12.1 节的例 5). 因此，$\phi(r_2)-\phi(r_1)=0$，即为所证. ■

624 可以证明，在下面的意义下，高斯平均值性质的逆也成立. 假设 $u(x, y)$ 在区域 Ω 内具有一阶、二阶连续偏导数，且 u 在 Ω 内的所有点处满足平均值性质，则 u 在 Ω 上调和.

平均值性质具有许多重要的推论，比如本节后面要证明的最大模、最小模原理等. 首先，我们介绍一个计算定积分的有趣应用.

例 1 平均值性质的应用

(a)验证：$u(x, y)=e^y\cos x$ 对所有的 (x, y) 是调和的.

(b)试证：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\cos(\cos t)\mathrm{d}t=1.$$

(c)更一般地，对所有实数 a 和 b，验证：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{b+\sin t}\cos(a+\cos t)\mathrm{d}t=e^b\cos a.$$

解 (a)这部分是直接的：

$$u_{xx}=-e^y\cos x,\quad u_{yy}=e^y\cos x.$$

因此，$u_{xx}+u_{yy}=0$，函数对所有的 (x, y) 是调和的. 为证(b)部分，我们对 u 在原点处应用平均值性质：

$$u(0,0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\cos t,\sin t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\cos(\cos t)\mathrm{d}t.$$

但是 $u(0, 0)=1$，因此，(b)成立. 为证(c)，在 (a, b) 点处应用平均值性质，则

$$e^b\cos a=u(a,b)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+\cos t,b+\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{b+\sin t}\cos(a+\cos t)\mathrm{d}t,$$

即为所求. ■

下面，我们证明调和函数的一个重要性质.

定理 2(最大-最小值原理) *令 Ω 是一个区域，u 在 Ω 上调和. 如果 u 在 Ω 内取到最大值或最小值，则 u 在 Ω 上是常数.*

如果 Ω 无界，函数 u 不必在 Ω 或边界上取到最大值或最小值. 例如，$u(x, y)=xy$ 在上

625 半平面 Ω 内调和. 显然，当 (x, y) 在 Ω 内变化时，u 可以取到任意大或任意小的值. 因此，u

没有最大值或最小值．但是，如果Ω是有界的，u在Ω上调和，并在边界上连续，则由有界闭集上连续函数的著名性质，u必取到最大值和最小值．由于除非u是常数，这些值不可能在Ω内部达到，我们得到下面这个有用事实．

推论 1 令Ω是一个有界区域，u在Ω上调和，并且u在Ω的边界上连续，则u在Ω的边界上取到最大值M或最小值m．更进一步，或者u在Ω上是常数，或者对所有$(x, y)\in\Omega$，有$m<u(x, y)<M$．

利用推论 1，可以给出有界区域上的狄利克雷问题解唯一性(12.1 节定理 4)的另一个证明．下面我们举例说明推论 1 的应用，然后再证明定理 2．

例 2 最大-最小模原理的应用

当(x, y)在如图 4 所示的矩形区域R内时，求出$u(x, y)=x^2-y^2$的最大值和最小值，其中$0\leqslant x\leqslant 2$和$0\leqslant y\leqslant 1$．

解 可以直接验证：对所有的(x, y)，u是调和的．由推论 1，其最大值和最小值在边界上达到．如图 4，将R的边作编号，分别以m_j和M_j表示u在边$\#j$上的最小值和最大值．

在边$\#1$上，我们有$y=0$和$0\leqslant x\leqslant 2$．因此，$u(x, y)=x^2$，并由于$0\leqslant x\leqslant 2$，得到$m_1=0$和$M_1=4$．

在边$\#2$上，我们有$x=2$和$0\leqslant y\leqslant 1$．因此，$u(x, y)=4-y^2$，并由于$0\leqslant y\leqslant 1$，得到$m_2=3$和$M_2=4$．

在边$\#3$上，我们有$y=1$和$0\leqslant x\leqslant 2$．因此，$u(x, y)=x^2-1$，$m_3=-1$和$M_1=3$．

在边$\#4$上，我们有$x=0$和$0\leqslant y\leqslant 1$．因此，$u(x, y)=-y^2$，$m_4=-1$和$M_4=0$．

比较可得，u在边界上的最小值是$m=m_3=m_4=-1$．注意到，m_3和m_4对应的是u在同一点$(0, 1)$的值．类似地，u在边界上的最大值是$M=M_1=M_2=4$，并在点$(2, 0)$处达到．总而言之，u的最大值和最小值在边界上的两点达到．在R内所有点处，我们有

$$-1<u(x,y)<4,$$

正如推论 1 所断言(图 5)．

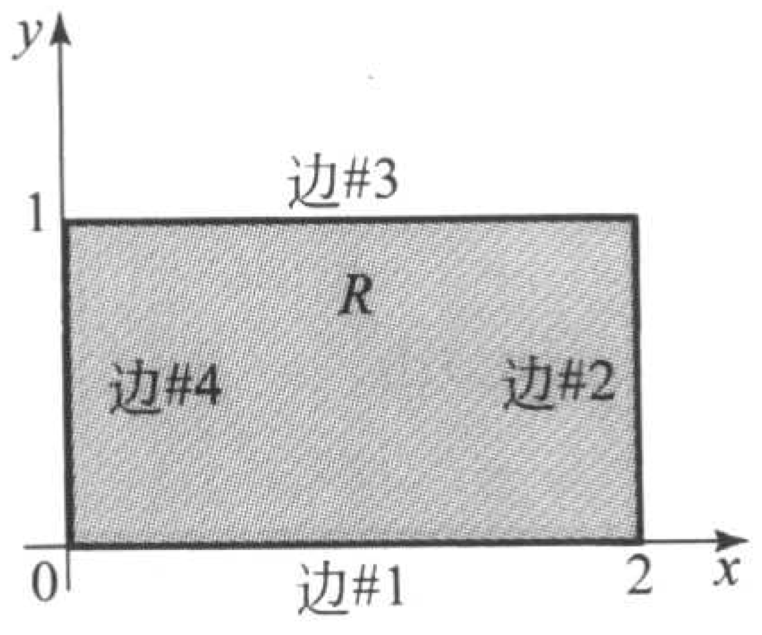


图 4 例 2 中的矩形

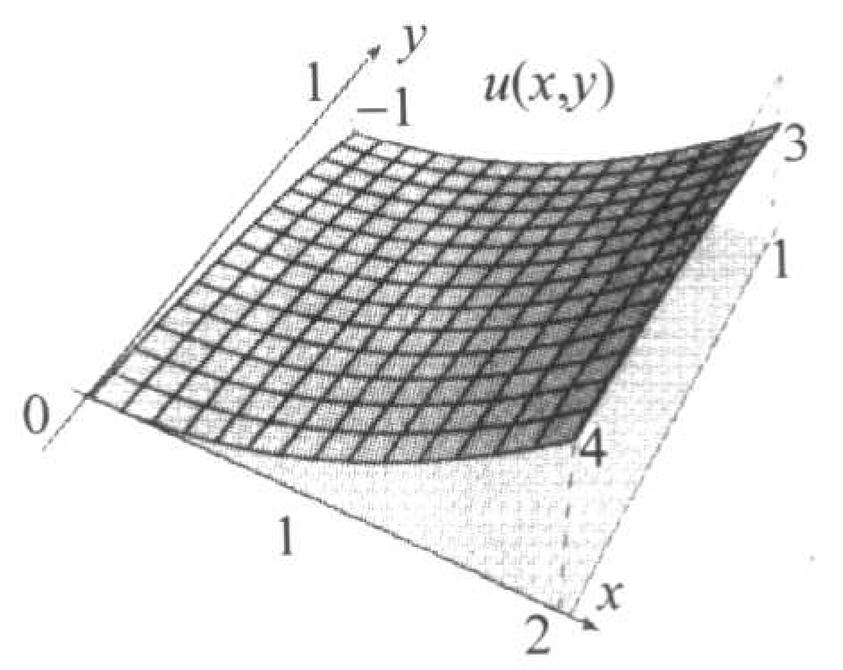


图 5 调和函数的最大值和最小值 ■

例 3 最大-最小模原理的应用

当(x, y)在矩形区域R内时，求出$u(x, y)=e^y\cos x$的最大值和最小值，其中$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$和$-1\leqslant y\leqslant 1$．

解 由例 1，我们知道对所有的(x, y)，u 是调和的. 所以我们在边界上寻找 u 的最大值和最小值. 如图 4，将 R 的边作编号，分别以 m_j 和 M_j 表示 u 在边 #j 上的最小值和最大值.

626

在边 #1 上，我们有 $y=-1$ 和 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$. 因此，$u(x, y)=\mathrm{e}^{-1}\cos x$，得到 $m_1=0$ 和 $M_1=\mathrm{e}^{-1}$，因为对 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\cos x\leqslant 1$.

在边 #2 和 4 上，我们有 $x=\pm\frac{\pi}{2}$，$\cos x=0$. 因此，u 在边 #2 和 4 上为零. 因此，$m_2=M_2=m_4=M_4=0$.

在边 #3 上，我们有 $y=1$，因此，$u(x, y)=\mathrm{e}\cos x$，其中 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，因此，$m_3=0$ 和 $M_3=\mathrm{e}$. 比较边界上的值，我们得到：u 的最小值为零，最大值为 e. 在 R 内所有点处，我们有

$$0 < u(x,y) < \mathrm{e}.$$

与例 2 情形不同的是，这里最小值在边界上无穷多个点达到，比如说，在边 #2 和 4 上；最大值 e 在边界上一点(0，1)处达到(图 6). ■

定理 2 的证明 只需证明定理中关于 u 最大值的论断. 然后，如果令 $v=-u$，我们有 v 是调和的，并且 u 的最小值相应于 v 的最大值. 因此，假设 u 在 Ω 内点 (x_0, y_0)处达到最大值，我们分两步证明：u 在 Ω 上是常数. 第一步，我们证明 u 在以(x_0, y_0)为圆心的可放入 Ω 内的最大盘内是常数. 然后，利用这个事实，我们在第二步证明 u 在 Ω 上必是常数.

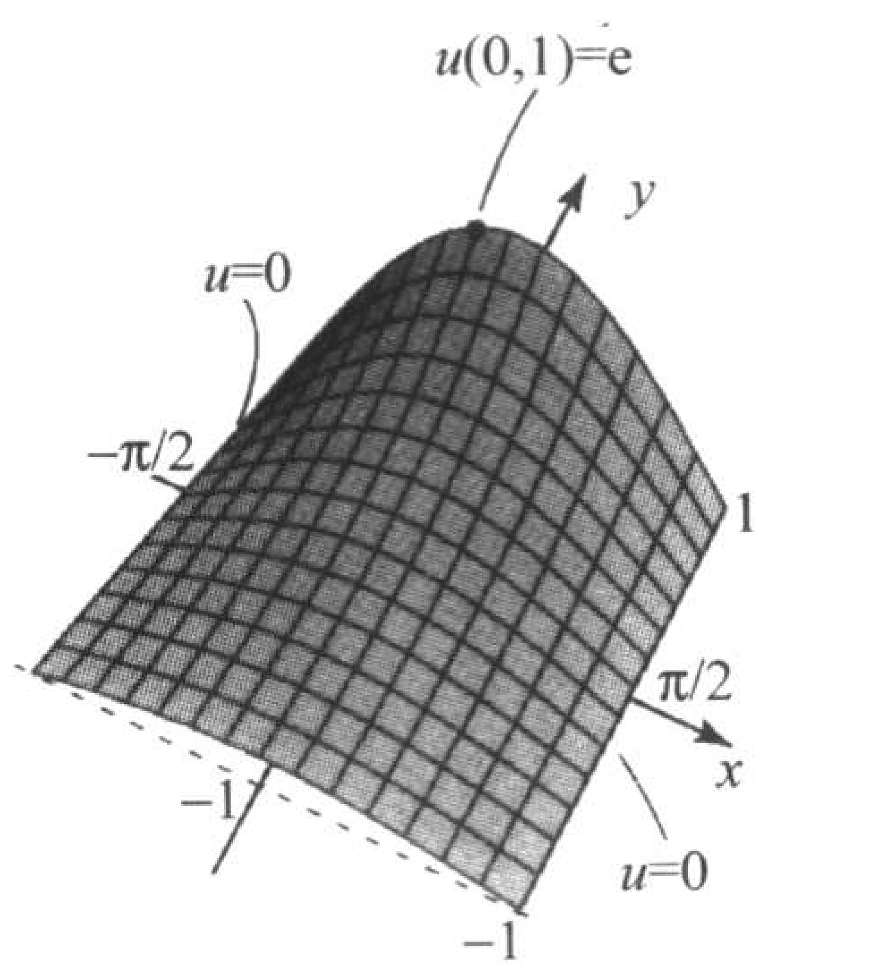


图 6 调和函数的最大值和最小值

第一步：令 C_r 是包含在 Ω 内的正定向圆周，圆心为 (x_0, y_0). 由假设，对 Ω 内的(x, y)，$M=u(x_0, y_0)\geqslant u(x, y)$. 由平均值定理，我们有

$$M = u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\,\mathrm{d}t.$$

对 $t\in[0, 2\pi]$，考虑连续函数 $f(t)=u(x_0+r\cos t, y_0+r\sin t)$. 由于 $M\geqslant u(x, y)$，对 $t\in[0, 2\pi]$，我们有 $f(t)\leqslant M$. 同样，f 在区间$[0, 2\pi]$上的平均值也等于 M. 唯一的可能就是，对$[0, 2\pi]$上所有的 t，$f(t)=M$(参见习题 12). 因此，对$[0, 2\pi]$上所有的 t，$M=u(x_0+r\cos t, y_0+r\sin t)$，这说明 u 在 C_r 上是常数，且等于 $u(x_0, y_0)$. 由 r 的任意性，得到 u 在任意一个以(x_0, y_0)为圆心包含在 Ω 内的圆周上都为常数且等于 $u(x_0, y_0)$，这就完成了证明的第一步.

第二步：令(x, y)为 Ω 内的任意一点. 用折线将(x_0, y_0)和(x, y)连接，以有限个有重叠的圆盘 S_0，S_1，…，S_n 覆盖折线，其中 S_0 的圆心为(x_0, y_0)，而 S_j 的圆心为(x_j, y_j)，它

是 S_{j-1} 与折线的交点(图 7).(一般而言，可以用有限个圆盘覆盖折线这个事实并不是显然的，但是它是对的，因为折线是有界闭集.)函数 u 在 S_0 上是常数，且等于最大值 M. 由 u 的连续性，得到 $u(x_1, y_1)=M$. 由前一步，得到 u 在以 (x_1, y_1) 为圆心的可放入 Ω 内的最大盘内是常数. 因此，u 在 S_1 内是常数，且等于最大值 M. 如此下去，我们得到 u 在 S_2，…，S_n 内是常数，且等于最大值 M. 从而，$u(x, y)=M$，而由 (x, y) 的任意性，得到 u 在 Ω 内是常数. ■

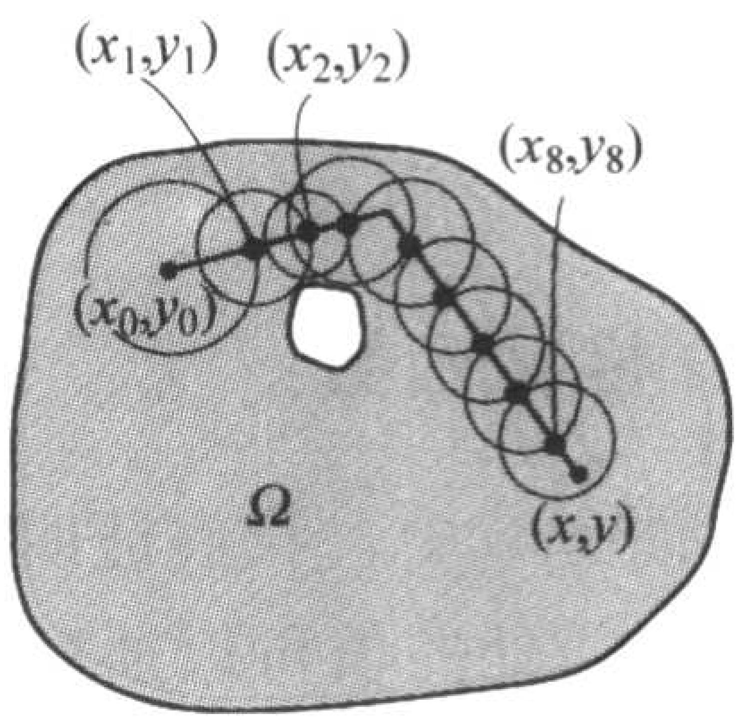


图 7 用有限个在 Ω 内的圆盘覆盖折线(这里，$n=8$)

627

习题 12.2

在习题 1～4 中，将积分看成一个调和函数关于一点的平均值，然后利用定理 1，计算积分.)

1. $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)\,dt.$

2. $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} (3+\cos t)(1+\sin t)\,dt.$

3. $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(1+\cos t)\cosh(2+\sin t)\,dt.$

4. $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(1+\cos t)\sinh(2+\sin t)\,dt.$

在习题 5～8 中，验证 u 在给定区域上是调和的；求出它的最大值和最小值；并且确定在区域内何处达到.)

5. $u(x, y)=x^2-y^2+xy$，$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$.
6. $u(x, y)=e^x\cos y$，$0\leqslant x\leqslant 1$，$-\pi\leqslant y\leqslant \pi$.
7. $u(x, y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，其中 (x, y) 在环状区域 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$ 上.
8. $u(x, y)=xy$，其中 (x, y) 在环状区域 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$ 上.
9. 令 Ω 是一个有界区域，边界为 Γ. 试证：如果在 Ω 上 u 是调和的，在 Γ 上，$u=0$，则在 Ω 上，$u=0$.
10. 令 Ω 是一个有界区域，边界为 Γ. 试证：如果在 Ω 上 u 和 v 是调和的，在 Γ 上，$u=v$，则在 Ω 上，$u=v$. 推导 Ω 上狄利克雷问题解的唯一性.
11. 回顾基于拉普拉斯方程的离散化的数值技巧(9.3 节). 从调和函数的平均值性质的观点来看，解释为何平均值公式(9.3 节，(6)式)是合理的.
12. 假设 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对 $[a,b]$ 上的所有 t，$f(t)\leqslant M$. 试证：如果 $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt=M$(即，$f$ 在 $[a,b]$ 上的平均值等于 M)，则对 $[a,b]$ 上的所有 t，$f(t)$ 是常数，且等于 M. 直观地，这个结论是清楚的. 按照下面的步骤证明之.

    (a)对 $[a, b]$ 上的 x，令
    $$F(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^x (M-f(t))\,dt.$$
    计算 $F'(x)$，对 $[a, b]$ 上的所有 x，证明 $F'(x)\geqslant 0$. 因此，F 在 $[a, b]$ 上递增.

    (b)试证：$F(a)=0$ 和 $F(b)=0$. 得出结论：F 在 $[a, b]$ 上恒为零.

    (c)试证：$F'(x)=0$ 在 $[a, b]$ 上成立，从而得出结论：对 $[a, b]$ 上的所有 t，$f(t)=M$.

13. 修改习题 12 的证明框架，以证明下面的结果. 假设 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对 $[a,b]$ 上的所有 t，$f(t)\geqslant M$. 试证：如果 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=M$，则对 $[a,b]$ 上的所有 t，$f(t)$ 是常数，且等于 M.

628

12.3　格林函数

前面一节中，我们证明了在区域 Ω 上调和函数 u 的平均值性质，它是说 u 在 Ω 内的给定点 (x_0, y_0) 处的值可以通过求 u 在以 (x_0, y_0) 为圆心、包含在 Ω 内的任意圆周上的平均值(积分再除以 2π)来得到. 本节，我们将证明这个事实的一个深刻推广. 我们证明：如果 u 在 Ω 内调和，且在边界上连续，则通过计算 u 和某个仅依赖于 Ω、与 u 无关的函数的乘积在 Ω 边界上的积分，可以确定 u 在 Ω 内的所有点处的值. 这个奇妙的函数是区域 Ω 上所谓的格林函数的法向导数，而这个积分公式求解了 Ω 内的狄利克雷问题. 这个公式的变形可求解 Ω 上的泊松方程. 对特殊区域的格林函数具体表达式将在本节 12.4 节和 12.7 节推导.

贯穿本节，设 Ω 是具有边界 Γ 的区域，其中 Γ 由简单曲线 C(外部边界、正定向的)和 C_1，…，C_n(内部边界、负定向的)组成(参见图 1，其中 $n=3$). 为清楚起见，在阅读本节时，可以将 Ω 取为单位圆盘，Γ 是正定向的单位圆周，而 C_1，…，C_n 是具有适当半径的圆周.

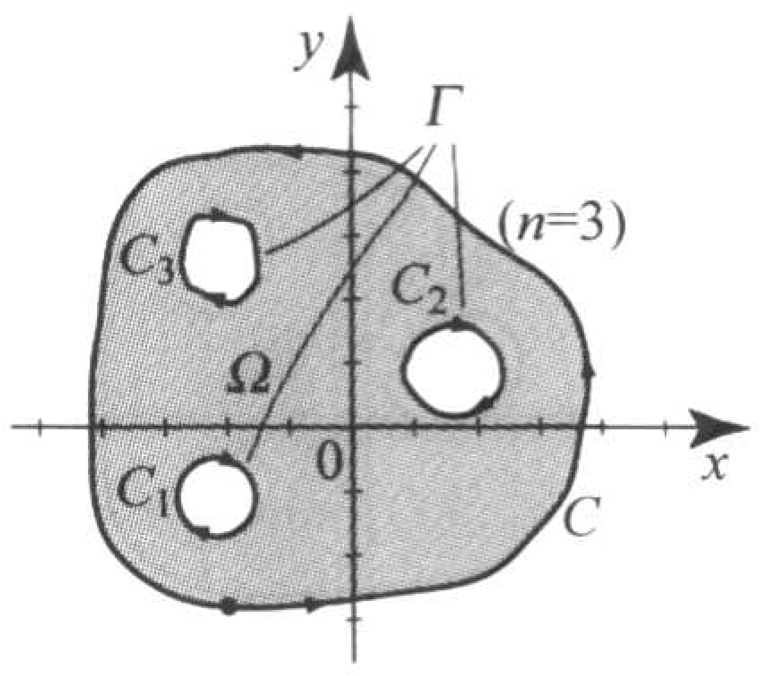


图 1　本节结果中的典型区域 Ω

首先，我们给出一个中间公式，其中 u 在 Ω 内的值可以由函数本身及其法向导数在边界 Γ 上的值确定.

定理 1(表示公式)　假设 u 在 Ω 内调和，且边界 Γ 上连续. 令 (x_0, y_0) 是 Ω 的内点，则

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s,$$

其中 $v(x, y)=\frac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)$.

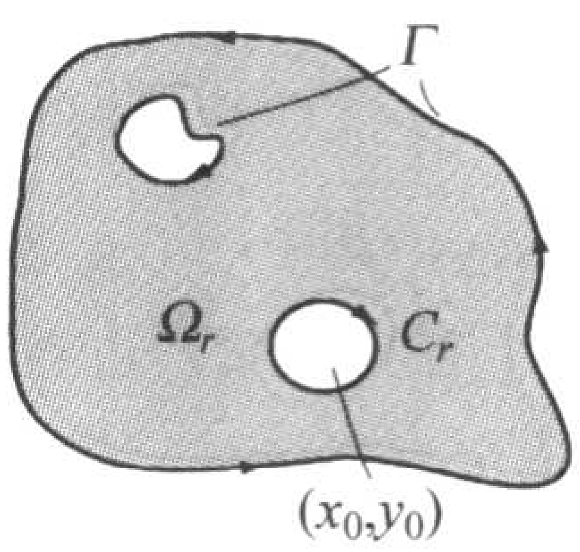


图 2　圆 C_r 包含了对数部分 v 的问题点，因而，v 在 Ω_r 上调和

证明　以 (x_0, y_0) 为圆心，在 Ω 内画一个负定向的圆 C_r，令 Ω_r 表示由 Ω 去掉以 (x_0, y_0) 为圆心、r 为半径的圆盘所构成的区域(图 2). Ω_r 的边界是 Γ 加上 C_r. u 和 v 在 Ω_r 内都是调和的(记住，v 唯一有问题的点是 (x_0, y_0)，而它不在 Ω_r 内). 在 Ω_r 上应用格林第二恒等式(12.1 节定理 3)；并利用事实：此时恒等式的左端为零，因为在 Ω_r 上，$\nabla^2 u=0$ 和 $\nabla^2 v=0$，则

$$\int_\Gamma\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s+\int_{C_r}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=0$$

和

629

$$\int_\Gamma\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=-\int_{C_r}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s,$$

因此，如果我们可以证明最后一个等式的右端等于 $2\pi\, u(x_0,y_0)$，则定理得证. 由于 C_r 是负定向的，我们有 $-\int_{C_r}=\int_{-C_r}$，其中 $-C_r$ 是正定向的. 对 $-C_r$ 作参数化：$x(t)=x_0+r\cos t, y(t)=y_0+r\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi, \mathrm{d}s=r\mathrm{d}t, v=\ln r, \dfrac{\partial v}{\partial n}=\dfrac{1}{r}$（12.2 节命题 2），则

$$\int_{-C_r}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=\overbrace{\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos t,y_0+r\sin t)\mathrm{d}t}^{=2\pi u(x_0,y_0)}-\ln r\overbrace{\int_{C_r}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s}^{=0}$$

$$=2\pi u(x_0,y_0),$$

其中，我们利用了调和函数的平均值性质（12.2 节定理 1），以及相容性（12.1 节例 5）. ■

下面，修改定理 1 的表示公式，使得最终的线积分不含有 u 的法向导数. 为此，假设存在 Ω 上的调和函数 h，使得 $h=-v$ 在边界 Γ 上成立，其中 v 如定理 1 所定义. 对 u 和 h（在 Ω 上都调和），应用格林第二恒等式，我们得到

$$0=\int_\Gamma\left(u\frac{\partial h}{\partial n}-h\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$$

除以 2π，并利用在边界 Γ 上 $h=-v$，得到

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left(u\frac{\partial h}{\partial n}+v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$$

将这个恒等式加到定理 1 的表示公式上，得到

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma u\frac{\partial}{\partial n}(h+v)\mathrm{d}s. \tag{1}$$

至此，(x_0, y_0) 在 Ω 内固定，并且显然 v 和 h 依赖于 (x_0, y_0). 令 (x_0, y_0) 在 Ω 内变动，假设对每个 (x_0, y_0)，我们可以找到 $h(x, y, x_0, y_0)$，使得(1)式成立. 记

$$\boxed{G(x,y,x_0,y_0)=\overbrace{\frac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)}^{v(x,y,x_0,y_0)}+h(x,y,x_0,y_0).} \tag{2}$$

函数 G 称为区域 Ω 的**格林函数**. 由(1)式，我们有下面这个重要的结果.

定理 2（狄利克雷问题的解） 假设 u 在 Ω 上调和，且边界 Γ 上连续. 则对 Ω 内的点 (x_0, y_0)，我们有

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma u(x,y)\frac{\partial G}{\partial n}(x,y,x_0,y_0)\mathrm{d}s, \tag{3}$$

其中 G 是区域 Ω 的格林函数.

630

公式(3)求解了 Ω 上的狄利克雷问题. 问题是：对任意区域，格林函数并不是容易计算，有时即使它们已知，积分(3)也很难计算. 但是不管怎么说，(3)式还是很有用处的. 在下面几节中，我们将对一些重要区域，如圆盘、半平面、扇形等，显式地计算出它. 更进一步，我们

推导(3)式的思想可以用来解决其他重要方程，如泊松方程和诺伊曼问题.

现在，我们列出格林函数的基本性质，以备将来参考.

定理 3(格林函数的性质) 假设区域 Ω 具有边界 Γ，令 G 为如(2)式定义的格林函数，则

(i)$G(x, y, x_0, y_0)$是关于(x, y)的在 Ω(除去(x_0, y_0))中的调和函数，在(x_0, y_0)处调和性不再成立是因为对数部分 v.

(ii)对边界 Γ 的所有点(x, y)，$G(x, y, x_0, y_0)=0$.

(iii)对 Ω(除去(x_0, y_0))内的所有点(x, y)，$G(x, y, x_0, y_0)\leqslant 0$.

(iv)(**唯一性**) 格林函数由区域 Ω 唯一确定.

(v)(**对称性**) 对 Ω 内的所有(x_0, y_0)和(x, y)，$G(x, y, x_0, y_0)=G(x_0, y_0, x, y)$.

证明 性质(i)和(ii)直接由格林函数的定义可得. 性质(v)不是显然的，其证明是基于我们在本节多次用到的思想，将在习题中给出其证明概要.（另外一个证明，基于共形映射，在 12.7 节定理 3 之后给出.）我们证明(iii)和(iv)，先证(iv). 如(2)式记 $G=v+h$，如果 $Q=v+q$ 是 Ω 的另外一个格林函数，则由于在 Γ 上 $Q=0$，因而在 Γ 上 $q=-v$. 但是在 Γ 上 $h=-v$，因此，在 Γ 上 $h=q$. 由于 h 和 q 都是调和的，由 12.1 节定理 4，在 Ω 上有 $h=q$，因而，$G=Q$ 在 Ω 上成立.

为证明(iii)，同样，如(2)式记 $G=v+h$. 固定一个以(x_0, y_0)为圆心、包含在 Ω 内的闭圆盘 D_R. 由于 h 在 Ω 上调和，故在 D_R 内是连续的，且有界，比如说，在 D_R 上，$|h(x, y, x_0, y_0)|\leqslant M$. 现在，当$(x, y)$趋近于$(x_0, y_0)$时，$v$ 趋近于 $-\infty$. 因此，我们找到 $0<r_0<R$，使得对所有的 $0<r\leqslant r_0<R$，$v(x, y, x_0, y_0)<-2M$ 在 C_r 上成立(参见图 3). 因此，在 C_r 上，$G(x, y, x_0, y_0)\leqslant -M$，因为在 C_r 上 $G=h+v$，$v(x, y, x_0, y_0)<-2M$，以及 $|h(x, y, x_0, y_0)|\leqslant M$. 记 Ω_r 为区域 Ω 除去以(x_0, y_0)为圆心、r 为半径的圆盘后的区域，Ω_r 的边界由 Γ 和 C_r 组成. 函数 G 在 Ω_r 内调和，并且我们刚证得：在边界上，$G\leqslant 0$. 由调和函数的最大值原理，得到在 Ω_r 上，$G\leqslant 0$. 由于这对所有 $0<r\leqslant r_0$ 都成立，令 $r\to 0$，我们得到：在 Ω(除去(x_0, y_0))上，$G\leqslant 0$，因此(iii)成立. ■

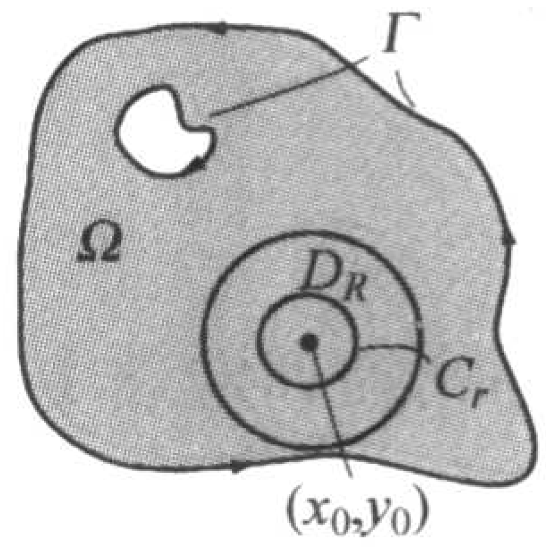


图 3 $G=v+h$，其中在 D_R 上，$|h|\leqslant M$，在(x_0, y_0)处，v 趋近于 $-\infty$. 因此，在(x_0, y_0)处，G 趋近于 $-\infty$

泊松方程的解

631 我们考虑 Ω 上的泊松方程，并利用类似于定理 2 的证明思想，求解这个重要方程.

定理 4(具有零边值的泊松方程的解) 如定理 1，令 Ω 是具有边界 Γ 的区域. 令 $f(x, y)$ 是 Ω 上的函数，假设 u 是泊松方程

$$\nabla^2 u(x,y) = f(x,y), \quad 在\ \Omega\ 中的(x,y) \tag{4}$$

在 Ω 上的解，在边界 Γ 上，$u=0$. 则对 Ω 中的所有点(x_0, y_0)，有

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega} f(x,y)G(x,y,x_0,y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{5}$$

其中 G 是 Ω 的格林函数.

证明 如果 u 是解，则在 Ω 上，$\nabla^2 u(x,\ y)=f(x,\ y)$，因此，

$$\iint_{\Omega} f(x,y)G(x,y,x_0,y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Omega}\nabla^2 u(x,y)G(x,y,x_0,y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

令 C_r 是以 $(x_0,\ y_0)$ 为圆心的负定向圆，Ω_r 是由 Ω 去掉以 $(x_0,\ y_0)$ 为圆心、r 为半径的闭圆盘后所构成的区域(图 2). Ω_r 的边界是 Γ 加上负定向的 C_r. 在 Ω_r 中，应用格林第二恒等式，利用在 Γ 上，$u=0$；G 在 Ω_r 内调和，且在 Γ 上，$G=0$，得到

$$\begin{aligned}&-\iint_{\Omega_r} G(x,y,x_0,y_0)\,\nabla^2 u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{C_r}u(x,y)\,\frac{\partial G}{\partial n}(x,y,x_0,y_0)\mathrm{d}s-\int_{C_r}G(x,y,x_0,y_0)\,\frac{\partial u}{\partial n}(x,y)\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{6}$$

为完成定理的证明，我们在(6)式中令 $r\to 0$，并建立下面的三个极限：

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to 0}-\iint_{\Omega_r} G(x,y,x_0,y_0)\,\nabla^2 u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\iint_{\Omega} G(x,y,x_0,y_0)\,\nabla^2 u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;\end{aligned} \tag{7}$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}u(x,y)\,\frac{\partial G}{\partial n}(x,y,x_0,y_0)\mathrm{d}s=-2\pi u(x_0,y_0); \tag{8}$$

$$\lim_{r\to 0}-\int_{C_r}G(x,y,x_0,y_0)\,\frac{\partial u}{\partial n}(x,y)\mathrm{d}s=0. \tag{9}$$

我们将证明(9)式，而将(7)和(8)式的证明留作习题(有详细的提示). 记 $G(x,\ y,\ x_0,\ y_0)=h(x,\ y,\ x_0,\ y_0)+\frac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)$，其中 $h(x,\ y,\ x_0,\ y_0)$ 在 D_r 上是调和的，因而是连续的，且以一个常数 M 为界(特别地，h 在 C_r 上以 M 为界). 同样，由于 u 在 Ω 内具有连续偏导数，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 在 D_r 上连续且有界(比如说，在 D_r 上，$\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|\leqslant A$). 而且对 C_r 上的 $(x,\ y)$，我们有 $|v(x,\ y,\ x_0,\ y_0)|=|\ln r|$；因此，$\left|G(x,\ y,\ x_0,\ y_0)\frac{\partial u}{\partial n}\right|\leqslant(M+|\ln r|)A$，因而，

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_r}G(x,y,x_0,y_0)\,\frac{\partial u}{\partial n}(x,y)\mathrm{d}s\right|&\leqslant(M+|\ln r|)A\int_{C_r}\mathrm{d}s\\&=2\pi r(M+|\ln r|)A\to 0,\text{当 } r\to 0\text{ 时},\end{aligned}$$

632

这就完成了(9)式的证明. ■

为求解具有任意边值的泊松方程，我们将狄利克雷问题的解和零边值泊松方程的解结合起来，如图 4 所示. 我们叙述这个定理，而略去其证明，因为其证明与 3.9 节给出的矩形泊松问题的证明类似.

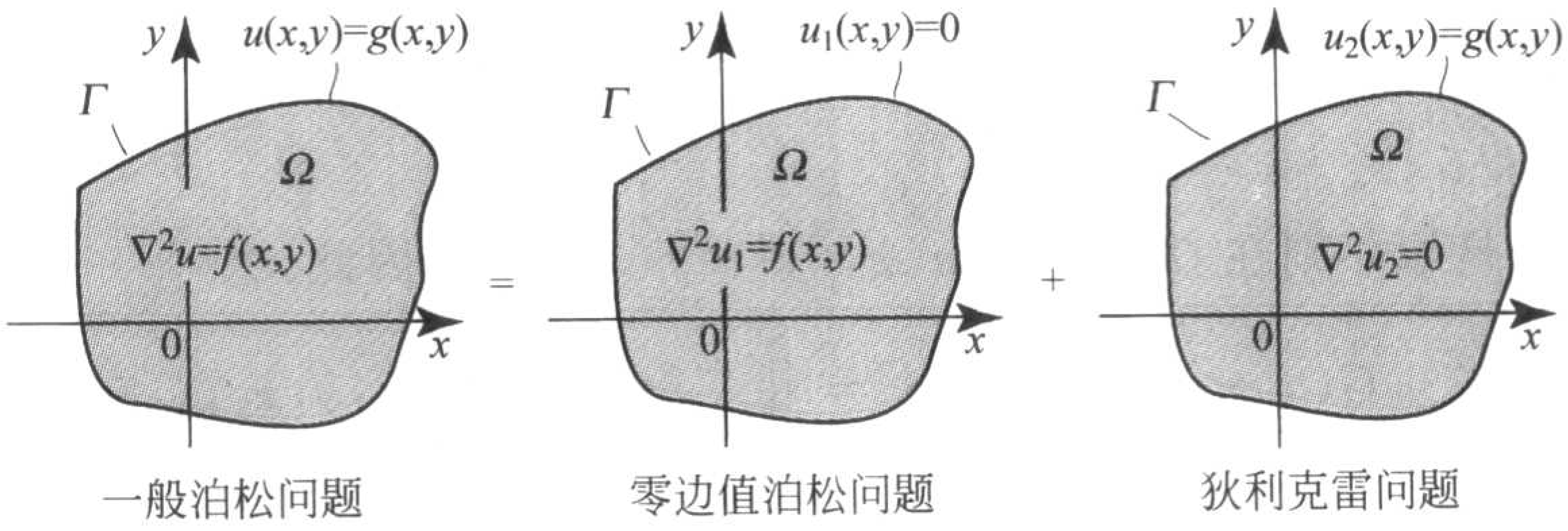


图 4 一般泊松问题分解成两个简单的子问题

定理 5（泊松方程的通解） 在定理 4 的记号下，假设 u 是泊松方程(4)的解，具有边界条件：对 Γ 上的所有$(x,\ y)$，$u(x,\ y)=g(x,\ y)$. 则对 Ω 内的所有点$(x_0,\ y_0)$，有

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\iint_\Omega f(x,y)G(x,y,x_0,y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma g(x,y)\frac{\partial G}{\partial n}(x,y,x_0,y_0)\mathrm{d}s,$$

其中 G 是 Ω 上的格林函数.

格林函数，特征函数展开法

回顾，利用特征函数展开法，我们已经求解了某些区域上的泊松方程，如矩形、圆盘等. 在每种情形下，解由一个无穷级数或二重无穷级数给出. 现在的计划是，通过与(5)式比较，在这些公式中将格林函数表达出来. 这将以一个二重级数形式得到矩形或圆盘上的格林函数. 虽然，这些形式与(2)式不太吻合，但是它们确实可以说明格林函数的某些性质.（下一节，我们将构造圆盘上的格林函数，得到一个与(2)式相吻合的公式.）

例 1 矩形上的格林函数

考虑 $a\times b$ 矩形 R 上带有零边值的泊松方程 $\nabla^2u(x,\ y)=f(x,\ y)$，如图 5 所示. 由 3.9 节，对 R 内的任意$(x_0,\ y_0)$，我们有

633

$$u(x_0,y_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}E_{mn}\sin\frac{m\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi y_0}{b},$$

其中

$$E_{mn}=\frac{-4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

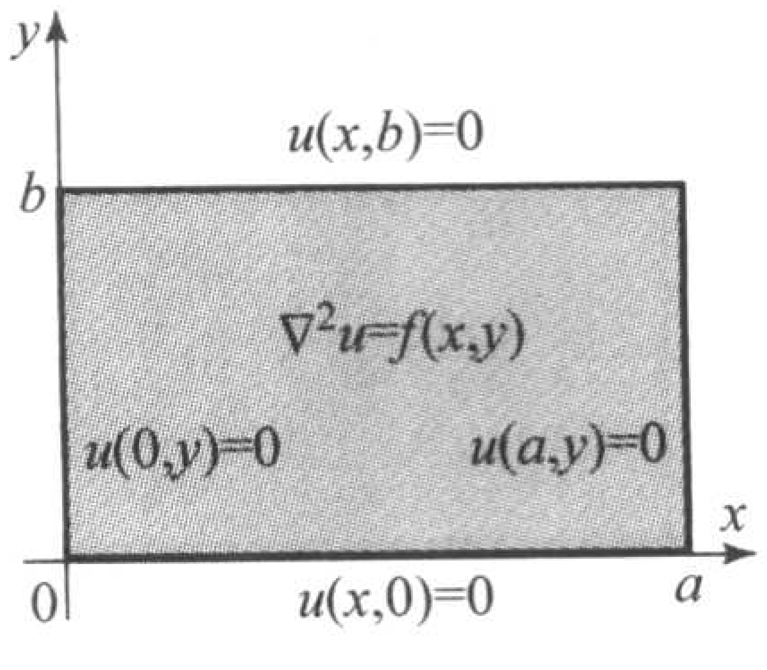


图 5 矩形上带有零边值的泊松方程

并且 $\lambda_{mn}=\pi^2\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right](m,\ n=1,\ 2,\ \cdots)$. 将 E_{mn} 的值代入 u 的公式中，然后交换求和和积分号顺序，我们得到

$$u(x_0,y_0)=\int_0^b\int_0^a f(x,y)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4}{ab\lambda_{mn}}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{m\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi y_0}{b}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

与(5)式比较，我们得出矩形的格林函数是

$$G(x,y,x_0,y_0)=\frac{-8}{ab\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{m\pi x_0}{a}\sin\frac{m\pi y_0}{b}}{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}. \tag{10}$$

对 R 内的任意给定的$(x_0,\ y_0)$，可以证明：对 R 内所有的$(x,\ y)\neq(x_0,\ y_0)$，级数条件收敛，对$(x,\ y)=(x_0,\ y_0)$，级数发散. 这个事实由图 6 所示. 定理 3 中所列的格林函数的一些性质，可以直接由(10)验证(参考习题). ■

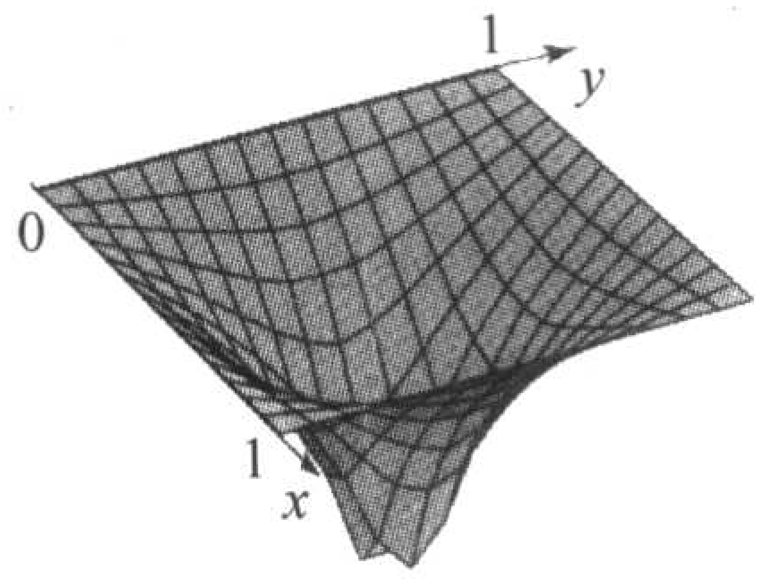


图 6　1× 1 矩形关于点$(x_0,\ y_0)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$的格林函数，利用(10)式的部分和画出，$m=n=40$

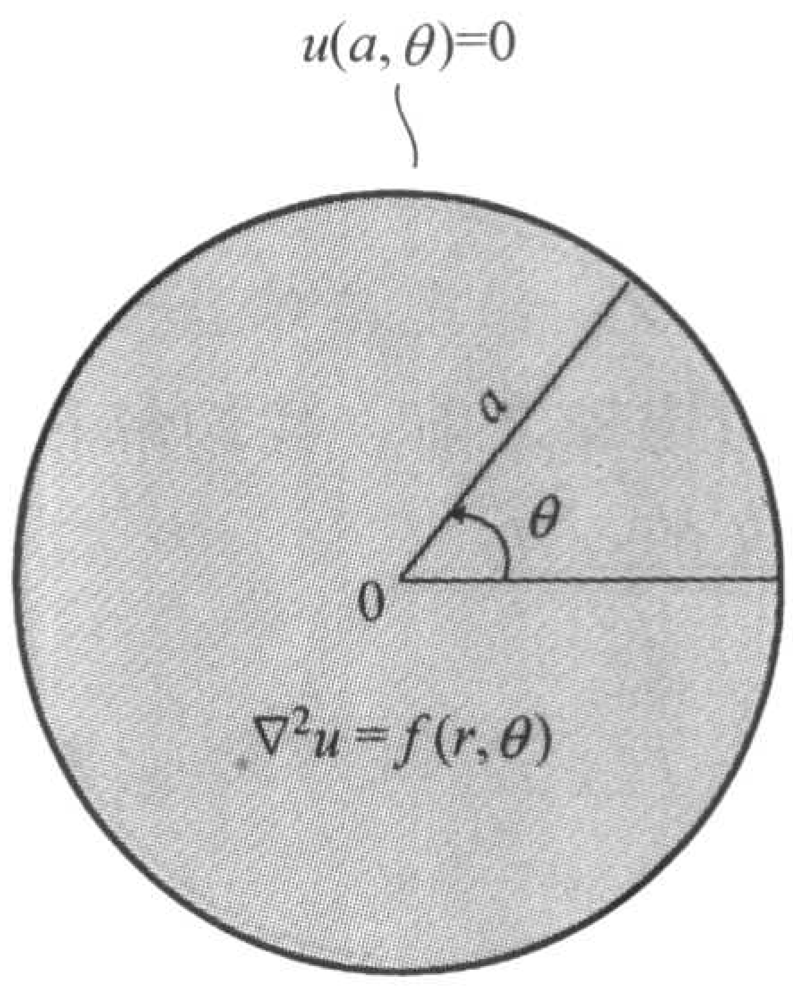


图 7　半径为 a 的圆盘 D 内、带有零边值的泊松方程

例 2　圆盘的格林函数

为方便，采用极坐标，考虑半径为 $a>0$ 的圆盘 D 上的泊松方程：$\nabla^2 u(r,\ \theta)=f(r,\ \theta)$，带有零边值，如图 7 所示. 利用 4.6 节的结果，然后与(5)式比较，对 D 内的$(r_0,\ \theta_0)$，我们得到

$$u(r_0,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^a\int_0^{2\pi}G(r,\theta,r_0,\theta_0)f(r,\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

其中

$$\begin{aligned}G(r,\theta,r_0,\theta_0)=&-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_{0n}r)J_0(\lambda_{0n}r_0)}{\alpha_{0n}^2J_1^2(\alpha_{0n})}\\&-4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_m(\lambda_{mn}r)J_m(\lambda_{mn}r_0)}{\alpha_{mn}^2J_{m+1}^2(\alpha_{mn})}(\cos m\theta\cos m\theta_0+\sin m\theta\sin m\theta_0)\\=&-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_{0n}r)J_0(\lambda_{0n}r_0)}{\alpha_{0n}^2J_1^2(\alpha_{0n})}-4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_m(\lambda_{mn}r)J_m(\lambda_{mn}r_0)}{\alpha_{mn}^2J_{m+1}^2(\alpha_{mn})}\cos m(\theta-\theta_0),\end{aligned}$$

其中 $\lambda_{mn}=\frac{\alpha_{mn}}{a}$，而 α_{mn} 是贝塞尔函数 J_m 的第 n 个正零. 推导的过程是直接的，留作习题. 圆盘的格林函数的另一个简单公式将在下节导出. ■

634

格林函数和狄拉克 δ 函数

格林函数$G(x, y, x_0, y_0)$具有一个具体描述，它是板Ω上热传导问题的稳态解，热源在(x_0, y_0)处，Ω的边界上保持 0 度. 更确切地，我们有下面的结果.

定理 6(带有狄拉克函数的泊松方程) 对Ω内固定点(x_0, y_0)，$\frac{1}{2\pi}G(x, y, x_0, y_0)$是下面带有零边界条件的泊松方程的解：

$$\nabla^2 u = \delta_{(x_0,y_0)}(x,y), \quad (x,y) \text{ 在 } \Omega \text{ 内}, \tag{11}$$

$$u(x,y) = 0, \quad \text{对所有 } \Omega \text{ 边界上的}(x,y). \tag{12}$$

其中$\delta_{(x_0,y_0)}(x, y)$是二维狄拉克δ函数.

在证明定理之前，我们解释一些关于二维狄拉克δ函数的事实. 这个函数是用一维狄拉克函数来定义的：

$$\delta_{(x_0,y_0)}(x,y) = \delta_{x_0}(x)\delta_{y_0}(y).$$

因此，如果$f(x, y)$是一个函数，而D是平面的一个子集，则

$$\iint_D f(x,y)\delta_{(x_0,y_0)}(x,y)\,dx\,dy = \begin{cases} f(x_0,y_0) & \text{如果}(x_0,y_0) \text{ 在 } D \text{ 内}, \\ 0 & \text{其他}. \end{cases} \tag{13}$$

为解释(11)式解的意义，回顾 7.8 节关于两个广义函数相等的定义. 为使$u(x, y)$是(11)式的解，我们必须证明：如果$\phi(x, y)$是任意一个检验函数，则

$$\iint_\Omega \phi(x,y)\,\nabla^2 u\,dx\,dy = \iint_\Omega \phi(x,y)\delta_{(x_0,y_0)}(x,y)\,dx\,dy = \phi(x_0,y_0). \tag{14}$$

定理 6 的证明 直接由定理 3(ii)知，G满足(12)式. 现在，我们证明，当$u(x, y)=\frac{1}{2\pi}G(x, y, x_0, y_0)$时，(14)式成立. 令$\phi(x, y)$是任意一个检验函数，我们必须证明

$$\frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \phi(x,y)\,\nabla^2 G(x,y,x_0,y_0)\,dx\,dy = \phi(x_0,y_0), \tag{15}$$

其中在二重积分中，拉普拉斯算子是关于(x, y)计算的. 但是，由于G是对称的，我们可以计二重积分号下的拉普拉斯是关于(x_0, y_0)的，而不是关于(x, y)的，这不改变被积函数. 然后我们将拉普拉斯符号提到积分号外边，得到

635

$$\frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \phi(x,y)\,\nabla^2 G(x,y,x_0,y_0)\,dx\,dy = \nabla^2\left(\frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \phi(x,y)G(x,y,x_0,y_0)\,dx\,dy\right).$$

由定理 4，右端由二重积分所定义的函数满足泊松方程：$\nabla^2 u=\phi$. 因此，它的(关于(x_0, y_0)的)拉普拉斯算子等于$\phi(x_0, y_0)$，因而(15)式得证. ■

在下节和 12.7 节，将导出更多的格林函数.

习题 12.3

在习题 1～8 中，不计算而得出给定表达式的值. 充分利用本节的结果，并解释为何可以应用. 在所有的情形中，如没有明确说明，Ω如定理 1 所选取的区域，边界为Γ，(x_0, y_0)是Ω内的一点，G是Ω的格林函数.

1. $\int_{\Gamma} G(x,y,x_0,y_0)\mathrm{d}s$.

2. $\int_{\Gamma} f(x,y)G(x,y,x_0,y_0)\mathrm{d}s$, $f(x,y)$ 为任意一个在 Γ 上定义的函数.

3. $\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n}G(x,y,x_0,y_0)\mathrm{d}s$.

4. $\int_{\Gamma} xy\,\frac{\partial}{\partial n}G(x,y,x_0,y_0)\mathrm{d}s$.

5. $\int_{\Gamma} x\,\frac{\partial}{\partial n}G\left(x,y,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}s$,其中 Ω 是单位圆盘,Γ 是其正定向边界.

6. $\int_{\Gamma} (x^2-y^2)\,\frac{\partial}{\partial n}G\left(x,y,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}s$.

7. $\nabla^2\left(\iint\limits_{\Omega} G(x,y,x_0,y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$.

8. $\nabla^2\left(\iint\limits_{\Omega} (2x+3y^3)G(x,y,x_0,y_0)\mathrm{d}y\right)$.

9. $\nabla^2\left(\iint\limits_{\Omega} x^2y^3G(x,y,x_0,y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$.

10. $\nabla^2\left(\iint\limits_{\Omega} f(x,y)G(x,y,x_0,y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$.

11. 由定理 1 的表达公式,推导高斯平均值性质(12.2 节定理 1).

12. (a)对矩形的格林函数(10)式,验证定理 3 的(i).(假设可以交换求导和求和的顺序.)

    (b)对矩形的格林函数(10)式,验证定理 3 的(ii)和(v).

13. 对例 2 中圆盘的格林函数,验证定理 3 的(i).(假设可以交换求导和求和的顺序.)

14. 对例 2 中圆盘的格林函数,验证定理 3 的(ii)和(v).

15. 在定理 2 的记号下,证明:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n}\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)\mathrm{d}s = 1.$$

    [提示:取 $u=1$,利用(2).]

636

16. 利用(10)的格林函数和定理 2,推导 3.8 节中矩形上的狄利克雷问题的解. 在计算格林函数的法向导数时,必须对矩形的边,区分四种情形.

17. 将例 1 证明的步骤反过来,说明如何由格林函数(10)和定理 4,求解矩形上具有零边值的泊松方程.

18. 补充例 2 中的细节,以说明如何由 4.6 节的结果得出格林函数.

19. 在平面上求解泊松问题:$\nabla^2 u=\delta_{(0,0)}(x,y)$.

下面,我们利用定理 1 的记号. 除非特别说明,(x_0,y_0)是 Ω 内的一点,C_r 是包含在 Ω 内的正定向圆,圆心为(x_0,y_0),半径为 $r>0$. Ω 的格林函数记为 G. 因此,$G=h+v$,其中由(2)式,$v(x,y)=\frac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)$,$h$ 在 Ω 上调和,在边界 Γ 上等于 v.

20. 假设 u 在围绕(x_0,y_0)、包含在 Ω 内的一个开圆盘上是连续的(不必是调和的),证明:

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} u\,\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s = 2\pi u(x_0,y_0).$$

    [提示:由 12.2 节命题 1,$\int_{C_r} u\,\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} u(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \phi(r)$,其中 $\phi(r)$ 是连续的. $\phi(0)$ 是什么?]

21. 在围绕(x_0, y_0)、包含在Ω内的一个开圆盘上，假设u是连续的，h是调和的，证明：

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} u\frac{\partial h}{\partial n}\mathrm{d}s = 0.$$

[提示：在(x_0, y_0)附近，$|u|$和$\left|\frac{\partial h}{\partial n}\right|$是有界的，比如说，界为$M$. 如果$I_r$表示问题中的积分，则当$r\to 0$时，$|I_r|\leqslant 2\pi Mr\to 0$.]

22. **有用的极限**. 假设u在围绕(x_0, y_0)、包含在Ω内的一个开圆盘上是连续的(不必是调和的)，证明：

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} u\frac{\partial G}{\partial n}(x,y,x_0,y_0)\mathrm{d}s = 2\pi u(x_0,y_0).$$

[提示：结合前两个习题.]

23. **另一个有用的极限**. 假设u在围绕(x_0, y_0)、包含在Ω内的一个开圆盘上是连续的(不必是调和的)，证明：

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} u(x,y)G(x,y,x_0,y_0)\mathrm{d}s = 0.$$

[提示：对定理 4 的证明后半部分进行微小的修改.]

637

24. **(8)式的证明**. 应用习题 22，证明(8)式.(只需注意到积分中曲线的不同定向即可.)

25. **(7)式的证明**. 按照以下步骤证明：

$$\left|\iint_{\Omega_r}G(x,y,x_0,y_0)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Omega}G(x,y,x_0,y_0)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$$

$$=\left|\iint_{D_r}G(x,y,x_0,y_0)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant\iint_{D_r}|h(x,y,x_0,y_0)f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\iint_{D_r}\left|\frac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)f(x,y)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant A\iint_{D_r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+B\iint_{D_r}\frac{1}{2}|\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=Ar^2\pi+B\int_0^{2\pi}\int_0^r\rho|\ln\rho|\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta.$$

计算最后的积分，证明：当$r\to 0$时，最终表达式的右端趋近于 0

26. **定理 3(v)的证明**. 令$\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$和$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$为$\Omega$内的任意两点. 按照下面的步骤，证明：$G(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=G(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$.

(a)在Ω内，分别画出围绕$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的负定向的小圆$C_r(\boldsymbol{a})$和$C_r(\boldsymbol{b})$，半径为r. 令Ω_r表示Ω减去闭圆盘$D_r(\boldsymbol{a})$和$D_r(\boldsymbol{b})$后的区域，令Γ_r表示Ω_r的边界(图 8). 证明：

$$\int_{\Gamma_r}\left(G(x,y,\boldsymbol{a})\frac{\partial}{\partial n}G(x,y,\boldsymbol{b})-G(x,y,\boldsymbol{b})\frac{\partial}{\partial n}G(x,y,\boldsymbol{a})\right)\mathrm{d}s=0.$$

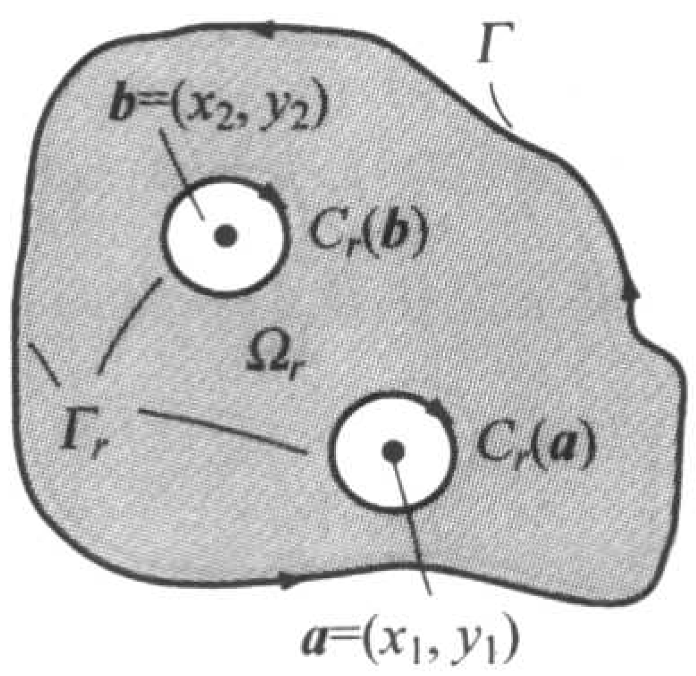


图 8 习题 26

(b)利用定理 3(ii)，得出结论

$$\int_{C_r(\boldsymbol{a})}\left(G(x,y,\boldsymbol{a})\frac{\partial}{\partial n}G(x,y,\boldsymbol{b})-G(x,y,\boldsymbol{b})\frac{\partial}{\partial n}G(x,y,\boldsymbol{a})\right)\mathrm{d}s$$

$$+\int_{C_r(\boldsymbol{b})}\left(G(x,y,\boldsymbol{a})\frac{\partial}{\partial n}G(x,y,\boldsymbol{b})-G(x,y,\boldsymbol{b})\frac{\partial}{\partial n}G(x,y,\boldsymbol{a})\right)\mathrm{d}s=0.$$

(c)利用习题 22 和 23，试证：

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r(\boldsymbol{a})} G(x,y,\boldsymbol{a})\,\frac{\partial}{\partial n}G(x,y,\boldsymbol{b})\,ds = 0;$$

$$\lim_{r\to 0}-\int_{C_r(\boldsymbol{a})} G(x,y,\boldsymbol{b})\,\frac{\partial}{\partial n}G(x,y,\boldsymbol{a})\,ds = 2\pi G(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b});$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r(\boldsymbol{b})} G(x,y,\boldsymbol{a})\,\frac{\partial}{\partial n}G(x,y,\boldsymbol{b})\,ds = -2\pi G(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a});$$

$$\lim_{r\to 0}-\int_{C_r(\boldsymbol{b})} G(x,y,\boldsymbol{b})\,\frac{\partial}{\partial n}G(x,y,\boldsymbol{a})\,ds = 0.$$

(d)由(b)和(c)，得出结论 $G(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=G(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a})$.

12.4 圆盘和上半平面的格林函数

单位圆盘上的格林函数在上节利用特征函数展开法计算过，得到了一个包含余弦、正弦和贝塞尔函数的二重级数的形式．本节，我们应用所谓的**镜像法**，得到格林函数的一个更简单的推导，镜像法是基于关于圆的一些平面几何事实的．这些几何思想同样可以应用到其他区域，而得到格林函数的具体公式． 638

贯穿本节，令 D_R 表示一个以原点为圆心、半径为 $R>0$ 的圆盘，C_R 是其正定向的边界．回顾上节(2)式，格林函数具有形式

$$G(x,y,x_0,y_0)=\overbrace{\frac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)}^{v(x,y,x_0,y_0)}+h(x,y,x_0,y_0),$$

其中 h 在 D_R 上调和，且对 C_R 上所有的$(x,\ y)$，$h(x,\ y,\ x_0,\ y_0)=-v(x,\ y,\ x_0,\ y_0)$．因此，$G$ 的第一部分是已知的，为确定第二部分，我们必须在 D_R 上寻找一个调和函数 h 在 C_r 上 $h=-v$．因此 h 是 D_R 上特殊狄利克雷问题的解，在 C_R 上满足边界条件 $h=-v$．暂时假设在 D_R 外存在一点 $A^*=(x_0^*,\ y_0^*)$，使得从 $A=(x_0,\ y_0)$ 到 C_R 上任意一点 $P=(x,\ y)$ 的距离与从$(x_0^*,\ y_0^*)$到$(x,\ y)$的距离成正比(图 1)．即，$(x_0^*,\ y_0^*)$满足：存在常数 $k>0$，使得对 C_R 上的所有$(x,\ y)$，有

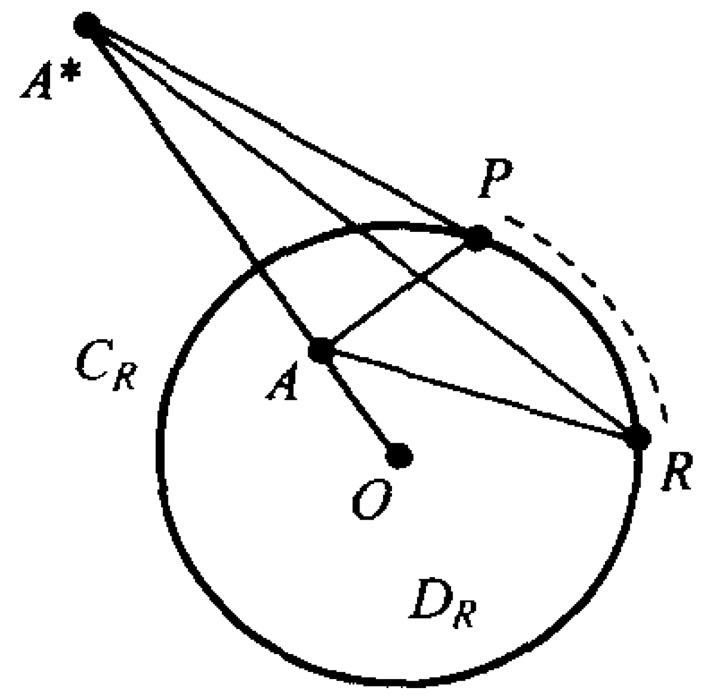


图 1　点 A^* 满足：对 C_R 上的所有点 P，我们有 $AP=k\cdot A^*P$ 对某个常数 $k>0$ 成立

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=k\sqrt{(x-x_0^*)^2+(y-y_0^*)^2}. \tag{1}$$

对给定的这样点$(x_0^*,\ y_0^*)$，定义

$$\begin{aligned}h(x,y,x_0,y_0)&=-\ln\left(k\sqrt{(x-x_0^*)^2+(y-y_0^*)^2}\right)\\&=-\frac{1}{2}\ln((x-x_0^*)^2+(y-y_0^*)^2)-\ln k.\end{aligned} \tag{2}$$

则对所有$(x,\ y)\neq(x_0^*,\ y_0^*)$，$h$ 是调和的，特别地，h 在 D_R 上调和；并且对 C_R 上的所有$(x,\ y)$，由(1)式，有 $h(x,\ y,\ x_0,\ y_0)=-v(x,\ y,\ x_0,\ y_0)$．因此，$h$ 就是我们要找的函数，因而，D_R 的格林函数是

$$G(x,y,x_0,y_0)=\frac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)-\frac{1}{2}\ln((x-x_0^*)^2+(y-y_0^*)^2)-\ln k.$$

化简，对 D_R 内所有的$(x,\ y)\neq(x_0^*,\ y_0^*)$，我们有

$$G(x,y,x_0,y_0)=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{(x-x_0^*)^2+(y-y_0^*)^2}\right]-\ln k. \tag{3}$$

由此，我们将构造圆盘 D_R 上的格林函数转化为下面的几何问题. 对 D_R 内给定的点 $A=(x_0,\ y_0)$，在 D_R 外找一点 $A^*=(x_0^*,\ y_0^*)$，以及常数 $k>0$，使得(1)式对圆 C_R 上的所有点$(x,\ y)$成立.

639 这个问题的解是由一个著名的几何构造或变换给出，称为**施泰纳反演**：当 A 不是原点时，点 A^* 是点 A 关于圆周 C_R 的**反演**. 由施泰纳反演的定义，A^* 是由原点 O 出发、经过 A 的射线上的点，它离原点的距离满足

$$OA\cdot OA^*=R^2 \tag{4}$$

(图 2). (虽然，在我们的讨论中去掉了 A 是 C_R 圆心的情形，但是所推得的公式也可以用在 A 是 C_R 圆心的情形.)下面，叙述反演的性质，它是构造格林函数的关键. 用记号 $|A-B|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$表示从点 $A=(x_1,\ y_1)$到点 $B=(x_2,\ y_2)$的距离，而 $|A|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$表示 A 到原点的距离.

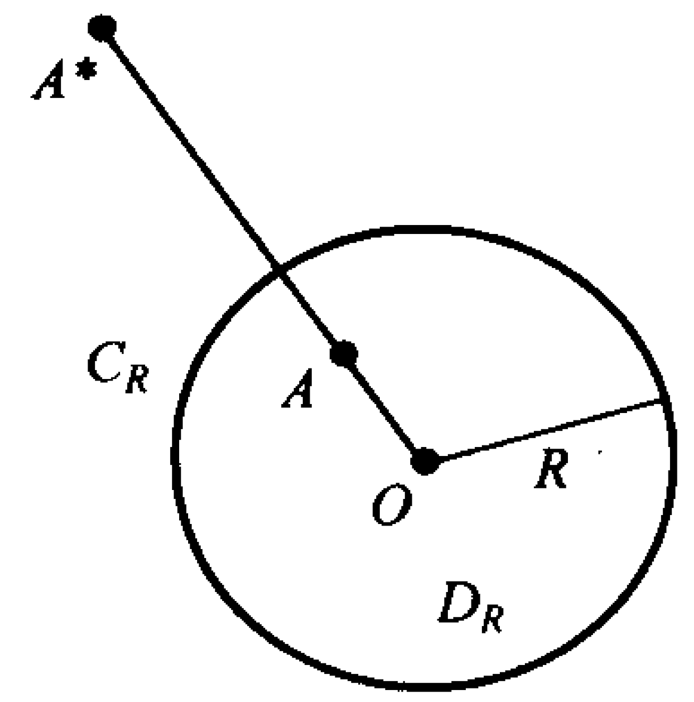


图 2 A^* 是 A 的由施泰纳反演的像，A^* 在射线 OA 上，且 $OA\cdot OA^*=R^2$

命题 1(施泰纳反演) 设 $A=(x_0,\ y_0)$是 D_R(除去圆心)内的一个固定点，令 $A^*=(x_0^*,\ y_0^*)$是它的施泰纳反演的像，对 C_R 上的任意点 $P=(x,\ y)$，我们有

$$|A-P|=\frac{|A|}{R}|A^*-P|=k\cdot|A^*-P|, \tag{5}$$

其中 $k=\dfrac{|A|}{R}=\dfrac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{R}$.

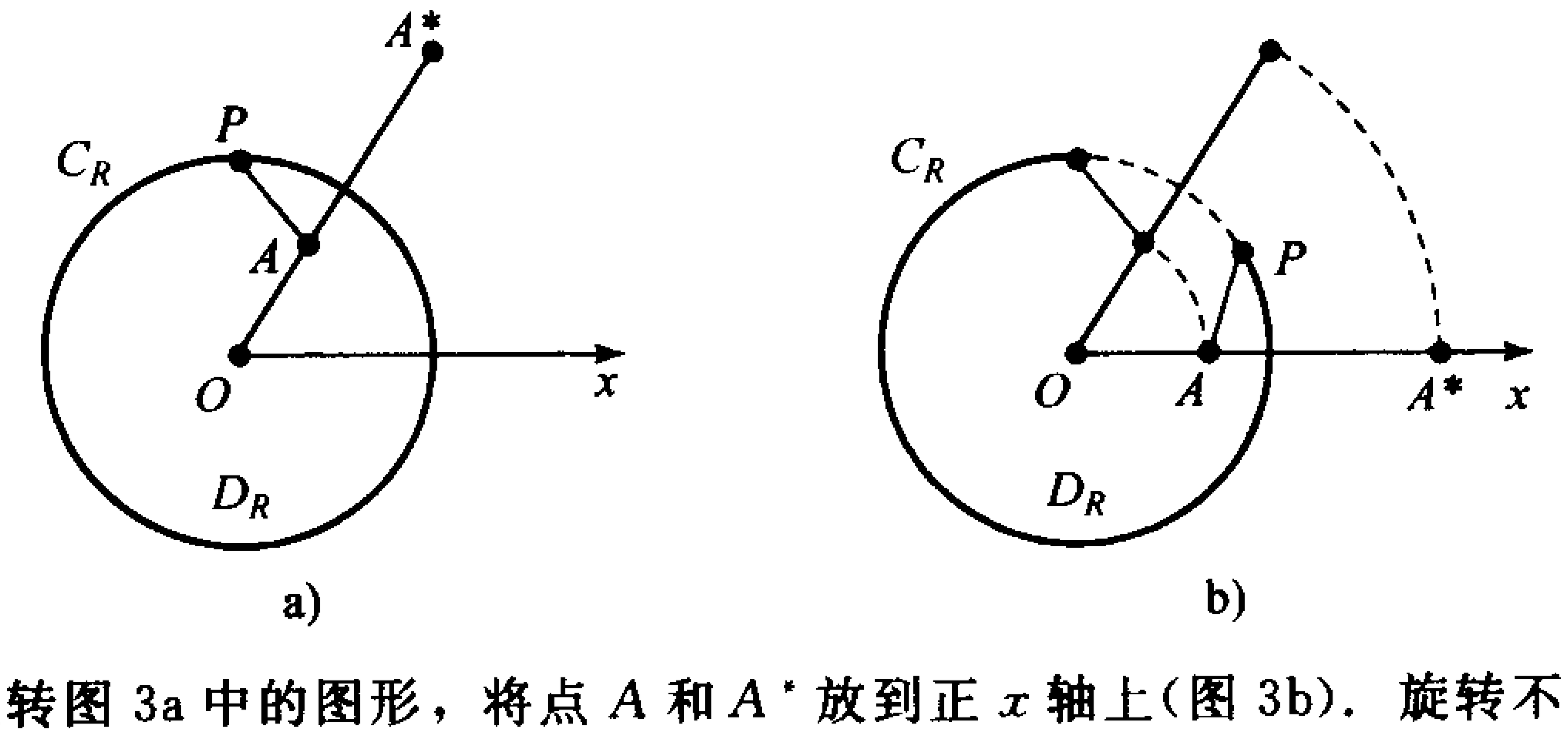


图 3 旋转图 3a 中的图形，将点 A 和 A^* 放到正 x 轴上(图 3b). 旋转不改变距离

证明 如有必要，旋转图形，我们可以假设点 A 和 A^* 在正 x 轴上，分别在 $|A|$ 和 $|A^*|$ 处，其中由(4)式，$|A^*|=\dfrac{R^2}{|A|}$(图 3). 利用极坐标 $P=(R\cos\theta,\ R\sin\theta)$，则

$$\frac{|A-P|^2}{|A^*-P|^2}=\frac{(|A|-R\cos\theta)^2+R^2\sin^2\theta}{(|A^*|-R\cos\theta)^2+R^2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{|A|^2+R^2-2R|A|\cos\theta}{\frac{R^4}{|A|^2}+R^2-2\frac{R^3}{|A|}\cos\theta}=\frac{|A|^2}{R^2},$$

其中最后的等式由化简可得，因此，(5)式得证. ■

将命题与(3)式结合，对 D_R 内的 $(x, y)\neq(x_0, y_0)$，D_R 的格林函数是

$$\boxed{G(x,y,x_0,y_0)=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{(x-x_0^*)^2+(y-y_0^*)^2}\right]-\ln\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{R}.}\tag{6}$$

有时将格林函数用极坐标表示是很有用的. 如果 $A=(r_0\cos\phi, r_0\sin\phi)$，则 $A^*=\left(\frac{R^2}{r_0}\cos\phi, \frac{R^2}{r_0}\sin\phi\right)$. 对 $P=(r\cos\theta, r\sin\theta)$，在三角形 OAP 和 OA^*P 内应用余弦定理(图 4)，我们得到 $|A-P|^2=r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\phi)$，而 $|A^*-P|^2=r^2+\frac{R^4}{r_0^2}-2r\frac{R^2}{r_0}\cos(\theta-\phi)$，因而，

640

$$G(r,\theta,r_0,\phi)=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{|A-P|^2}{|A-P^*|^2}\right]-\ln\frac{|A|}{R}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\phi)}{r^2+\frac{R^4}{r_0^2}-2r\frac{R^2}{r_0}\cos(\theta-\phi)}\right]-\frac{1}{2}\ln\frac{r_0^2}{R^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left[R^2\frac{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\phi)}{r^2r_0^2+R^4-2rr_0R^2\cos(\theta-\phi)}\right].\tag{7}$$

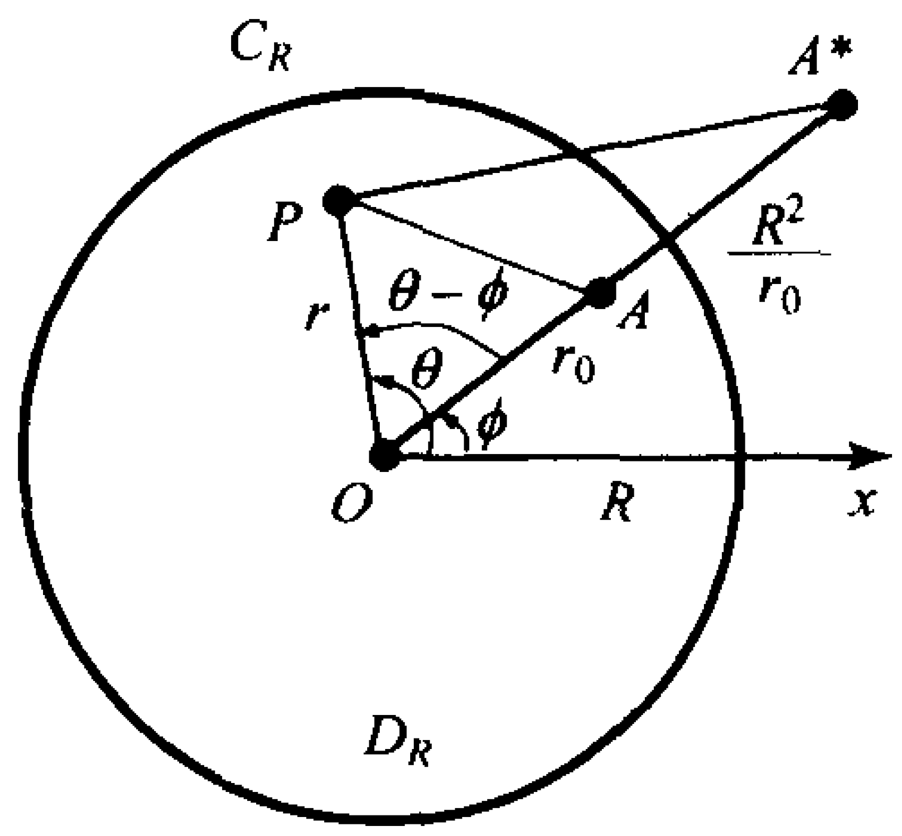


图 4 三角形内的余弦定理

有了这个公式，我们可以回到前一节，推导圆盘上泊松方程和狄利克雷问题解的具体表达式. 比如，利用前一节的定理 4，我们得到如下有趣的公式.

定理 1(圆盘上泊松方程的解) 令 $f(r, \theta)$ 是圆盘 D_R 上的函数，方程

$$\nabla^2u(r,\theta)=f(r,\theta),\quad 0\leqslant r<R, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\tag{8}$$

在 C_R 上满足边界条件 $u=0$ 的解是

$$u(r_0,\phi)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R f(r,\theta)\ln\left[R^2\frac{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\phi)}{r^2r_0^2+R^4-2rr_0R^2\cos(\theta-\phi)}\right]r\,dr\,d\theta,$$

其中 $0\leqslant r_0<R$，以及 $0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$.

我们的下个目标是推导狄利克雷问题(12.3 节定理 2)解的具体公式. 为此，我们需要计算格林函数在圆周上各点的法向导数 $\partial/\partial r_0$. 直接由(7)式，计算得到

$$\frac{\partial}{\partial r_0}G(r,\theta,r_0,\phi)\Big|_{r_0=R}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r_0}\ln\left[R^2\frac{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\phi)}{r^2r_0^2+R^4-2rr_0R^2\cos(\theta-\phi)}\right]\Bigg|_{r_0=R}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{N}\times\frac{N'\cdot D-N\cdot D'}{D}\Big|_{r_0=R},$$

其中 $N=r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\phi)$ 和 $D=r^2r_0^2+R^4-2rr_0R^2\cos(\theta-\phi)$，而撇号表示对 r_0 求导. 直接计算得

$$N\Big|_{r_0=R} = r^2 + R^2 - 2rR\cos(\theta-\phi);$$

$$D\Big|_{r_0=R} = r^2R^2 + R^4 - 2rR^3\cos(\theta-\phi) = R^2 N\Big|_{r_0=R};$$

$$N'\Big|_{r_0=R} = 2R - 2r\cos(\theta-\phi);$$

641

$$D'\Big|_{r_0=R} = 2r^2R - 2rR^2\cos(\theta-\phi).$$

代入法向导数中，化简得到

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial r_0}G(r,\theta,r_0,\phi)\Big|_{r_0=R} = \frac{R^2-r^2}{R(R^2+r^2-2rR\cos(\theta-\phi))}.} \tag{9}$$

现在，利用(9)式，$ds=Rd\theta$，并作如下修改：由于边界上得点只依赖于 θ，所以对 C_R 上的所有点(x, y)，令 $u(x, y)=f(\theta)$，重新叙述 12.3 节定理 2.

定理 2(圆盘上狄利克雷问题的解)　设 u 在 D_R 内调和，在边界 C_R 上，$u(R, \theta)=f(\theta)$，则

$$u(r,\phi) = \frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\theta)}{R^2+r^2-2rR\cos(\theta-\phi)}d\theta, \tag{10}$$

其中 $0\leqslant r<R$，以及 $0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$.

公式(10)称为圆盘 D_R 上的**泊松积分公式**，函数

$$\boxed{P(r,\theta) = \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2rR\cos(\theta-\phi)},\quad 0\leqslant r<R, 0\leqslant\phi\leqslant 2\pi} \tag{11}$$

称为圆盘 D_R 上的**泊松核**. 在 4.4 节习题中，利用傅里叶变换我们推导出了公式(10)和(11).

上半平面上的格林函数

现在，我们将注意力转到上半平面 Ω，区域 Ω 显然不是有界的，因此，严格地说，上节的结果不可以应用. 但是，可以证明添加上适当的条件，如 Ω 上调和函数的有界性，结果仍然成立. 因此，我们仍然可以应用 12.3 节的结果. 为构造上半平面上的格林函数，重复圆盘情形的镜像法过程，只是这里的计算更简单，很快会看到这点.

首先，令

$$G(x,y,x_0,y_0) = \overbrace{\frac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)}^{v(x,y,x_0,y_0)} + h(x,y,x_0,y_0),$$

我们寻找一个 Ω 上的调和函数 h，在 Ω 的边界上，即 $y=0$ 时，$h(x, y, x_0, y_0)=-v(x, y, x_0, y_0)$. 此时，$A$ 点的像 A^* 是显然的：$A^*=(x_0, -y_0)$. 如果将 A 看成位于上半平面中的一个热源，则 A^* 就是位于下半平面中的热源，在边界上它们有类似的效应(图 5). 令 $h(x, y, x_0, y_0)=-\frac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y+y_0)^2)$. 在边界上，$y=0$，我们立刻得到 $h(x, 0, x_0, y_0)=-v(x, 0, x_0,$

642

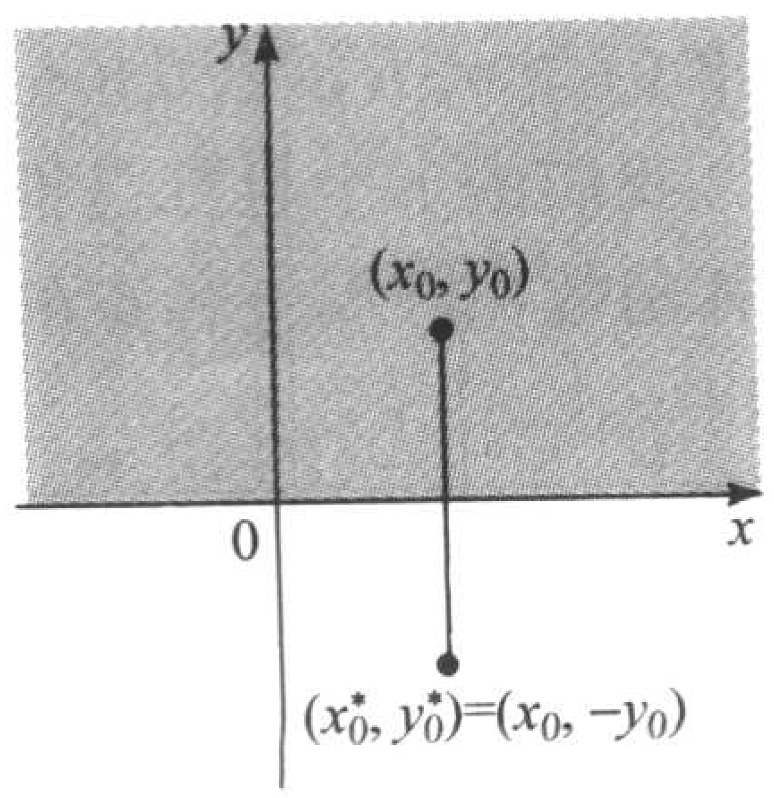


图 5　上半平面上热源的像

y_0). 因此，上半平面的格林函数是

$$\boxed{G(x,y,x_0,y_0)=\frac{1}{2}\ln\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2},} \tag{12}$$

其中 x_0 和 x 是任意的，而 y_0 和 y 大于零. 为以后查阅，我们将上半平面中泊松问题的解叙述如下.

定理 3(上半平面上泊松问题的解) 令 $f(x, y)$是在上半平面上定义的函数，方程

$$\nabla^2 u(r,\theta)=f(x,y),\quad -\infty<x<\infty,0<y \tag{13}$$

在 x 轴上($y=0$)满足边值 $u=0$ 的解是

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\ln\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

为导出上半平面中狄利克雷问题的解，我们首先计算 G 在 x 轴上各点处的法向导数. 此时，法向导数是$-\partial/\partial y_0$. 直接由(12)式计算得

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_0}[\ln[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]-\ln[(x-x_0)^2+(y+y_0)^2]]\Big|_{y_0=0}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{-2(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}-\frac{2(y+y_0)}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}\right]\Big|_{y_0=0}$$

$$=\frac{2y}{(x-x_0)^2+y^2}.$$

利用这些，12.3 节定理 2 具有如下形式.

定理 4(上半平面上狄利克雷问题的解) 假设 u 在上半平面中调和，在边界上 $u(x, 0)=f(x)$，则

$$u(x_0,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{(x-x_0)^2+y^2}\mathrm{d}x, \tag{14}$$

其中$-\infty<x_0<\infty$和 $0<y$.

我们知道(14)式就是上半平面的泊松积分公式，利用傅里叶变换在 7.5 节推导过.

下节，我们将介绍共形映射这个有力的方法，并推导不同区域上的格林函数，以及相应的狄利克雷问题和泊松问题的公式. 643

习题 12.4

在习题 1～8 中，不计算而得出给定表达式的值. 充分利用本节的结果，并解释为何可以应用.

1. $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\phi)}\mathrm{d}\theta$.(这是单位圆盘上泊松核的积分.)

2. $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2rR\cos(\theta-\phi)}\mathrm{d}\theta$.

3. $\dfrac{1-r^2}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{1+r^2-2r\cos(\theta-\phi)}\mathrm{d}\theta$,其中 $n=1,2,\cdots$.

4. $\dfrac{1-r^2}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin n\theta}{1+r^2-2r\cos(\theta-\phi)}\mathrm{d}\theta$,其中 $n=1,2,\cdots$.

5. $\dfrac{R^n(R^2-r^2)}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{R^2+r^2-2rR\cos(\theta-\phi)}\mathrm{d}\theta$,其中 $n=1,2,\cdots$.

6. $\dfrac{R^n(R^2-r^2)}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi}\dfrac{r^n\sin n\theta}{R^2+r^2-2rR\cos(\theta-\phi)}d\theta$,其中 $n=1,2,\cdots$.

7. $\dfrac{-\alpha_n^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 J_0(\alpha_n r)\ln\left[\dfrac{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\phi)}{r^2r_0^2+1-2rr_0\cos(\theta-\phi)}\right]rdrd\theta$,其中 α_n 是贝塞尔函数 J_0 的第 n 个正零点.

8. $\dfrac{-\alpha_{m,n}^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 J_m(\alpha_{m,n}r)\cos(m\theta)\ln\left[\dfrac{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\phi)}{r^2r_0^2+1-2rr_0\cos(\theta-\phi)}\right]rdrd\theta$, 其中 m 是正整数，$\alpha_{m,n}$ 是贝塞尔函数 J_m 的第 n 个正零点.

9. 直接由(7)式验证：圆盘的格林函数在边界上($r=R$)为零.

10. 直接由(7)式验证：对 $0\leqslant r<R$ 和所有 θ，圆盘的格林函数 $\leqslant 0$.

11. 直接由(7)式验证：圆盘的格林函数是对称的.

12. 直接由(12)式验证：上半平面中的格林函数满足 12.3 节定理 3 的性质(ii)，(iii)和(v).

13. 直接由(12)式验证：上半平面中的格林函数满足 12.3 节定理 3(i).

14. 结合定理 1 和 2，求解一般泊松问题：在 D_R 上，$\nabla^2 u=f(r,\theta)$，在 C_R 上满足边界条件 $u(R,\theta)=g(\theta)$.

15. 结合定理 3 和 4，求解一般泊松问题：在上半平面内，$\nabla^2 u=f(x,y)$，在 x 轴上满足边界条件 $u(x,0)=g(x)$.

644

16. 假设在定理 1 中，$f(r,\theta)=f(r)$(因此，f 只依赖于 r，而不依赖于 θ)，试证：解也只依赖于 r. [提示：在二重积分号下求关于 ϕ 的导数，证明这个导数为零.]

17. **专题问题：上半平面中的诺伊曼问题**. 在本习题中，将证明方程

$$\phi_{xx}+\phi_{yy}=0\quad(-\infty<x<\infty,y>0)$$

满足诺伊曼边界条件 $\phi_y(x,0)=f(x)$ 的解是

$$\phi(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln((x-t)^2+y^2)f(t)dt.$$

注意，解只能在相差一个常数意义下确定，参考 12.8 节的另外一个推导.

(a)试证：如果 ϕ 满足所述的诺伊曼问题，则 $v=\dfrac{\partial\phi}{\partial y}$ 满足狄利克雷问题：对 $-\infty<x<\infty$ 和 $y>0$，

$$v_{xx}+v_{yy}=0\quad 及\ v(x,0)=f(x).$$

(b)应用泊松公式，得到

$$v(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2}dt.$$

(c)推导诺伊曼问题的解.

12.5 解析函数

在本章剩下的各节中，我们将探讨复值函数与偏微分方程解之间的联系. 更确切地说，我们将引入解析函数，并利用它们推导出求解狄利克雷问题和构造格林函数的主要工具. 首先，我们简单回顾一下复数和复函数等基本概念.

如果 $z=x+iy$，其中 x 和 y 是实数，我们称 x 为 z 的**实部**，而 y 为 z 的**虚部**，并记为 $x=\mathrm{Re}z$ 和 $y=\mathrm{Im}z$. 我们以 $\mathbb{C}$ 表示全体复数集合. 就像实数对应于实线上的点一样，我们将一个复数 $z=x+iy$ 与笛卡儿平面(称为**复平面**)上的点(x,y)相对应(图 1). 利用笛卡儿平面上的距离公式，我们引入两个复数之间的**距离**：如果 $z_1=x_1+iy_1$ 和 $z_2=x_2+iy_2$，则 z_1 和 z_2 之间的距离为

$$|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

(图 2). 特别地，复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的**模**或**绝对值**是它到原点的距离：$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ (图 1). $z=x+\mathrm{i}y$ 的**复共轭**是复数 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$. 我们有

645

$$z\cdot\bar{z}=x^2+y^2.$$

因此，$z\cdot\bar{z}$ 永远是非负实数，而 $z\cdot\bar{z}=0\Leftrightarrow z=0$. 利用共轭复数，我们有 $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$.

利用极坐标，我们将非零复数写成**极坐标形式** $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，这里 $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$，而 θ 是图 3 中的极角. 利用欧拉恒等式，$e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，我们也可以写成 $z=re^{\mathrm{i}\theta}$. 角 θ 称为 z 的**辐角**，记为 $\arg z$. 显然，$\arg z$ 不是单值的：如果 α 是辐角的一个值，则任意形如 $\alpha+2k\pi$ 的值都是 z 的辐角，其中 k 是整数. $\arg z$ 在区间 $(-\pi,\pi]$ 中的唯一值称为**辐角主值**，记为 $\mathrm{Arg}z$.

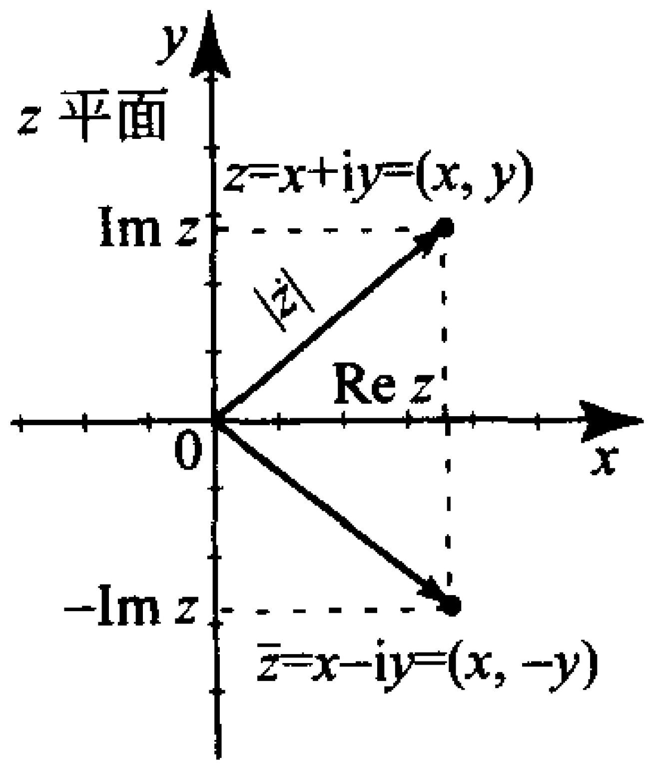


图 1 复数 z 与笛卡儿平面上的点对应；共轭复数 $\bar{z}$；z 的模 $|z|$

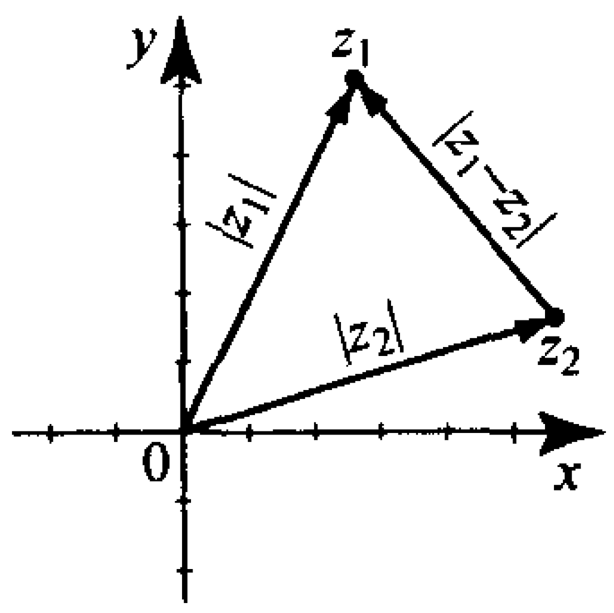


图 2 复数 z_1 和 z_2 之间的距离

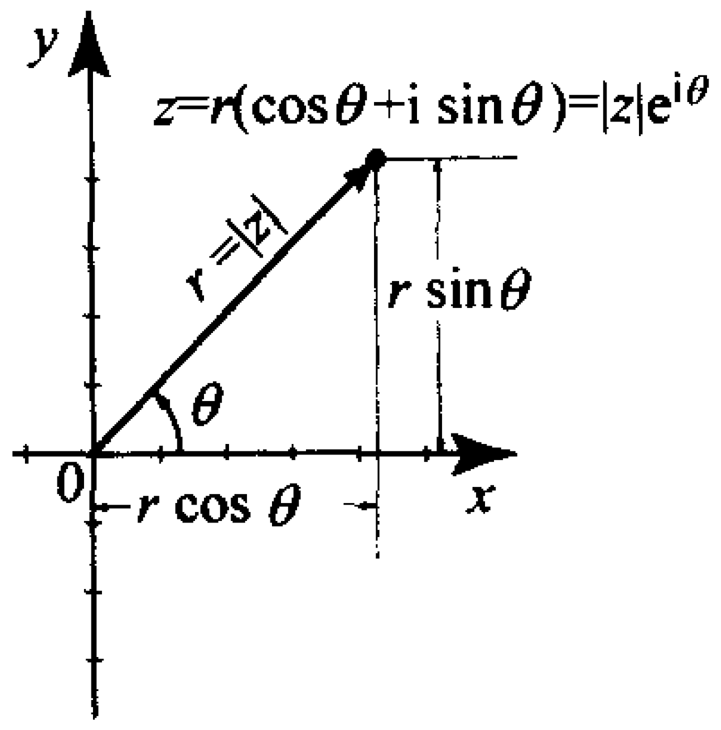


图 3 极坐标表示 $z=|z|e^{\mathrm{i}\theta}$，$\theta$ 是 z 的辐角

极表示可以用来几何地描述乘法的效应. 对给定的两个复数 $z_1=r_1e^{\mathrm{i}\theta_1}$ 和 $z_2=r_2e^{\mathrm{i}\theta_2}$，我们有

$$z_1\cdot z_2=r_1e^{\mathrm{i}\theta_1}r_2e^{\mathrm{i}\theta_2}=r_1r_2e^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}.$$

因此，为将两复数相乘，我们将它们的模相乘，而辐角相加.

复函数

一个复变量的复值函数，或简单地复函数，是映射 $w=f(z)$，其定义域是复 z 平面的子集，而值域是复 w 平面的子集. 通过取实部和虚部，我们将这样的函数看成从笛卡儿 xy 平面到笛卡儿 uv 平面上的映射. 我们有关系式，$f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$ 或 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，其中 $u(x,y)=\mathrm{Re}(f(z))$，以及 $v(x,y)=\mathrm{Im}(f(z))$ (图 4).

下面的例题说明了这些概念.

例 1 复变函数

在下面的例子中，将函数表示成形如 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，其中 $z=x+\mathrm{i}y$.

(a) 函数 $f(z)=\mathrm{Im}z$ 是实值的. 我们有 $u(x,y)=y$ 和 $v(x,y)=0$.

646

(b) **线性函数**形如 $f(z)=\alpha z+\beta$，其中 α 和 β 是复数. 记 $\alpha=a+\mathrm{i}b$ 和 $\beta=c+\mathrm{i}d$，其中 a，b，

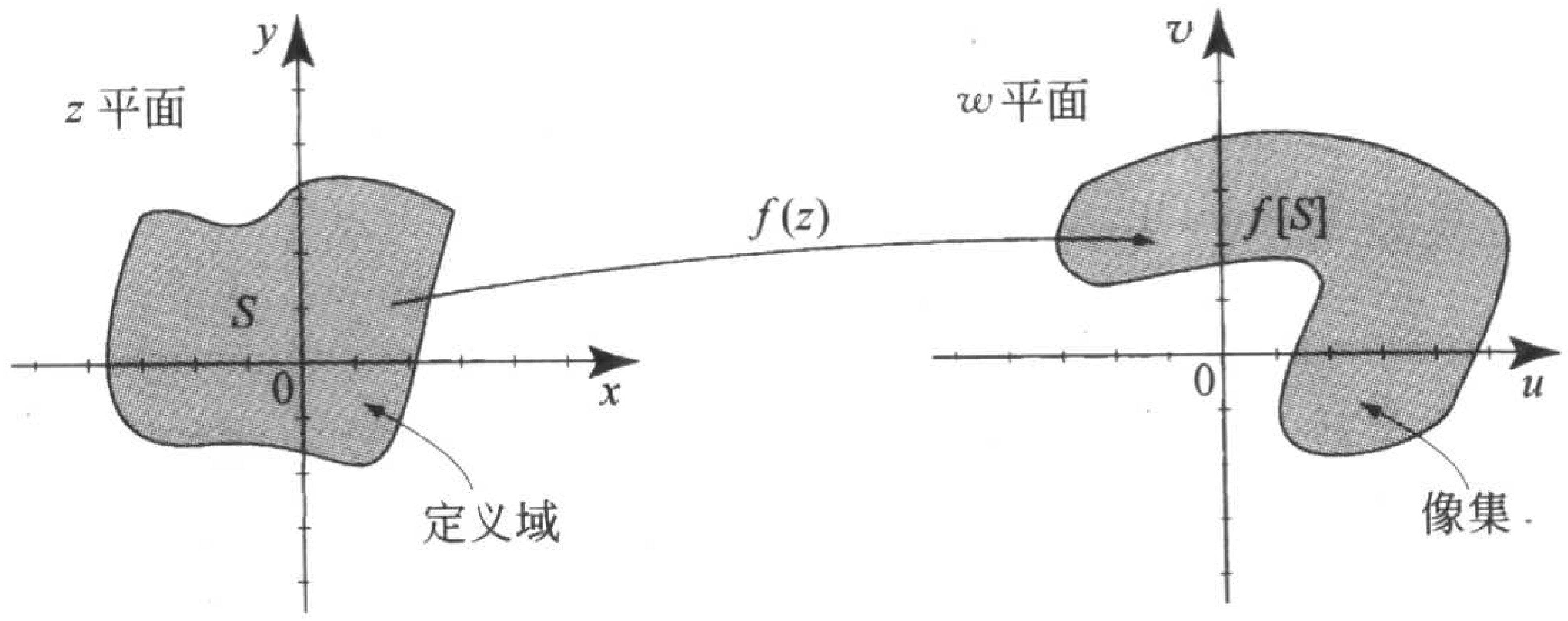


图 4 为图示由复值函数 $w=f(z)$ 决定的映射，我们利用两个平面：定义域 z 平面或 xy 平面，以及像 w 平面或 uv 平面

c 和 d 是实的，则

$$f(z)=(a+\mathrm{i}b)(x+\mathrm{i}y)+c+\mathrm{i}d=ax-by+c+\mathrm{i}(bx+ay+d).$$

因此，$u(x,y)=ax-by+c$ 和 $v(x,y)=bx+ay+d$.

(c)对**指数函数**，$f(z)=\mathrm{e}^z$，我们有

$$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y).$$

因此，$u(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y$，以及 $v(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$.

(d)利用指数函数，**正弦函数**可以如下定义：

$$\sin z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}.$$

注意到，如果 $z=x$ 是实的，则由欧拉恒等式 $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}=\sin x$，$\sin z$ 就退化为通常的正弦函数.

利用 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$，以及 $\frac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$，我们有

$$\begin{aligned}\sin z&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}}{2\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y}}{2\mathrm{i}}\\&=\sin x\,\frac{\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y}}{2}+\mathrm{i}\cos x\,\frac{\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y}}{2}\\&=\sin x\cosh y+\mathrm{i}\cos x\sinh y.\end{aligned}$$

(e)我们用

$$\cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

定义**余弦函数**. 如(d)中的计算，我们有

$$\cos z=\cos x\cosh y-\mathrm{i}\sin x\sinh y.$$

(f)**复对数函数**更难定义，对数具有许多分支. 对所有的 $z\neq 0$，对数的**主值分支**定义为

$$\operatorname{Log} z=\ln|z|+\mathrm{i}\operatorname{Arg} z,$$

其中 $\operatorname{Arg} z$ 是辐角的主值. 取 $\operatorname{Log} z$ 的实部和虚部，我们得到 $u(x,y)=\ln|z|=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ 和 $v(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$，其中反正切的值必须在区间$(-\pi,\pi]$上取值(参考(8)～(10)，用

x 和 y 显式表示 $\mathrm{Arg}z$ 的公式）. 对任意的复数的 $z\neq0$，我们有

$$e^{\mathrm{Log}z}=e^{\ln|z|+i\mathrm{Arg}z}=e^{\ln|z|}e^{i\mathrm{Arg}z}=|z|e^{i\mathrm{Arg}z}=z,$$

其中我们利用了 $\ln x$ 和 e^x 互为反函数(因此，$e^{\ln|z|}=|z|$)，还利用了极坐标表示 $z=|z|e^{i\mathrm{Arg}z}$. 因此，得到 $e^{\mathrm{Log}z}=z$，这类似于 e^x 和 $\ln x$ 的互为反函数关系. 但是，注意，恒等式 $\mathrm{Log}(e^z)=z$ 并不是总成立的(习题 22). ■ 647

复函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 是连续的，当且仅当 u 和 v 都是连续的. 可以验证，例 1(a)～(e)中的函数对所有的 $z=x+iy$ 都是连续的. 对数函数 $\mathrm{Log}z$ 在 $z=0$ 没有定义，对负实轴上的所有 z 都不连续. 为看清这点，令 $z_0=x_0$，$x_0<0$，由主值的定义，我们有 $\mathrm{Arg}z_0=\pi$. 当 z 从下半平面趋近于点 z_0 时，则 $\mathrm{Arg}z$ 趋近于 $-\pi$，不等于 $\mathrm{Arg}z_0$. 因此，$\lim\limits_{z\to z_0}\mathrm{Arg}z\neq\mathrm{Arg}z_0$，因此，$\mathrm{Arg}z$ 在点 z_0 处不连续(图 5). 由此得到，$\mathrm{Log}z$ 在点 z_0 处不连续. 点集 $z=x$，其中 $x\leqslant0$ 称为 $\mathrm{Log}z$ 的一个**分支切割**(图 6). 我们刚证明过，$\mathrm{Log}z$ 在其分支切割上的所有点处不连续. 在平面的其他点处，$\mathrm{Log}z$ 都是连续的.

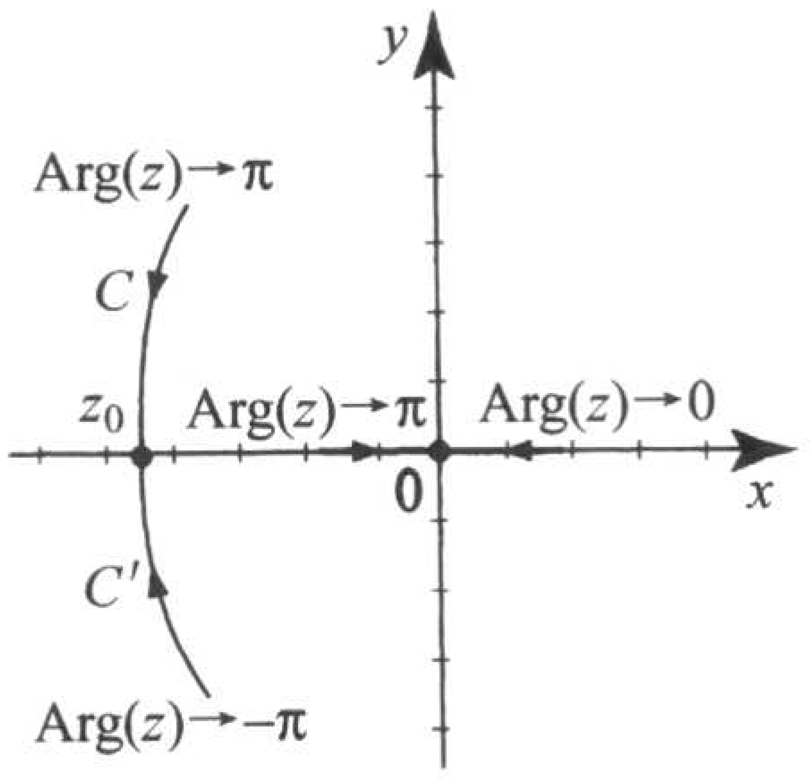


图 5 $\mathrm{Arg}z$ 在点 $z_0=x_0\leqslant0$ 处不连续，沿曲线 C，$\mathrm{Arg}z$ 的极限是 π，但是沿曲线 C' 的极限是 $-\pi$

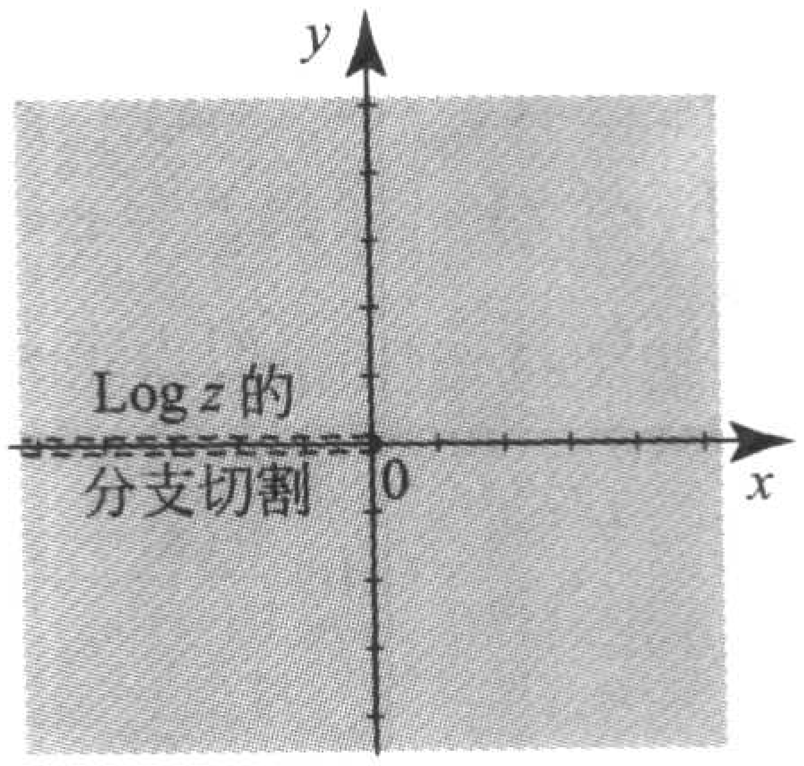


图 6 $\mathrm{Log}z$ 的分支切割，函数在此处不连续

解析函数，柯西-黎曼方程

我们说 $f(z)$在 z 点**可微**，如果在 z 点处，它的导数 $f'(z)$，或$\frac{d}{dz}f(z)$存在且有限，其中

$$f'(z)=\lim_{\zeta\to z}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}. \tag{1}$$

如果 S 是复平面中的开集，我们说 f 在 S 上是**解析**的，如果 $f(z)$在 S 内的所有点 z 处可微. 函数在一点 z_0 处解析，如果它在包含 z_0 的一个开集上解析. 定义(1)与微积分中实变量函数的导数定义相似. 所以可以尝试用微积分中的技巧来计算(1)式中的极限，特别是，当 f 是多项式或有理函数时. 例如，如果 $f(z)=z$，则

$$f'(z)=\lim_{\zeta\to z}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}=\lim_{\zeta\to z}\frac{\zeta-z}{\zeta-z}=1,$$

但是记住，与实变量只可以在两个方向上变化不同，(1)式中的复变量 ζ 可以从无穷多个方向趋近于 z，而说(1)式存在是指不管我们如何趋近于 z，它都存在且相等. 这显然比实变情形的导数存在的要求强多了. 正是这个理由，解析函数具有一些实变可微函数所不具备的特殊的性

[648] 质. 这些令人吃惊的性质之一就是下面的结果.

定理 1(柯西-黎曼方程) 函数 $f(z)=u(x, y)+\mathrm{i}v(x, y)$ 在开集 S 中解析，当且仅当 u 和 v 的偏导数连续，且满足柯西-黎曼方程

$$u_x = v_y \quad \text{及} \quad u_y = -v_x. \tag{2}$$

进一步地，如果 f 解析，则导数 $f'(z)$ 由下面之一给出

$$f'(z) = u_x(x,y) + \mathrm{i}v_x(x,y) \text{ 或}$$
$$f'(z) = v_y(x,y) - \mathrm{i}u_y(x,y). \tag{3}$$

因此，解析函数的实部和虚部不可能是相互任意的：它们以柯西-黎曼方程这样的方式相互依赖.

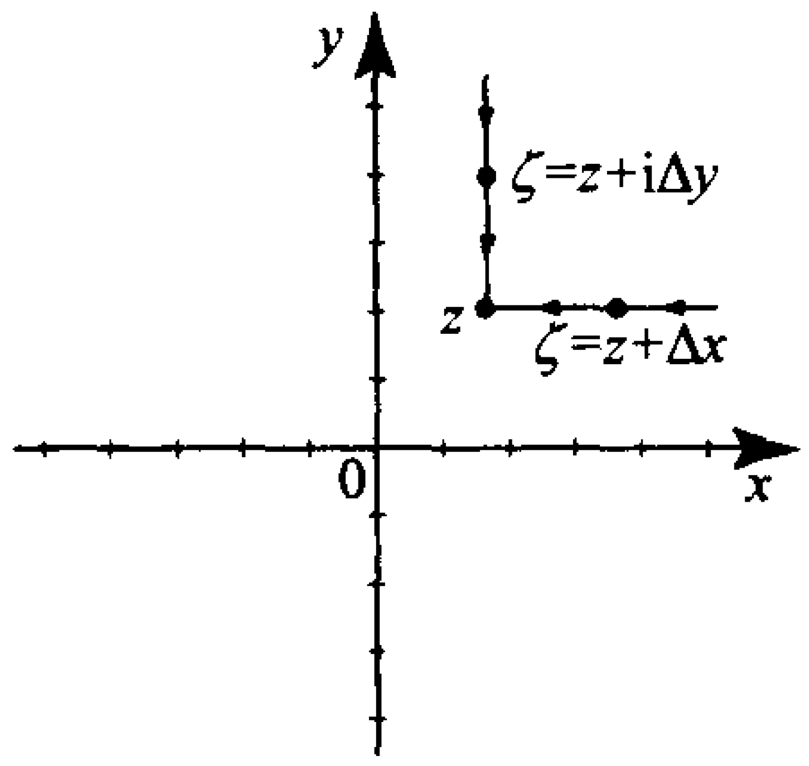


图 7 当 ζ 以两个不同的(特殊)方式趋近于 z 时，计算极限(1)

证明 这里我们只证明定理的一个方向.（关于完整证明，参考[1]第 2 章.）假设 f 在 $z=x+\mathrm{i}y$ 处解析，因此极限(1)式存在. 为证明柯西-黎曼方程和(3)式成立，我们以两种不同的方式计算极限(1)：一次是取 $\zeta=z+\Delta x$；而另一次是取 $\zeta=z+\mathrm{i}\Delta y$，其中 Δx 和 Δy 是在 x 和 y 上的小增量(图 7). 如果 $\zeta=z+\Delta x=x+\Delta x+\mathrm{i}y$，$\zeta-z=\Delta x$，(1)式变为

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)+\mathrm{i}v(x+\Delta x,y)-(u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y))}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+\mathrm{i}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\\
&= \frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}.
\end{aligned}$$

类似地，如果 $\zeta=z+\mathrm{i}\Delta y=x+\mathrm{i}(y+\Delta y)$，$\zeta-z=\mathrm{i}\Delta y$，(1)式变为

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)+\mathrm{i}v(x,y+\Delta y)-(u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y))}{\mathrm{i}\Delta y}\\
&= \lim_{\Delta y\to 0}(-i)\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}\\
&= \frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y},
\end{aligned}$$

其中在第二行我们利用了 $1/\mathrm{i}=-\mathrm{i}$ 和 $(-\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}=1$. 由于 $f'(z)$ 不依赖于我们如何趋近于 z，令上面的两个极限相等，我们得出(2)和(3)成立. ■

[649] 下面的例子说明如何利用定理 1 建立解析性，并计算导数.

例 2 柯西-黎曼方程的应用

参考例 1 中的函数.

(a) 函数 $f(z)=\mathrm{Im}z=y$ 具有实部 $u(x, y)=y$ 和虚部 $v(x, y)=0$. 计算偏导数，我们得到，$u_x=0$，$u_y=1$，$v_x=v_y=0$. 因此，等式 $u_y=-v_x$ 总是不成立，因而柯西-黎曼方程对任意点 $z=x+\mathrm{i}y$ 都不成立. 所以函数在复平面上都不解析.

(b)利用定义(1)，可以直接证明，线性函数 $f(z)=\alpha z+\beta$ 的导数是 $f'(z)=\alpha$. 下面我们利

用定理 1 来推导这个结果，记 $\alpha=a+ib$ 和 $\beta=c+id$，$u(x, y)=ax-by+c$ 和 $v(x, y)=bx+ay+d$，则 $u_x=a$，$u_y=-b$，$v_x=b$ 和 $v_y=a$，因此，对所有的(x, y)，$u_x=v_y$ 和 $u_y=-v_x$. 因而，在所有点处，柯西-黎曼方程成立，且偏导数连续. 从而，对所有的 z，函数解析，并且 $f'(z)=u_x+iv_x=a+ib=\alpha$.

(c)如果 $f(z)=e^z$，则 $u=e^x\cos y$，$v=e^x\sin y$，$u_x=e^x\cos y$，$u_y=-e^x\sin y$，$v_x=e^x\sin y$，以及 $v_y=e^x\cos y$. 偏导数连续，且满足柯西-黎曼方程：对所有的(x, y)，$u_x=v_y$ 和 $u_y=-v_x$. 因而，对所有的 z，$f(z)=e^z$ 解析，并且 $f'(z)=u_x+iv_x=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^z$.

(d)对所有的 z，验证 $\sin z$ 是解析的，且$\frac{d}{dz}\sin z=\cos z$，是一道简单的习题(习题 27(a)).

(e)类似地，对所有的 z，$\cos z$ 是解析的，且$\frac{d}{dz}\cos z=-\sin z$(习题 27(b)).

(f)如实变量情形，如果 $f(z)$在一点 z 处解析，则它必然在 z 点连续. 因此，$\text{Log}z$ 在其分支切割上不解析，因为它在那里不连续. 对复平面上的其他点，由例 1(f)，有 $u(x, y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，因而，

$$u_x=\frac{x}{x^2+y^2} \quad 及 \quad u_y=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

利用反正切，$\text{Log}z$ 的虚部是 $v(x, y)=\tan^{-1}\frac{y}{x}+k\pi$，$k=0$，$\pm 1$，取决于点$(x, y)$的位置(参考下面例 3 的讨论). 利用$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{1+x^2}$和链式法则，可以直接验证

$$v_x=\frac{-y}{x^2+y^2} \quad 及 \quad v_y=\frac{x}{x^2+y^2}$$

(习题 53). 因此，偏导数是连续的，柯西-黎曼方程，$u_x=v_y$ 和 $u_y=-v_x$ 成立. 从而，对所有不在 $\text{Log}z$ 的分支切割上的点 $z=x+iy$，有

$$\frac{d}{dz}\text{Log}z=u_x+iv_x=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{1}{z}.$$

最后一个等式需要验证(习题 53). ■

对所有的 z 都解析的函数称为**整函数**，因此，$\alpha z+\beta$，e^z，$\cos z$ 以及 $\sin z$ 都是整函数，但是，$\text{Log}z$ 不是整函数.

为查阅方便，现在，我们叙述几条导数的性质，它们与实变量函数导数的性质类似. [650]

定理 2(解析函数的性质) *假设 f 和 g 在开集 S 上解析，c_1，c_2 是复常数，则 c_1f+c_2g 和 fg 在 S 上解析，并且*

$$(c_1f+c_2g)'(z)=c_1f'(z)+c_2g'(z), \tag{4}$$

$$(fg)'(z)=f'(z)g(z)+f(z)g'(z). \tag{5}$$

同样，$\frac{f}{g}$在 S(去掉 $g=0$ 点)上解析，且

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z)=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{(g(z))^2} \quad (g(z)\neq 0). \tag{6}$$

如果 g 在 z_0 点解析，且 f 在 $g(z_0)$ 点解析，则复合函数 $(f\circ g)(z)$ 在 z_0 点解析，并且我们有**链式法则**

$$(f\circ g)'(z_0)=f'(g(z_0))g'(z_0). \tag{7}$$

利用 z 的幂函数的线性组合和定理 2，我们得出结论：多项式 $p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ 是整函数. 由商法则，我们知道：有理函数 $q(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 在所有 $g(z)\neq 0$ 的 z 点解析，其中 f 和 g 是多项式.

典型地，对 z 作代数操作的任意函数都是可微的，但是，如例 2(a)，解析性可以很容易地破坏，比如函数 $\mathrm{Re}z$，$\mathrm{Im}z$ 和 $\bar{z}$ 在任意一点都不解析.（参考习题 30.）

解析函数的应用

我们即将说明解析函数在偏微分方程中的有力应用. 事实上，利用柯西-黎曼方程，我们现在就可以给出这两者之间的联系. 我们有如下重要的结果.

定理 3(解析函数和拉普拉斯方程) 假设 $f=u+\mathrm{i}v$ 在开集 S 上解析，则其实部、虚部，$u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 S 上调和，即 u 和 v 在 S 上满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\phi=0$.

证明 由解析函数的众所周知的性质，如果 f 解析，则其各阶导数都是解析的. 这蕴涵着，如果 $f=u+\mathrm{i}v$ 解析，则 u 和 v 具有各阶偏导数，且导数都连续. 进一步，由于 f 解析，由柯西-黎曼方程，我们有

651

$$u_x=v_y \quad 及 \quad u_y=-v_x.$$

求二阶导数，我们得到

$$u_x=v_y \quad\Rightarrow\quad u_{xx}=v_{yx};$$
$$u_y=-v_x \quad\Rightarrow\quad u_{yy}=-v_{yx},$$

其中我们交换了求导的顺序，这是可以的，因为偏导数是连续的. 因此，$u_{xx}+u_{yy}=v_{yx}-v_{yx}=0$，即 u 满足拉普拉斯方程. 类似证明对 v 成立. ■

可以利用定理 3，构造出许多有趣的调和函数，仅需对任何解析函数取其实部和虚部.

例 3 调和函数

(a) 函数 $f(z)=z^2=x^2-y^2+2\mathrm{i}xy$ 是整函数，因此，$u(x, y)=x^2-y^2$ 和 $v(x, y)=xy$ 对所有的 (x, y) 都是调和的，因为 $u=\mathrm{Re}f$ 和 $v=\dfrac{1}{2}\mathrm{Im}f$.

(b) 函数 $f(z)=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$ 是整函数，因此，$u(x, y)=\mathrm{e}^x\sin y$ 和 $v(x, y)=\mathrm{e}^x\cos y$ 对所有的 (x, y) 都是调和的.

(c) 函数 $f(z)=\mathrm{Log}z=\ln|z|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}z$ 在 $\mathbb{C}$ 除去 $(-\infty, 0]$ 上解析，因此，$u(x, y)=\ln|z|=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ 和 $v(x, y)=\mathrm{Arg}z$ 在区域 $\Omega=\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ 是调和的.（事实上，由 12.2 节命题 2，$\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ 对所有 $(x, y)\neq(0, 0)$ 是调和的.） ■

除了 $z=x$，$x\leqslant 0$ 外，函数 $\mathrm{Arg}z$ 对所有 z 解析. 将 $\mathrm{Arg}z$ 表示成 x 和 y 的表达式是有用

的. 回顾，反正切函数在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$上取值(图 8)，因此，等式 $\operatorname{Arg}z=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$仅当 $\operatorname{Arg}z$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$上时成立. 如果 $\operatorname{Arg}z$ 不在这个区间上，我们必须通过加上$\pm\pi$来修改反正切的取值. 可以验证：对 $z=x+\mathrm{i}y$，$x\neq0$，有

$$\operatorname{Arg}z=\begin{cases}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{若 } x>0;\\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\pi & \text{若 } x<0 \text{ 并且 } y\geqslant0;\\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)-\pi & \text{若 } x<0 \text{ 并且 } y<0.\end{cases}\tag{8}$$

如图 9 所示，比如点 $z_1=2+3\mathrm{i}$ 在第一象限. 利用计算器，可以得到 $\operatorname{Arg}z_1=\tan^{-1}\frac{3}{2}\approx0.983$. 点 $z_2=-2-3\mathrm{i}$ 在第三象限，$\operatorname{Arg}z_2=\tan^{-1}\frac{3}{2}-\pi\approx-2.159$.（值得注意的是，所有角度是以弧度度量的.）

当 x 为零时，我们有

$$\operatorname{Arg}z=\operatorname{Arg}(\mathrm{i}y)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{若 } y>0;\\ -\frac{\pi}{2} & \text{若 } y<0.\end{cases}\tag{9}$$

652

有时利用反余切函数更方便，特别是对上半平面中的点. 反余切函数在区间$(0,\ \pi)$上取值(图 10)，并且当 $\operatorname{Im}z>0$ 时，其值与 $\operatorname{Arg}z$ 的值相等. 我们有

$$\operatorname{Arg}z=\cot^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)\quad \text{如果 } y>0.\tag{10}$$

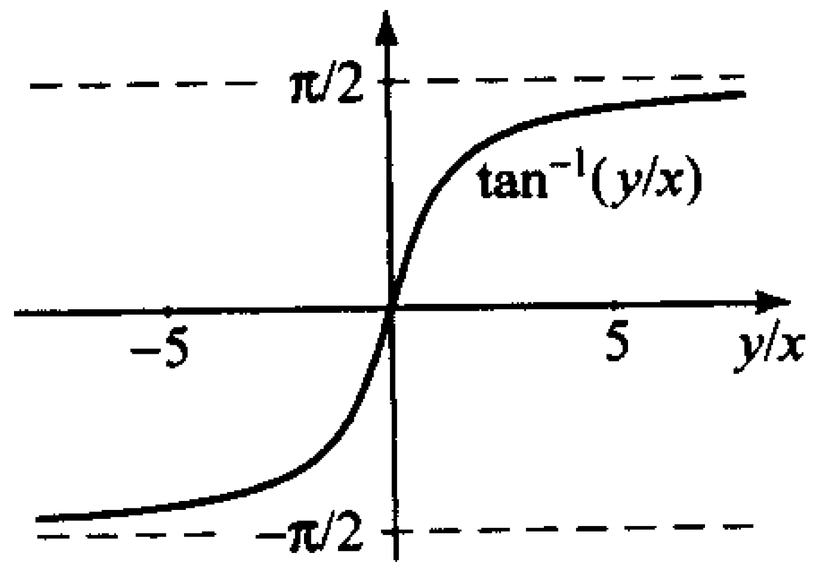


图 8 反正切函数在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$上取值

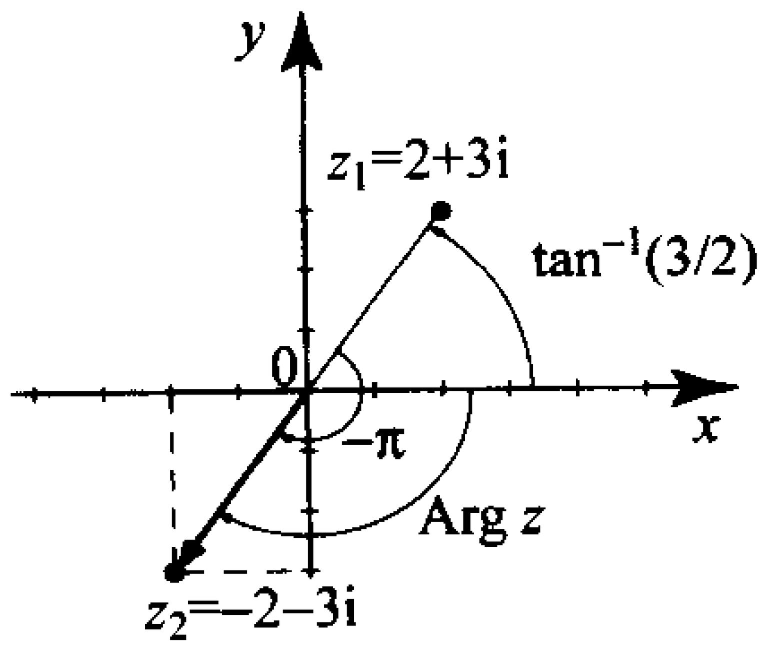


图 9 计算 $\operatorname{Arg}z$

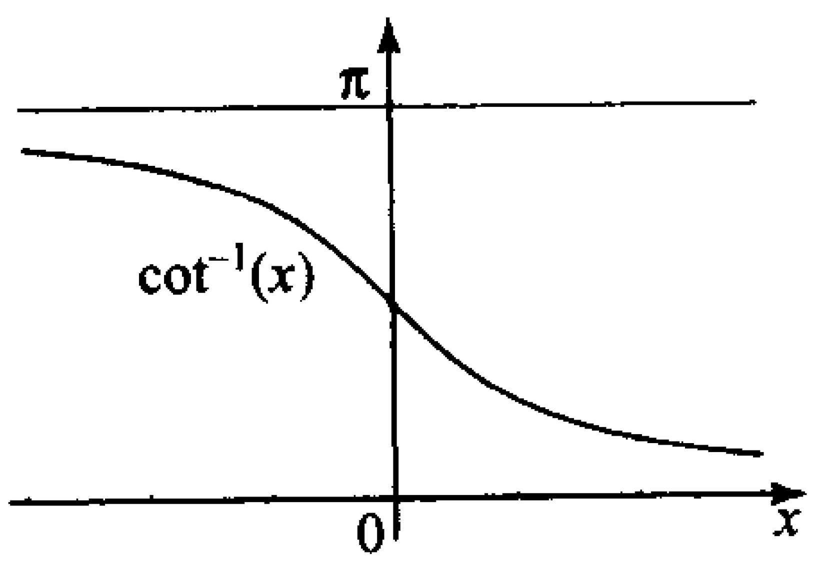


图 10 反余切函数在区间$(0,\ \pi)$上取值

注意到，$\operatorname{Arg}z$ 在通过原点的射线上为常值；更一般地，函数 $u(z)=a\operatorname{Arg}z+b$，其中 a 和 b 是实数，在通过原点的射线上为常值. 辐角函数的这个特有的性质可以帮助我们求解某些狄利克雷问题，如下例所示.

例 4 辐角函数的应用

在上半平面 $y>0$ 内，求解狄利克雷问题：$\nabla^2u=0$，已知边界值

$$u(x,0)=\begin{cases}100 & \text{如果 } x>0,\\ 50 & \text{如果 } x<0.\end{cases}$$

解 由于边界条件在射线 $x\geqslant 0$ 和 $x\leqslant 0$ 上是常数，所以有理由相信，解在上半平面内的射线上是常数. 基于这个期望，我们尝试形如 $u(x, y)=a\text{Arg}z+b$ 函数的解，其中 a 和 b 是实数，$z=x+\mathrm{i}y$. 这个函数在上半平面内是调和的. 它在边界上的取值为：当 $x>0$ 时，$u(x, 0)=b$；而当 $x<0$ 时，$u(x, 0)=a\pi+b$. 因此，为满足边界条件，取 $b=100$ 和 $a\pi+100=50$，即 $a=-\frac{50}{\pi}$，从而，

$$u(x,y)=-\frac{50}{\pi}\text{Arg}z+100.$$

利用(10)式，用 x 和 y 表示，因 $y>0$，就得

$$u(x,y)=-\frac{50}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+100.$$

当 $y\to 0^+$ 时，如果 $x>0$，$\cot^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ 趋于 0；而如果 $x<0$，$\cot^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ 趋于 π，这就说明 u 满足边界条件. ■

如果在例 4 中，我们平移边界条件，以某点 x_0 为圆心，而不是原点，则必须将函数作平移，转而考虑函数 $u(z)=a\text{Arg}(z-x_0)+b$，它在上半平面内也是调和的. 此时的边界条件在射线 $x>x_0$ 和 $x<x_0$ 上为常数. 如下例所示，我们可以将这个过程推广一下，以求解一类重要的狄利克雷问题，其边界值在区间上为常数. 类似问题在 7.5 节考虑过.

653

例 5 辐角函数的平移的应用

给定 $a<b$，在上半平面内，求解狄利克雷问题：$\nabla^2 u=0$，满足边界值(图 11)

$$u(x,0)=\begin{cases}0 & \text{若 } x<a,\\ T & \text{若 } a<x<b,\\ 0 & \text{若 } b<x.\end{cases}$$

解 由于边界值的特点，我们必须将 Arg$z$ 分别作关于 a 和 b 的平移. 因此，尝试调和函数 $u(x, y)=\frac{a_1}{\pi}\text{Arg}(z-a)+\frac{a_2}{\pi}\text{Arg}(z-b)+a_3$ 作为解，其中 $a_j(j=1, 2, 3)$是待定实数. 这个函数在上半平面内调和. 为确定其系数，我们计算它在边界上的值. 对任意实数 w，当 $w>0$ 时，$\frac{a}{\pi}\text{Arg}w=0$；而当 $w<0$ 时，$\frac{a}{\pi}\text{Arg}w=a$. 因此，可以验证：

$$u(x,0)=\begin{cases}a_1+a_2+a_3 & \text{若 } x<a,\\ a_2+a_3 & \text{若 } a<x<b,\\ a_3 & \text{若 } b<x.\end{cases}$$

与给定的边界值比较，我们得到关于三个未知数 a_1，a_2 和 a_3 的方程组

$$\begin{cases}a_1+a_2+a_3 &=0,\\ \qquad a_2+a_3 &=T,\\ \qquad\qquad a_3 &=0.\end{cases}$$

从第三个方程开始，往上求解，我们得到，$a_3=0$，$a_2=T$，以及 $a_1=-T$. 因此，$u(x, y)=\frac{T}{\pi}(\operatorname{Arg}(z-b)-\operatorname{Arg}(z-a))$. 为将解用 x 和 y 表达，我们利用反余切，由于 $z-a=(x-a)+\mathrm{i}y$ 和 $z-b=(x-b)+\mathrm{i}y$ 的虚部是正的，我们得到

$$u(x,y)=\frac{T}{\pi}\left[\cot^{-1}\left(\frac{x-b}{y}\right)-\cot^{-1}\left(\frac{x-a}{y}\right)\right].$$

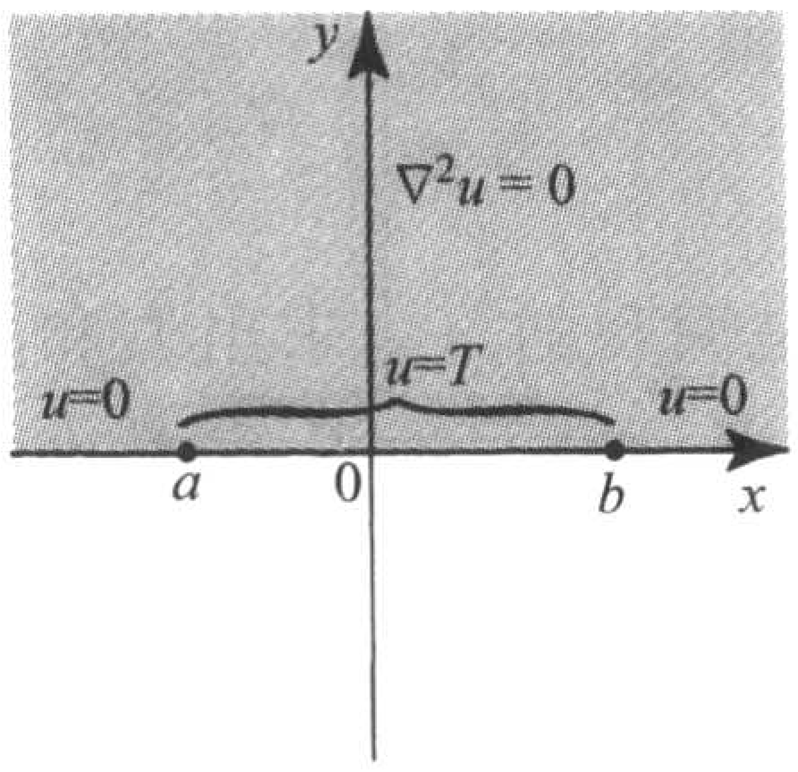


图 11 在上半平面内的狄利克雷问题

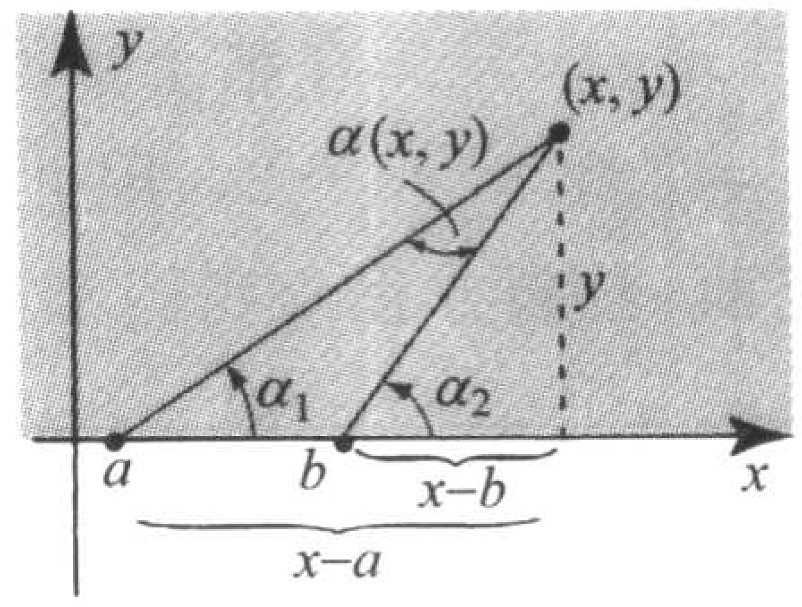


图 12 如果(x, y)趋近于 x 轴上、区间(a, b)之外的点，角 $\alpha(x, y)$趋于 0；而当(x, y)趋近于 x 轴上、区间(a, b)内某点时，它的值趋于 π

在图 12 中，我们有 $\cot^{-1}\left(\frac{x-b}{y}\right)=\alpha_2$ 和 $\cot^{-1}\left(\frac{x-a}{y}\right)=\alpha_1$. 由于三角形的内角和是 π，我们得到 $\alpha_1+(\pi-\alpha_2)+\alpha(x, y)=\pi$，其中 $\alpha(x, y)$是在点(x, y)对边为区间(a, b)的角. 因此，$\alpha(x, y)=\alpha_2-\alpha_1$，从而，$u(x, y)$是 $\alpha(x, y)$的常数倍. 特别地，$\alpha(x, y)$在上半平面内是(x, y)的调和函数，当我们在区间(a, b)上趋近于边界点时，其值趋于 π；而如果在区间(a, b)之外趋近于边界点时，其值趋于 0. 这个有用的事实在 7.5 节的习题中已经观察到了. 函数 $\alpha(x, y)$称为区间(a, b)的**调和测度**. ■

调和共轭

定理 3 告诉我们解析函数的实部和虚部都是调和的. 是不是每个调和函数都是一个解析函数的实部或虚部？更具体地，在区域 Ω 上，给定一个调和函数 u，我们能否找到另外一个 Ω 上的调和函数 v，使得 $f=u+\mathrm{i}v$ 在 Ω 上解析？如果函数 v 存在，它称为 u 的**调和共轭**. 下面的结果回答了我们的问题. [654]

定理 4(调和共轭) *假设 Ω 是一个区域(开且连通)，则 Ω 上的任何一个调和函数 u 在 Ω 上都有一个调和共轭 v，当且仅当 Ω 是单连通的(参考 12.1 节的定义).*

这个定理的陈述可能看起来有点奇怪，因为 u 的调和共轭的存在性条件是加在区域上的，而不是在 u 本身上. 为理解这个特殊性，考虑函数$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，它在区域 $\Omega_1=\mathbb{C}$(除(0, 0)外)上解析，可以证明：$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$在区域 Ω_1 上没有调和共轭. 但是，由于 $\operatorname{Log}z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\mathrm{i}\operatorname{Arg}z$ 在区域 $\Omega_2=\mathbb{C}$(除$(-\infty, 0]$外)内解析，因此，$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$在区域 Ω_2 内的调和共

轭是 Arg$z$. 这个例子说明，所考虑的区域对调和共轭的存在性起着关键性的作用.

定理 4 保证在任何单连通区域上调和共轭的存在性，这样的区域有整个平面、圆盘、半平面、扇形，或者任何一个没有洞的开的、连通区域. 对于任意一个区域，我们总是可以在其内部取一个围绕给定点的圆盘，然后应用定理 4. 由此，我们可以说调和函数是一个解析函数的局部实部(或虚部)，这里的“局部”是指在函数调和区域内的任意一个圆盘上.

利用柯西-黎曼方程，可以求出调和共轭，正如下例所示.

例 6 求调和共轭

证明 $u(x, y)=x^2-y^2+x$ 在整个平面内调和，求出调和共轭.

解 我们有 $u_{xx}=2$ 和 $u_{yy}=-2$，因此，$u_{xx}+u_{yy}=0$，因而 u 是调和的. 为求出调和共轭 v，我们如下利用柯西-黎曼方程. 我们希望 $u+\mathrm{i}v$ 是解析的，因此，v 必满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{及} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{11}$$

由于$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+1$，第一个方程蕴涵着

$$2x+1=\frac{\partial v}{\partial y}.$$

655

为得到 v，我们对这个等式两边求关于 y 的积分. 但是，因为 v 是 x 和 y 的函数，所以积分得到的常数可以是 x 的函数. 因此，对 y 积分得到

$$v(x,y)=(2x+1)y+c(x),$$

其中 $c(x)$仅是 x 的函数. 代入(11)中的第二个方程，我们得到

$$-2y=-\left(2y+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c(x)\right).$$

因此，$c(x)$的导数为零，所以必是常数. 我们任意取定一个常数，记为 $c(x)=C$. 代入 v 的表达式，我们得到 $v(x, y)=(2x+1)y+c(x)=2xy+y+C$. 对函数对 u 和 v 验证柯西-黎曼方程，因而得出结论：$(x^2-y^2+x)+\mathrm{i}(2xy+y+C)$是整函数. ■

如果 v 是 u 的调和共轭，会有两个问题：

- v 是唯一的吗?
- v 的调和共轭是什么?

在任意一个给定的单连通区域上，v 在相差一个常数意义下是唯一的. 同样，如果 v 是 u 的调和共轭，则 $-u$ 是 v 的调和共轭(习题 54).

正交轨线和调和共轭

前面，我们将调和函数 u 的调和共轭定义为实部为 u 的解析函数 $f=u+\mathrm{i}v$ 的虚部. 现在，我们用正交轨线来解释调和共轭. 这个几何解释给出了调和共轭的一个具体意义.

给定一个二元函数 $u(x, y)$，u 的水平曲线由方程 $u(x, y)=C$ 定义，其中 C 是 u 的值域中的一个常数. 为计算水平曲线在一点处切线的斜率$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，我们利用二维链式法则，在等式 $u(x, y)=C$ 两边求关于 x 的导数，得到

$$u_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}+u_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.$$

由于$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}=1$，我们解出$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(=m_1)$，得到

$$m_1=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{u_x}{u_y}.$$

水平曲线 $u(x, y)=C$ 的**正交轨线**是在每点处与水平曲线 $u(x, y)=C$ 正交的曲线族. 显然，两个曲线族是相互正交的. [656]

假设对某个函数 $\psi(x)$，我们可以将正交轨线表达成 $\psi(x, y)=C'$ 的形式. 正如我们刚才所示，在每点处正交曲线切线的斜率为 $m_2=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\psi_x}{\psi_y}$. 由于正交曲线的斜率是负的倒数，我们有

$$m_1\cdot m_2=-1\Leftrightarrow\frac{u_x}{u_y}\cdot\frac{\psi_x}{\psi_y}=-1;$$

等价地，两族相互正交的条件是

$$\frac{u_x}{u_y}=-\frac{\psi_y}{\psi_x}. \tag{12}$$

现在，假设 u 是调和函数，其调和共轭是 v，考虑水平曲线 $u(x, y)=C$ 和 $v(x, y)=C'$. 由于 $u+\mathrm{i}v$ 解析，所以柯西-黎曼方程成立：$u_x=v_y$ 和 $u_y=-v_x$. 由(12)式知，$u(x, y)=C$ 和 $v(x, y)=C'$是正交曲线族. 因此，我们有如下有用结果.

定理 5(正交轨线)　如果 u 是调和函数，其调和共轭是 v，则水平曲线 $u(x, y)=C$ 和 $v(x, y)=C'$ 相互正交.

我们给出了调和共轭的两个解释. 在热流中，我们可以将 $u(x, y)$看成在区域 Ω 上的狄利克雷问题的解，则水平曲线 $u(x, y)=C$ 表示等温线，或 Ω 内温度相等的曲线. Ω 内的**热流的曲线**是那些给出热在 Ω 内流动方向的曲线. 按照热传导的傅里叶定律，热量由热的地方向冷的地方、沿着温度差最大的方向流动. 如果沿着等温线，温度差为零(温度为常数)，则沿着与等温线正交的曲线，温度差最大. (回顾，u 的梯度，$\nabla u=(u_x, u_y)$，指向函数变化最大的方向，并且梯度与 u 的水平曲线垂直.)因而，由定理 5，热流的曲线由 u 的调和共轭 v 的水平曲线给出.

在电磁学中，带电粒子之间的引力或斥力是调和函数 u 的梯度，称为**静电位势**，水平曲线 $u(x, y)=C$ 表示等势线. 此时，u 的调和共轭 v 的水平曲线给出电场的电力方向，称为**力线**. [657]

例 7　等温线和热流曲线

确定例 4 中的等温线和热流曲线.

解　边界值是 50 和 100，因此区域内部的温度将在介于这两个值之间变化. 对 $50<T<100$，等温线由水平曲线 $u(x, y)=T$ 给出，或

$$-\frac{50}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+100=T\Rightarrow\cot^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\pi}{50}(100-T)$$

$$\Rightarrow\frac{x}{y}=\cot\left[\frac{\pi}{50}(100-T)\right]$$

$$\Rightarrow y=\tan\left[\frac{\pi}{50}(100-T)\right]x.$$

因此，等温线是过原点、以角度$\frac{\pi}{50}(100-T)$倾斜的射线，因为斜率为 $\tan\left[\frac{\pi}{50}(100-T)\right]$. 当 T 从 100 到 50 变化时，这个角度从 0 到 π 变化，这与我们的期望和给定的边界条件一致. 一些等温线如图 13 所示.

热流曲线是 u 的调和共轭的水平曲线. 由例 4，$u=-\frac{50}{\pi}\mathrm{Arg}z+100$. 现在，回顾 $\mathrm{Log}\, z=\ln|z|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}z$ 在上半平面内解析，因此，$\mathrm{Arg}z$ 是 $\ln|z|$ 的调和共轭；从而，$-\ln|z|$ 是 $\mathrm{Arg}z$ 的调和共轭. 所以 u 的调和共轭是 $v=\frac{50}{\pi}\ln|z|$.（这里，我们利用了事实：如果 v 是 u 的调和共轭，则 αv 是 $\alpha u+\beta$ 的调和共轭，其中 α 和 β 是实常数.）用 x 和 y 来表达，我们有 $v(x, y)=(25/\pi)\ln(x^2+y^2)$，所以热流曲线由水平曲线 $(25/\pi)\ln(x^2+y^2)=C$ 给出. 乘以$\frac{\pi}{25}$，再取指数，我们得到 $x^2+y^2=R$，其中 $R>0$. 因此，热流曲线是以原点为圆心的半圆. 在图 14 中，我们画出了一些等温线和热流曲线. 注意，这两族曲线的正交性. 图 14 也说明了傅里叶定律：热量由热的地方向冷的地方、沿着温度差最大的方向流动.

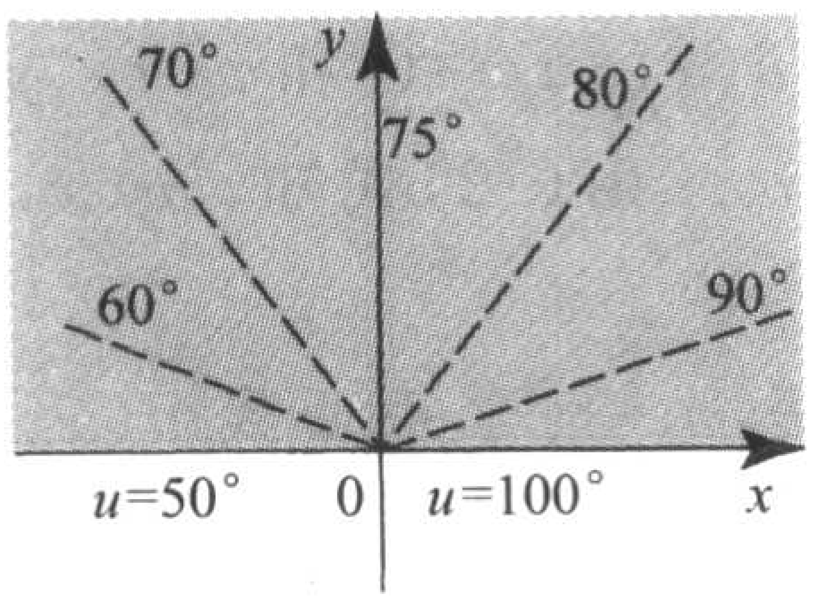


图 13　等温线是倾斜角为$\frac{\pi}{50}(100-T)$的射线

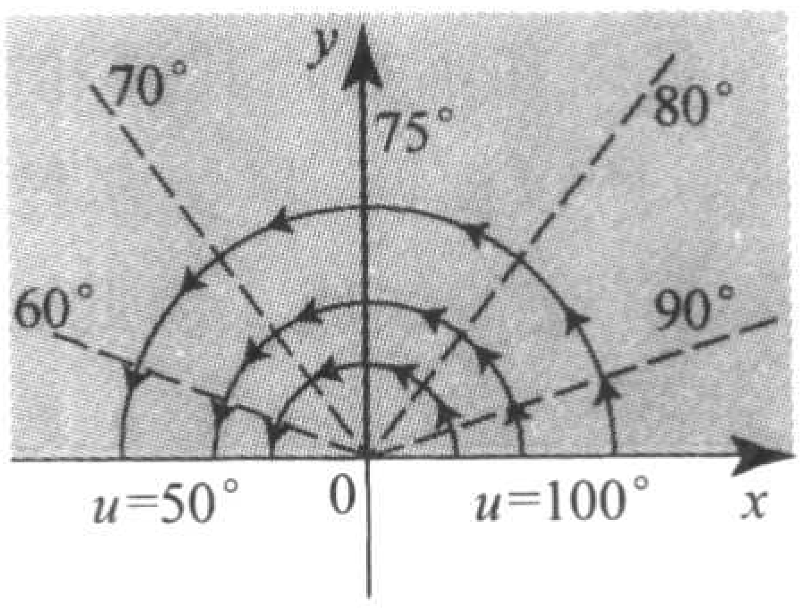


图 14　等温线和热流曲线是正交的 ■

在下一节，我们将探讨解析函数与调和函数的另外一个联系，并发展出求解拉普拉斯方程的共形映射方法.

习题 12.5

习题 1～20 是为了复习复数和复函数的基本论题. 在这些习题中，除非特别说明，取 $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$，$z=x+\mathrm{i}y$.

在习题 1～4 中，将给定的复数写成 $a+\mathrm{i}b$ 形式，其中 a 和 b 是实数.

1. (a) $(3+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})$.　　(b) $(3-\mathrm{i})\overline{(2-\mathrm{i})}$.　　(c) $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.

2. (a) $\mathrm{i}(2-\mathrm{i})^2$.　　(b) $\overline{(3+\mathrm{i})\overline{(1-\mathrm{i})}}$.　　(c) $\frac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$.

658

3. (a) $\frac{1}{\mathrm{i}}$.　　(b) $(\mathrm{i})^n$.　　(c) $(\bar{\mathrm{i}})^n$.

4. (a) $\overline{\left(\frac{3+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)}$.　　(b) $\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^{20}+\mathrm{i}^{200}+\mathrm{i}^{202}$.　　(c) $\sum_{n=0}^{1001}\mathrm{i}^n$.

对习题 5～16 中给出的复数，(a)求出辐角的主值. (b)计算模. (c)写成 $re^{\mathrm{i}\theta}$形式.

5. i.

6. $-$i.

7. π.

8. $-\pi$.

9. $1+\mathrm{i}$.

10. $1-\mathrm{i}$.

11. $-1+\mathrm{i}$.

12. $-1-\mathrm{i}$.

13. $(1+\mathrm{i})^2$.

14. $\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}$.

15. $\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$.

16. $\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha$.

在习题 17～20 中，计算函数值，将答案写成 $a+\mathrm{i}b$ 形式，其中 a 和 b 是实数.

17. (a) $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}$. (b) $\sin\mathrm{i}$. (c) $\cos\mathrm{i}$. (d) $\mathrm{Log}\,\mathrm{i}$.

18. (a) $\mathrm{e}^{1-\pi\mathrm{i}}$. (b) $\sin(2+\pi\mathrm{i})$. (c) $\mathrm{Log}(-7)$. (d) $\mathrm{Log}\,1$.

19. (a) $\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$. (b) $\mathrm{e}^{2-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$. (c) $\mathrm{Log}(1-\mathrm{i})$. (d) $\mathrm{Log}(1-\mathrm{i})^2$.

20. (a) $\mathrm{e}^{\mathrm{Log}(1+5\pi\mathrm{i})}$. (b) $\mathrm{Log}(\mathrm{e}^{1+5\pi\mathrm{i}})$. (c) $\mathrm{Log}[(-1)\cdot\mathrm{i}]$. (d) $\mathrm{Log}(-1)+\mathrm{Log}\,\mathrm{i}$.

21. 举例说明 $\mathrm{Log}(z_1\cdot z_2)$ 不总是等于 $\mathrm{Log}(z_1)+\mathrm{Log}(z_2)$.

22. 举例说明 $\mathrm{Log}(\mathrm{e}^z)$ 不总是等于 z. 找出使得等式 $\mathrm{Log}(\mathrm{e}^z)=z$ 成立的关于 z 的充分必要条件.

在习题 23～26 中，推导给定等式，取 $z=x+\mathrm{i}y$.

23. (a) $|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^x$. (b) $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}|=\mathrm{e}^{-y}$.

24. (a) $|\sin z|=\sqrt{\sin^2 x+\sinh^2 y}$. (b) $|\cos z|=\sqrt{\cos^2 x+\sinh^2 y}$.

25. (a) $\cos(\mathrm{i}x)=\cosh x$. (b) $\sin(\mathrm{i}x)=\mathrm{i}\sinh x$.

26. (a) $\overline{\mathrm{e}^z}=\mathrm{e}^{\bar z}$. (b) $\overline{\sin z}=\sin\bar z$.

在习题 27～30 中，利用柯西-黎曼方程，验证给定函数是否是解析的. 如果是，用(3)式中的任意一个恒等式计算其导数.

27. (a) $\sin z$. (b) $\cos z$.

28. (a) e^z+z. (b) z^2.

29. (a) $\dfrac{x+\mathrm{i}y}{x^2+y^2}$. (b) $\dfrac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}$.

30. (a) $\bar z$. (b) $\mathrm{Re}\,z$.

在习题 31～34 中，验证给定函数是调和的，然后利用例 6 的技巧，求出其调和共轭.

31. x^2-y^2+xy.

32. x^2-y^2-2x+1.

33. $\mathrm{e}^x\cos y$.

34. $\cos x\sinh y$.

在习题 35～36 中，通过猜测，求一个解析函数 f，使得给定函数是 f 的实部或虚部. 利用定理 3，确定给定函数的解析区域.

35. $\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

36. $\mathrm{e}^{2x}\cos(2y)$.

37. (a) 画出调和函数 $u(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ 的水平曲线.

(b)求并画出正交轨线.

38. (a)画出调和函数 $u(x, y)=\ln(x^2+y^2)$的水平曲线.

(b)求并画出正交轨线.

39. (a)对任意整数 n，证明：如果 $n\geqslant 0$，$u(r, \theta)=r^n\cos(n\theta)$和 $v(r, \theta)=r^n\sin(n\theta)$在$\mathbb{C}$上调和；如果 $n<0$，则在$\mathbb{C}\setminus\{0\}$上调和.

(b)求出 u 和 v 的调和共轭. [提示：考虑极坐标下的 $f(z)=z^n$.]

40. **调和函数的平移和伸缩**. 假设 u 是调和的，证明下面的函数也是调和的：

(a)$u(x-\alpha, y-\beta)$，其中 α 和 β 是实数.

(b)$u(\alpha x, \alpha y)$，其中 $\alpha\neq 0$ 是实数.

41. **不依赖于 y 的调和函数**. 假设 $u(x, y)$是调和函数，其值仅依赖于 x，而不依赖于 y. 利用拉普拉斯，证明：$u(x, y)=ax+b$，其中 a 和 b 是常数.

42. (a)利用习题 41，求解如图 15 中的无穷竖直带形区域内的狄利克雷问题.

(b)确定并画出等温线和热流的曲线.

43. 求解图 16 中的狄利克雷问题.

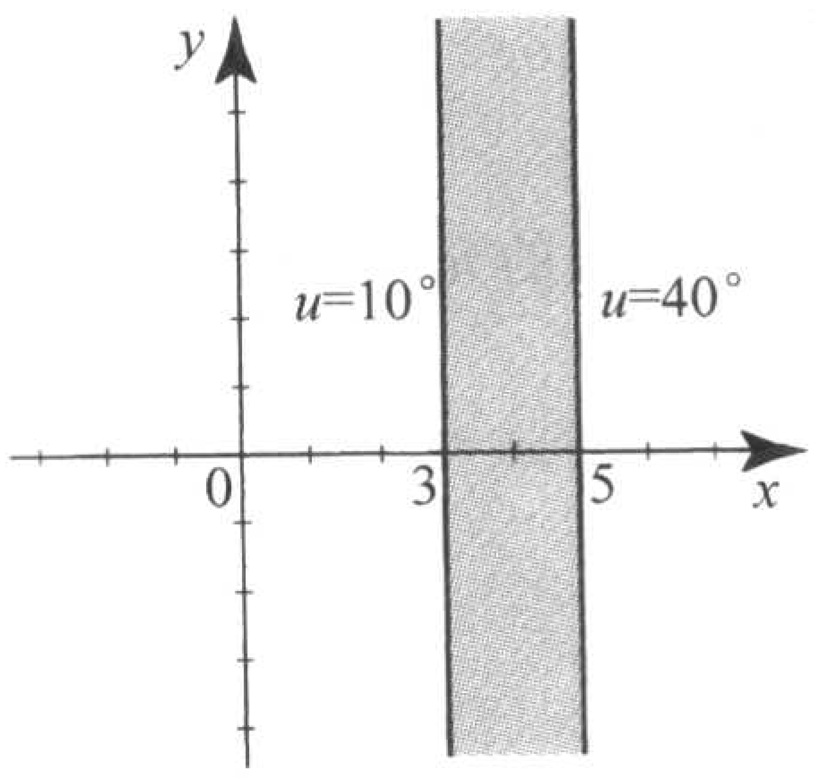


图 15　习题 42 的狄利克雷问题

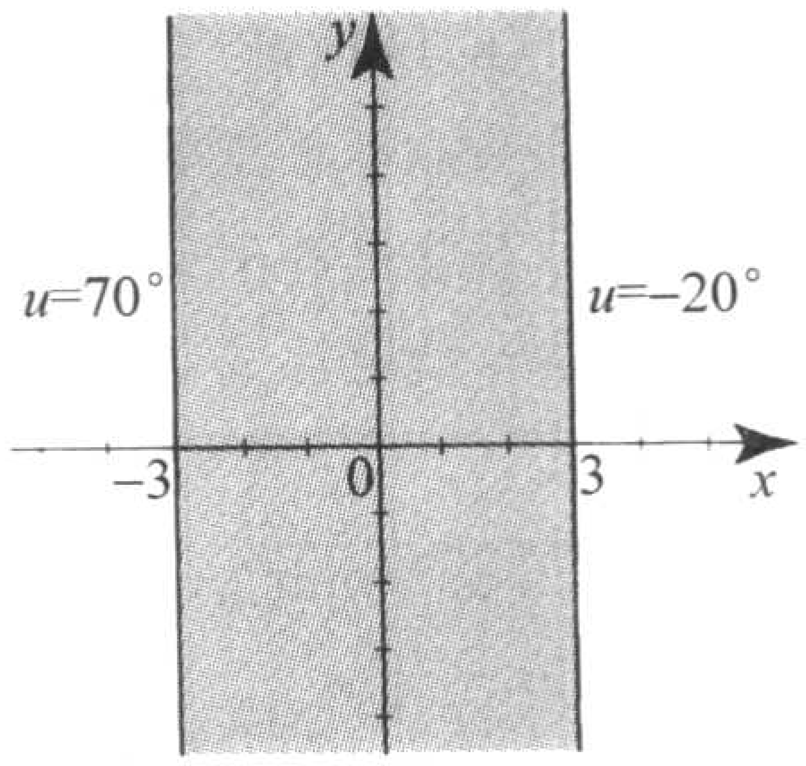


图 16　习题 43 的狄利克雷问题

44. 求解图 17 中的狄利克雷问题.

45. 求解图 18 中的狄利克雷问题.

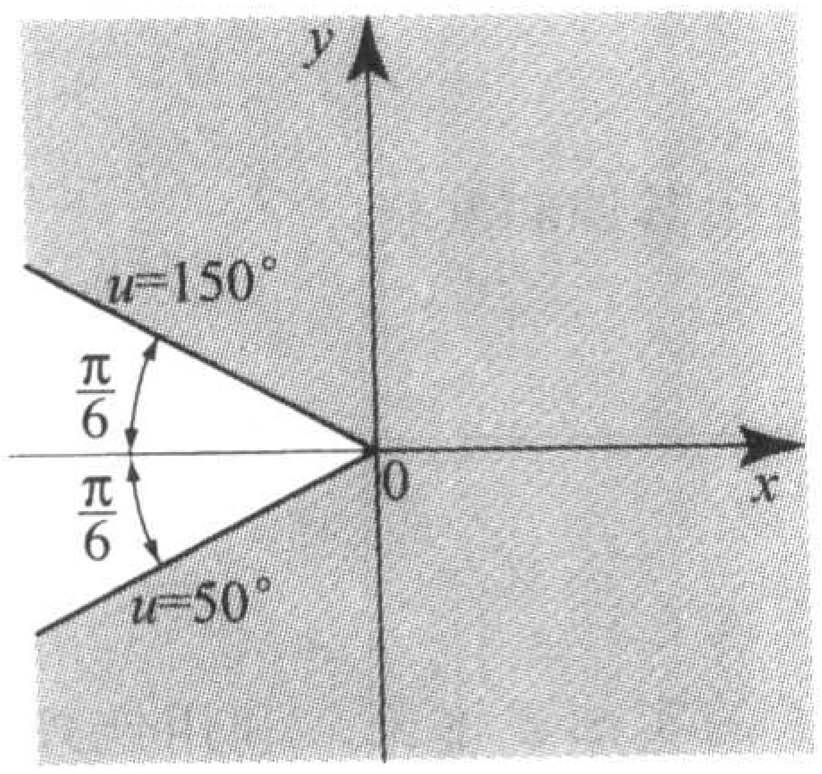


图 17　习题 44 的狄利克雷问题

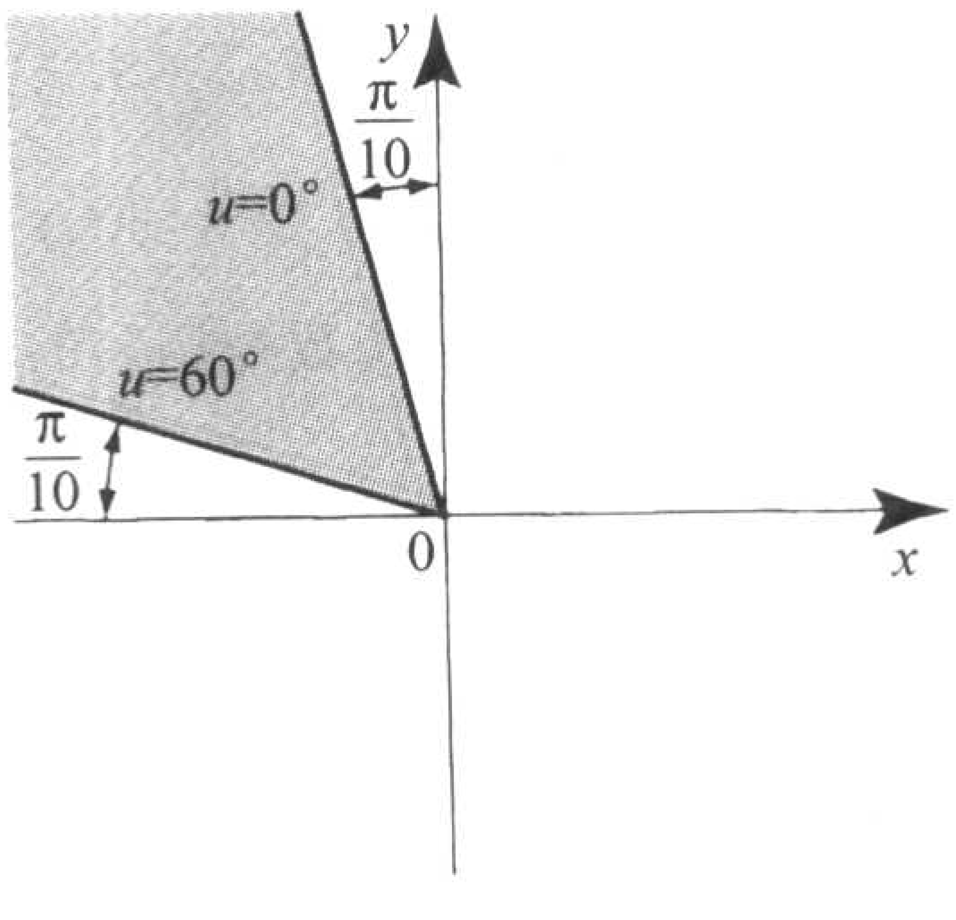


图 18　习题 45 的狄利克雷问题

660

46. 确定并画出习题 42 中等温线和热流的曲线.

47. 求解上半平面中的狄利克雷问题，在 x 轴上满足边界条件

$$u(x,0)=\begin{cases}T_1 & 若\ a<x<b,\\ T_2 & 其他,\end{cases}$$

其中 $a<b$ 是固定的实数.

48. **专题问题：两个不相交区间的调和测度**. 在本习题中，我们将推广例 5 的结果，求解上半平面中的狄利克雷问题，满足边界条件

$$u(x,0)=\begin{cases}T_1 & 若\ a<x<b,\\ T_2 & 若\ c<x<d,\\ 0 & 其他,\end{cases}$$

其中 $a<b\leqslant c<d$(图 19).

(a)试证：如果 u_1 是上半平面中的狄利克雷问题的解，满足边界条件

$$u_1(x,0)=\begin{cases}T_1 & 若\ a<x<b,\\ 0 & 其他,\end{cases}$$

而 u_2 是上半平面中的狄利克雷问题的解，满足边界条件

$$u_2(x,0)=\begin{cases}T_2 & 若\ c<x<d,\\ 0 & 其他,\end{cases}$$

则满足边界数据 $u(x,0)$ 上半平面内的狄利克雷问题的解是 $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$.

(b)试证：$u(x,y)=(T_1/\pi)\,\alpha_1(x,y)+(T_2/\pi)\,\alpha_2(x,y)$，其中 $\alpha_1(x,y)$ 和 $\alpha_2(x,y)$ 是在 (x,y) 点处、分别以区间 (a,b) 和 (c,d) 为对边的角.

49. (a)求解图 20 中的狄利克雷问题.

(b)画出等温线.

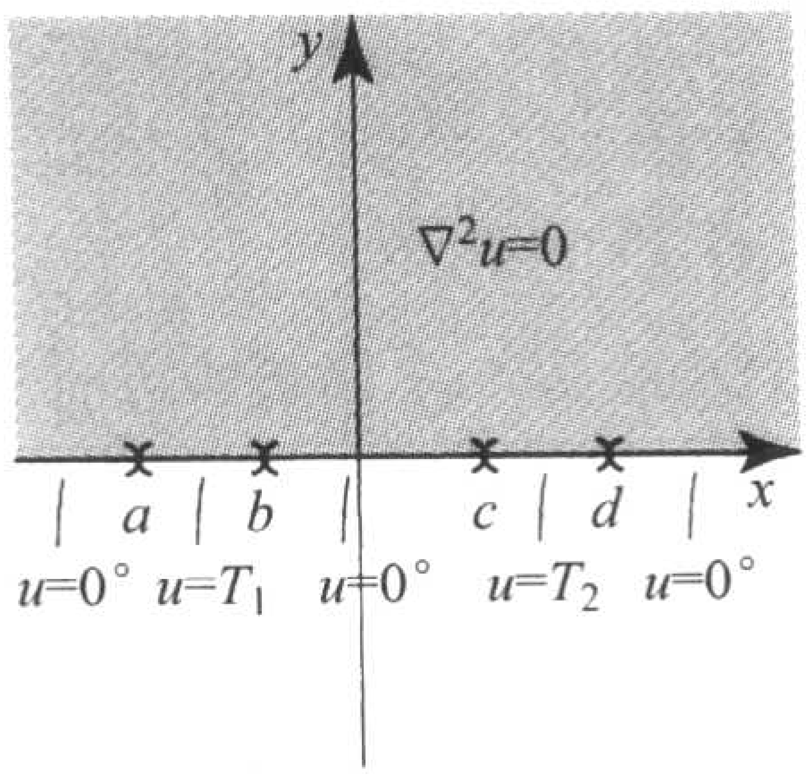


图 19　习题 48 的狄利克雷问题

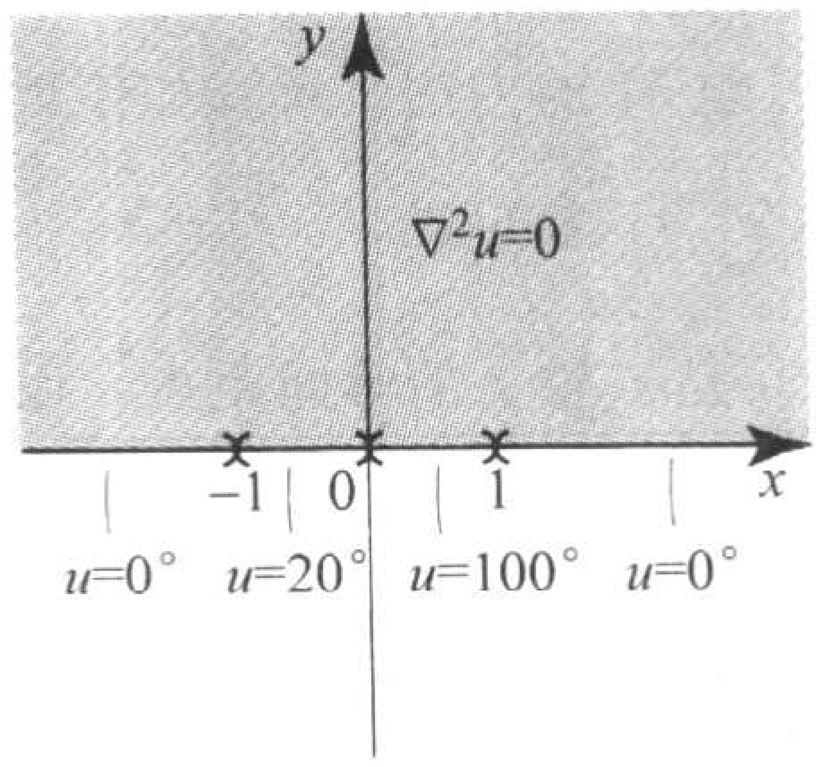


图 20　习题 49 的狄利克雷问题

50. **专题问题：数个不相交区间的调和测度**. 如下推广习题 48，假设 $I_1,I_2,\cdots,I_n$ 是 x 轴上互不相交的开区间，而 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 是实数. 考虑上半平面中的狄利克雷问题，满足边界条件

$$u(x,0)=\begin{cases}T_j & 若\ x\ 在\ I_j\ 内\\ 0 & 其他,\end{cases}$$

试证：解是

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}T_j\alpha_j(x,y),$$

其中 $\alpha_j(x,y)$ 是在 (x,y) 点处、以区间 I_j 为对边的角.

661

51. **专题问题：稳态解的逼近**. 考虑上半平面中的狄利克雷问题，边界条件为 $u(x,0)=f(x)(-\infty<x<\infty)$，

其中 $f(x)$是任意一个函数，表示 x 轴上点的温度．在本习题中，我们将说明如何利用习题50的结果来逼近对应于给定 $f(x)$的解．所采取方法的优点是，可以得到稳态温度的数值近似，更进一步，在习题52中，我们将用它来验证上半平面内的泊松积分公式．

为能够将我们所得到的数值近似与精确解比较，我们取 $f(x)=(1+x^2)^{-1}$，$-\infty<x<\infty$．此时，利用泊松积分的性质，我们有解

$$u(x,y)=\frac{1+y}{x^2+(1+y)^2} \tag{13}$$

(7.5节习题6)．

(a)假设我们不知道精确解，而求一个近似解．想法就是用在不相交区间上取常值的函数逼近 $f(x)$．取区间$(-5,5)$，再等分成40个等长度的小区间(x_j, x_{j+1})，其中 $j=1, 2, \cdots, 40$．如下近似 f：在(x_j, x_{j+1})取 $f(x_j)$，在区间$(-5, 5)$之外为零．因此，边界条件变为

$$u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x_j^2} & \text{若 } x_j<x<x_{j+1},\\ 0 & \text{其他,}\end{cases}$$

试证：解是

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{40}\frac{1}{1+x_j^2}\alpha_j(x,y),$$

其中 $\alpha_j(x, y)$是在(x, y)点处、以区间(x_j, x_{j+1})为对边的角．

(b)利用计算机，对上半平面中的不同点(x_0, y_0)，计算出近似解的值，与精确解(13)比较．

52. **专题问题：从调和测度到泊松积分公式**．考虑上半平面中的狄利克雷问题，边界条件为 $u(x, 0)=f(x)$，$(-\infty<x<\infty)$，其解由泊松积分公式

$$u(s,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{(s-x)^2+y^2}\mathrm{d}x,\quad -\infty<s<\infty,y>0 \tag{14}$$

给出．本习题的目的就是用习题51中的数值格式得出这个公式．

(a)基于习题51的方法，解释如何得到近似解

$$u_{\text{app}}(s,y)=\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}f(x_j)\alpha_j(s,y),$$

662

其中 x_j 是 x 轴上的等间距点，而 $\alpha_j(s, y)$是在(s, y)点处、以区间(x_j, x_{j+1})为对边的角．

(b)试证：

$$u_{\text{app}}(s,y)=\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}f(x_j)(\operatorname{Arg}(z-x_{j+1})-\operatorname{Arg}(z-x_j)),$$

其中 $z=s+\mathrm{i}y$．

(c)利用中值定理，证明：存在区间(x_j, x_{j+1})上的点 ξ_j，使得 $\operatorname{Arg}(z-x_{j+1})-\operatorname{Arg}(z-x_j)=\dfrac{y}{(s-\xi_j)^2+y^2}\Delta x$，其中 $\Delta x=x_{j+1}-x_j$．

(d)因此，近似解为

$$u_{\text{app}}(s,y)=\frac{y}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{f(x_j)}{(s-\xi_j)^2+y^2}\Delta x.$$

令 $\Delta x\to 0$，解释为何 $u_{\text{app}}(s, y)$将趋近于泊松积分(14)．[提示：将 $u_{\text{app}}(s, y)$解释为逼近泊松积分(14)的黎曼和．]

53. 完成例2(f)的细节，证明：$\operatorname{Log}z$ 在其分支分割之外解析，且其导数为$\dfrac{1}{z}$．

54. 证明：如果 v 是 u 的调和共轭，则 $-u$ 是 v 的调和共轭．[提示：如果 $f=u+\mathrm{i}v$ 解析，则对 $\mathrm{i}f$ 可以说什么?]

12.6 利用共形映射求解狄利克雷问题

在求解狄利克雷问题时，有时需要将区域变换到一个简单区域，或者变换后的问题容易求解. 这个思想的背后，就是我们要介绍的**共形映射法**. 考虑边界为 Γ 的区域 Ω 上给定的狄利克雷问题. 为求解这个问题，我们先通过一个映射 $w=f(z)$，将它变成 w 平面上的问题，其中 f 是 Ω 上的解析函数. 如果对 Ω 上所有的 z，$f'(z)\neq 0$，我们称 f 为 Ω 的**共形映射**. 这些映射保持曲线的夹角和定向不变，因而是共形的. 共形映射 f 的一个重要性质是，它将区域映成区域，即如果 Ω 是一个区域(连通开集)，则 $\Omega'=f[\Omega]$ 也是一个区域. 更重要的是，如果 f 是一对一的，则 f 将 Ω 的边界 Γ 映成 Ω' 的边界 Γ'. 虽然我们不去证明这些结果，但是在本节的例题中可以逐条验证. (证明参考[1].)

当我们将共形映射法应用到狄利克雷问题时，我们必须知道方程和边界条件发生什么变化. 因为 f 将边界映成边界，所以 Γ 上的边界条件将变换成 Γ' 上的边界条件，我们将在后面解释. 但是，这个方法最重要的特点是如下面定理所称述的，拉普拉斯方程在共形映射下保持不变.

663

定理 1(拉普拉斯方程的不变性) *假设 f 是解析函数，将一个区域 Ω 映成另一个区域 Ω'，U 是 Ω' 上的调和函数，则函数 $\phi=U\circ f$ 在 Ω 上调和. 因此，如果 U 在 Ω' 上满足 $\nabla^2U=0$，则 $\phi=U\circ f$ 在 Ω 上满足 $\nabla^2\phi=0$.*

为理解 $U\circ f(z)$ 的意义，其中 f 是复值函数，而 U 是一个二元函数，记 $U\circ f(z)=U(\mathrm{Re}f(z), \mathrm{Im}f(z))$. 比如，如果 $f(z)=e^z=e^x\cos y+ie^x\sin y$，以及 $U(s, t)=st$，则 $U\circ f(z)=e^{2x}\cos y\sin y$.

证明 令 z_0 是 Ω 内一点，$w_0=f(z_0)$. 由 12.5 节的定理 4，U 在围绕 w_0 的圆盘上有调和共轭 V，则 $U+iV$ 在这个圆盘上解析，而由解析函数的复合性质，$(U+iV)\circ f$ 在 z_0 点解析. 因此，12.5 节的定理 3，$\mathrm{Re}[(U+iV)\circ f]=\mathrm{Re}[U\circ f+i(V\circ f)]=U\circ f$ 在 z_0 点调和. 由于 z_0 点是任意的，所以 $U\circ f$ 在 Ω 上调和. ■

现在，假设希望运用共形映射 $w=f(z)$ 求解狄利克雷问题：在 Ω 内，$\nabla^2\phi=0$；在 Ω 的边界 Γ 上，$\phi(z)=b(z)$. 假设 f 在 Ω 及其边界 Γ 上是一对一的. 下面说明如何运用这个方法(在读下面的步骤时参考图 1).

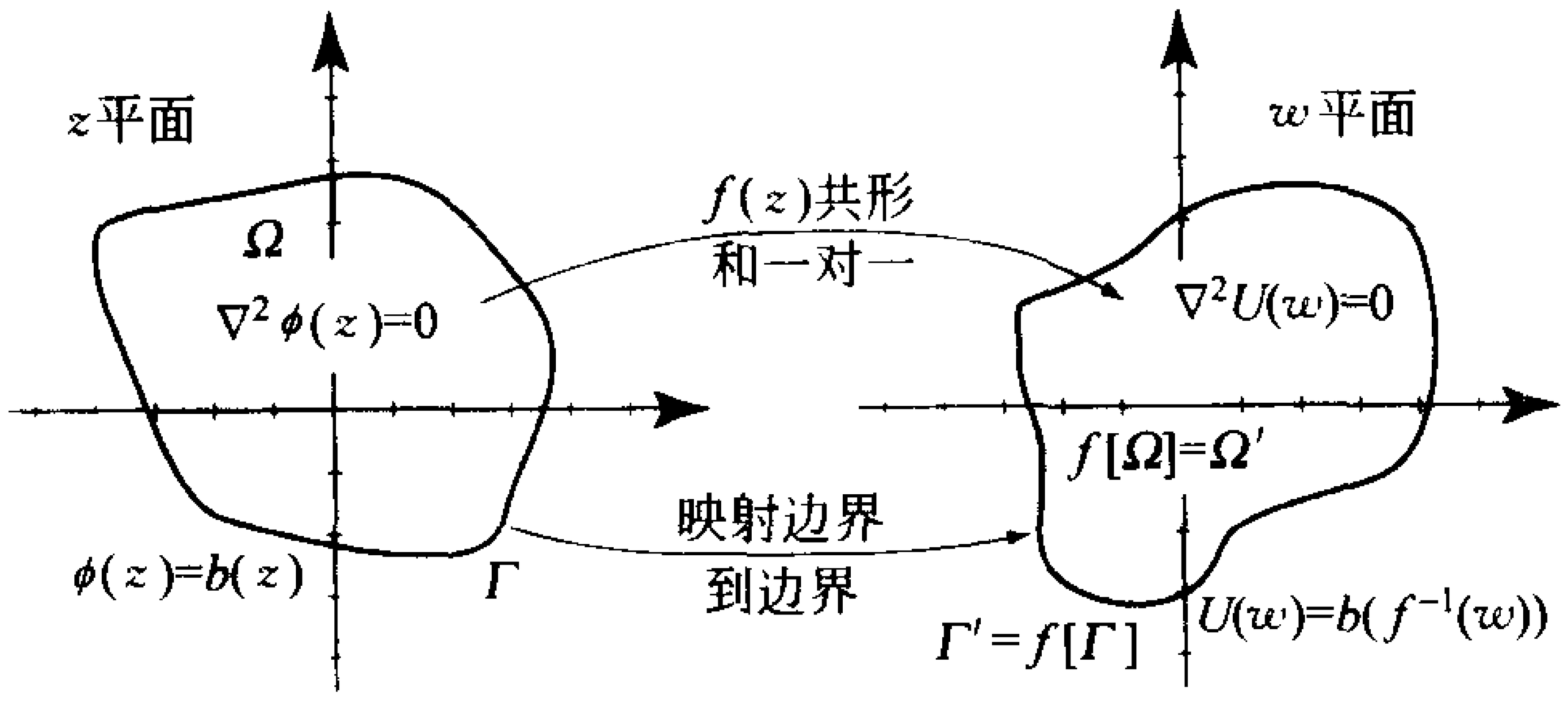


图 1 如果 f 在 Ω 及其边界 Γ 上是解析的、一对一的，则 $\Omega'=f(\Omega)$ 是具有边界 $\Gamma'=f[\Gamma]$ 的区域. (z 在 Γ 上)边界函数 $b(z)$ 用来定义边界函数：对 Γ' 上所有的 w 有 $b\circ f^{-1}(w)$，其中 f^{-1} 是 f 的逆

第 1 步：在 w 平面内，描述清楚区域 $\Omega'=f(\Omega)$ 及其边界 $\Gamma'=f(\Gamma)$.

第 2 步：由于 f 是一对一的，所以在 Ω' 和 Γ' 上我们有反函数 f^{-1}. 对 Γ' 上的 w，$f^{-1}(w)$ 在 Γ 上，所以函数 $b\circ f^{-1}(w)$ 对 Γ' 上所有的 w 都有定义. 这就确定了 Γ' 上边界值.

第 3 步：建立并求解 Ω' 上由拉普拉斯方程构造的狄利克雷问题：对 Ω' 内所有的 w，$\nabla^2 U(w)=0$；而对 Γ' 上所有的 w，$U(w)=b\circ f^{-1}(w)$.（这是变换后的狄利克雷问题.）

第 4 步：对 Ω 内的 z，令 $\phi(z)=U\circ f(z)$，则 $\phi(z)$ 是在 Ω 上原来狄利克雷问题的解. 事实上，由定理 1，ϕ 在 Ω 上调和. 对 Γ 上的 z，$f(z)$ 包含在 Γ' 上，并且 $\phi(z)=U\circ f(z)=b\circ f^{-1}(f(z))=b(z)$. 因此，$\phi$ 满足所需的边界条件.

下面，我们以几个例题来说明共形映射法，我们将给出共形映射，主要关注求解的细节. 准确地构造共形映射本身就是一个极具挑战的问题. 同样，在例 1～3 中，第二、三步不需计算 f^{-1} 的具体形式.

664

在第一个例题中，我们用解析映射 $f(z)=z^2$. 由于对一个复数求平方，其辐角加倍，所以不难验证 $f(z)$ 将第一象限 Ω 映成上半平面 Ω'. 它在第一象限中是一一的.

例 1　共形映射法

求解如图 2 所示的第一象限中的狄利克雷问题.

解　利用共形映射法，我们将给定的问题变换成上半平面上的问题. 正如我们即将看到的，变换后的问题更容易求解.

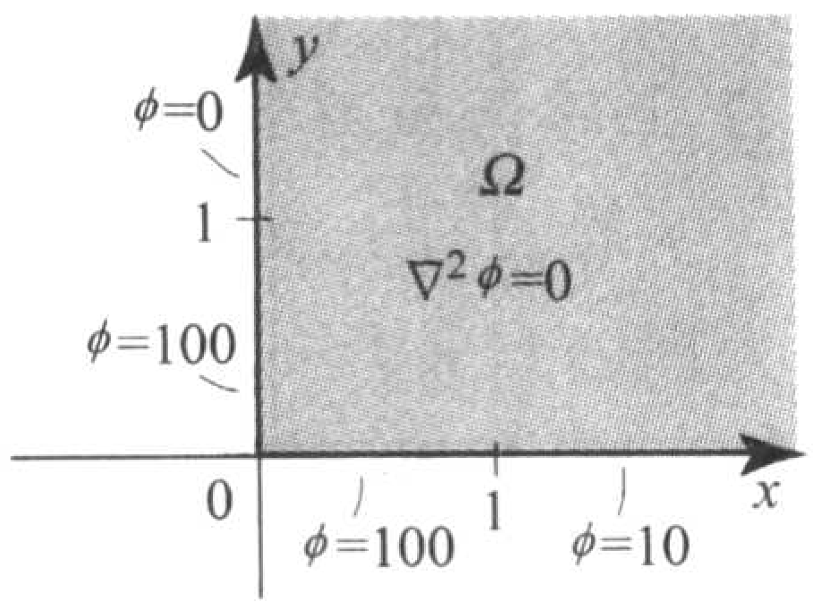


图 2　例 1 中的狄利克雷问题

第 1 步：正如刚才讨论的，$f(z)=z^2$ 将 z 平面中的 Ω 映成 w 平面的上半平面(图 3). 更进一步，Ω 的边界如下映成上半平面的边界：非负实线($x\geqslant 0$)映成非负实线($u\geqslant 0$)，半虚轴 iy，$y\geqslant 0$ 映成非正实线($x\leqslant 0$).

第 2 步：描述 w 平面内狄利克雷问题的边界条件. w 平面内的边界函数是 $b\circ f^{-1}(w)$，其中 $b(z)$ 是 z 平面内的边界函数. 利用图 3，我们知道：如果 $|u|>1$，$b\circ f^{-1}((u,0))=0$，而如果 $|u|<1$，$b\circ f^{-1}((u,0))=100$.

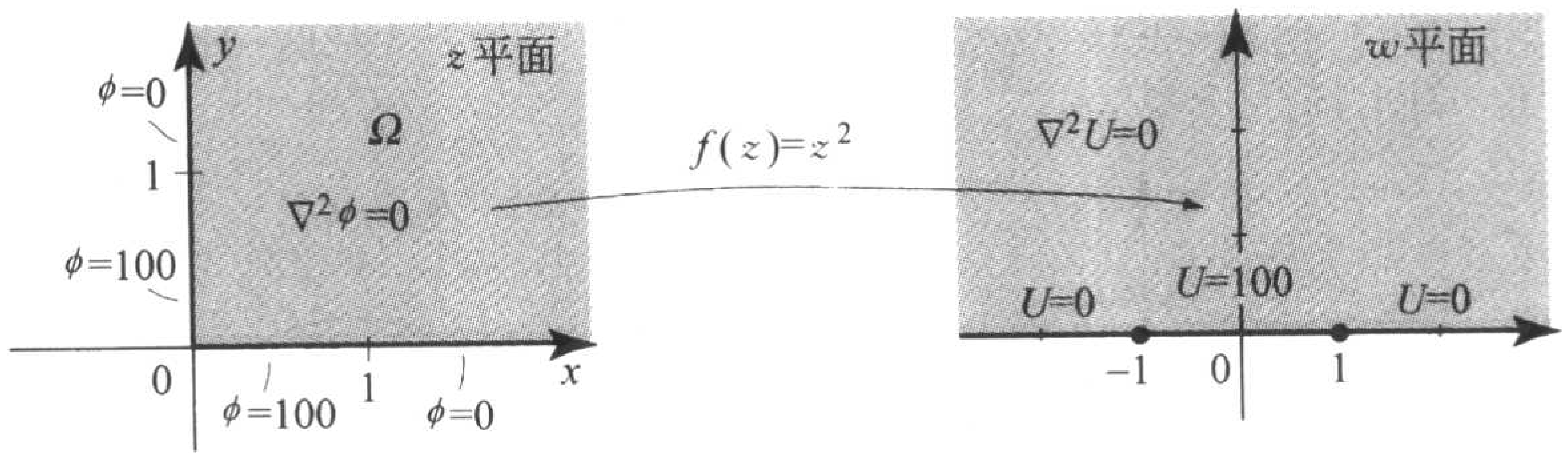


图 3　将第一象限内的狄利克雷问题变成上半平面上的，注意边界的对应情况

第 3 步：如图 3 所示，上半平面中变换后的狄利克雷问题为

$$\nabla^2 U(w)=0,w\text{ 在上半平面内}$$

$$U(u,0)=0,\ |u|>1,\quad U(u,0)=100,\ |u|<1.$$

为求解 w 平面中的这个边值问题，我们利用12.5节的例5，我们有 $U(w)=\frac{100}{\pi}(\mathrm{Arg}(w-1)-\mathrm{Arg}(w+1))$.

第4步： z 平面中原来的狄利克雷问题的解是 $\phi(z)=U(f(z))=\frac{100}{\pi}(\mathrm{Arg}(z^2-1)-\mathrm{Arg}(z^2+1))$. 用 x 和 y 来表达，我们有 $z^2-1=x^2-y^2-1+2ixy$，以及 $z^2+1=x^2-y^2+1+2ixy$. 由于 z^2-1 和 z^2+1 的虚部是正的，如前一节，我们利用反余切，得到

$$\begin{aligned}\phi(x,y)&=\frac{100}{\pi}[\mathrm{Arg}(x^2-y^2-1+2ixy)-\mathrm{Arg}(x^2-y^2+1+2ixy)]\\&=\frac{100}{\pi}\left[\cot^{-1}\left(\frac{x^2-y^2-1}{2xy}\right)-\cot^{-1}\left(\frac{x^2-y^2+1}{2xy}\right)\right].\end{aligned}$$

665

让我们来快速验证一些边界条件. 如果 $0<x<1$，$y\to0^+$，则 $\frac{x^2-y^2-1}{2xy}\to-\infty$ 和 $\frac{x^2-y^2+1}{2xy}\to+\infty$. 因此，

$$\lim_{y\to0^+}\left[\cot^{-1}\left(\frac{x^2-y^2-1}{2xy}\right)-\cot^{-1}\left(\frac{x^2-y^2+1}{2xy}\right)\right]=\pi-0=\pi,$$

从而，如果 $0<x<1$，$\lim\limits_{y\to0^+}\phi(x,y)=100$，这与边界条件一致. 另外一个边界值的验证类似可得. ■

下一个例子中，我们利用解析函数 $f(z)=e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$，其中 $z=x+iy$ 包含在如图4所示的水平带 Ω 内. 如果 $z=x$ 是实的，则 $f(z)=e^x$，因此，f 将实线映成 w 平面中的正实轴 $u>0$. 如果 $z=x+i\pi$，则 $f(z)=e^{x+i\pi}=e^x e^{i\pi}=-e^x$，因此，$f$ 将水平线 $y=\pi$ 映成 w 平面中的负实轴 $u<0$. 可以验证，对 Ω 内的 z，$f(z)$ 在上半平面中，并且 $f[\Omega]$ 等于上半平面.

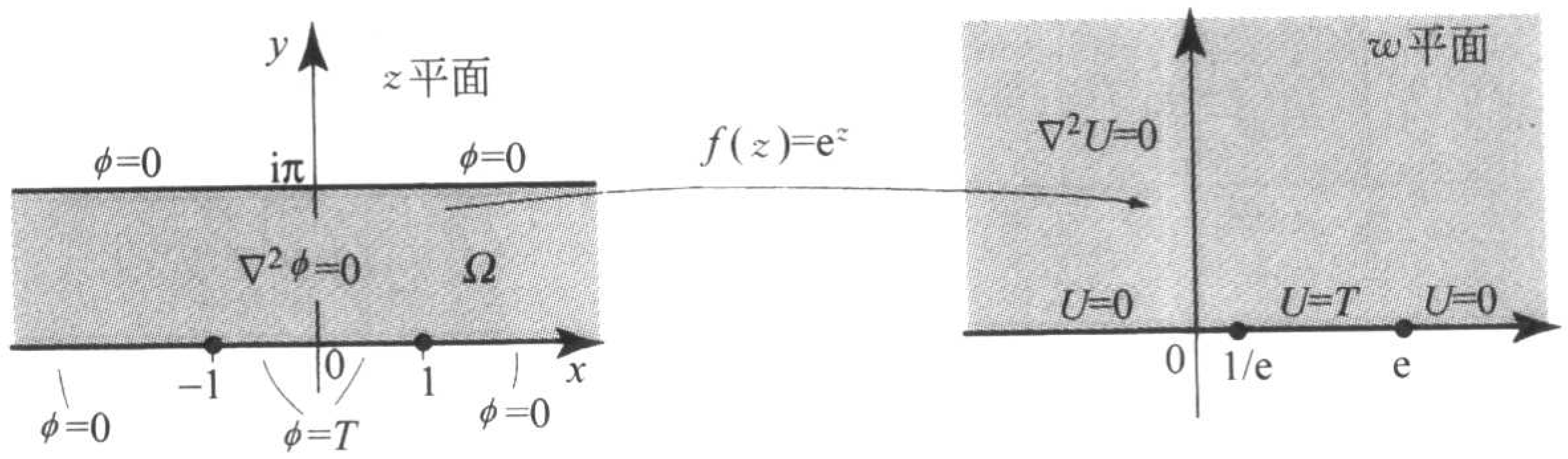


图4 $f(z)=e^z$ 将水平带映射到上半平面上. 一些特殊值为：$f(-1)=1/e$，$f(1)=e$，$f(i\pi)=-1$，$f(x)>0$，$f(x+i\pi)<0$

例2 指数函数作为共形映射

求解如图4所示的水平带 Ω 上的狄利克雷问题.

解 我们按照共形映射法的四个步骤来做.

第1步： 我们已经验证了，$f(z)=e^z$ 将 z 平面中的 Ω 变成 w 平面上的上半平面，并将 Ω 的边界变换成上半平面的边界.

第2步： 仔细考察 f 在边界上的效应，我们知道 f 将 x 轴上的区间 $[-1,1]$ 映成 w 平面

中 u 轴上的区间 $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]$. 因此，区域 Ω' 上问题的边界值为：如果 u 在 $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]$内，$U((u, 0))=T$；否则，$U((u, 0))=0$.

第 3 步： 求解变换后的边值问题，我们利用 12.5 节例 5，得到

$$U(w)=\frac{T}{\pi}\left[\operatorname{Arg}(w-\mathrm{e})-\operatorname{Arg}\left(w-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right].$$

第 4 步： z 平面上原来狄利克雷问题的解是 $\phi(x, y)=U(f(z))=\frac{T}{\pi}\left[\operatorname{Arg}(\mathrm{e}^z-\mathrm{e})-\right.$

666 $\left.\operatorname{Arg}\left(\mathrm{e}^z-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right]$. 利用反余切函数和 e^z 的显式公式，我们得到

$$\begin{aligned}
\phi(x,y)&=\frac{T}{\pi}\left[\operatorname{Arg}(\mathrm{e}^x\cos y-\mathrm{e}+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y)-\operatorname{Arg}\left(\mathrm{e}^x\cos y-\frac{1}{\mathrm{e}}+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y\right)\right]\\
&=\frac{T}{\pi}\left[\cot^{-1}\left(\frac{\mathrm{e}^x\cos y-\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x\sin y}\right)-\cot^{-1}\left(\frac{\mathrm{e}^x\cos y-\frac{1}{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^x\sin y}\right)\right]\\
&=\frac{T}{\pi}\left[\cot^{-1}\left(\frac{\cos y-\mathrm{e}^{1-x}}{\sin y}\right)-\cot^{-1}\left(\frac{\cos y-\mathrm{e}^{-(x+1)}}{\sin y}\right)\right].
\end{aligned}$$

对这个解，可以直接验证边界条件. ■

下个例题，我们利用函数 $f(z)=\sin z$.

例 3 正弦函数作为共形映射

求解如图 5 所示的半无限带 Ω 内的狄利克雷问题.

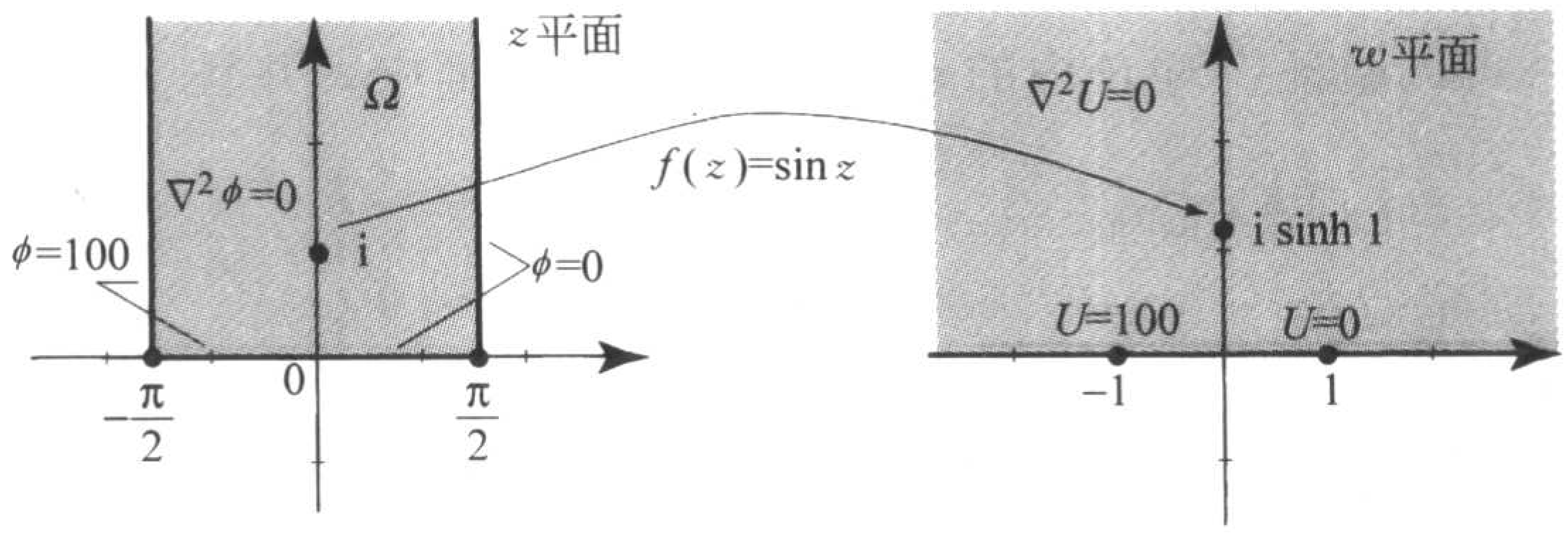


图 5 将半无限垂直带变成上半平面，注意边界的对应情况

解 我们利用解析函数 $f(z)=\sin z$.

第 1 步： 为确定 Ω 的像，我们利用事实：$\sin z$ 是 Ω 上的一对一共形映射(验证这些性质). 我们将说明，f 将 Ω 的边界映成 w 平面中的实轴. 这蕴涵着，Ω 的像或者是上半平面或者是下半平面. 我们通过验证 Ω 内一点的像，来确定 Ω 的像到底是哪半个平面.

首先，我们确定 Ω 边界的像. x 轴上的直线段 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$被映成 w 平面内的直线段 $[-1, 1]$，因为，区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$在 $\sin x$ 下的像是区间$[-1, 1]$. 我们断言：半垂直直线 $x=\frac{\pi}{2}$，$y\geqslant 0$ 被映成 w 平面内的半直线$[1, \infty)$. 为看清这点，利用

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

(12.5 节例 1(d))，则当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin z=\cosh y$. 当 y 在 $(0,\infty)$ 上变化时，$\cosh y$ 在区间 $(1,\infty)$ 上变化，这就建立了我们的断言. 类似地，我们可以验证 $\sin z$ 将半垂直直线 $x=-\frac{\pi}{2}$，$y\geqslant 0$ 映成 w 平面内的半直线 $(-\infty,-1]$. 总之，$\sin z$ 将 Ω 的边界映成 w 平面中的实线. 现在，在 Ω 内取一点，比如说 $z=i$，我们有 $f(i)=\sin i=i\sinh 1$，它是 w 平面上半平面内的点. 因此，f 将 Ω 映成上半平面.

第 2 步： 由刚才叙述的边界对应情况，我们推导 w 平面上半平面内狄利克雷问题的边界值如下：

$$U(u,0)=\begin{cases}0 & \text{如果 } u>0, \\ 100 & \text{如果 } u<0.\end{cases}$$

第 3 步： 变换后的上半平面内狄利克雷问题如图 5 所示. 利用辐角函数立刻可以推导出解，我们有 $U(w)=\frac{100}{\pi}\mathrm{Arg}w$，因为如果 w 是正实数，则 $\mathrm{Arg}w=0$；而如果 w 是负实数，则 $\mathrm{Arg}w=\pi$.

667

第 4 步： z 平面上原来狄利克雷问题的解是 $\phi(z)=U(f(z))=\frac{100}{\pi}\mathrm{Arg}(\sin z)$. 为将答案用 x 和 y 来表达，我们利用 $\sin z$ 的实部和虚部，以及反余切函数，我们有

$$\mathrm{Arg}(\sin z)=\cot^{-1}\left(\frac{\sin x\cosh y}{\cos x\sinh y}\right)=\cot^{-1}(\tan x\coth y).$$

因此，

$$\phi(z)=\phi(x,y)=\frac{100}{\pi}\cot^{-1}(\tan x\coth y).$$

在图 6 中，我们画出等温线和热流曲线.（关于热流曲线方程，参考习题 38.）得到一些几何观察，注意到图 6 上部的等温线看起来像是垂直线. 这是可以预料的，因为下边界很远，可以忽略不计，我们可以将问题看成两端都是无界的竖直带上的问题，它的等温线就是垂直直线. 在原点附近，等温线像射线，而热流曲线像圆. 这是在射线上边界值为常数的狄利克雷问题的等温线和热流曲线. 这也是可以预料的，因为在原点附近，垂直边界数据的效应相比于 x 轴上的边界数据而言是很小的. 因此，在原点附近，忽略垂直边界值，而只考虑水平边界值，它在射线上为常数，因而，等温线和热流曲线是圆弧(12.5 节例 7). ■

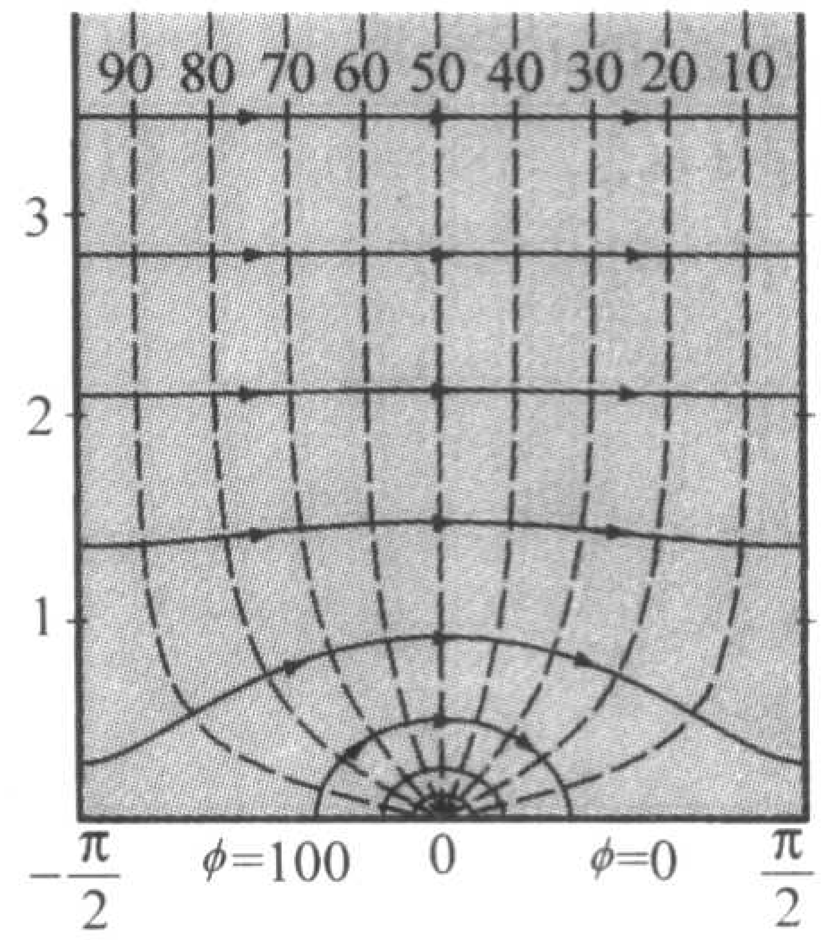


图 6 等温线和热流曲线

下面的例题处理的是一个圆环区域，由分别以 $0\leqslant\alpha_1$ 和 $\alpha_2\leqslant\pi$ 为角的射线以及分别以 a 和 b 为半径的圆弧界定，如图 7 所示. 利用函数 $f(z)=\mathrm{Log}z$，这个区域可以映成 w 平面上的矩形. 为说明这点，考虑以 α 为角度的射线上的线段 L，其中 $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$. 对射线上点 z，我们有

$\mathrm{Arg}z=\alpha$，因而 $\mathrm{Log}z=\ln|z|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}z=\ln|z|+\mathrm{i}\alpha$. 当 $|z|$ 从 a 到 b 变化时，$\ln|z|$ 从 $\ln a$ 到 $\ln b$ 变化，因此，$\mathrm{Log}z$ 描述的是水平直线段 $u+\mathrm{i}\alpha$，其中 $\ln a\leqslant u\leqslant \ln b$. 当 α 从 α_1 到 α_2 变化时，线段 L 的像扫遍顶点为 $(\ln a, \alpha_1)$，$(\ln b, \alpha_1)$，$(\ln a, \alpha_2)$ 和 $(\ln a, \alpha_2)$ 的矩形面积，如图 7 所示.

668

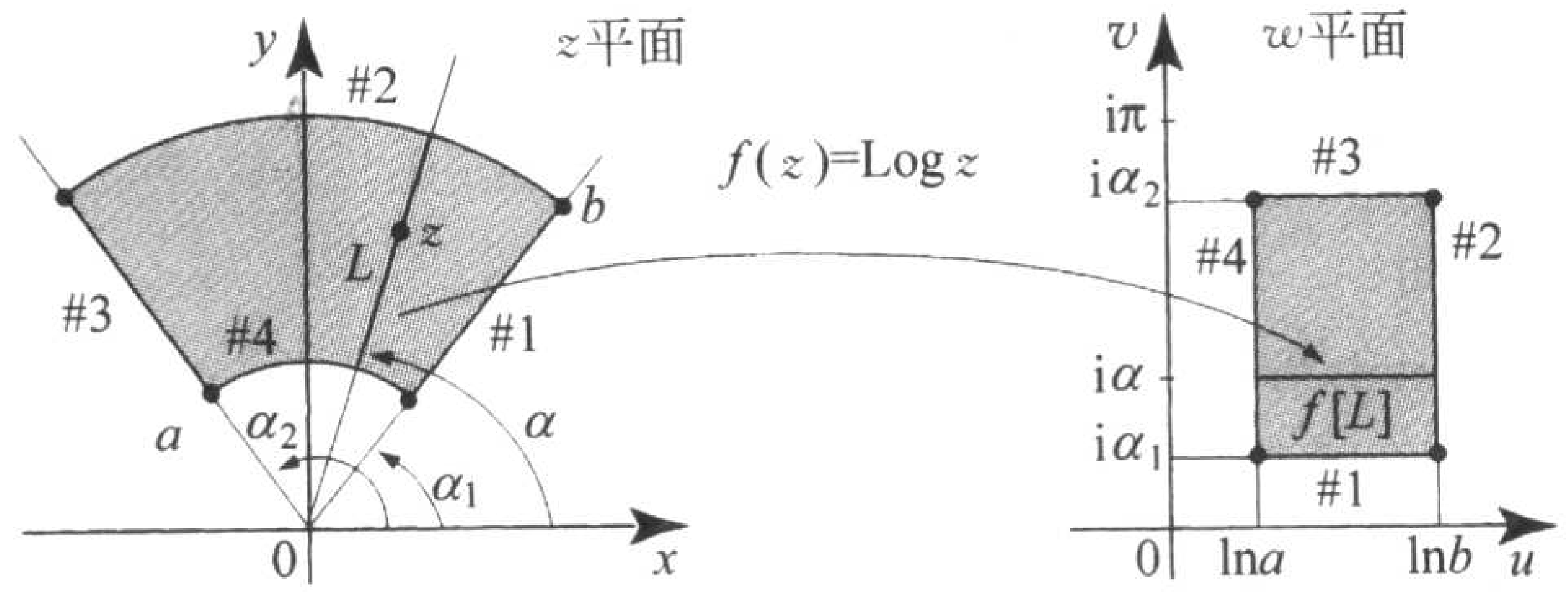


图 7 Logz 是一对一共形映射，将圆环区域映成一个矩形. 圆环的边界以下面的方式被映成矩形的边界：定义域中的第 j 条边被映成值域的第 j 条边

映射 $\mathrm{Log}z$ 使我们可以将圆环区域上的问题变成矩形上的问题，后者可以用分离变量法求解(3.8 节).

例 4 Logz 作为共形映射，分离变量

求解如图 8 所示的圆环区域中的狄利克雷问题.（注意在圆弧边界上，边界函数不是常数：它等于 $\mathrm{Log}z$.）

解 第 1 步： 正如刚才所解释的，映射 $f(z)=\mathrm{Log}z$ 将 z 平面上 Ω 映成 w 平面上的矩形，如图 8 所示，图 8 描述了边界的对应情况.

第 2 步： 如前面的例题，在第 1、3 条边上的边值是常数. 它们分别等于 0 和 π. 为确定第 2、4 条边上的边界值，我们利用事实：w 平面上的边界函数是 $b\circ f^{-1}(w)$，其中 $b(z)$ 是 z 平面中的边界函数. 逆映射是 $f^{-1}(w)=\mathrm{e}^{w}$. 对第 2 条边上的 w，记 $w=2+\mathrm{i}v$，其中 $0\leqslant v\leqslant\pi$，则在 w 处的边界值由 $\mathrm{Arg}(\mathrm{e}^{w})=\mathrm{Arg}(\mathrm{e}^{2+\mathrm{i}v})=\mathrm{Arg}(\mathrm{e}^{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}v})=v$ 给定. 因此，在第 2 条边上的边界函数是 $U(2, v)=v$. 类似地，可以证明 $U(1, v)=v$. 因此，变换后问题的边界函数如图 8 所示.

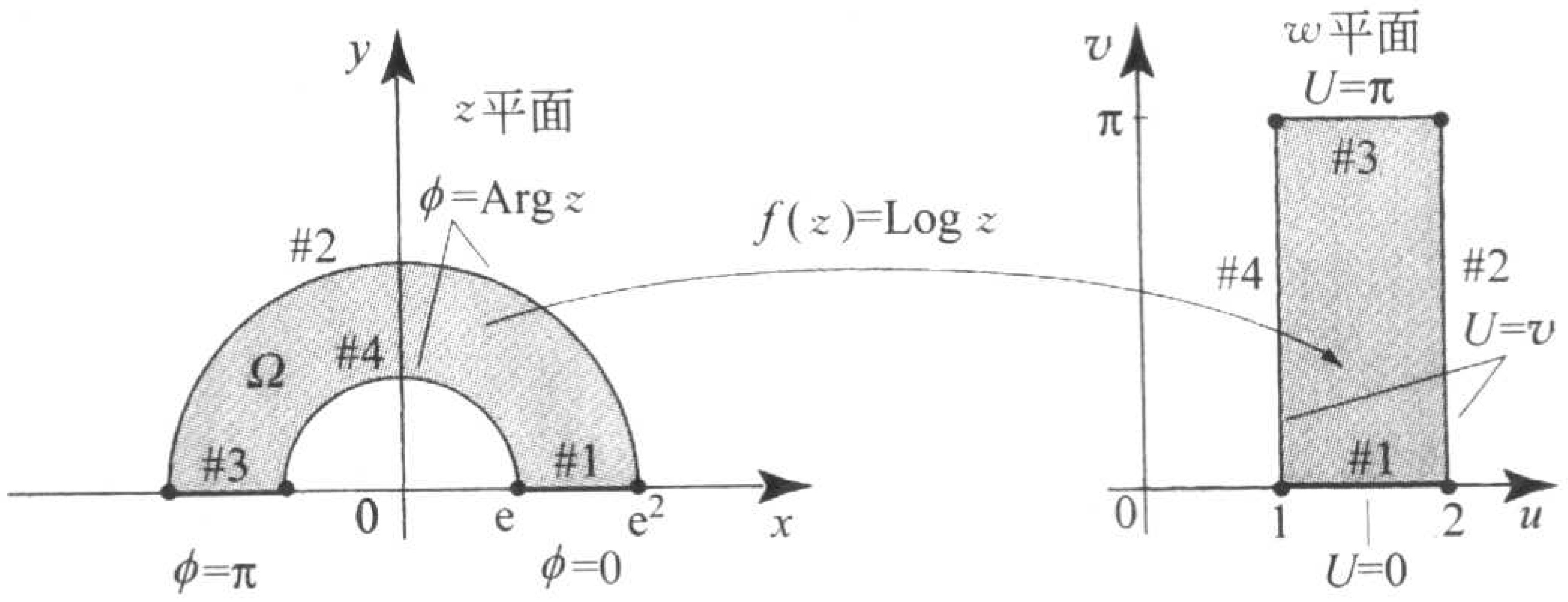


图 8 这个圆环区域是图 7 中的圆环区域特殊情形，$a=\mathrm{e}$，$b=\mathrm{e}^2$，$\alpha_1=0$，$\alpha_2=\pi$

第 3 步： 矩形中变换后的狄利克雷问题如图 8 所示. 为简化公式，我们用变量 s 和 t 代替

669

u 和 v：

$$\nabla^2 U(s,t) = 0, 1 \leqslant s \leqslant 2, 0 \leqslant t \leqslant \pi;$$
$$U(s,0) = 0,\quad U(s,\pi) = \pi, 1 < s < 2;$$
$$U(1,t) = t,\quad U(2,t) = t, 0 < t < \pi.$$

为求解 w 平面中的边值问题，我们利用分离变量法(3.8 节). 相应于第 2、3、4 条边上的非零边值，解有三个非零部分. 进一步地，为利用 3.8 节的结果，我们必须将矩形的左下顶点放在原点，将矩形向左平移单位长度即可. 记住这点，我们应用 3.8 节(9)式(取 $a=1$，$b=\pi$)，令 $s=x+1$ 或 $x=s-1$，则

$$U(s,t) = \sum_{n=1} B_n \sin[n\pi(s-1)]\sinh n\pi t + \sum_{n=1} C_n \sinh[n(2-s)]\sin nt + \sum_{n=1} D_n \sinh[n(s-1)]\sin nt,$$

其中

$$B_n = \frac{2}{\sinh(n\pi^2)}\int_0^1 \pi \sin n\pi s \mathrm{d}s,$$
$$C_n = D_n = \frac{2}{\pi \sinh n}\int_0^\pi t \sin nt \mathrm{d}t.$$

计算积分，我们得到

$$B_n = \frac{2}{n\sinh(n\pi^2)}(1-\cos n\pi),$$
$$C_n = D_n = \frac{-2}{n\sinh n}\cos n\pi = \frac{2}{n\sinh n}(-1)^{n+1}.$$

因此，

$$U(s,t) = \sum_{n=1} \frac{2}{n\sinh(n\pi^2)}(1-\cos n\pi)\sin[n\pi(s-1)]\sinh n\pi t + \sum_{n=1} \frac{2}{n\sinh n}(-1)^{n+1}\sinh[n(2-s)]\sin nt + \sum_{n=1} \frac{2}{n\sinh n}(-1)^{n+1}\sinh[n(s-1)]\sin nt.$$

第 4 步： z 平面中原来狄利克雷问题的解是

$$\phi(x,y) = \phi(z) = U(f(z)) = U(\ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z) = U\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right), \cot^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)\Big).$$

670

所以，

$$\phi(x,y) = \sum_{n=1} \frac{2(1-\cos n\pi)}{n\sinh(n\pi^2)}\sin\left[n\pi\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)-1\right)\Big]\sinh\left[n\pi\cot^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)\right] + \sum_{n=1} \frac{2}{n\sinh n}(-1)^{n+1}\sinh\left[n(2-\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]\sin\left[n\cot^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)\right] + \sum_{n=1} \frac{2}{n\sinh n}(-1)^{n+1}\sinh\left[n\left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)-1\right)\right]\sin\left[n\cot^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)\right].$$

验证这个解的边界条件是道很好的习题. ■

正如前面提到过，也如本节例题所示，构造共形映射可能是项极具挑战性的问题. 更多的

例子将在习题以及下节中介绍.

习题 12.6

在习题 1～4 中，已知解析函数 $f(z)$是从 xy 平面到 uv 平面的，调和函数 $U(u, v)$是定义在 f 的值域上的.

(a)验证：f 是解析的，U 是调和的.

(b)求出 $f(z)$的实部和虚部，记 $f(z)=u(x, y)+\mathrm{i}v(x, y)$.

(c)令 $\phi(x, y)=U\circ f(z)$，用 x 和 y 显式地计算 ϕ，并解释为何 ϕ 是调和的.

1. $f(z)=\dfrac{1}{z}$；$U(u, v)=uv$.

2. $f(z)=\dfrac{1}{z}$；$U(u, v)=\mathrm{e}^u\cos v$.

3. $f(z)=\mathrm{e}^z$；$U(u, v)=u^2-v^2$.

4. $f(z)=z^2$；$U(u, v)=\ln(u^2+v^2)$.

5. 参考例 2 中的映射 $f(z)=\mathrm{e}^z$，令 $S=\{x+\mathrm{i}y: x=a, b\leqslant y\leqslant c\}$是 xy 平面中的垂直直线.

   (a)试证：$f[S]$是 uv 平面中半径为 e^a 的圆弧.

   (b)对 $a=1$，$b=0$，而 c 分别为$\dfrac{\pi}{2}$和 π 的两种情形，画出 S 和 $f[S]$的图像.

6. 参考例 3 中的映射 $f(z)=\sin z$，令

$$S=\left\{x+\mathrm{i}y: -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}, y=y_0>0\right\}$$

   是 xy 平面内区域 Ω 中的水平直线段(图 5).

   (a)试证：$f[S]$是 uv 平面中的上半椭圆，与 u 轴交于$\pm\cosh y_0$，与 v 轴交于$\pm\sinh y_0$.

   (b)对 $y_0=1$ 和 $y_0=0.1$ 两种情形，画出 S 和 $f[S]$的图像.

   (c)当 y_0 从 0 变到∞时，$f[S]$扫过 w 平面内的哪个区域？

7. 验证例 3 中的解的边界条件.

8. 验证例 4 中的解的边界条件.

671

在习题 9～20 中(图 9～图 20)，按照本节的四个步骤求解区域 Ω 上的狄利克雷问题，边值给定. 清晰地描述 w 平面中的边值函数. 在习题 17～20 中，利用实线上的泊松积分公式，求解 w 平面中的狄利克雷问题.

9.

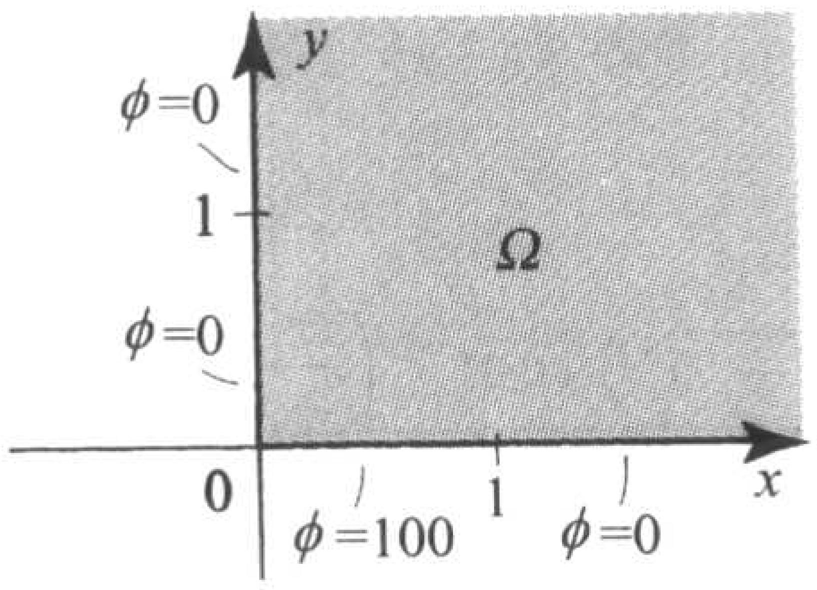


图 9

10.

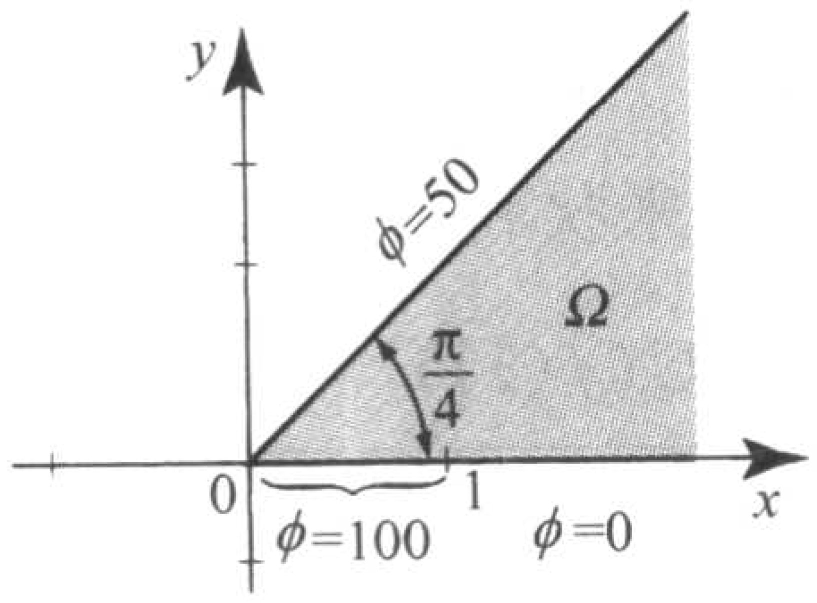


图 10

11.

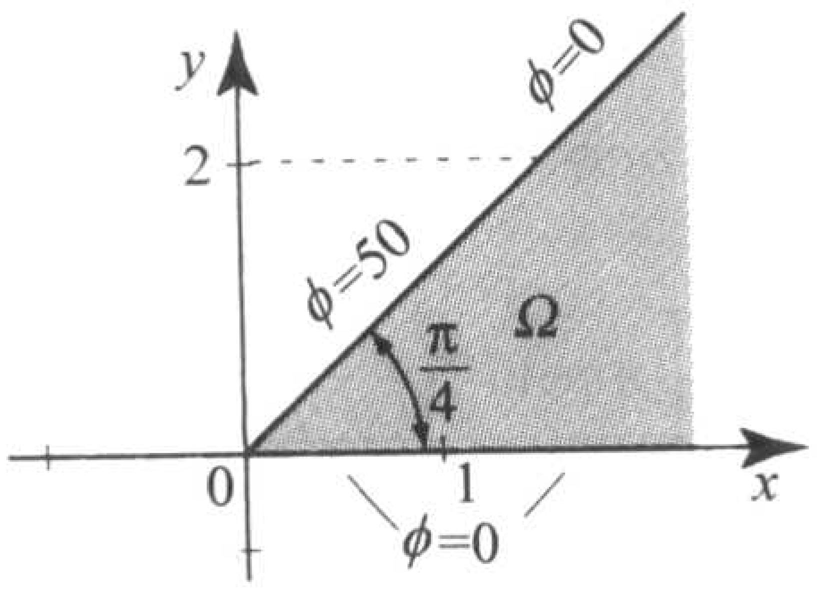


图 11

12.

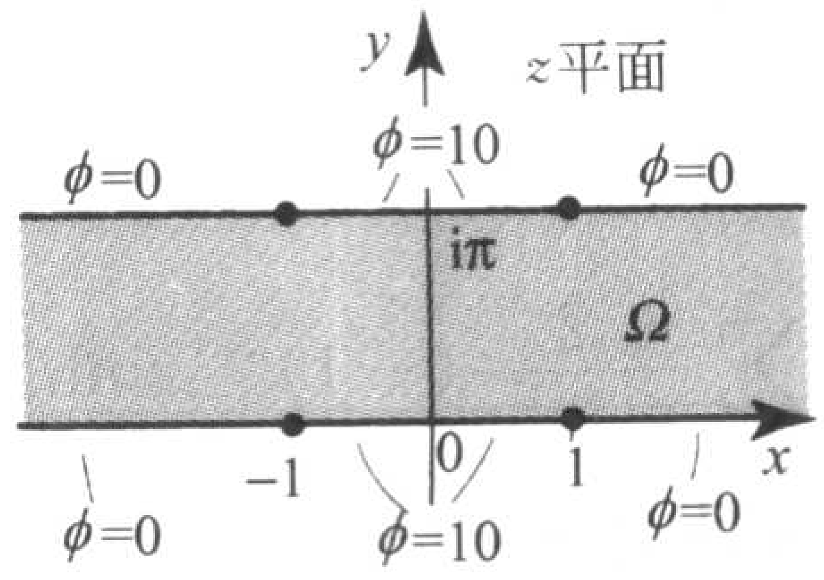


图 12

13.

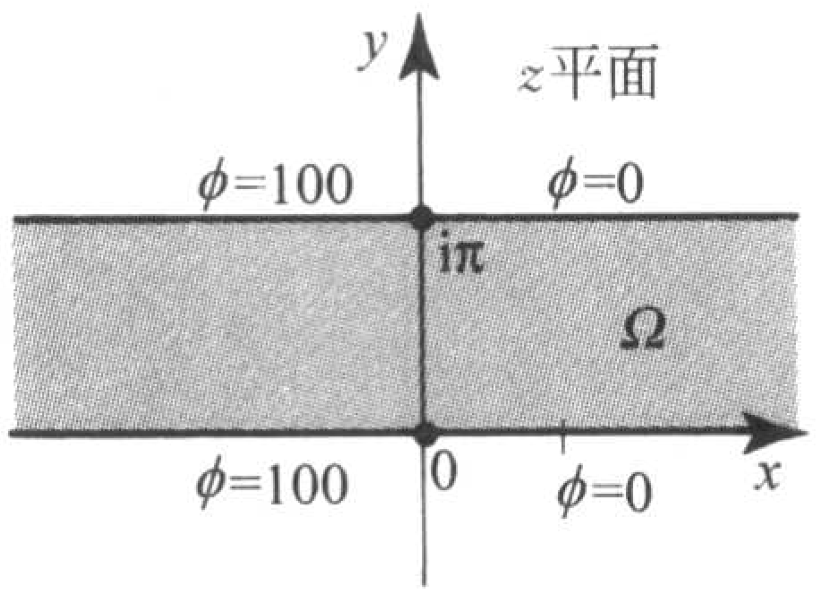


图 13

14.

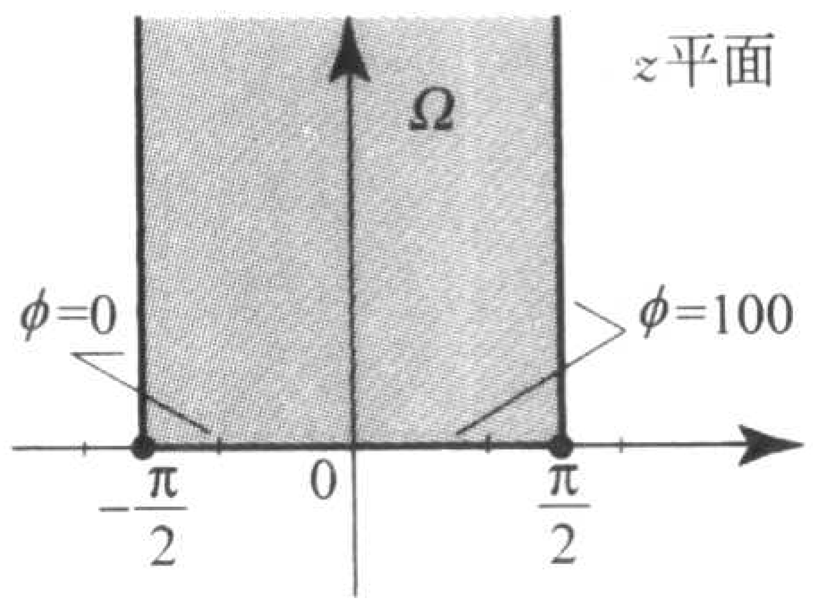


图 14

15.

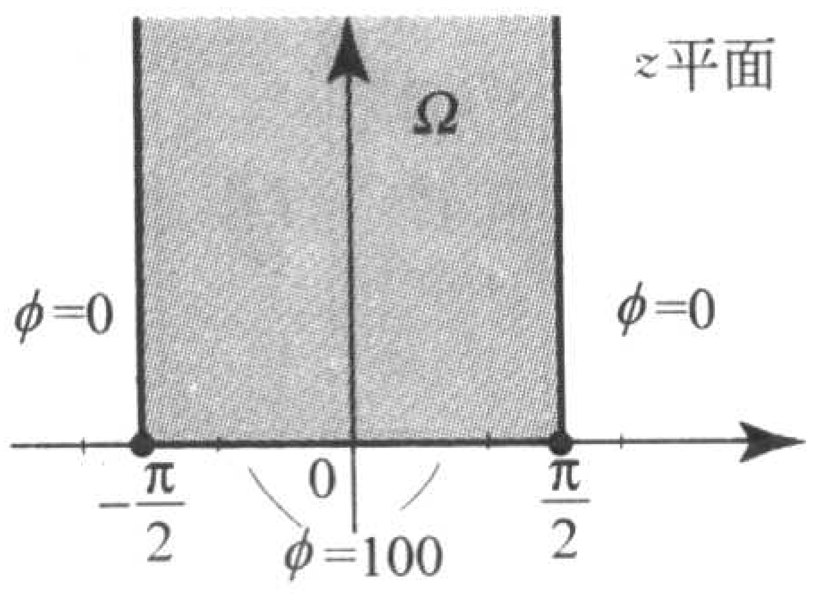


图 15

16.

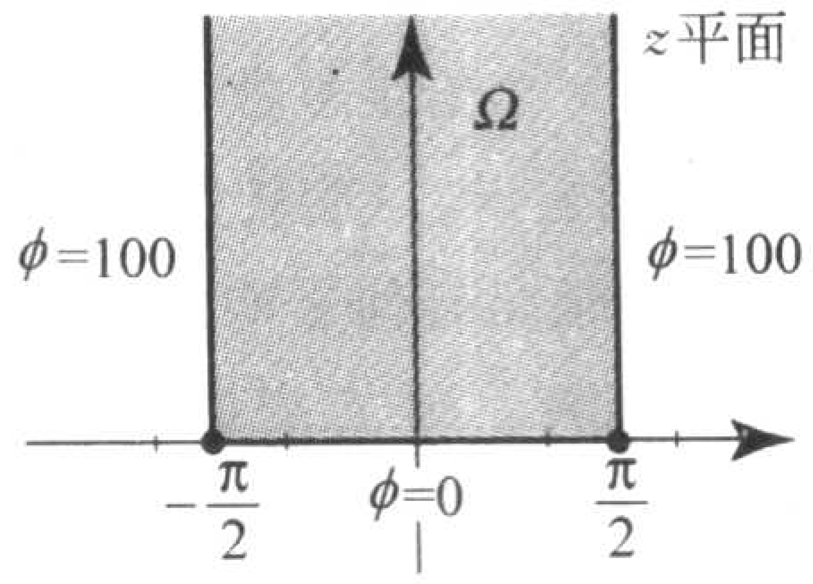


图 16

17.

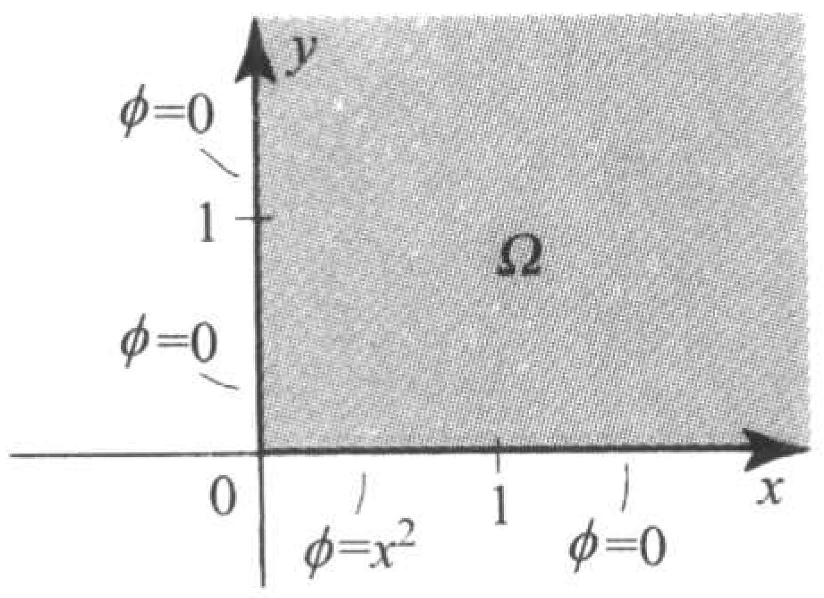


图 17

18.

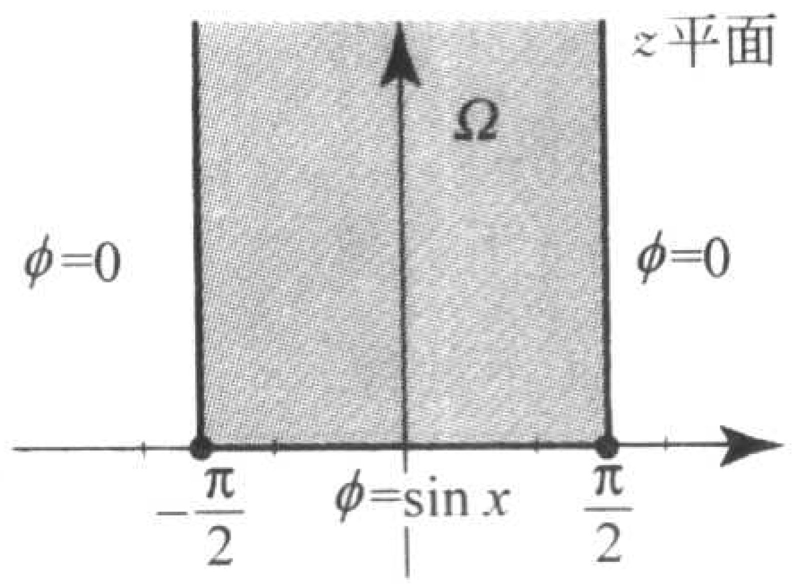


图 18

19.

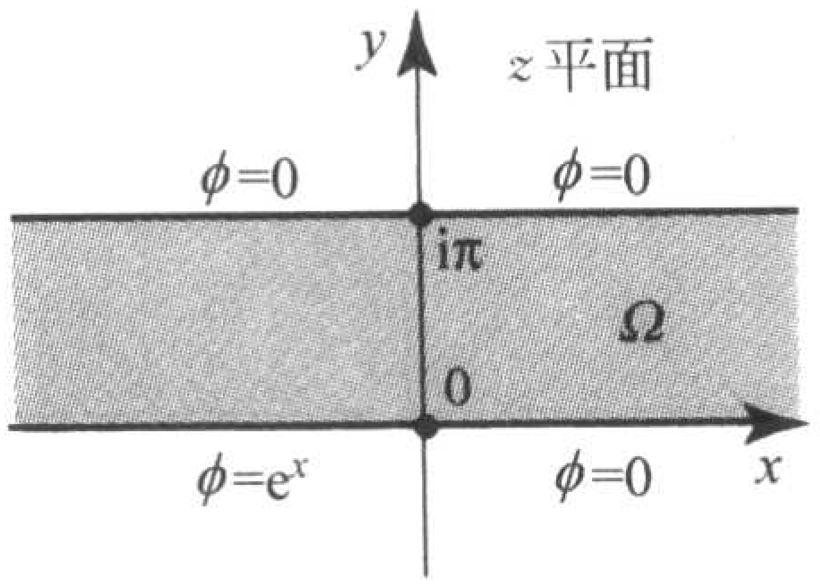


图 19

20.

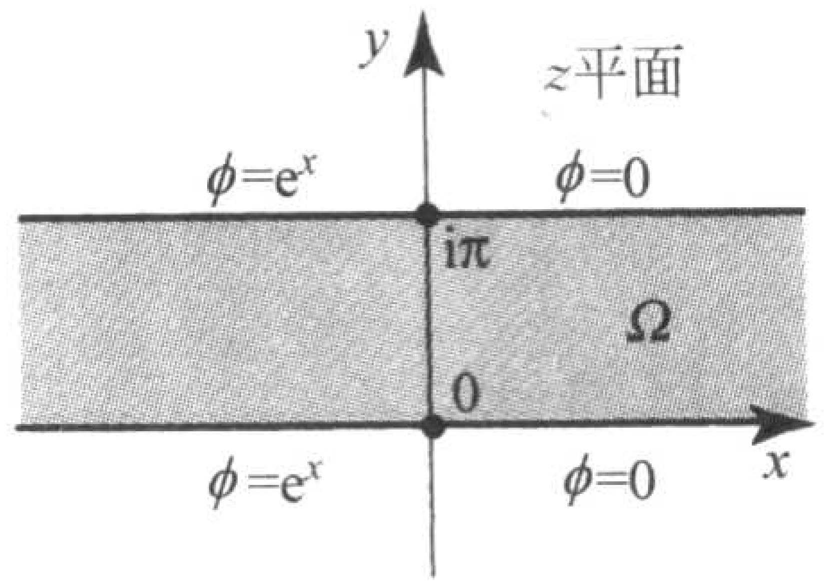


图 20

672

在习题 21～24 中(图 21～图 24)，利用例 4 的方法，求解狄利克雷问题.

21.

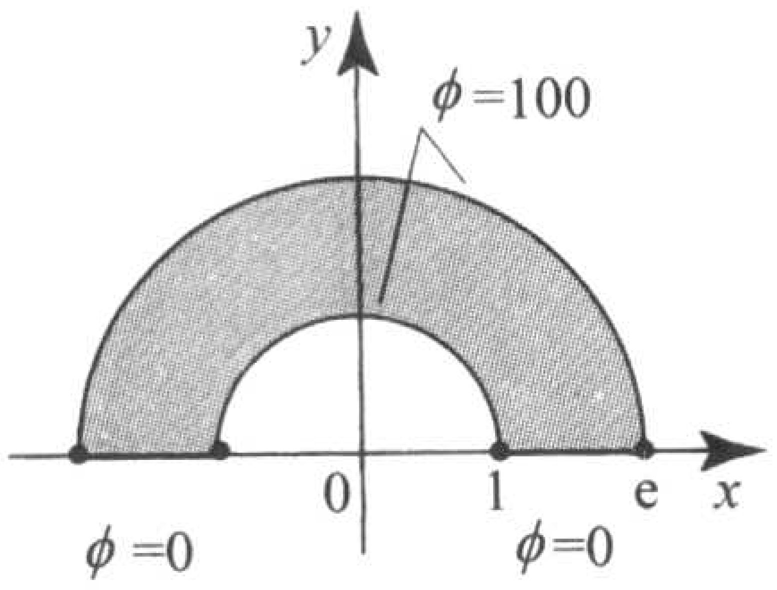


图 21

22.

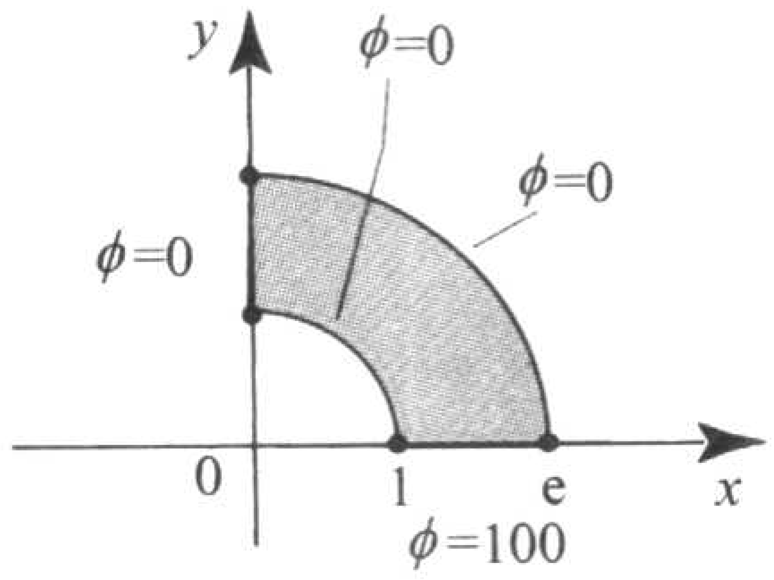


图 22

23.

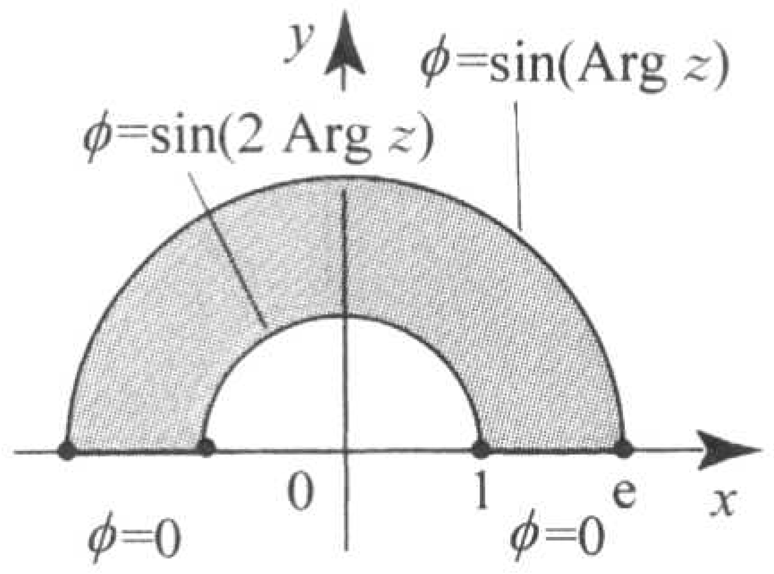


图　23

24.

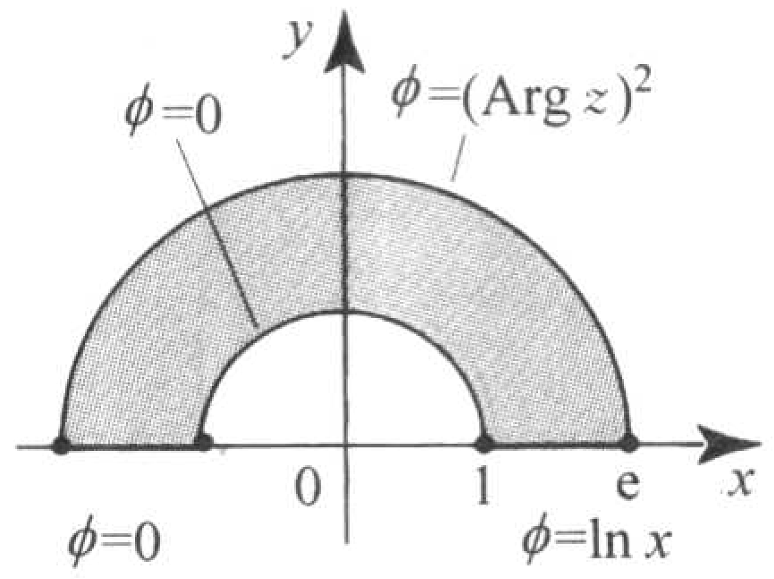


图　24

25. **平移**. 令 $z_0=a_0+\mathrm{i}b_0$ 是一个给定复数，解释为何映射 $f(z)=z+z_0$ 是关于向量(a_0, b_0)的平移.

26. **旋转与伸缩**. 令 $z_0=re^{\mathrm{i}\theta_0}$ 是一个给定复数，$r=|z_0|\neq 0$，解释为何映射 $f(z)=z_0\cdot z$ 是以 $|z_0|$ 为因子的伸缩，加上以 θ_0 为角度的旋转.（旋转和伸缩的顺序是无关紧要的：也可以先作旋转，再作伸缩.）[提示：乘积对两个复数的模和辐角有何影响?]

27. 如果 $f(z)$是以 α 为角度的旋转，则 $f(z)$的公式是什么?

28. 描述映射 $f(z)=\alpha z+\beta$，其中 α 和 β 是复数.

在习题 29～36 中，令 S 是以 $1-\mathrm{i}$，$1+\mathrm{i}$，$-1+\mathrm{i}$ 和 $-1-\mathrm{i}$ 为顶点的正方形，C 是圆心在原点的单位圆.

29. 描述 S 在映射 $f(z)=z+1-\mathrm{i}$ 下的像.

30. 描述 S 在映射 $f(z)=z-2-3\mathrm{i}$ 下的像.

31. 描述 S 在映射 $f(z)=\mathrm{i}z$ 下的像.

32. 描述 S 在映射 $f(z)=\mathrm{i}z+1+\mathrm{i}$ 下的像.

33. 描述 S 在映射 $f(z)=e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}z+1$ 下的像.

34. 描述 S 在映射 $f(z)=e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}z-1-\mathrm{i}$ 下的像.

35. 描述 C 在映射 $f(z)=3e^{\mathrm{i}\alpha}z+1$ 下的像，其中 α 是实数.

36. 描述 C 在映射 $f(z)=3e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}z-1-\mathrm{i}$ 下的像.

37. 假设 f：$\Omega\to\Omega'$是解析的，U 在 Ω'上调和，令 $\phi=U\circ f$. 令 V 是 U 的调和共轭，试证：$\psi=V\circ f$ 是 ϕ 的调和共轭.

673　38. 利用习题 37 的结果，求出例 3 解的调和共轭，再确定热流的曲线的方程.

12.7　格林函数与共形映射

本节利用从单连通区域 Ω 到单位圆盘或上半平面的共形映射，介绍 Ω 上的格林函数的有用公式. 然后对诸如圆盘、半平面、扇形、带状(半无限或无限)等区域，显式地计算出这些公式. 我们还是采用记号：D 表示单位开圆盘，C 表示单位圆周、Ω 是平面上其他的单连通区域，但不是全平面，其边界为 Γ. 因此，Ω 是连通开集，内部没有洞，边界非空. 对 Ω 内一点 z_0，令 $\phi(z, z_0)$表示从 Ω 到 D 上的一一共形映射，ϕ 将边界 Γ 映成 C，且 $\phi(z_0, z_0)=0$(图 1). 因此，

$$|\phi(z,z_0)|=1,\quad \text{对所有 } \Gamma \text{ 上的 } z. \tag{1}$$

记 $z=x+\mathrm{i}y$ 和 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，视 $\phi(z, z_0)$为 x，y，x_0 和 y_0 的函数. 本节的主要定理如下.

定理 1(格林函数的共形映射公式)　假设区域 Ω 是单连通区域，具有(非空)边界 Γ. 令 $z=x+\mathrm{i}y$ 和 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 在 Ω 内，$\phi(z, z_0)$是如上所述的共形映射，则 Ω 上的格林函数是

$$G(x,y,x_0,y_0)=\ln|\phi(z,z_0)|. \tag{2}$$

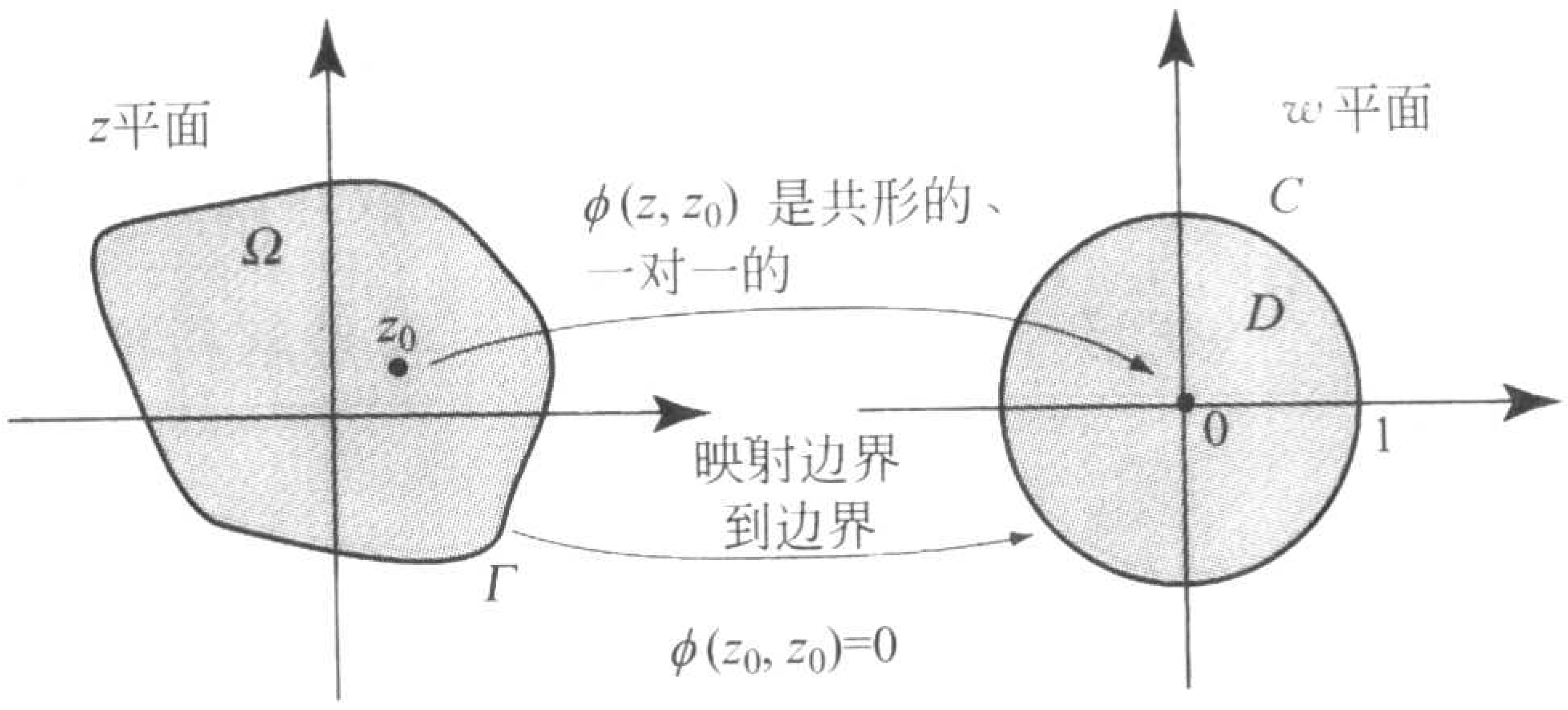


图 1 因为对 Γ 上的 z，$\phi(z, z_0)$在单位圆周上，因此，我们有 $|\phi(z, z_0)|=1$ 对 Γ 上的所有 z 成立. 进一步，由于 ϕ 是一对一的，所以 z_0 是 Ω 内唯一使得 $\phi(z, z_0)=0$ 的复数

此时，利用共形映射中的性质，验证 12.3 节定理 3 所叙述的格林函数的特征性质是有益的. 我们将这个定理的证明放到本节的末尾.

- 函数 $\ln|\phi(z, z_0)|$ 是 $\psi(z, z_0)$和 $\ln|z|$ 的复合. 函数 ϕ 在 Ω 上解析，且对所有的 $z\neq z_0$ 非零，因为 z_0 是唯一映到 D 内 0 点的. 对所有的 $z\neq 0$，函数 $\ln|z|=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$调和. 因此，由 12.6 节定理 1，对 Ω 内所有的 $z\neq z_0$，$\ln|\psi(z, z_0)|$ 是调和的. 因此，12.3 节定理 3 性质(i)得证.

674

- 回顾，对 Γ 上的 z，$\phi(z, z_0)$在单位圆上，因而，对 Γ 上的 z，$|\phi(z, z_0)|=1$，即 $\ln|\phi(z, z_0)|=\ln 1=0$. 从而，12.3 节定理 3 性质(ii)得证.
- 回顾，对 Ω 内所有的 z，$\phi(z, z_0)$在 D 内，因而，对 Ω 内所有的 z，$|\phi(z, z_0)|\leqslant 1$，即 $\ln|\phi(z, z_0)|\leqslant 0$. 从而，12.3 节定理 3 性质(iii)得证.
- 在我们研究了共形映射 ϕ 之后(见本节定理 3)，$\phi(z, z_0)$的对称性就是显然的了.

对定理 1，我们有另外几点说明.

- 由定理 1，我们必须对 Ω 内的每个 z_0 构造一个共形映射. 而事实上，正如即将看到的，我们只需一个从 Ω 到 D 的共形映射.
- 从 Ω 到 D 的共形映射的存在性由一个著名的定理所保证，称为**黎曼映射定理**，它说如果 Ω 是复平面中的除全平面自身以外的单连通区域，则存在一个一对一的解析函数 f，将 Ω 映成单位圆盘 D. 如果对 Ω 内的某点 z_0，我们指定 $f(z_0)=0$，以及 $f'(z_0)>0$，则映射 f 是唯一的.
- 但是黎曼映射定理并没有告诉我们如何构造共形映射，它只是保证其存在性. 与定理 1 结合，我们得出结论：单连通区域的格林函数总是存在.（当 Ω 是全平面时，我们取 $G(z, z_0)=\ln|z-z_0|$.）

下面，我们描述所有从单位圆映到自身的共形映射. 除了对定理自身感兴趣之外，我们还有另外两个目的：利用它重新导出圆盘上的格林函数和简化定理 1 中的共形映射的构造.

线性分式变换

令 a，b，c，以及 d 是复数，$ad-bc\neq 0$. 函数

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d} \tag{3}$$

称为**线性分式变换或默比乌斯变换**. 如果 $c=0$，f 是线性函数，因此是整的. 如果 $c\neq0$，f 是个有理函数. 对所有的 $z\neq-\frac{d}{c}$（在这点处，分母为零.），它是解析的. 下面的性质可以直接验证.

675

命题 1（线性分式变换） (i)线性分式变换是一对一的.

(ii)任意两个线性分式变换的复合仍是线性分式变换.

(iii)线性分式变换(3)的逆是线性分式变换：

$$f^{-1}(z)=\frac{dz-b}{-cz+a}. \tag{4}$$

证明 我们证明(i)和(iii)，而将(ii)留作习题. 首先，我们证明(iii)，我们必须验证：$f\circ f^{-1}(z)=f^{-1}\circ f(z)=z$. 我们有

$$f^{-1}\circ f(z)=\frac{df(z)-b}{-cf(z)+a}=\frac{\frac{adz+bd}{cz+d}-b}{\frac{-acz-bc}{cz+d}+a}$$

$$=\frac{adz+bd-b(cz+d)}{-acz-bc+a(cz+d)}=z.$$

类似地，我们有 $f\circ f^{-1}(z)=z$. 为证(i)，我们利用 f 具有逆这个事实. 事实上，$f(z_1)=f(z_2)\Rightarrow f^{-1}\circ f(z_1)=f^{-1}\circ f(z_2)\Rightarrow z_1=z_2$. ■

下面的定理是关于一族特殊的线性分式变换.

定理 2（圆盘到自身的共形映射） 令 z_0 是 D 内的复数(因此，$|z_0|<1$)，考虑线性分式变换

$$f_{z_0}(z)=\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}. \tag{5}$$

则

(i) f_{z_0} 在 D 内解析.

(ii) f_{z_0} 将 D 一一映到 D.

(iii) f_{z_0} 将单位圆一一映成单位圆.

(iv) $f_{z_0}(z_0)=0$.

证明 (iv)部分是显然的. 由命题 1，我们知道 f_{z_0} 是一一的. 对所有 $z\neq\frac{1}{\overline{z_0}}$ 同样是解析的，但是，因为 $|z_0|<1$，

$$\left|\frac{1}{\overline{z_0}}\right|=\frac{1}{|\overline{z_0}|}=\frac{1}{|z_0|}>1,$$

所以，f_{z_0} 的不解析点 $(\overline{z_0})^{-1}$ 不在 D 内，这就证明了(i). (ii)和(iii)部分更有意思，对(iii)，令 $e^{i\theta}$ 表示模为 1 的复数，我们要证明 $|f_{z_0}(e^{i\theta})|=1$. 我们利用绝对值和复共轭性技巧，有

$$|f_{z_0}(e^{i\theta})| = \frac{|e^{i\theta}-z_0|}{|1-\overline{z_0}e^{i\theta}|} = \frac{|e^{i\theta}-z_0|}{|e^{i\theta}(e^{-i\theta}-\overline{z_0})|} = \frac{|e^{i\theta}-z_0|}{|e^{i\theta}|\cdot|e^{-i\theta}-\overline{z_0}|}$$

$$= \frac{|e^{i\theta}-z_0|}{|e^{-i\theta}-\overline{z_0}|} = \frac{|e^{i\theta}-z_0|}{|\overline{e^{i\theta}-z_0}|} = \frac{|e^{i\theta}-z_0|}{|e^{i\theta}-z_0|} = 1.$$

676

为证明(ii)，由(iii)，我们注意到 $f_{z_0}[D]$是边界为单位圆的区域．又由于 $f_{z_0}(z_0)=0$，所以这个区域就是 D． ■

利用解析函数的性质，可以证明，在相差一个模为 1 的常数因子意义下，任何一个圆盘到自身的一对一的共形映射都具有形式(5)(参考[1]，6.2 节)．因此，定理 2 刻画了所有单位圆到自身的共形映射．现在，结合定理 1 和 2，得到单位圆盘的格林函数．

例 1　单位圆盘的格林函数

令 z 和 z_0 在 D 内，由定理 2，$f_{z_0}(z)=\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$是单位圆盘到自身的一一共形映射，它将 z_0 映为 0．由定理 1，单位圆盘的格林函数是

$$G(z,z_0) = \ln\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|. \tag{6}$$

为与 12.4 节所得到的公式比较，将 $z=x+iy$ 和 $z_0=x_0+iy_0$ 代入(习题 13)． ■

定理 2 的另外一个应用是简化定理 1 中的映射的构造．我们有如下形式的格林函数公式．

定理 3(格林函数的共形映射公式)　假设 Ω 是单连通区域，具有(非空)边界 Γ．令 ϕ 是从 Ω 到单位圆盘上的一对一共形映射，令 $z=x+iy$ 和 $z_0=x_0+iy_0$ 在 Ω 内，则 Ω 的格林函数是

$$G(x,y,x_0,y_0) = \ln\left|\frac{\phi(z)-\phi(z_0)}{1-\overline{\phi(z_0)}\phi(z)}\right|. \tag{7}$$

由(7)式，立刻可得格林函数是对称的(12.3 节定理 3(v))，即 $G(z,z_0)=G(z_0,z)$．

证明　注意到，(7)式中绝对值号里面的函数是 $f_{\phi(z_0)}\circ\phi(z)$，其中 $f_{\phi(z_0)}$是形如(5)式的线性分式变换，其中 z_0 以 $\phi(z_0)$代替．由于 ϕ 是 Ω 到 D 上的一一共形映射，而 $f_{\phi(z_0)}$是 D 到 D 的一一共形映射，所以 $f_{\phi(z_0)}\circ\phi(z)$是 Ω 到 D 上的一一共形映射．显然，$f_{\phi(z_0)}\circ\phi(z_0)=0$．因此，映射 $f_{\phi(z_0)}\circ\phi(z)$满足定理 1 中映射 $\phi(z,z_0)$的所有性质，因此，由定理 1 可得定理 3． ■

该定理的应用范围是非常广泛的，例如，给定一个单连通区域 Ω，(a)找出一个 Ω 到单位圆盘 D 上的一一共形映射；(b)利用定理 3 得出 Ω 的格林函数；(c)利用诸如 12.3 节的结果，得出 Ω 上的狄利克雷问题和泊松方程解的公式．

677

在 12.6 节中，我们的例子涉及了从区域 Ω 到上半平面上的共形映射．为能够在应用定理 3 时，利用这些例题，我们现在描述从上半平面到单位圆盘上的共形映射．然后，将这些映射复合，我们得到从 Ω 到单位圆盘上的共形映射．

为构造出所需的共形映射，我们利用线性分式变换和下面的性质：

- 线性分式变换由三点的像唯一确定．
- 在线性分式变换下，圆的像是另一个圆或直线，直线的像也是圆或直线．

通过假设线性分式变换的一个系数为 1，可得第一个性质．另外三个系数由三个三元方程唯一确定．证明第二个性质的一个方法是，首先对线性映射情形验证，然后对反演映射 $f(z)=\dfrac{1}{z}$

验证．由于任意一个线性分式变换是线性映射和反演映射的复合，因此，该性质对线性分式变换成立．

例 2　从上半平面到单位圆盘上的共形映射

(a)验证：线性分式变换

$$\phi(z)=\mathrm{i}\,\frac{1-z}{1+z}$$

将单位圆盘映到上半平面．

(b)验证：线性分式变换

$$\psi(z)=\frac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z}$$

将上半平面映到单位圆盘上．

解　(a)我们的目标是验证单位圆被映成实轴．因为圆的像是圆或直线，并且因为三点可确定一直线或一圆，所以只需验证单位圆上三点的像即可．我们有

$$\phi(1)=0;\quad \phi(\mathrm{i})=\mathrm{i}\,\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=1;\quad \phi(-\mathrm{i})=\mathrm{i}\,\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=-1.$$

因此，$\phi(1)$，$\phi(\mathrm{i})$和$\phi(-\mathrm{i})$在 u 轴上(w 平面的实轴)，因此，C 的像是 u 轴．因为 ϕ 是一一的，它将边界 C 映成单位圆盘像的边界，所以单位圆盘的像或者是上半平面或者是下半平面．验证 $\phi(0)=\mathrm{i}$(上半平面内的点)，我们得出结论：ϕ 将单位圆盘一对一的映成上半平面(参见图 2)．

678

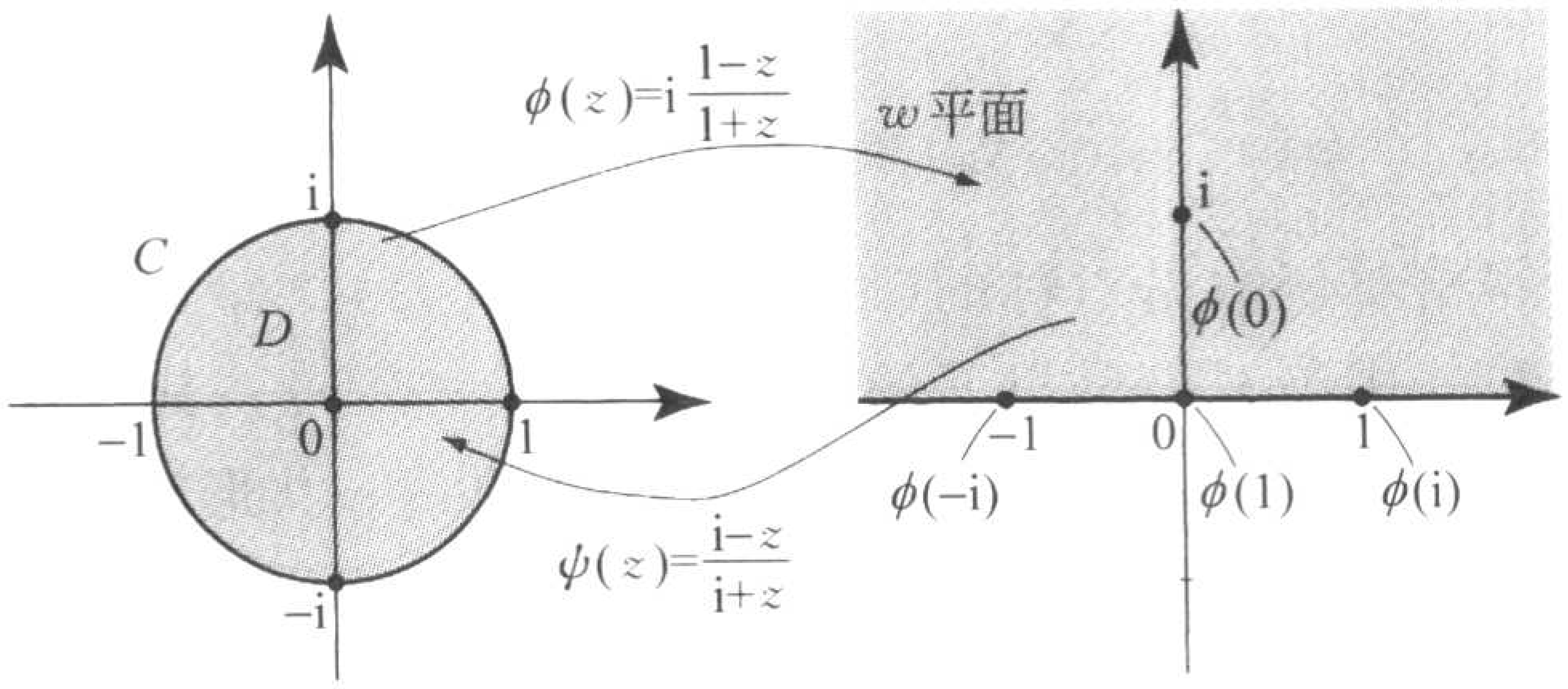


图 2　单位圆盘和上半平面之间的一对一共形映射

(b)我们至少有两种方法来证明该部分．一种是利用命题 1(iii)，并注意到 ψ 是 ϕ 的逆．另一种是验证边界和一个内点在 ψ 下的像．我们将验证 $\psi(0)=1$，$\psi(1)=\mathrm{i}$ 和 $\psi(-1)=-\mathrm{i}$ 留作习题．由于这三点的像不共线，我们得出结论：实轴被映成过点 1，i 和 −i 的圆，这显然是单位圆．(这里，我们利用了三点确定一个圆这个事实．)同样，$\psi(\mathrm{i})=0$，因此，ψ 将上半平面映到单位圆盘上．■

结合例 2(b)和定理 3，我们得到上半平面的格林函数，其公式在 12.4 节利用镜像法推导过．

例 3　上半平面的格林函数

令 z 和 z_0 在上半平面内，则上半平面的格林函数是

$$G(z,z_0)=\ln\left|\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}\right|=\frac{1}{2}\ln\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}. \tag{8}$$

为推导这个公式，我们利用(7)式和例 2(b)中的共形映射：

$$G(z,z_0)=\ln\left|\frac{\frac{i-z}{i+z}-\frac{i-z_0}{i+z_0}}{1-\left(\overline{\frac{i-z_0}{i+z_0}}\right)\frac{i-z}{i+z}}\right|=\ln\left|\frac{\frac{(i-z)(i+z_0)-(i-z_0)(i+z)}{(i+z)(i+z_0)}}{1-\frac{-i-\overline{z_0}}{-i+\overline{z_0}}\frac{i-z}{i+z}}\right|$$

$$=\ln\left|\frac{\frac{2i(z_0-z)}{(i+z)(i+z_0)}}{\frac{2i(\overline{z_0}-z)}{(i+z)(-i+\overline{z_0})}}\right|=\ln\left|\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}\frac{-i+\overline{z_0}}{i+z_0}\right|=\ln\left(\left|\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}\right|\left|\frac{-i+\overline{z_0}}{i+z_0}\right|\right).$$

但是，$-i+\overline{z_0}$是 $i+z_0$ 的复共轭，因此，$\left|\frac{-i+\overline{z_0}}{i+z_0}\right|=1$，公式得证. ■

现在，在我们的列表中增加一个新的格林函数. 679

例 4　第一象限的格林函数

首先，构造从第一象限到单位圆盘上的一一共形映射：先将第一象限映成上半平面，再利用例 2(b)中的共形映射. 因此，$\phi(z)=\frac{i-z^2}{i+z^2}$是从第一象限到单位圆盘上的一一共形映射. 对第一象限内的点 z 和 z_0，利用定理 3，得到第一象限的格林函数具有形式：

$$G(z,z_0)=\ln\left|\frac{\frac{i-\phi(z)}{i+\phi(z)}-\frac{i-\phi(z_0)}{i+\phi(z_0)}}{1-\left(\overline{\frac{i-\phi(z_0)}{i+\phi(z_0)}}\right)\frac{i-\phi(z)}{i+\phi(z)}}\right|. \tag{9}$$

这与我们在前一个例题中得到的表达式一样，只是那里的 z 和 z_0 被换成 $\phi(z)$和 $\phi(z_0)$，利用前一例题的结果，我们有

$$G(z,z_0)=\ln\left|\frac{\phi(z)-\phi(z_0)}{\phi(z)-\overline{\phi(z_0)}}\right|=\ln\left|\frac{z^2-z_0^2}{z^2-\overline{z_0}^2}\right|. \tag{10}$$

为用 x，y，x_0 和 y_0 来表达 G，我们有如下结果：

$$\begin{aligned}G(x,y,x_0,y_0)&=\ln|(z-z_0)(z+z_0)|-\ln|(z-\overline{z_0})(z+\overline{z_0})|\\&=\ln|z-z_0|+\ln|z+z_0|-\ln|z-\overline{z_0}|-\ln|z+\overline{z_0}|\\&=\frac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)+\frac{1}{2}\ln((x+x_0)^2+(y+y_0)^2)\\&\quad-\frac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y+y_0)^2)-\frac{1}{2}\ln((x+x_0)^2+(y-y_0)^2)\\&=\frac{1}{2}\ln\frac{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)((x+x_0)^2+(y+y_0)^2)}{((x-x_0)^2+(y+y_0)^2)((x+x_0)^2+(y-y_0)^2)}.\end{aligned}$$

在下个例题中，我们利用格林函数来推导第一象限的泊松积分公式. ■

例 5　第一象限的泊松积分公式

考虑如图 3 所示的第一象限 Ω 内的狄利克雷问题：对 Ω 内所有的(x,y)，$\nabla^2u(x,y)=0$；

对所有的 $x>0$，$u(x,0)=f(x)$；对所有的 $y>0$，$u(0,y)=g(y)$. 试证：解由泊松积分公式

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_0^{\infty}f(s)\left(\frac{1}{(x-s)^2+y^2}-\frac{1}{(x+s)^2+y^2}\right)\mathrm{d}s$$

$$+\frac{x}{\pi}\int_0^{\infty}g(t)\left(\frac{1}{x^2+(y-t)^2}-\frac{1}{x^2+(y+t)^2}\right)\mathrm{d}t$$

给出.

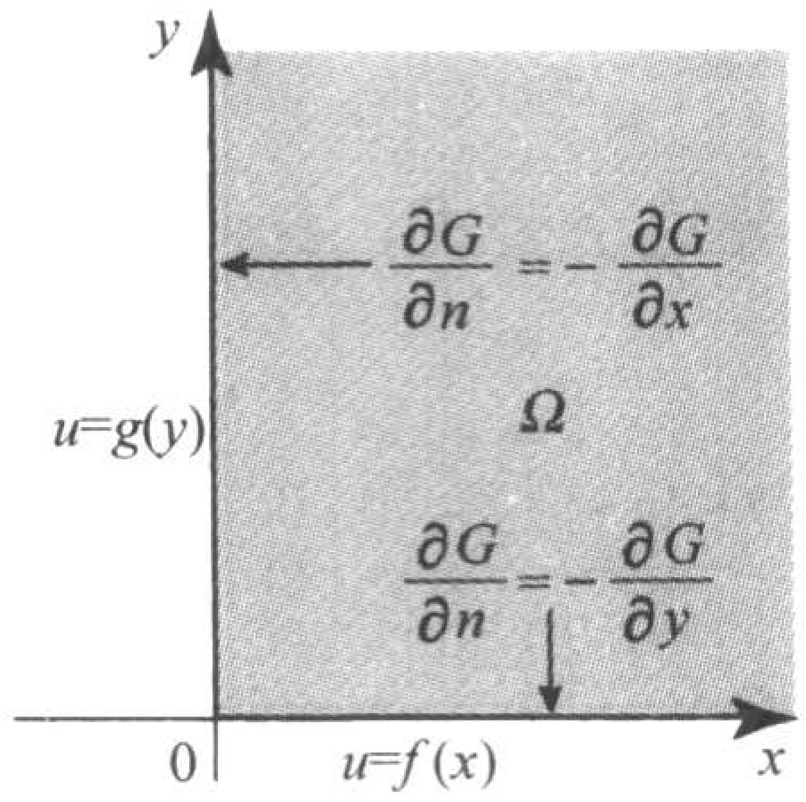


图 3 第一象限内的一般狄利克雷问题

解 由 12.3 节定理 2，

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}u(x,y)\frac{\partial G}{\partial n}(x,y,x_0,y_0)\mathrm{d}s, \qquad (11)$$

其中 G 是第一象限 s 的格林函数，Γ 是第一象限的边界. 在非

680 负 x 轴上，有 $\mathrm{d}s=\mathrm{d}x$ 和 $\frac{\partial G}{\partial n}=-\frac{\partial G}{\partial y}\Big|_{y=0}$. 在非负 y 轴上，我们有 $\mathrm{d}s=\mathrm{d}y$ 和 $\frac{\partial G}{\partial n}=-\frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x=0}$. 利用例 4 中 G 的显式公式，计算得

$$-\frac{\partial G}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)-\frac{1}{2}\ln((x+x_0)^2+(y+y_0)^2)\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y+y_0)^2)+\frac{1}{2}\ln((x+x_0)^2+(y-y_0)^2)\right]$$

$$=-\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}-\frac{y+y_0}{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2}$$

$$+\frac{y+y_0}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}+\frac{y-y_0}{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

令 $y=0$，在 x 轴上，有

$$\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y^2}-\frac{y_0}{(x+x_0)^2+y_0^2}+\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}-\frac{y_0}{(x+x_0)^2+y_0^2}$$

$$=\frac{2y_0}{(x-x_0)^2+y^2}-\frac{2y_0}{(x+x_0)^2+y_0^2}.$$

类似地，在 y 轴上，有

$$\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{2x_0}{x_0^2+(y-y_0)^2}-\frac{2x_0}{x_0^2+(y+y_0)^2}.$$

代入(11)式，得到所需的泊松积分公式(重新命名变元). ■

例 4 中从(9)到(10)式的步骤可以用到任意的共形映射上. 这就得到了定理 3 的下面一种形式，它在计算中更有用.

定理 4(格林函数的共形映射公式) 假设区域 Ω 是单连通区域，具有(非空)边界 Γ. 令 ϕ 是 Ω 到上半平面上的一一共形映射，将 Γ 映成实线，则 Ω 的格林函数是

$$G(x,y,x_0,y_0)=\ln\left|\frac{\phi(z)-\phi(z_0)}{\phi(z)-\overline{\phi(z_0)}}\right|, \qquad (12)$$

其中 $z=x+\mathrm{i}y$ 和 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 在 Ω 内.

下面是一个有趣的应用.

例 6　半无限垂直带的格林函数

令 Ω 是半无限垂直带 $\{z=x+\mathrm{i}y,:\ -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ y\geqslant 0\}$. 函数 $\phi(z)=\sin z$ 是从 Ω 到上半平面上的一一共形映射.（参见 12.6 节例 3.）因此，由定理 4，Ω 的格林函数是

$$G(z,z_0)=\ln\left|\frac{\sin z-\sin z_0}{\sin z-\overline{\sin z_0}}\right|=\ln|\sin z-\sin z_0|-\ln|\sin z-\overline{\sin z_0}|. \tag{13}$$

681

为将 G 用 x，y，x_0 和 y_0 来表达，可以将 $\sin z$ 用这些变量表示的公式代入，细节留作习题.

■

利用已知格林函数和一一共形映射的复合，下面的定理给出了构造新的格林函数的另一个方法. 这个定理的证明与定理 1 的证明非常相似，将留作习题.

定理 5(格林函数和共形映射的复合)　*假设区域 Ω 和 Ω' 是单连通区域，(非空)边界分别为 Γ 和 Γ'. 假设 ϕ 是从 Ω 到 Ω' 上的一一共形映射，$\phi[\Gamma]$ 包含于 Ω'，令 $g(x,\ y,\ x_0,\ y_0)=g(x+\mathrm{i}y,x_0+\mathrm{i}y_0)$ 表示 Ω' 的格林函数，则 Ω 的格林函数是*

$$G(x,y,x_0,y_0)=g(\phi(x+\mathrm{i}y),\phi(x_0+\mathrm{i}y_0)). \tag{14}$$

作为例子，将上半平面的格林函数写成 $g(x,\ y,\ x_0,\ y_0)=\ln|z-z_0|-\ln|z-\overline{z_0}|$（例 3）. 令 ϕ 是从区域 Ω 到上半平面上的一一共形映射，将 Γ 映到实线上，则 Ω 的格林函数是

$$G(x,y,x_0,y_0)=\ln|\phi(z)-\phi(z_0)|-\ln|\phi(z)-\overline{\phi(z_0)}|,$$

这就是定理 4 中的公式.

我们以完成定理 1 的证明来结束本节，其证明需要解析函数的一些性质，在需要处作了回顾.

定理 1 的证明　假设区域 Ω 是单连通区域，具有(非空)边界 Γ，$z=x+\mathrm{i}y$ 和 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 在 Ω 内，$\phi(z,\ z_0)$ 是 Ω 到单位圆盘上的一一共形映射. 我们希望证明 Ω 的格林函数由(2)式给出：$G(z,\ z_0)=\ln|\phi(z,\ z_0)|$. 我们已经证明了：除了 $z=z_0$，函数 $\ln|\phi(z,\ z_0)|$ 在 Ω 上调和，在 Ω 的边界上为零. 为证明它是 Ω 的格林函数，由 12.3 节(2)式，对 $z\neq z_0$，我们必须证明

$$\ln|\phi(z,z_0)|=\frac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)+h(z,z_0)=\ln|z-z_0|+h(z,z_0), \tag{15}$$

其中对 Ω 内所有的 z 点，h 调和. 我们需要解析函数的如下事实，假设 $f(z)$ 在包含 z_0 的圆盘内解析，但是在 z_0 处不解析，则 z_0 称为**孤立奇点**. 如果 z_0 是孤立奇点，并且 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 存在，则 z_0 是**可去奇点**，即如果我们定义 $f(z_0)=A$，则 f 在 z_0 处解析(参见[1]，4.6 节). 记住这个性质，考虑函数 $f(z)=\dfrac{\phi(z,\ z_0)}{z-z_0}$($z\neq z_0$ 在 Ω 内)，其中，如定理 1 条件所给，$\phi(z,\ z_0)$ 在 Ω 上解析，且 $\phi(z_0,\ z_0)=0$. 显然，除了 z_0 点外，f 在 Ω 上解析. 因此，z_0 是 f 的孤立奇点. 同样，由导数的定义，有

682

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{\phi(z,z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\frac{\phi(z,z_0)-\overbrace{\phi(z_0,z_0)}^{=0}}{z-z_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\phi(z,z_0)\Big|_{z=z_0},$$

因而，z_0 是 $f(z)$的可去奇点．定义

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\phi(z,z_0)}{z-z_0} & 若\ z\neq z_0,\\ \phi'(z,z_0)\Big|_{z=z_0} & 若\ z=z_0,\end{cases}$$

则 f 在 Ω 上解析．同时，对 Ω 内所有的 z，$f(z)\neq 0$．最后这一点对 $z\neq z_0$ 是显然的，因为 ϕ 是一一的，且 $\phi(z_0, z_0)=0$．对于 $z=z_0$，我们利用事实 ϕ 是一一的，可以推出对 Ω 内所有的 z，$\phi'(z, z_0)\neq 0$，特别地，$\phi'(z, z_0)\Big|_{z=z_0}\neq 0$．现在，令 $h(z, z_0)=\ln|f(z)|$，则由 12.6 节定理 1，h 在 Ω 上调和，因为它是解析函数 f 和调和函数 $\ln|z|$ $(z\neq 0)$的复合．对 $z\neq z_0$，利用 $f(z)$的定义，我们得到

$$\begin{aligned}\ln|z-z_0|+h(z,z_0) &= \ln|z-z_0|+\ln|f(z)|\\ &= \ln|z-z_0|+\ln|\phi(z,z_0)|-\ln|z-z_0| = \ln|\phi(z,z_0)|.\end{aligned}$$

因此，(15)式成立． ■

习题 12.7

在习题 1～8 中，对区域 Ω，求出格林函数．

1. Ω 是半径为 1、中心在(1，0)的开圆盘．
2. Ω 是半径为 2、中心在(4，4)的开圆盘．
3. Ω 是在直线 $y=x$ 上方的半平面．
4. Ω 是在直线 $x=1$ 右边的半平面．
5. Ω 是介于直线 $y=0$ 和 $y=\pi$ 的水平无限带状区域．
6. Ω 是介于直线 $y=0$ 和 $y=\frac{\pi}{2}$ 的水平无限带状区域．
7. Ω 是介于从原点出发角度分别为 0 和$\frac{\pi}{4}$的射线之间的无限扇形区域．
8. Ω 是介于从原点出发角度分别为 0 和$\frac{3\pi}{4}$的射线之间的无限扇形区域．
9. 推导求解如图 4 所示的水平带状区域上狄利克雷问题的泊松积分公式，其中 $f(x)=0$，$g(x)$是任意的．
10. 推导求解如图 4 所示的水平带状区域上狄利克雷问题的泊松积分公式，其中 $f(x)$和 $g(x)$是任意的．
11. 求解如图 3 所示的第一象限内狄利克雷问题，已知 $f(x)=x$ 如果 $0<x<1$，否则为零；对所有的 $y>0$，$g(y)=0$．
12. 推导例 6 中半无限带状区域的泊松积分公式．
13. 试证：例 1 中所得到的圆盘格林函数公式与我们在 12.4 节的公式是一致的．

683

14. 学习定理 1 的证明，然后证明定理 5．

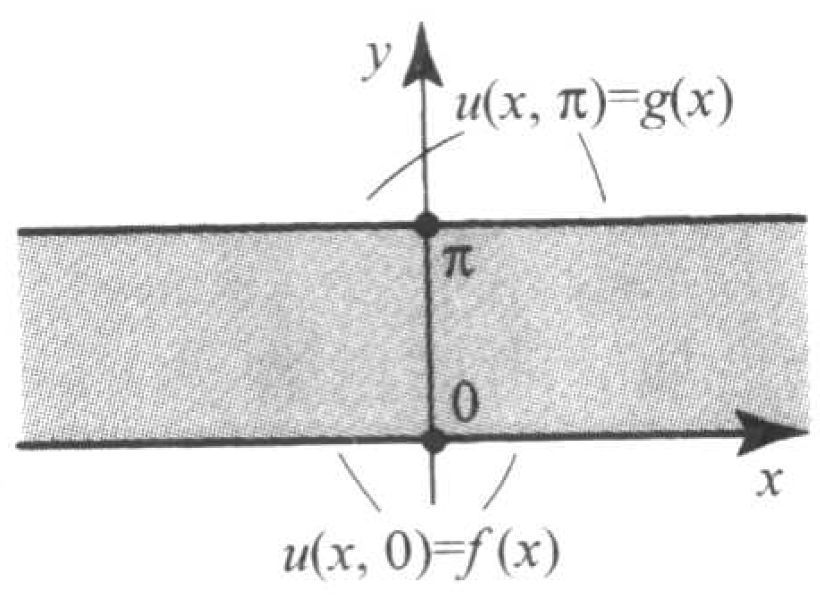


图 4 水平带状区域上的一般狄利克雷问题(习题 9 和习题 10)

12.8 诺伊曼函数和诺伊曼问题的解

本节利用前一节的方法求解单连通、非全平面的区域 Ω 上的诺伊曼问题：

$$\nabla^2 u(x,y)=0 \quad \text{对所有 } \Omega \text{ 内的}(x,y); \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y)=f(x,y) \quad \text{对所有边界 } \Gamma \text{ 上的}(x,y) \tag{2}$$

由 12.1 节例 5，我们知道边界函数 f 不能是任意的，它必须满足相容性条件：

$$\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}s=0.$$

我们回顾一下符号 $\mathrm{d}s$ 的含义，它表示弧长元. 如果我们对 Γ 作参数化：$(x(t),\ y(t))(a\leqslant t\leqslant b)$，则

$$\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

前面，我们将狄利克雷问题的解表示成含有边界函数和格林函数的线积分，这里的目标是将诺伊曼问题的解表示成一个含有边界函数和某个固定函数的线积分，这个函数称为诺伊曼函数，仅依赖于区域. 受格林函数性质(参见 12.3 节定理 3)的启发，我们作如下定义.

定义 1(诺伊曼函数) 假设区域 Ω 是单连通区域，具有边界 Γ. 区域 Ω 的**诺伊曼函数** $N(x,\ y,\ x_0,\ y_0)((x,\ y),\ (x_0,\ y_0)$在 Ω 内)是一个满足下列性质的函数：

(i)对 Ω 内的每个$(x,\ y)$，$N(x,\ y,\ x_0,\ y_0)$关于 Ω 内所有的$(x,\ y)\neq(x_0,\ y_0)$都是调和的.

(ii)对 Ω 内所有的$(x_0,\ y_0)$和 Γ 上的$(x,\ y)$，$\dfrac{\partial N}{\partial n}(x,\ y,\ x_0,\ y_0)=C.$

(iii)对 Ω 内的每个$(x_0,\ y_0)$，存在函数 u_1，使得 $u_1(x,\ y,\ x_0,\ y_0)$关于 Ω 内所有的$(x,\ y)$都调和，并且对 Ω 内的每个$(x,\ y)$，$N(x,\ y,\ x_0,\ y_0)=v(x,\ y,\ x_0,\ y_0)+u_1(x,\ y,\ x_0,\ y_0)=\dfrac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)+u_1(x,\ y,\ x_0,\ y_0)$.

为简化记号，我们记 $z=x+\mathrm{i}y$，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，我们以 z 和 z_0 的函数表示$(x,\ y,\ x_0,\ y_0)$的函数，例如，$v(z,\ z_0)=\dfrac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)=\ln|z-z_0|$，以及 $N(x,\ y,\ x_0,\ y_0)=N(z,\ z_0)$. 利用这个记号，(i)和(iii)部分陈述的是，就像格林函数，诺伊曼函数在 Ω 上调和，除了 z_0 点外，因为有 $\ln|z-z_0|$ 项. (ii)部分告诉我们，诺伊曼函数法向导数在边界上的值是常数. 这与格林函数边界条件相对应，格林函数在边界上恒为零. 就像我们要说明的，这个常数 C 依赖于 Γ 的长度，一般不为零. 684

命题 1 定义 1(ii)中的常数 C，等于诺伊曼函数法向导数在边界上的值，由

$$C=\frac{2\pi}{L} \tag{3}$$

给出，其中 $L=\int_\Gamma \mathrm{d}s$ 是 Γ 的长度. 如果 L 是无限的，我们取 $C=0$.

证明 对 Ω 内固定的 z_0，由于 $\partial N/\partial n$ 在 Γ 上是常数，一方面，我们有

$$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n}N(z,z_0)\,ds = \int_\Gamma C\,ds = CL,$$

其中 L 是 Γ 的长度. 另一方面，利用 $N=u_1(z, z_0)+\ln|z-z_0|$，

$$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n}N(z,z_0)\,ds = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n}u_1(z,z_0)\,ds + \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n}\ln|z-z_0|\,ds = 2\pi,$$

因为由调和函数的相容性条件(12.1 节例 5)，$\int_\Gamma \partial u_1/\partial n ds = 0$，以及由 12.3 节习题 15，$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n}\ln|z-z_0|\,ds = 2\pi$，因此，$CL = 2\pi$，(3) 式得证. ■

现在，我们可以用诺伊曼函数来表达诺伊曼问题的解. 由 12.1 节定理 5 注意到，如果诺伊曼问题的解存在，则在相差一个常数项的意义下唯一，因此，解只能在相差一个常数项的意义下确定.

定理 1(诺伊曼问题的解) 假设区域 Ω 是单连通区域，具有边界 Γ，令 $N(z, z_0)$表示诺伊曼函数，其中 $z=x+iy$ 和 $z_0=x_0+iy_0$ 在 Ω 内，则在相差一个常数项的意义下，诺伊曼问题(1)~(2)的解由

$$u(x_0,y_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma N(z,z_0)f(z)\,ds \tag{4}$$

给出.

证明 假设 u 是解，令 $A = \frac{C}{2\pi}\int_\Gamma u\,ds$. 我们将说明在相差常数 A 上，(4) 式确定 u. 我们回到调和函数的表示公式(12.3 节定理 1)：

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds.$$

与狄利克雷问题不同的是，这里我们必须修改上面的公式，以在被积函数中去掉 u. (记住 $v=\ln|z-z_0|$.)由定义 1(ii)和(iii)，我们知道，在 Γ 上，$\partial v/\partial n = C - \partial u_1/\partial n$. 同时，由于 u 和 u_1 是调和的，由格林第二恒等式，我们有 $\int_\Gamma u_1\frac{\partial u}{\partial n}ds = \int_\Gamma u\frac{\partial u_1}{\partial n}ds$. 因此，

685

$$\begin{aligned}
u(x_0,y_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left(u\left(C - \frac{\partial u_1}{\partial n}\right) - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds \\
&= \frac{C}{2\pi}\int_\Gamma u\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left(u_1\frac{\partial u}{\partial n} + v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds \\
&= A - \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma N(z,z_0)f(z)\,ds,
\end{aligned}$$

其中在最后一行，我们利用了在 Γ 上，$N=u_1+v$ 和 $f=\partial u/\partial n$. ■

例 1 上半平面的诺伊曼函数

验证上半平面的诺伊曼函数是

$$\begin{aligned}
N(z,z_0) &= \ln|z-z_0| + \ln|z-\overline{z_0}| \\
&= \frac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2) + \frac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y+y_0)^2),
\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $z=x+\mathrm{i}y$ 和 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，y，$y_0>0$.

解 通过验证这个函数满足定义 1 的性质(i)～(iii)，我们将验证给定的函数是上半平面的诺伊曼函数. 给定 z_0 在上半平面内，除了 $z=\overline{z_0}$ 点外，函数 $u_1(z, z_0)=\ln|z-\overline{z_0}|$ 关于 z 是调和的. 由于 z_0 在上半平面内，所以 $\overline{z_0}$ 在下半平面内，因此，$u_1(z, z_0)$ 在上半平面上调和，这就建立了(i)和(iii). 现在，我们证明(ii)，此时的法向导数是 $-\frac{\partial}{\partial y}$，我们有

$$-\frac{\partial}{\partial y}\ln|z-z_0|\Big|_{y=0}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)\Big|_{y=0}$$

$$=\frac{y_0-y}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\Big|_{y=0}=\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}.$$

由于 $\mathrm{Im}(\overline{z_0})=-\mathrm{Im}(z_0)$，从前面的计算，我们有(以 $\overline{z_0}$ 代替 z_0)

$$-\frac{\partial}{\partial y}\ln|z-\overline{z_0}|\Big|_{y=0}=\frac{-y_0}{(x-x_0)^2+(-y_0)^2}==\frac{-y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}.$$

将两个法向导数相加，我们发现：$\ln|z-z_0|+\ln|z-\overline{z_0}|$ 的法向导数在实轴上为零. 这就证明定义 1(ii)对 $C=0$ 成立. ■

现在，我们来求解上半平面内的诺伊曼问题. 686

例 2 **上半平面内诺伊曼问题的解**

应用定理 1 以及例 1 中所计算的诺伊曼函数，我们得到上半平面内诺伊曼问题

$$\nabla^2 u(x,y)=0, -\infty<x<\infty, y>0,$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=f(x)$$

的解是

$$u(x_0,y_0)=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\ln((x-x_0)^2+y_0^2)\mathrm{d}x.$$

这个解在 12.4 节习题 17 中利用别的方法推导过. ■

诺伊曼函数和共形映射

现在，我们研究共形映射在诺伊曼函数上的作用. 我们的方法是受上节的结果启发. 我们采用下面的记号：Ω 和 Ω' 是单连通区域，(非空)边界分别为 Γ 和 Γ'. 令 ϕ 是从 Ω 到 Ω' 上的一一共形映射，$\phi[\Gamma]$ 包含于 Γ'. 假设 $N(w, w_0)$ 是 Ω' 的诺伊曼函数，作 N 和 ϕ 的复合：$N_\phi(z, z_0)=N(\phi(z), \phi(z_0))$，其中 z 和 z_0 在 Ω 内. 现在，我们问：$N_\phi(z, z_0)$ 是否是 Ω 的诺伊曼函数？

利用类似于 12.5 节定理 1 的证明，可以证明 $N_\phi(z, z_0)$ 在 Ω 上除去 z_0 点后调和，并且 $N_\phi(z, z_0)=\ln|z-z_0|$ 加上 Ω 上的一个调和函数. 因此，$N_\phi(z, z_0)$ 满足两条 Ω 上诺伊曼函数的性质. 剩下只需验证 $N_\phi(z, z_0)$ 的法向导数在边界上是否像命题 1 所要求的那样为常数. 我们将发现，这个性质一般而言是不满足的，但是当 Ω 和 Ω' 都是无界时，它是满足的.

为解释有界区域与无界区域之间的鲜明区别，我们回顾如下关于共形映射的变量代换公式：

$$\frac{\partial(N_\phi)}{\partial n_\Gamma}(z,z_0)=|\phi'(z)|\frac{\partial N}{\partial n_{\Gamma'}}(\phi(z),\phi(z_0)),\tag{6}$$

其中在左端我们计算在 Γ 上一点 z 沿着曲线 Γ 的法向导数，在右端，我们计算在 Γ' 上的点 $\phi(z)$ 沿着曲线 Γ' 的法向导数.（证明请参考[1]6.5 节.）因此，共形映射保持法向导数，只是乘上一个因子 $|\phi'(z)|$. 因此，一个诺伊曼函数复合上一个共形映射之后，结果可能得不到命题 1 所需的法向导数为常数这个要求，除非 $|\phi'(z)|=1$，或者法向导数在边界上的常数值为零. 由命题 1，我们知道：当 Γ 和 Γ' 的长度都为无穷时，后一个条件成立. 因此，我们用如下有用的结果.

687

定理 2（无界区域的诺伊曼函数） 假设 Ω 是无界区域，边界为 Γ，ϕ 是从 Ω 到上半平面上的一对一解析映射，将 Γ 映到实轴，则 Ω 的诺伊曼函数是

$$N(z,z_0)=\ln|\phi(z)-\phi(z_0)|+\ln|\phi(z)-\overline{\phi(z_0)}|\quad(z,z_0\text{ 在 }\Omega\text{ 内}).\tag{7}$$

作为应用，我们推导第一象限的诺伊曼函数.

例 3 第一象限的诺伊曼函数

对 $\phi(z)=z^2$ 应用定理 2，我们得到第一象限的诺伊曼函数：

$$\begin{aligned}N(z,z_0)&=\ln|z^2-z_0^2|+\ln|z^2-\overline{z_0^2}|\\&=\ln|z-z_0|+\ln|z+z_0|+\ln|z-\overline{z_0}|+\ln|z+\overline{z_0}|\\&=\frac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)+\frac{1}{2}\ln((x+x_0)^2+(y+y_0)^2)\\&\quad+\frac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y+y_0)^2)+\frac{1}{2}\ln((x+x_0)^2+(y-y_0)^2).\end{aligned}$$

利用这个函数，可以得到第一象限中诺伊曼问题的通解（习题 7）. ■

带有诺伊曼条件的泊松问题

在我们能力范围内，再提一个应用，考虑泊松问题

$$\nabla^2u(x,y)=h(x,y)\quad\text{对所有在 }\Omega\text{ 内的}(x,y),\tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y)=f(x,y)\quad\text{对所有在 }\Gamma\text{ 上的}(x,y).\tag{9}$$

由于边界上是诺伊曼型条件，函数 h 和 f 通过格林第一恒等式而相联系：

$$\iint_\Omega\nabla^2u\,dx\,dy=\int_\Gamma\frac{\partial u}{\partial n}ds;$$

因此，由(8)和(9)式，

$$\iint_\Omega\nabla^2h(x,y)\,dx\,dy=\int_\Gamma f\,ds.$$

因此，h 在 Ω 上的二重积分一定等于 f 在 Γ 上的线积分. 假设 h 和 f 满足这个相容性条件，则我们得到带有诺伊曼条件泊松问题的如下解.

688

定理 3（泊松-诺伊曼问题的解） 假设 Ω 是一个区域，边界为 Γ，令 $N(z,z_0)$ 是 Ω 上的诺伊曼函数，其中 $z=x+iy$ 和 $z_0=x_0+iy_0$ 在 Ω 内. 如果 $u(x,y)$ 是泊松方程(8)的满足诺伊曼

边界条件(9)的解，则在相差一个常数项的意义下，

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}h(x,y)N(z,z_0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}N(z,z_0)f(z)\,\mathrm{d}s. \tag{10}$$

其证明是 12.3 节定理 4 证明的微小修改，略去.

习题 12.8

在习题 1～6 中，推导如图所示(图 1～图 6)的区域上的诺伊曼函数.

1.

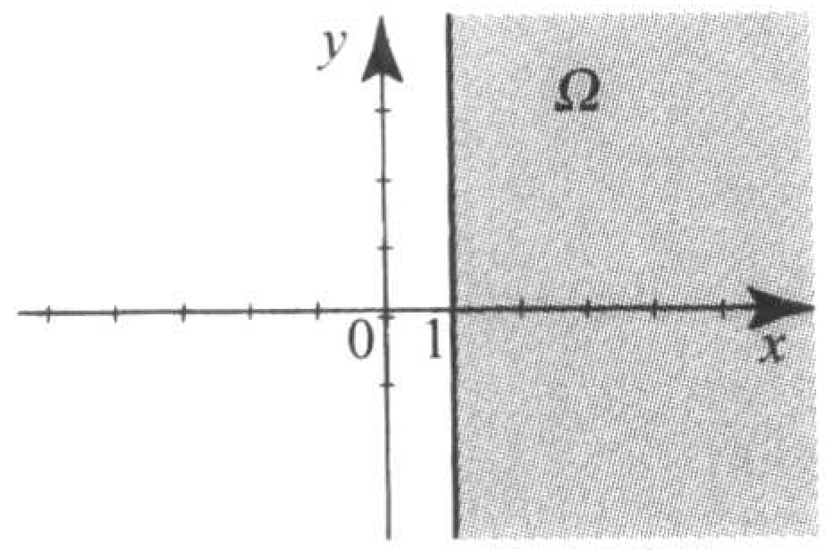


图 1

2.

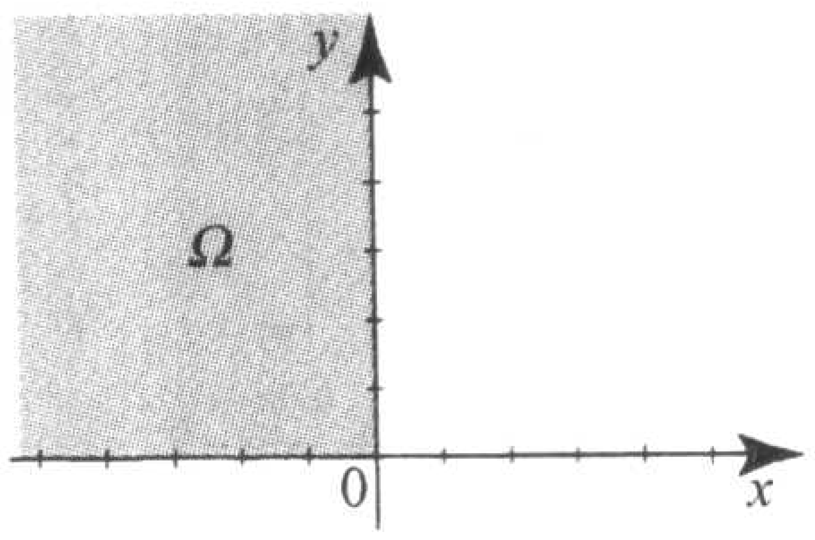


图 2

3.

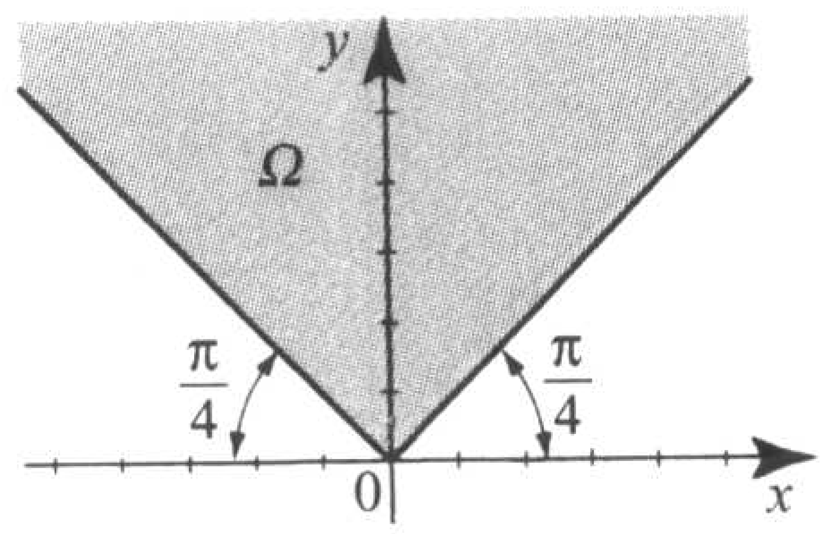


图 3

4.

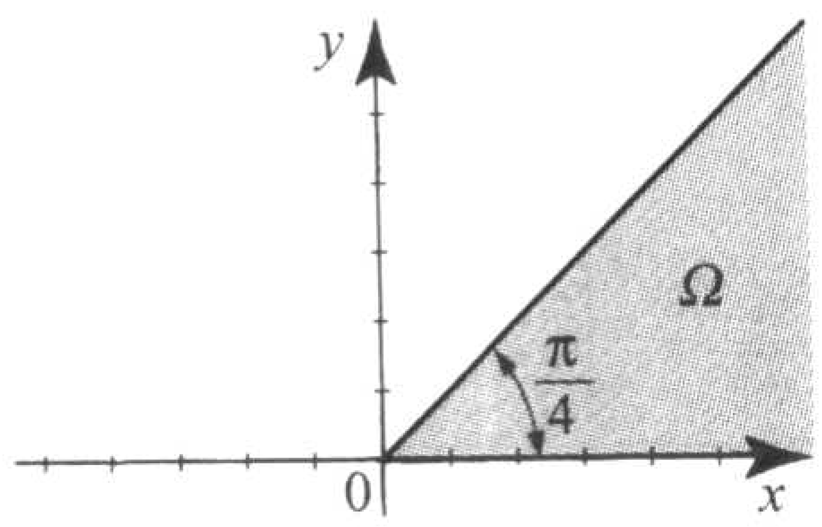


图 4

5.

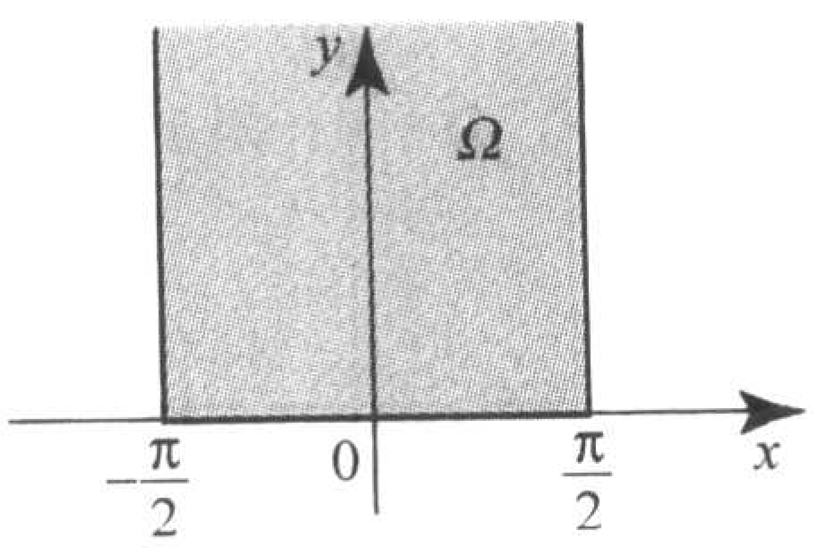


图 5

6.

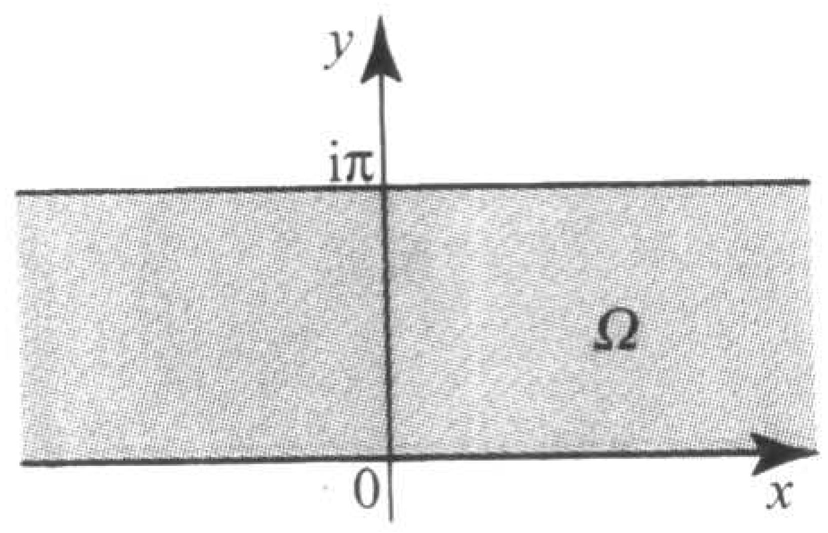


图 6

7. **第一象限中诺伊曼问题的解**. 试证：诺伊曼问题

$$\nabla^2 u(x,y)=0, x,y>0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=g(y)$$

的解是

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}f(x)[\ln((x-x_0)^2+y_0^2)+\ln((x+x_0)^2+y_0^2)]\mathrm{d}x$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}g(y)[\ln(x_0^2+(y-y_0)^2)+\ln(x_0^2+(y+y_0)^2)]\mathrm{d}y.$$

8. 验证下面的积分公式，它出现在如上题的诺伊曼问题求解中，对 a，$b\neq 0$，

$$\int\ln[(x-a)^2+b^2]\mathrm{d}x$$

$$= 2(x-a) + 2b\tan^{-1}\left(\frac{x-a}{b}\right) + (x-a)\ln[(x-a)^2 + b^2] + C.$$

9. (a)已知对所有的 $y>0$，$g(y)=0$；$f(x)=1$ 如果 $0<x<1$，否则为零，求解习题 7 中的问题.

(b)通过直接计算，验证你的答案.

10. **单位圆盘的诺伊曼函数**. 对单位圆盘内的 z 和 z_0，这个函数定义为

$$N(z,z_0) = \begin{cases} \ln|z-z_0| + \ln\left|\dfrac{1}{\overline{z_0}} - z\right| + \ln|z_0| & 若\ z_0 \neq 0, \\ \ln|z| & 若\ z_0 = 0. \end{cases}$$

按照下列步骤，推导这个公式.

(a)记 $z_0 = re^{i\theta}$ 和 $z = \rho e^{i\eta}$，固定 $z_0 \neq 0$，试证：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n}\ln|z-z_0|\Big|_{\rho=1} &= \frac{\partial}{\partial \rho}\frac{1}{2}\ln|z-z_0|^2\Big|_{\rho=1} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \rho}\ln(r^2+\rho^2+2r\rho\cos(\theta-\eta))\Big|_{\rho=1} \\ &= \frac{1+r\cos(\theta-\eta)}{1+r^2+2r\cos(\theta-\eta)}. \end{aligned}$$

(b)记 $\dfrac{1}{\overline{z_0}} = \dfrac{1}{r}e^{i\theta}$，利用(a)，得出结论：

$$\frac{\partial}{\partial n}\ln\left|\frac{1}{\overline{z_0}} - z\right|\Big|_{\rho=1} = \frac{1+\frac{1}{r}\cos(\theta-\eta)}{\left(\frac{1}{r}\right)^2 + 1 + \frac{2}{r}\cos(\theta-\eta)} = \frac{r^2 + r\cos(\theta-\eta)}{1+r^2+2r\cos(\theta-\eta)}.$$

(c)利用(a)和(b)，对 $z_0 \neq 0$，试证：$\dfrac{\partial}{\partial n}N(z,\ z_0)\big|_{|z|=1} = 1$.

(d)对给定的 $N(z,\ z_0)$，验证诺伊曼函数的其他性质.

11. **圆上诺伊曼问题的解**. 利用上一习题的结果，试证：对 $0\leqslant r<1$ 和所有的 θ，$\nabla^2 u(r,\ \theta)=0$；对所有的 θ，满足诺伊曼条件 $\dfrac{\partial u}{\partial r}(1,\ \theta) = f(\theta)$ 的解是

$$u(r,\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\eta)\ln[1+r^2+2r\cos(\theta-\eta)]d\eta.$$

这里，f 满足相容性条件 $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 0$.

690

附录 A　常微分方程：概念和方法的回顾

在所有数学学科中，偏微分方程理论是最重要的，它解释了所有与时间有关的自然现象的初等表现形式.

——索佛斯·李

综述　本章是自封的，仅需要微积分中的微分和积分的基本知识.

导读　本附录介绍了求解线性常微分方程的标准方法，在本书中始终需要用到. 我们主要应用了幂级数和 A.4、A.5 和 A.6 节中的弗罗贝尼乌斯方法，建立了贝塞尔函数(第 4 章)和勒让德多项式(第 5 章)的基本性质.

常微分方程的基本知识对于本书主要论题的发展是非常重要的. 比如，利用标准方法求解偏微分方程自然地导出常微分方程. 在本附录中，对本书有用的基本知识作个回顾，简单介绍了线性常微分方程的核心内容，这些都在微分方程的初级课程里讲解. 在 A.1 节中，介绍解的存在性、唯一性以及线性相关性的基本性质. 其余部分论述关于求解线性常微分方程的基本工具，如级数法. 本章并不作完整的讨论，而是作为本书所需要的论题的方便参考. A1

A.1　线性常微分方程

常微分方程是含有一个未知函数 y 及其 j 阶导数 $y^{(j)}$ 的方程. **线性常微分方程的标准形式**是方程

$$y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=g(x), \tag{1}$$

其中 n 称为方程的**阶**，$p_j(x)$ 和 $g(x)$ 是关于 x 的给定函数. 标准形式这个表述是指首项系数为 1 这个事实. (1)在区间 I 上的**解**是在区间 I 上满足(1)的任意一个 n 次可微函数 $y=y(x)$. 如果 $g(x)\equiv 0$，则方程(1)称为**齐次的**，否则是**非齐次的**.

我们对一阶和二阶方程特别感兴趣. 下面完整描述一阶(线性)方程的解，而在本附录的其余部分讨论二阶方程的解.

定理 1(一阶线性微分方程的解)　*设 $p(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 I 上连续，则一阶线性微分方程*

$$y'+p(x)y=g(x),\qquad x\text{ 在 }I\text{ 内}$$

的任意一个解都具有形式

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[C+\int g(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right], \tag{2}$$

其中 $\int p(x)\mathrm{d}x$ 在两次出现时表示 $p(x)$ 的同一个原函数.

表达式 $\int p(x)\mathrm{d}x$ 表示 $p(x)$ 的原函数，所以它在相差一个常数 C 的意义下是定义好的. 在应用(2)式时，在两次出现 $\int p(x)\mathrm{d}x$ 时，要取相同的 C 值. 通常，最方便的选择是 $C=0$. (参

见例 1.）

证明 假设 y 是解，方程两边同乘以**积分因子** $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$，得到

$$\mu(x)[y'+p(x)y]=g(x)\mu(x).$$

由于 $\mu'(x)=p(x)\mu(x)$，由乘积法则，这个方程可以写成 $[\mu(x)y]'=g(x)\mu(x)$. 两边积分，再除以 $\mu(x)$，得到所求的解.（注意，由于 $\mu(x)$ 是指数函数，对所有的 x，它都不为零，所以我们可以除以它.） ■

例 1 一阶微分方程

利用定理 1，求出微分方程

$$y'-y=2$$

的所有解. 积分因子是 $\mu(x)=e^{-\int dx}=e^{-x}$，因此通解是 $y=e^{x}[C-2e^{-x}]=Ce^{x}-2$，其中 C 是任意常数. ■

A2

在处理高阶方程时，我们就没有这么幸运了，一般而言，此时我们不再有解的闭式. 但是，关于解的一般形式，有一些基本结果，我们将在本节的其余部分讨论. 解可以显式写出来的重要情形将在 A.2 节和 A.3 节介绍. 我们的讨论首先集中于齐次方程

$$y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=0, \tag{3}$$

其中所有的系数在某个固定区间 I 上连续.

首先，我们介绍一个在我们的讨论中起着中心作用的定义.

朗斯基行列式 令 y_1，y_2，…，y_n 是线性齐次微分方程(3)的任意 n 个解. 这些解的**朗斯基行列式** $W(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 由下面的 $n\times n$ 的行列式给出：

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

我们有时利用另外的记号 $W(y_1, y_2, \cdots, y_n)(x)$，或简单地 $W(x)$，来强调朗斯基行列式是 x 的函数.

例 2 计算朗斯基行列式

(a)方程 $y''-y=0$ 有解 $y_1=e^{x}$ 和 $y_2=e^{-x}$. 它们的朗斯基行列式是

$$W(e^{x},e^{-x})=\begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{vmatrix}=e^{x}(-e^{-x})-e^{x}(e^{-x})=-2.$$

(b)方程 $y''+y=0$ 有解 $y_1=\cos x$ 和 $y_2=\sin x$. 它们的朗斯基行列式是

$$W(\cos x,\sin x)=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}=\cos^2x+\sin^2x=1.$$ ■

A3

利用(3)中的系数函数，下面定理给出了朗斯基行列式的一个显式形式.

定理 2（朗斯基行列式的阿贝尔公式） 令 y_1，y_2，…，y_n 是线性齐次线性微分方程(3)的

任意 n 个解，则朗斯基行列式 $W(x)$ 满足一阶微分方程

$$W'(x)+p_{n-1}(x)W(x)=0, \quad \text{对 } I \text{ 内的 } x$$

因此，

$$W(x)=C\mathrm{e}^{-\int p_{n-1}(x)\mathrm{d}x}. \tag{4}$$

从而，或者对 I 内所有的 x 有 $W(x)\neq 0$，或者在 I 内有 $W(x)\equiv 0$.

这个定理的要点是，如果对 I 内某点 x，能确定 $W(x)\neq 0$，我们可以得出结论：对 I 内的所有点 x，$W(x)\neq 0$.

证明 为清楚起见，我们只对 $n=2$ 给出证明.（$n=3$ 情形在习题 31 中讨论.）同样的方法可以推广到高维情形，但是需要线性代数的一些知识. 对 $n=2$，方程是 $y''+p_1(x)y'+p_0(x)y=0$，且 $W(x)=y_1y_2'-y_1'y_2$. 由于 y_1 和 y_2 是解，我们有

$$\begin{aligned}W'(x)&=y_1y_2''-y_1''y_2\\&=y_1[-p_1(x)y_2'-p_0(x)y_2]-[-p_1(x)y_1'-p_0(x)y_1]y_2\\&=-p_1(x)W(x).\end{aligned}$$

[由于关键问题是不知道 W 是否为零，所以不能两边同除以 W 来分离变量. 因此，需要用到定理 1.]

这是关于 $W(x)$ 的一个一阶微分方程，而(4)是定理 1 中(2)式的直接推论. ■

在应用定理 2 时，重要的是将方程写成标准形式，并且验证系数的连续性. 参见习题 23.

现在，我们可以陈述常微分方程理论中的一个基本结果.

定理 3(基本解集的存在性) 齐次微分方程(3)

$$y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=0,$$

其中，在区间 I 上，系数函数 $p_j(x)$ 都是连续的，具有 n 个解 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，它们的朗斯基行列式在区间 I 上不为零. 进一步地，任意给定这样的集合 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 和任意的解 y，则 $y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$，常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是唯一确定的. 朗斯基行列式不为零的解集 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 称为**基本解集**.

定理 3 断言，任意一个 n 阶线性齐次微分方程具有 n 个解，它们可以生成方程的所有解. 请注意，定理并没有断言基本解集的唯一性. 如果 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是基本解集，则**线性组合** $y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$ 称为**通解**. A4

我们已经应用但未证明：齐次线性方程解的线性组合仍然是解. 这个简单的事实，称为叠加原理，可以利用(3)式直接验证. 为方便参考，我们陈述在此.

定理 4(叠加原理) 假设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是线性齐次微分方程(3)的解，令 c 和 d 是任意两个数，则线性组合 $cu(x)+dv(x)$ 也是(3)的解.

非齐次微分方程

由(1)式，我们回忆一般非齐次方程

$$y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=g(x), \tag{5}$$

其中系数函数和 $g(x)$ 都假设在某个区间 I 上连续. 如果 $g(x)$ 改成 0，我们称所得到的方程为**相伴齐次方程**. 由定理 3，我们知道相伴齐次方程具有一个基本解集 $y_1, y_2, \cdots, y_n$. 我们将

在 A.2 节说明，利用参数变易法，(5)式至少具有一个解，我们将记为 y_p，称为**特解**. 现在，假设 y 是(5)式的另外一个解. 可以简单验证，$y-y_p$ 是相伴齐次方程的解. 由定理 3，我们必有 $y-y_p=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$. 因此，如果 y_h 表示相伴齐次方程的通解，则有 $y=y_h+y_p$（称为非齐次方程的**通解**). 我们证明了下面的重要结果.

定理 5(非齐次方程的通解)　*令 y_h 和 y_p 分别表示(5)的相伴齐次方程的通解和(5)的特解，则(5)的任意解具有形式*

$$y=y_h+y_p.$$

在应用中，我们经常需要求解满足某种条件的微分方程，例如

$$y''+y=e^x,\quad y(0)=0,y'(0)=1.$$

这类问题称为**初值问题**，条件称为**初始条件**. 特别地，我们加上足够多的条件，以得到问题的唯一解. 由于 n 阶线性微分方程的通解具有 n 个任意常数，我们希望 n 个条件就足够了.

A5

定理 6(初值问题的存在性和唯一性)　*考虑由线性微分方程(5)和初始条件*

$$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y'_0,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

所构成的初值问题，其中 x_0 在 I 内，y_0，y'_0，…，$y_0^{(n-1)}$ 是预先给定的值，则该问题在区间 I 上具有唯一解.

证明　令 y_p 是(5)的特解，y_1，y_2，…，y_n 是相伴齐次方程的基本解集. 为清楚起见，我们取 $n=2$，虽然其证明可以推广至任意 n. 我们要求解关于未知数 c_1 和 c_2 的 2×2 方程组

$$\begin{cases}c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)+y_p(x_0)=y_0\\ c_1y'_1(x_0)+c_2y'_2(x_0)+y'_p(x_0)=y'_0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=y_0-y_p(x_0)\\ c_1y'_1(x_0)+c_2y'_2(x_0)=y'_0-y'_p(x_0)\end{cases}$$

由于这个方程组的矩阵行列式就是朗斯基行列式，由定义它是非零的(见定理 3)，因此该方程组具有唯一一对解 c_1，c_2. 这个就证明了初值问题解的存在性. 为确定解的唯一性，假设 $u(x)$ 和 $v(x)$是初值问题的两个解. 令 $w=u-v$，则 w 满足相伴齐次方程和 0 初值. 由定理 3，我们知道：对某个 a 和b，$w=ay_1+by_2$. 现在利用 w 的初值，以及事实 $W(y_1,y_2)(x_0)\neq0$，我们得到 $a=b=0$，因而 $w\equiv0$，即得 $u\equiv v$. ■

例 3　**初值问题**

可以(也应该)验证：方程 $y''-3y'+2y=4x$ 有特解 $y_p=2x+3$，而相伴齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 有通解$y_h=c_1e^x+c_2e^{2x}$. (推导这些解的一般方法将在下面两节介绍.)因此，非齐次方程的通解是

$$y=y_h+y_p=c_1e^x+c_2e^{2x}+2x+3$$

(见图 1). 现在，假设我们希望求解初值问题

$$y''-3y'+2y=4x,\quad y(0)=4,y'(0)=2.$$

利用初始条件，我们得到

$$y(0)=4\Rightarrow c_1+c_2=1,$$
$$y'(0)=2\Rightarrow c_1+2c_2=0.$$

这个方程组具有唯一解 $c_1=2$ 和 $c_2=-1$. 因此，初值问题的(唯一)解是 $y=2e^x-e^{2x}+2x+3$ (图 2).

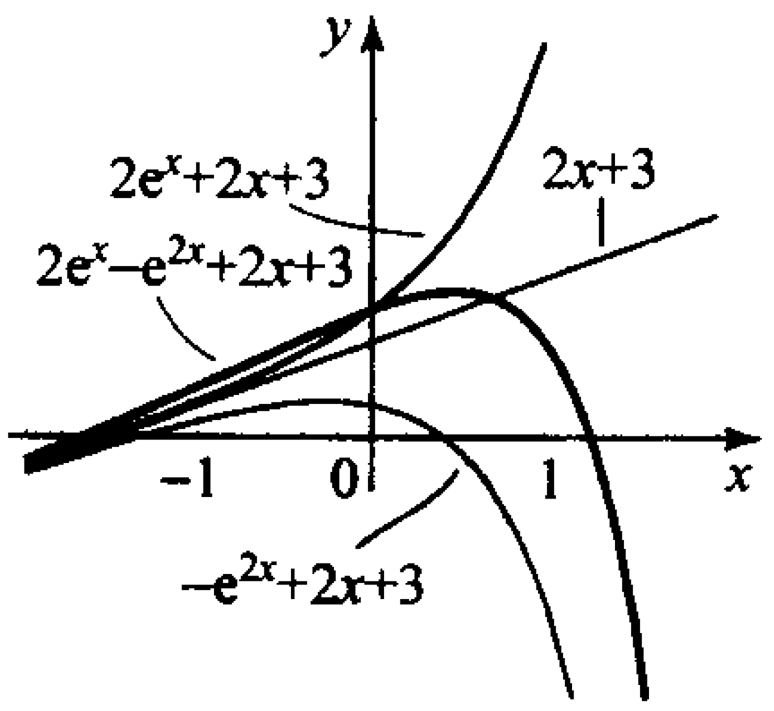


图 1 例 3 的若干解

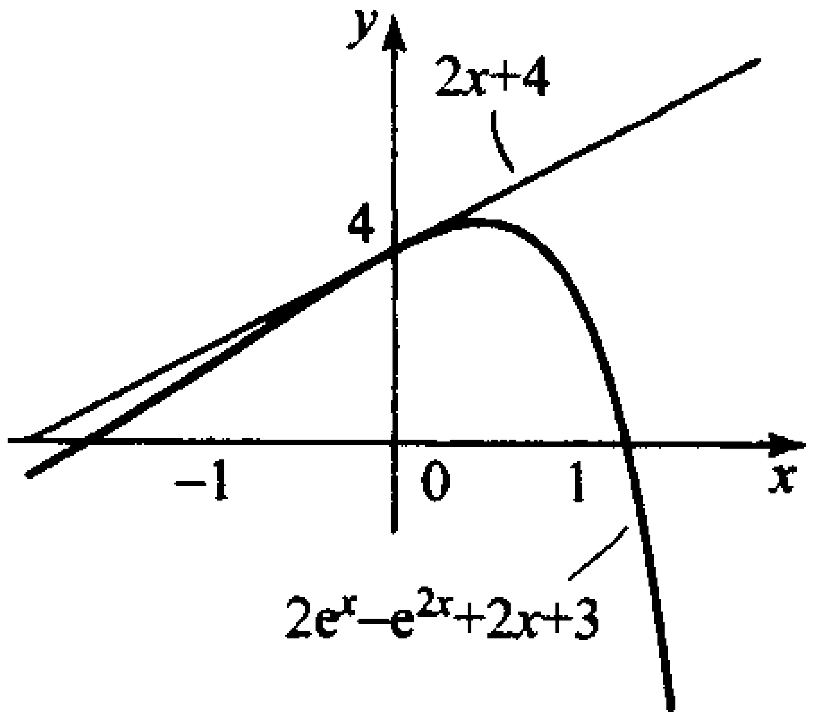


图 2 例 3 中初值问题的解和它在 $x=0$ 处的切线. 它是图 1 中唯一经过(0, 4)且在 $x=0$ 处斜率为 $y'(0)=2$ 的曲线 ■ A6

下面我们简单讨论一下解的线性无关性及其与基本集的联系.

定义在区间$[a, b]$上的函数组 f_1，f_2，…，f_n 称为在$[a, b]$上是**线性无关的**，如果使得线性组合 $c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_nf_n$ 在$[a, b]$上恒为零的常数 c_1，c_2，…，c_n 的唯一选择是 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$. 否则函数组称为是**线性相关的**. 当 $n=2$ 时，我们注意到线性相关等价于一个函数是另一个函数的常数倍. 下面的结果说明了线性无关性概念与基本集之间的联系.

定理 7(线性无关的朗斯基行列式判别法) 令 y_1，y_2，…，y_n 是系数在区间 I 上连续的齐次线性微分方程(3)的任意 n 个解，下列说法等价：

(i)y_1，y_2，…，y_n 在 I 上线性无关.

(ii)y_1，y_2，…，y_n 构成(3)的一个基本解集.

(iii)$W(y_1, y_2, \cdots, y_n)(x_0)\neq 0$ 对 I 内某个 x_0 成立.

(iv)$W(y_1, y_2, \cdots, y_n)(x)\neq 0$ 对 I 内所有的 x 成立.

证明 由定理 2 和 3，以及基本集的定义，显然有(ii)⇒(iii)⇒(iv). 我们只需证明：(i)⇒(iii)和(iii)⇒(i). 首先，我们证明(iii)⇒(i). 假设 y_1，y_2，…，y_n 是 n 个解，使得 $c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n=0$. 对这个方程连续微分 $n-1$ 次，再令 $x=x_0$，我们得到关于 n 个未知数 c_1，c_2，…，c_n 的 n 个线性齐次方程组. 这个系统的矩阵行列式就是朗斯基行列式 $W(x_0)$，由假设它非零. 这个行列式非零就蕴涵着 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$，从而证明了(iii)⇒(i). 为完成证明，只需证(i)⇒(iii). 用反证法证明，我们假设 y_1，y_2，…，y_n 在 I 上线性无关，并且 $W(y_1, y_2, \cdots, y_n)(x_0)=0$. 朗斯基行列式为零蕴涵着，存在不全为零的常数 c_1，c_2，…，c_n，使得 $y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$ 在 x_0 处的所有初始值都为零(对 $n=2$，这是显然的). 但是，解 $w\equiv 0$ 具有同样的初始值，所以由定理 6 的唯一性部分，有 $w\equiv y\equiv 0$，由线性无关性的定义，得到 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$，矛盾！ ■

例 4 **基本解集，线性无关性**

在例 2 中，我们知道 e^x 和 e^{-x}是 $y''-y=0$ 的解，而 $W(e^x, e^{-x})=-2\neq 0$. 因此，由定理 7，微分方程的通解具有形式 $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$；因而任意一个解都是 e^x 和 e^{-x}的线性组合，所以它们构成基本解集.

值得注意的是，基本解集不是唯一的，对于这个方程，可以验证 $\cosh x$ 和 $\sinh x$ 也是解，

它们的朗斯基行列式是

$$W(\cosh x,\sinh x)=\begin{vmatrix}\cosh x & \sinh x\\ \sinh x & \cosh x\end{vmatrix}=\cosh^2 x-\sinh^2 x=1.$$

A7 因此，由定理 7，微分方程的通解也具有形式 $y=c_1\cosh x+c_2\sinh x$. ■

至此，我们对线性微分方程解的一般形式有了认识，但是除了一阶方程，我们还没有研究求解显式解的方法. 这将占据本附录剩余部分，后面我们将研究求解某些重要类型的高阶线性微分方程的方法.

习题 A.1

在习题 1～10 中，求解给定的一阶微分方程.

1. $y'+y=1$.
2. $y'+2xy=x$.
3. $y'=-0.5y$.
4. $y'=2y+x$.
5. $y'-y=\sin x$.
6. $y'-2xy=x^3$.
7. $xy'+y=\cos x$.
8. $y'-\frac{2}{x}y=x^2$.
9. $y'+\tan x\, y=\cos x$.
10. $y'+\tan x\, y=\sec^2 x$.

在习题 11～20 中，求解给定的初值问题.

11. $y'=y$，$y(0)=1$.
12. $y'+2y=1$，$y(0)=2$.
13. $y'+xy=x$，$y(0)=0$.
14. $y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$，$y(\pi)=1$.
15. $xy'+2y=1$，$y(-1)=-2$.
16. $xy'-2y=\frac{1}{x}$，$y(1)=0$.
17. $y'+y\tan x=\tan x$，$y(0)=1$.
18. $y'+y\tan x=\tan x$，$y(0)=2$.
19. $y'+e^x y=e^x$，$y(0)=2$.
20. $y'+y=e^x$，$y(3)=0$.
21. (a)验证函数

$$e^x, e^{-x}, \cosh x, \sinh x$$

是方程

$$y''-y=0$$

的解.

(b)由例 4，我们知道，$\{e^x, e^{-x}\}$和$\{\cosh x, \sinh x\}$是基本解组. 将 e^x 表示成函数$\{\cosh x, \sinh x\}$的线

性组合.

(c)你可以想起其他的基本解组吗?

22. (a)验证函数 e^x，e^{-x}，$\cosh x$ 是

$$y''' - y' = 0$$

的解.

(b)直接验证 $W(e^x, e^{-x}, \cosh x) \equiv 0$，进而得出结论：这些函数不构成一个基本集.

(c)由观察，求出一个基本解组，通过计算朗斯基行列式，验证之.

23. (a)验证函数 x，x^2 是

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

的解. A8

(b)计算解的朗斯基行列式.

(c)注意到朗斯基行列式在 $x=0$ 点处为零，这与定理 2 矛盾吗?

24. (a)验证函数 e^x，$1+x$ 是

$$xy'' - (1+x)y' + y = 0$$

的解.

(b)验证这两个函数都满足 $y(0)=1$ 和 $y'(0)=1$. 这与定理 6 的唯一性部分矛盾吗?

(c)计算解的朗斯基行列式，并得出它们在$(0, \infty)$上线性无关的结论.

在习题 25～30 中，求解由例 3 中微分方程组成的初值问题.

25. $y(0)=0$，$y'(0)=0$.

26. $y(0)=1$，$y'(0)=-1$.

27. $y(1)=0$，$y'(1)=2$.

28. $y(1)=1$，$y'(1)=-1$.

[提示：在习题 27 和 28 中，对 $y_h=c_1e^{(x-1)}+c_2e^{2(x-1)}$ 做更方便. 为什么?]

29. $y(2)=0$，$y'(2)=1$.

30. $y(3)=3$，$y'(3)=3$.

[提示：在习题 29～30 中，如前面的习题，使用 y_h 以简化计算.]

31. **专题问题：$n=3$ 时的阿贝尔公式.**

(a)令 y_1，y_2，y_3 是三阶方程

$$y''' + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

的任意三个解. 对朗斯基行列式，推导公式

$$W(y_1, y_2, y_3) = (y_2y_3' - y_2'y_3)y_1'' - (y_1y_3' - y_1'y_3)y_2'' + (y_1y_2' - y_1'y_2)y_3''$$

和

$$W'(y_1, y_2, y_3) = (y_2y_3' - y_2'y_3)y_1''' - (y_1y_3' - y_1'y_3)y_2''' + (y_1y_2' - y_1'y_2)y_3'''.$$

(b)按照定理 2 的证明，验证：

$$W' = -p_2(x)W.$$

(c)对 $n=3$，推导阿贝尔公式.

32. (a)对所有的 x，验证 $W(x^3, |x^3|)=0$.（对所有的 x，函数 $|x^3|$ 是可微的. 你知道为什么吗?）

(b)但是验证 x^3，$|x^3|$ 在整个实线上是线性无关的.

(c)这与定理 7 矛盾吗? 给出你的理由. A9

A.2 常系数线性常微分方程

n 阶常系数齐次线性微分方程的一般形式是

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{1}$$

其中每个 a_j 是常数，$a_n \neq 0$. 两边除以首项系数 a_n，方程可以写成标准形式. 这类重要的方程在本书的所有地方都要用到. 我们的叙述将强调二阶情形，它是最重要的情形.

(1)式的一阶简单情形提示我们：在求解一般情形时尝试

$$y = e^{\lambda x},$$

由于

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \cdots, y^{(n-1)} = \lambda^{n-1} e^{\lambda x}, y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x},$$

代入(1)式，我们得到

$$(a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} = 0.$$

因此，$y = e^{\lambda x}$ 是(1)的解，如果 λ 是**特征方程**

$$\boxed{a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0}$$

的任意一个根. 这个方程的根称为**特征根**. 为将来应用，我们定义**特征多项式**

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

在特征多项式具有 n 个互异特征根 λ_1，λ_2，…，λ_n 情形时，(1)的通解是

$$\boxed{y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}.}$$

等价地，基本解集是

$$\boxed{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \cdots, e^{\lambda_n x}.} \tag{2}$$

A10 这由朗斯基行列式 $W(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \cdots, e^{\lambda_n x})$ 不为零可得. 参见习题 77.

例 1 双曲函数

方程 $y'' - \mu^2 y = 0\ (\mu > 0)$ 在本书中经常出现，它的特征方程是

$$\lambda^2 - \mu^2 = 0,$$

特征根为 $\lambda_1 = \mu$ 和 $\lambda_2 = -\mu$. 因此，基本解集是 $\{e^{\mu x}, e^{-\mu x}\}$. 正如我们在前一节例 4 后面观察到的，基本解集不是唯一的. 事实上，现在我们来描述另外一个集合，它在某些应用中更为方便. 回顾双曲函数的定义

$$\cosh\mu x = \frac{e^{\mu x} + e^{-\mu x}}{2} \quad 及 \quad \sinh\mu x = \frac{e^{\mu x} - e^{-\mu x}}{2}.$$

由于它们是基本解集中函数的线性组合，它们本身也是微分方程的解. 利用导数公式

$$\frac{d}{dx}\cosh\mu x = \mu\sinh\mu x \quad 及 \quad \frac{d}{dx}\sinh\mu x = \mu\cosh\mu x$$

也可以直接验证这个论断. 计算 $\cosh\mu x$ 和 $\sinh\mu x$ 的朗斯基行列式，我们得到

$$W(\cosh\mu x, \sinh\mu x) = \begin{vmatrix} \cosh\mu x & \sinh\mu x \\ \mu\sinh\mu x & \mu\cosh\mu x \end{vmatrix} = \mu\overbrace{(\cosh^2\mu x - \sinh^2\mu x)}^{=1} = \mu \neq 0.$$

由附录 A. 1 节定理 7($n=2$)，我们得出，$\cosh\mu x$ 和 $\sinh\mu x$ 构成基本解集，因而微分方程通解具有形式 $y=c_1\cosh\mu x+c_2\sinh\mu x$. 图 1 中的图像说明了 $\cosh\mu x$ 和 $\sinh\mu x$ 的基本性质. ■

例 2　具有互异根的特征方程

三阶方程 $y'''-y''-6y'=0$ 具有特征方程

$$\lambda^3-\lambda^2-6\lambda=0.$$

由这个方程分解因式 $\lambda(\lambda-3)(\lambda+2)=0$，我们得到特征根 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=3$，$\lambda_3=-2$. 因此，微分方程的通解是 $y=c_1+c_2e^{3x}+c_3e^{-2x}$. 注意到 $\{1, e^{3x}, e^{-2x}\}$ 是基本解集. 请验证 $W(1, e^{3x}, e^{-2x})\neq 0$. ■

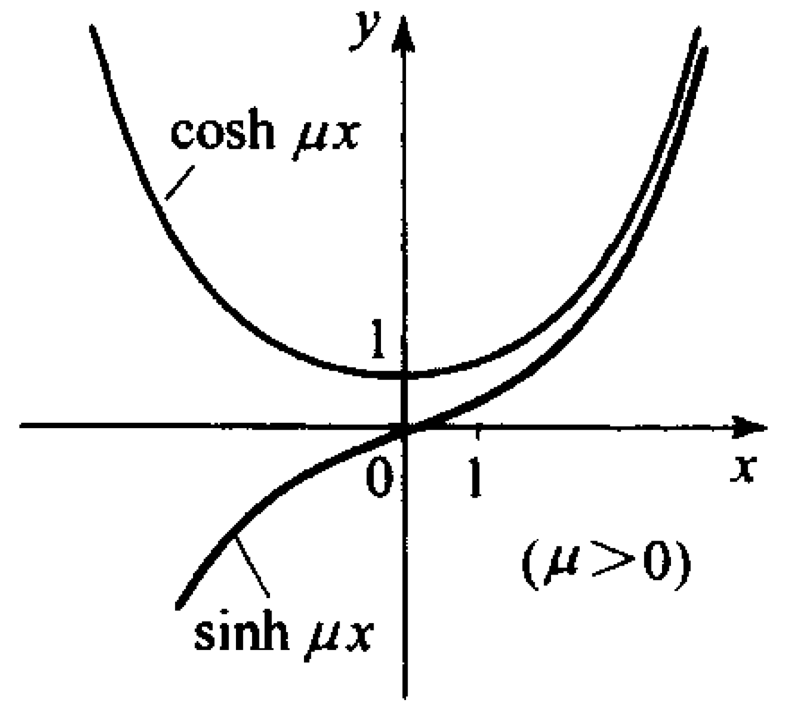


图 1　双曲余弦和双曲正弦($\mu>0$)：$\cosh\mu x$ 是偶的，对所有的 x，$\cosh\mu x\geqslant 1$；$\sinh\mu x$ 是奇的，$\sinh\mu x=0$ 当且仅当 $x=0$

对于具有 n 个互异根情形，即使当某个或所有特征根都是复数时，(2)中的函数仍然可以用作基本集. 但是，因为应用的原因，我们更希望得到实值函数. 这可以由下面的事实得到，对于实系数多项式的任意非实根 $\mu=\alpha+i\beta(\beta\neq 0)$，它的复共轭 $\bar{\mu}=\alpha-i\beta$ 也是根(图 2). 我们以一个简单而重要的例子来说明这个技巧.

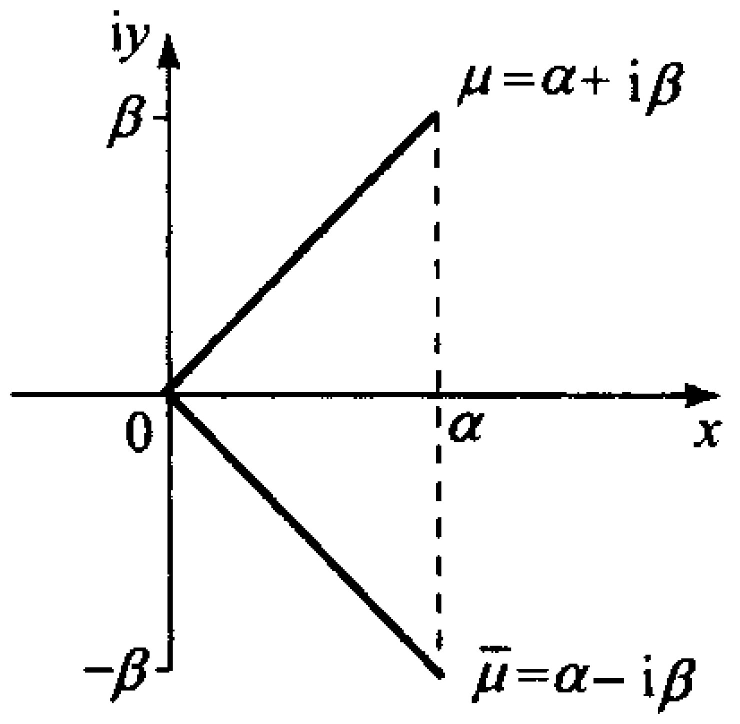


图 2　复数 $\mu=\alpha+i\beta(\beta\neq 0)$ 及其复共轭 $\bar{\mu}=\alpha-i\beta$

例 3　三角函数

$y''+k^2y=0(k>0)$ 的特征方程是

$$\lambda^2+k^2=0.$$

它的特征根是 $\lambda_1=ik$ 和 $\lambda_2=-ik$. 因此，基本解集是 $\{e^{ikx}, e^{-ikx}\}$. 现在，我们描述另外一个由实值函数构成的基本解集. 这个构造方式与前一个例题中构造双曲余弦和双曲正弦类似，回顾欧拉恒等式：$e^{ikx}=\cos kx+i\sin kx$. 考虑下面的解，它是通过对基本解集作特殊线性组合而得到的：

$$\begin{aligned}y_1&=\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}=\frac{1}{2}(\cos kx+i\sin kx+\cos kx-i\sin kx)\\&=\cos kx.\end{aligned}$$

A11

因此，$y_1=\cos kx$ 是微分方程的解，这个事实可以直接验证. 类似地，线性组合 $(e^{ikx}-e^{-ikx})/2i$ 得到解 $y_2=\sin kx$. 显然，y_1 和 y_2 是实值的，且线性无关(验证它们的朗斯基行列式). 因此，$y''+k^2y=0(k>0)$ 的通解是 $y=c_1\cos kx+c_2\sin kx$. ■

在上一个例题中，特征根都是纯虚数(它们的实部为 0). 下一个例题将给出具有非零实部的特征根情形，其解涉及实指数函数与正弦函数、余弦函数.

例 4　复特征根

方程 $y''-4y'+5y=0$ 的特征根是 $\lambda_1=2+i$ 和 $\lambda_2=2-i$. 由(2)式，函数 $e^{(2+i)x}$ 和 $e^{(2-i)x}$ 构成基本解集. 下面，我们说明如何得到实值解. 利用欧拉恒等式，$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，我们有

$$e^{(2+i)x}=e^{2x}e^{ix}=e^{2x}(\cos x+i\sin x).$$

类似地，$e^{(2-i)x}=e^{2x}(\cos x-i\sin x)$. 作这两个函数的和与差，我们得到解 $2e^{2x}\cos x$ 和$2ie^{2x}\sin x$. 因此，$e^{2x}\cos x$ 和 $e^{2x}\sin x$ 是两个实值解. 我们有

$$\begin{aligned}W(e^{2x}\cos x,e^{2x}\sin x)&=\begin{vmatrix}e^{2x}\cos x & e^{2x}\sin x\\ e^{2x}(2\cos x-\sin x) & e^{2x}(2\sin x+\cos x)\end{vmatrix}\\&=e^{4x}((2\sin x+\cos x)\cos x-(2\cos x-\sin x)\sin x)\\&=e^{4x}(\cos^2 x+\sin^2 x)=e^{4x}\neq 0.\end{aligned}$$

我们得出结论：$e^{2x}\cos x$ 和 $e^{2x}\sin x$ 构成基本解集. 请注意，在两个解时，通过简单地观察一个不是另外一个的常数倍，我们可以验证解集是基本的. ■

A12

一般地，当我们有复特征根时，这些根是成共轭对出现的. 对每对非实特征根 $\mu=\alpha\pm i\beta$，在(2)中将函数对 $e^{\mu x}$，$e^{\bar{\mu}x}$换成

$$\boxed{e^{\alpha x}\cos\beta x,e^{\alpha x}\sin\beta x}\tag{3}$$

就得到一个由实值解构成的基本解集. 我们以另外一个例题来说明复根对情形.

例 5　复特征根对

求出 $y'''-y=0$ 的基本解集.

解　首先，我们求出特征根：

$$\begin{aligned}&\lambda^3-1=0\Rightarrow(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)=0\\&\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\lambda_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

我们得到一个实根和两个复共轭根. 对应于实根，存在解 $y_1=e^x$，而对应于复共轭根对，存在两个解 $y_2=e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$和 $y_3=e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. 函数 y_1，y_2 和 y_3 构成基本解集. ■

至此，我们还没有处理重数 $m>1$ 的特征多项式的重根 μ 情形. 如果试图利用(2)式，将得到重复 m 次的函数 $e^{\mu x}$，因而不能得到基本解集. 下面的例题说明如何求解这个问题.

例 6　特征多项式的重根

(a)二阶方程 $y''+2y'+y=0$ 具有特征多项式$(\lambda+1)^2$，它有重数为 2 的根-1. 方程的一个解是 e^{-x}，简单验证说明函数 xe^{-x}也是微分方程的解，并且与 e^{-x}线性无关. 我们得出，e^{-x}和 xe^{-x}构成一个基本解集(图 3). (我们注意到，下节介绍的降阶法提供了一种得到第二个解 xe^{-x}的直接方法.)

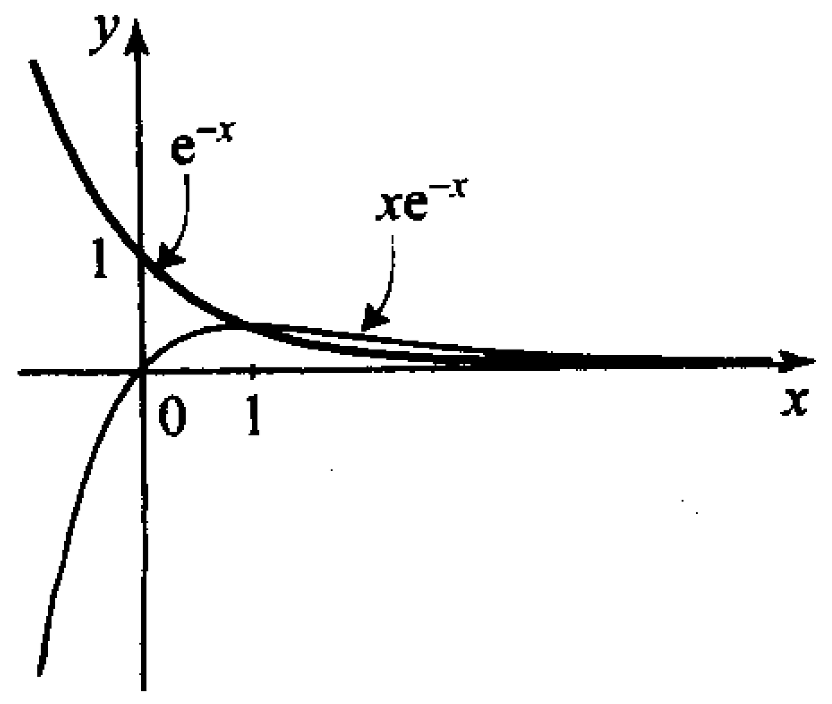


图　3

(b)三阶方程 $y'''-6y''+12y'-8y=0$ 具有特征多项式$(\lambda-2)^3$，它有重数为 3 的根 2. 方程的一个解是 e^{2x}. 由前一个例题提示，我们尝试 $y=xe^{2x}$作为第二个解. 我们有

$$y' = e^{2x}(1+2x), \quad y'' = 4e^{2x}(1+x), \quad y''' = 4e^{2x}(3+2x).$$

代入方程，我们得到

$$4e^{2x}(3+2x) - 24e^{2x}(1+x) + 12e^{2x}(1+2x) - 8xe^{2x} = 0.$$

A13

因此，$y=xe^{2x}$是一个解．对于微分方程的第三个解，我们修改第一个解，乘以 x^2，尝试 $y=x^2e^{2x}$．可以验证

$$y' = 2xe^{2x}(1+x), \quad y'' = 2e^{2x}(1+4x+2x^2), \quad y''' = 4e^{2x}(3+6x+2x^2),$$

因而，x^2e^{2x}是解．容易验证解 e^{2x}，xe^{2x}，x^2e^{2x}是线性无关的，因此，它们构成微分方程的一个基本解集． ■

这个例题启发了在出现多重根时，求出(1)基本解集的方法，令 μ 是重数为 m 的重根．在(2)中，将出现 m 次的 $e^{\mu x}$ 换成如下 m 个函数：

$$\boxed{e^{\mu x}, xe^{\mu x}, \cdots, x^{m-1}e^{\mu x}.} \tag{4}$$

请注意，对应于重数为 m 的重根，存在 m 个线性无关的解．为得到(1)的基本解集，对每个重特征根都作如此替换．(记住，重数 m 对不同的根会改变的.)

最后，如果 $\mu=\alpha+i\beta$ 是重数为 m 的非实重特征根，为得到实值函数所构成的基本解集，我们将前面的方法结合起来，求出对应于根 μ 和$\bar{\mu}$的 $2m$ 个函数：

$$\boxed{\begin{aligned} &e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \cdots, x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x; \\ &e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \cdots, x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{aligned}} \tag{5}$$

为查阅方便，我们将关于(1)的通解的结果叙述在下面．为方便起见，将单特征根看成是重数为 $m=1$ 的根．

A14

n 阶常系数齐次线性方程的通解 *考虑方程*

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

特征方程为

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

微分方程的通解是按照特征方程根的情况如下构造出来的.

情形Ⅰ：*对每个重数为 $m\geq 1$ 的实根 μ，我们包含形如*

$$c_1e^{\mu x} + c_2xe^{\mu x} + \cdots + c_m x^{m-1}e^{\mu x}$$

的线性组合.

情形Ⅱ：*对每个重数为 $m\geq 1$ 的非实根 $\mu=\alpha+i\beta$ 及其复共轭$\bar{\mu}=\alpha-i\beta$，我们包含形如*

$$c_1e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2xe^{\alpha x}\cos\beta x + \cdots + c_m x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$+d_1e^{\alpha x}\sin\beta x + d_2xe^{\alpha x}\sin\beta x + \cdots + d_m x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

的线性组合.

例 7 **四阶方程**

求出下列方程的通解：

(a) $y^{(4)}-16y=0$.

(b) $y^{(4)}+2y''+y=0$.

解 (a)特征方程 $\lambda^4-16=0$，具有特征根 ± 2 和 $\pm 2\mathrm{i}$. 因此，通解是

$$y=c_1\mathrm{e}^{2x}+c_2\mathrm{e}^{-2x}+d_1\cos 2x+d_2\sin 2x.$$

(b)特征方程是

$$(\lambda^2+1)^2=0 \quad 或 \quad (\lambda-\mathrm{i})^2(\lambda+\mathrm{i})^2=0.$$

因此，特征根是 i 和 $-$i，每个重数都是 2. 因而，通解是

$$y=c_1\cos x+c_2x\cos x+d_1\sin x+d_2x\sin x.$$

通过对常数 c_1，c_2，d_1，d_2 取不同的值，图 4 画出了几个特解.

对于二阶情形，通解具有相对简单的形式，描述如下. 在习题中，将要求验证这些解. ■

A15

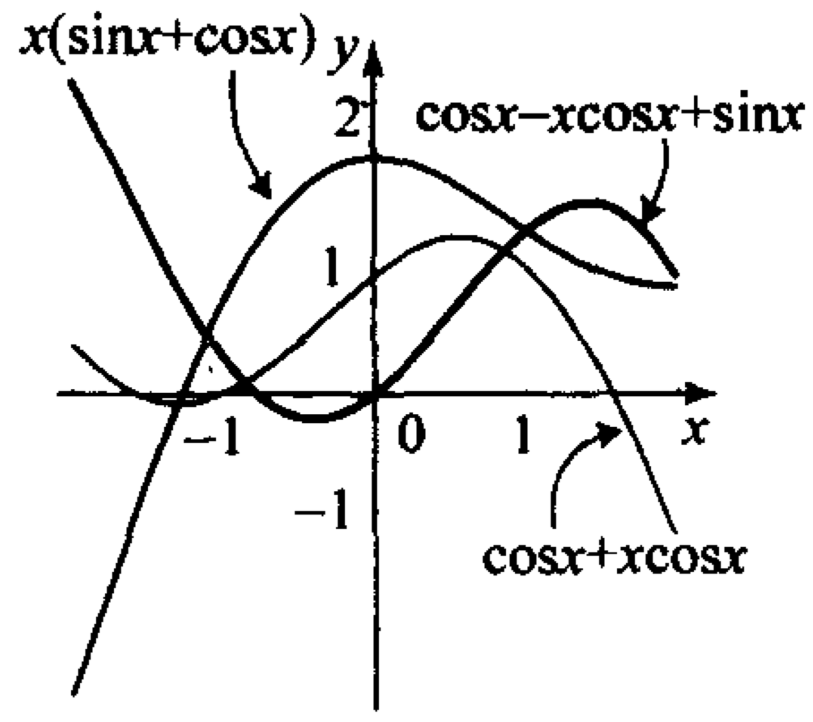


图 4 例 7(b)中不同的解

二阶常系数齐次线性方程的通解 考虑方程

$$ay''+by'+cy=0, \tag{6}$$

特征方程为

$$a\lambda^2+b\lambda+c=0.$$

令 λ_1 和 λ_2 表示特征根，这个微分方程的通解由下面情形之一给出.

情形Ⅰ：如果 λ_1 和 λ_2 是互异实根，则

$$y=c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}.$$

等价地，记 $\lambda_1=\dfrac{-b}{2a}+\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\alpha+\beta$，以及 $\lambda_2=\alpha-\beta$，则

$$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(c_1\cosh\beta x+c_2\sinh\beta x).$$

情形Ⅱ：如果 $\lambda_1=\lambda_2$，则

$$y=c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+c_2x\mathrm{e}^{\lambda_1 x}.$$

情形Ⅲ：如果 λ_1 和 λ_2 是共轭复根，$\lambda_1=\alpha+\mathrm{i}\beta$，则

$$y=c_1\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x+c_2\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x.$$

现在，我们将注意力转到二阶常系数非齐次方程上.

待定系数法

不同物理系统的研究经常导出方程

$$ay''+by'+cy=g(x). \tag{7}$$

相伴齐次方程的通解 y_h 已经显式地给出，因此由前一节定理 5，为求出(7)的通解，只需求出一个特解 y_p. y_p 的求法依赖于非齐次项 g. 在许多有趣的情形中，g 的形式允许我们在相差某些未知系数意义下猜出 y_p 的形式. 这个方法称为**待定系数法**. 我们以例题来说明这个方法，我们也要注意，在不能运用待定系数法时，我们可以利用参数变易法，下节将介绍.

A16

例 8　简单待定系数问题

求出给定非齐次方程的通解.

(a) $y''-4y'+5y=e^{x}$.　　　　(b) $y''+2y'+y=e^{-x}$.

解　(a)相伴齐次方程在例 4 中求解过. 我们有 $y_h=c_1e^{2x}\cos x+c_2e^{2x}\sin x$. 为确定通解，尚需求出 y_p. 由于方程右端是 e^{x}，有理由尝试 $y_p=Ae^{x}$，其中 A 是待定的未知常数. 计算表明 $y_p''-4y_p'+5y_p=2Ae^{x}$. 为使 y_p 是解，我们必须令 $A=\frac{1}{2}$. 因此，通解是 $y=c_1e^{2x}\cos x+c_2e^{2x}\sin x+\frac{1}{2}e^{x}$.

(b)相伴齐次方程在例 6 中求解过. 我们有 $y_h=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$. 为求出 y_p，尝试 Ae^{-x} 和 Axe^{-x} 都是无意义的，因为它们两个都是齐次方程的解. 我们将我们的猜测修改为 $y_p=Ax^2e^{-x}$. 对 y_p 求微分，我们得到

$$y_p'=2Axe^{-x}-Ax^2e^{-x},\quad y_p''=2Ae^{-x}-4Axe^{-x}+Ax^2e^{-x}.$$

因此，$y_p''+2y_p'+y_p=2Ae^{-x}$. 为使 y_p 是解，我们必须令 $A=\frac{1}{2}$. 因此，通解是 $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+\frac{1}{2}x^2e^{-x}$. ■

上面所用的过程可以归纳成一般性的结果.

待定系数法　当

$$g(x)=(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0)e^{\alpha x}\begin{cases}\cos\beta x\\ \sin\beta x\end{cases}\tag{8}$$

时，为求出(7)的特解，我们利用

$$\begin{aligned}y_p=&(A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\cdots+A_0)e^{\alpha x}\cos\beta x\\&+(B_nx^n+B_{n-1}x^{n-1}+\cdots+B_0)e^{\alpha x}\sin\beta x.\end{aligned}\tag{9}$$

假设 y_p 的表达式中每一项都不是相伴齐次方程的解. 否则，我们乘以 x 或 x^2，以修改这个表达式. 我们利用 x，如果相伴齐次方程的特征多项式具有不同的根；用 x^2，如果它具有一个二重根.

叠加法则　如果(7)式右端是几个形如(8)式的不同函数之和，我们采用形如(9)式相应项的和式.

A17

例 9　待定系数法

利用待定系数法，求出

$$y''-3y'+2y=x^3$$

的通解.

解　直接可得 $y_h=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$. 由(9)式，我们知道 $y_p=Ax^3+Bx^2+Cx+D$. 请注意，没有一项出现在 y_h 的表达式中. 我们有

$$\begin{aligned}y_p''-3y_p'+2y_p&=6Ax+2B-3(3Ax^2+2Bx+C)+2(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\\&=2Ax^3+(-9A+2B)x^2+(6A-6B+2C)x+2B-3C+2D.\end{aligned}$$

为使 y_p 是解，A，B，C 和 D 必须满足

$$\begin{aligned} 2A \quad &= 1 \\ -9A+2B \quad &= 0 \\ 6A-6B+2C \quad &= 0 \\ 2B-3C+2D &= 0 \end{aligned}$$

这个线性系统的解是 $A=\frac{1}{2}$，$B=\frac{9}{4}$，$C=\frac{21}{4}$，$D=\frac{45}{8}$. 因此，

$$y_p = \frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{21}{4}x + \frac{45}{8},$$

加上 y_h 就得到通解. ■

例 10　待定系数法

利用待定系数法，求出

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \cos x$$

的通解.

解　按照(9)式，我们取 $y_p = Ae^x\cos x + Be^x\sin x$. 由于没有一项出现在 y_h 的表达式中(见例 9)，所以不需要作修改. 现在，$y_p' = (A+B)e^x\cos x + (-A+B)e^x\sin x$ 和 $y_p'' = 2Be^x\cos x - 2Ae^x\sin x$，因而，

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = -(A+B)e^x\cos x + (A-B)e^x\sin x.$$

为使 y_p 是解，我们必须求解 $A+B=-1$ 和 $A-B=0$. 由此，我们得到 $y_p = -\frac{1}{2}e^x\cos x - \frac{1}{2}e^x\sin x$，因而，通解是

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} - \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x).$$ ■

例 11　利用叠加法则

考虑方程 $y''+4y=e^{-2x}+3\sin 2x$. 易知，

$$y_h = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x.$$

A18　e^{-2x}项要求 y_p 中有 Ae^{-2x}项. $3\sin 2x$ 项暗示了表达式 $B\cos 2x + C\sin 2x$，但是因为这些项出现在 y_h 中，我们必须引入另外一个因子 x(特征多项式具有不同的根). 因此，我们取

$$y_p = Ae^{-2x} + Bx\cos 2x + Cx\sin 2x.$$

像前面那样，解出 A，B 和 C，我们得到 $y_p = \frac{1}{8}e^{-2x} - \frac{3}{4}x\cos 2x$. ■

请注意，虽然例 11 中方程的非齐次项 $g(x)$没有余弦项，但是特解确实含有. 这强调了在 y_p 中同时包含余弦和正弦的必要性，即使只有一项出现在 $g(x)$中.

习题 A.2

在习题 1～24 中，求出给定方程的通解.

1. $y''-4y'+3y=0$.
2. $y''-y'-6y=0$.

3. $y''-5y'+6y=0$.

4. $2y''-3y'+y=0$.

5. $y''+2y'+y=0$.

6. $4y''-13y'+9y=0$.

7. $4y''-4y'+y=0$.

8. $4y''-12y'+9y=0$.

9. $y''+y=0$.

10. $9y''+4y=0$.

11. $y''-4y=0$.

12. $y''+3y'+3y=0$.

13. $y''+4y'+5y=0$.

14. $y''-2y'+5y=0$.

15. $y''+6y'+13y=0$.

16. $2y''-6y'+5y=0$.

17. $y'''-2y''+y'=0$.

18. $y'''-3y''+2y=0$.

19. $y^{(4)}-2y''+y=0$.

20. $y^{(4)}-y=0$.

21. $y'''-3y''+3y'-y=0$.

22. $y'''+y=0$.

23. $y^{(4)}-6y''+8y'-3y=0$.

24. $y^{(4)}+4y'''+6y''+4y'+y=0$.

在习题 25～44 中，利用待定系数法，求出给定方程的通解.

25. $y''-4y'+3y=e^{2x}$.

26. $y''-y'-6y=e^{x}$.

27. $y''-5y'+6y=e^{x}+x$.

28. $2y''-3y'+y=e^{2x}+\sin x$.

29. $y''-4y'+3y=xe^{-x}$.

30. $y''-4y=\cosh x$.

31. $y''+4y=\sin^2 x$.

32. $y''+4y=x\sin 2x$.

33. $y''+y=\cos^2 x$.

34. $y''+2y'+2y=e^{-x}\cos x$.

35. $y''+2y'+y=e^{-x}$.

36. $y''+2y'+y=xe^{-x}+6$.

37. $y''-y'-2y=x^2-4$.

38. $y''+y'-2y=2x^2+xe^{x}$.

39. $y'+2y=2x+\sin x$.

40. $y'+2y=\sin x$.

41. $2y'-y=e^{2x}$.

42. $y'-7y=e^{x}+\cos x$.

43. $y''+9y=\sum_{n=1}^{6}\frac{\sin nx}{n}$.

44. $y''+y=\sum_{n=1}^{6}\frac{\sin 2nx}{n}$.

在习题 45～54 中，求出相伴齐次方程的解，陈述特解的形式. 不必求解系数，但是必须乘以 x 或 x^2，作适当修改.

45. $y''-4y'+3y=e^{2x}\sinh x$.

46. $y''-4y'+3y=e^{x}\sinh 2x$.

A19 47. $y''+2y'+2y=\cos x+6x^2-e^{-x}\sin x$.

48. $y^{(4)}-y=\cosh x+\cosh 2x$.

49. $y''-3y'+2y=3x^4e^x+xe^{-2x}\cos 3x$.

50. $y''-3y'+2y=x^4e^{-x}+7x^2e^{-2x}$.

51. $y''+4y=e^{2x}(\sin 2x+2\cos 2x)$.

52. $y''+4y=x\sin 2x+2e^{2x}\cos 2x$.

53. $y''-2y''+y=6x-e^x$.

54. $y''-3y'+2y=e^x+3e^{-2x}$.

在习题 55～60 中，求出给定方程的通解. 由于在方程出现一个任意参数，必须区分不同情形.

55. $y''-4y'+3y=e^{ax}$.

56. $y''-4y'+4y=e^{ax}$.

57. $y''+4y=\cos\omega x$.

58. $y''+9y=\sin\omega x$.

59. $y''+\omega^2y=\sin 2x$.

60. $y''+by'+y=\sin x$.

在习题 61～70 中，求解给定的初值问题.

61. $y''-4y=0$,　$y(0)=0$,　$y'(0)=3$.

62. $y''+2y'+y=0$,　$y(0)=2$, $y'(0)=-1$.

63. $4y''-4y'+y=0$,　$y(0)=-1$,　$y'(0)=1$.

64. $y''+y=0$,　$y(\pi)=1$, $y'(\pi)=0$.

65. $y''-5y'+6y=e^x$,　$y(0)=0$,　$y'(0)=0$.

66. $2y''-3y'+y=\sin x$,　$y(0)=0$,　$y'(0)=0$.

67. $y''-4y'+3y=xe^{-x}$,　$y(0)=0$,　$y'(0)=1$.

68. $y''-4y=\cosh x$,　$y(0)=1$,　$y'(0)=0$.

69. $y''+4y=\cos 2x$, $y(\pi/2)=1$,　$y'(\pi/2)=0$.

70. $y''+9y=\sum_{n=1}^{6}\frac{\sin nx}{n}$,　$y(0)=0$,　$y'(0)=2$.

利用待定系数法求积分. 在习题 71～74 中，通过待定系数法求解 $y'=g(x)$，计算积分 $\int g(x)\mathrm{d}x$.

71. $g(x)=e^x\sin x$.

72. $e^x\cos 2x$.

73. $g(x)=e^{ax}\cos bx$.

74. $e^{ax}\sin bx$.

给定 n 个数 λ_1，λ_2，…，λ_n，我们定义范德蒙德行列式 $V(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

75. 计算 $V(\lambda_1, \lambda_2)$，试证：它不为零当且仅当 $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
76. 试证：$V(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)=(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)$，得出结论：$V(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\neq 0$ 当且仅当所有的 λ 互不相同.
77. 事实上，$V(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)\neq 0$ 当且仅当所有的 λ 互不相同(参见习题 78)．利用这个事实证明：如果所有的 λ 互不相同，朗斯基行列式 $W(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \cdots, e^{\lambda_n x})\neq 0$. A20
78. (a)基于习题 76，猜出 $V(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$的公式．对 $n=2$，3，4，验证你的猜测.

    (b)利用(a)，试证：$V(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)\neq 0$ 当且仅当所有的 λ 互不相同.

A.3 变系数线性常微分方程

在前面两节中，我们发现二阶线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{1}$$

的通解具有形式 $y=y_h+y_p$，其中 y_h 是相伴齐次方程的通解，y_p 是(1)的任意一个特解．当系数函数是常数，以及 g 具有特殊形式时，我们得到解的一个完整描述．本节介绍两个一般性方法，以处理上节没有包含的情形．第一个方法通常用来求解 y_h，第二个方法可以用来求解 y_p. 我们以应用这些方法求解重要的欧拉方程结束本节.

降阶

对于二阶线性微分方程，我们知道

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

其中 y_1 和 y_2 是齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2}$$

的线性无关解．请注意，这个方程是标准形式，即首项系数是 1．假设我们已知(2)的一个非平凡解，比如说 y_1．降阶法使得我们可以求出第二个解 y_2，且 y_1 和 y_2 线性无关.

降阶公式 给定 y_1，(2)式的第二个线性无关解是

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx. \tag{3}$$

在应用这个公式之前，必须确保方程是标准形式．由于我们仅寻找一个线性无关解，这个公式中出现的不定积分的常数可以取为任意固定值．我们经常忽略这些常数.

证明 我们知道 cy_1 是(2)的一个解，但是显然它与 y_1 线性相关．我们的想法是找一个非常数的函数 $v(x)$，使得 $v(x)y_1$ 是解．将 $y(x)=v(x)y_1$ 代入(2)式，因为 $y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1=0$，我们得到 A21

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = (y_1 v'' + 2y_1' v' + y_1'' v) + p(x)(y_1 v' + y_1' v) + q(x) y_1 v$$

$$=y_1v''+(2y_1'+p(x)y_1)v'+(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1)v$$
$$=y_1v''+(2y_1'+p(x)y_1)v'$$

因此，为使 $y=vy_1$ 是(2)的解，v 必须满足 $y_1v''+(2y_1'+p(x)y_1)v'=0$. 这是关于 v' 的一阶方程(这就是降阶名称的由来). 等价地，

$$v''+\left(2\frac{y_1'}{y_1}+p(x)\right)v'=0,$$

因此，由 A.1 节定理 1，我们得到

$$v'(x)=\frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}.$$

(在定理中，我们已经取常数为 1，因为我们只需求一个解.)因此，积分并乘以 y_1 即得(3)式. y_1 和 y_2 的线性无关性可以通过计算朗斯基行列式来验证. 见习题 41. ■

例 1 出现二重根时的降阶

给定 $y_1=e^x$ 是 $y''-2y'+y=0$ 的解，第二个线性无关解可以由(3)式如下得到(图 1)：

$$y_2=e^x\int\frac{e^{2x}}{(e^x)^2}dx=xe^x.$$ ■

例 1 的特征方程以 1 为一个二重根. 我们可以利用前一节的方法写出第二个解，但是例 1 的目的是说明如何利用降阶推导出这个解.

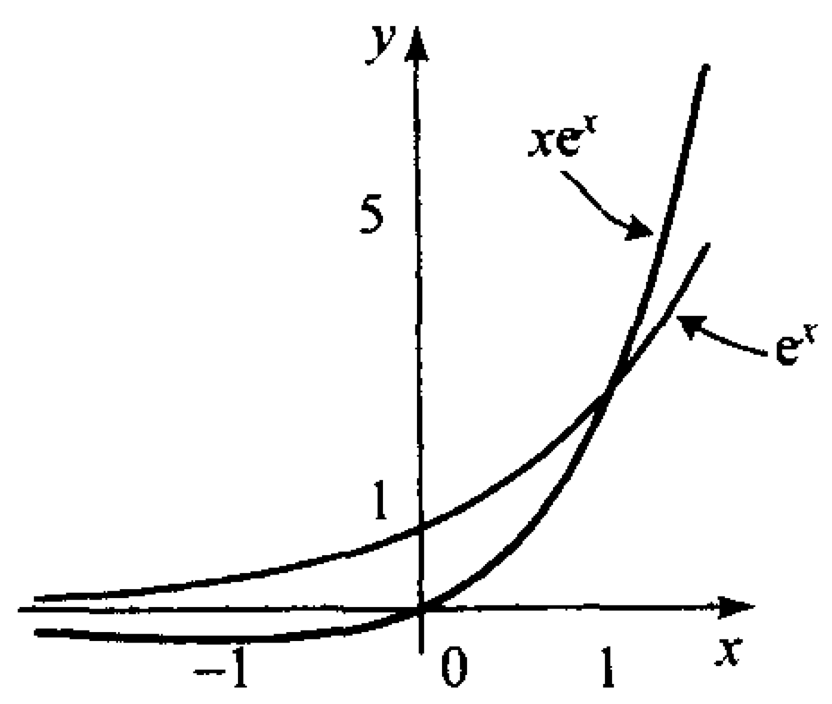


图 1 例 1 中的解

例 2 应用降阶公式

给定 e^x 是 $xy''-(1+x)y'+y=0$ 的解，第二个线性无关解可以由(3)式得到. 我们有

$$y_2=e^x\int\frac{e^{\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx}}{(e^x)^2}dx=e^x\int\frac{xe^x}{(e^x)^2}dx=e^x\int xe^{-x}dx.$$

注意，在计算(3)式之前，我们必须将方程写成标准形式. 分部积分，我们得到

$$y_2=e^x(-xe^{-x}-e^{-x})=-x-1.$$

A22 $\left[\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+C.\right]$ 因此，我们可以用 $y_2=x+1$. ■

参数变易法

在这一部分，我们假设已经知道相伴齐次方程(2)的解，要描述生成(1)特解的一般性方法. 这个方法称为**参数变易法**.

参数变易法公式 (1)式的一个特解由

$$y_p=y_1\int\frac{-y_2g(x)}{W(y_1,y_2)}dx+y_2\int\frac{y_1g(x)}{W(y_1,y_2)}dx \tag{4}$$

给出，其中 y_1 和 y_2 是(2)的线性无关解，而 $W(y_1,y_2)=y_1y_2'-y_1'y_2$ 是 y_1 和 y_2 的朗斯基行列式.

如降阶法，我们可以忽略积分常数.

证明 由于 $c_1y_1+c_2y_2$ 是齐次方程的解，我们希望允许函数来代替常数，可以得到非齐次方程的一个解. 因此，尝试

$$y=u_1(x)y_1+u_2(x)y_2 \tag{5}$$

并求出 u_1 和 u_2. 由于有两个未知函数，只有一个方程，所以可以自由地施加一个 u_1 和 u_2 的关系式. 正如即将看到的，下面的条件将简化计算：

$$u_1'(x)y_1+u_2'(x)y_2=0. \tag{6}$$

现在，利用(5)和(6)式计算

$$y'=u_1(x)y_1'+u_2(x)y_2'; \quad y''=u_1(x)y_1''+u_2(x)y_2''+u_1'(x)y_1'+u_2'(x)y_2'.$$

将这些式子和(5)式代入(1)式左边，我们得到

$$\begin{aligned}y''+p(x)y'+q(x)y=&(u_1(x)y_1''+u_2(x)y_2''+u_1'(x)y_1'+u_2'(x)y_2')\\&+p(x)(u_1(x)y_1'+u_2(x)y_2')+q(x)(u_1(x)y_1+u_2(x)y_2)\\=&u_1(x)\underbrace{(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1)}_{=0}\\&+u_2(x)\underbrace{(y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2)}_{=0}+u_1'(x)y_1'+u_2'(x)y_2'.\end{aligned}$$

因此，利用(6)式，如果 u_1 和 u_2 满足

$$\begin{cases}y_1u_1'(x)+y_2u_2'(x)=0,\\y_1'u_1'(x)+y_2'u_2'(x)=g(x).\end{cases}$$

我们将得到一个解. 这个系统的行列式恰好就是 $W(y_1, y_2)$，它不为零，因为 y_1 和 y_2 是线性无关的. 求解这个系统，我们得到唯一解

$$u_1'=\frac{-y_2g(x)}{W(y_1,y_2)} \quad 及 \quad u_2'=\frac{y_1g(x)}{W(y_1,y_2)}.$$

A23

积分并代入(5)式即得(4). ■

例 3 **参数变易法**

给定 $y_1=x$ 和 $y_2=x^4$ 是 $x^2y''-4xy'+4y=0$ 的解，求出

$$x^2y''-4xy'+4y=3x^2$$

的一个特解.

解 我们有

$$W(y_1,y_2)=W(x,x^4)=3x^4.$$

我们将方程写成标准形式，应用(4)式，我们得到

$$y_p=x\int\frac{-3x^4}{3x^4}\mathrm{d}x+x^4\int\frac{3x}{3x^4}\mathrm{d}x=-x^2-\frac{1}{2}x^2=-\frac{3}{2}x^2.$$ ■

我们以有着重要应用的一类微分方程的讨论结束本节.

欧拉方程

微分方程

$$x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0 \tag{7}$$

称为**欧拉方程**，其中 α 和 β 是常数. 它是一类有显式解的最简单二阶线性变系数微分方程. 受前面该方程一阶形式的启发，$xy'+\alpha y=0$ 具有解 $y=x^{-\alpha}$，我们尝试

$$y = x^r \tag{8}$$

作为(7)的解. 将 x^r 代入方程，则 r 必须是

$$r(r-1)+\alpha r+\beta=0 \tag{9}$$

的根. 这个二次方程称为**指标方程**，是求解(7)的关键，就像特征方程是求解常系数方程的关键. 正如所料，(微分方程的)解将依赖于(指标方程的)根的情况，这些根称为**指标根**.

如果我们将一般的欧拉方程写成标准形式，则 y' 和 y 的系数在 $x=0$ 处没有定义. 由于在 0 点处的这个问题，$x>0$ 和 $x<0$ 情形需要分开处理. 事实上，在许多应用中，我们只对 $x>0$ 情形感兴趣. 为完整起见，在下面我们利用绝对值给出了欧拉方程在这两种情形下的解.

A24

欧拉方程的通解 *考虑欧拉方程(7)，指标方程为(9)，我们将它写成*

$$r^2+(\alpha-1)r+\beta=0. \tag{10}$$

令 r_1 和 r_2 表示指标根. 方程的通解 y 由下述情形给出.

情形Ⅰ：*如果 r_1 和 r_2 是互异实根，则*

$$y=c_1|x|^{r_1}+c_2|x|^{r_2}.$$

情形Ⅱ：*如果 $r_1=r_2$，则*

$$y=(c_1+c_2\ln|x|)|x|^{r_1}.$$

情形Ⅲ：*如果 r_1 和 r_2 是复共轭根，$r_1=a+ib$，则*

$$y=|x|^a[c_1\cos(b\ln|x|)+c_2\sin(b\ln|x|)].$$

显然，当 $x>0$ 时，我们可以去掉绝对值.

证明 为清楚起见，我们取 $x>0$，由(8)式，以及对 $x>0$，$W(x^{r_1},x^{r_2})=(r_2-r_1)x^{r_1+r_2-1}\neq 0$ 这个事实，直接可得情形Ⅰ. 情形Ⅱ可由降阶推得. 在(3)式中令 $y_1=x^{r_1}$，我们得到

$$y_2=x^{r_1}\int\frac{e^{-\int\frac{\alpha}{x}dx}}{x^{2r_1}}dx=x^{r_1}\int x^{-\alpha-2r_1}dx.$$

但是因为 r_1 是指标方程(10)的二重根，我们有 $2r_1=r_1+r_2=-(\alpha-1)$. 因此，$x^{-\alpha-2r_1}=x^{-1}$，计算积分得到 $\ln x$，从而 $y=x^{r_1}\ln x$.

在情形Ⅲ中，两个线性无关的复值解形式上由 x^{a+ib} 和 x^{a-ib} 给出. 我们将这些函数理解为 $e^{\ln x(a+ib)}$ 和 $e^{\ln x(a-ib)}$，再进一步导出实值解来. 由欧拉恒等式，我们有

$$e^{\ln x(a+ib)}=e^{a\ln x}e^{ib\ln x}=x^a[\cos(b\ln x)+i\sin(b\ln x)],$$

以及类似地，

$$e^{\ln x(a-ib)}=x^a[\cos(b\ln x)-i\sin(b\ln x)].$$

就像前面我们处理具有复特征根的常系数方程那样，作线性组合，我们最终得到实解. 线性无关性由计算朗斯基行列式可得，留作习题 42. ■

A25

欧拉方程的解与常系数方程的解具有很大的相似性. 事实上，在欧拉方程中作变量代换 $t=\ln x$，可将它变成一个常系数方程. 这给出了欧拉方程通解的另外一个推导方式. 参见习题 43.

例 4　欧拉方程

对 $x>0$，求解 $2x^2y''+5xy'-2y=0$.

解　我们将方程写成 $x^2y''+\frac{5}{2}xy'-y=0$. 由(10)，指标方程是 $r^2+\frac{3}{2}r-1=0$，分解因式为 $\left(r-\frac{1}{2}\right)(r+2)=0$. 我们得到指标根 $r_1=\frac{1}{2}$，$r_2=-2$. 因此，由情形I，通解是 $y=c_1\sqrt{x}+\frac{c_2}{x^2}$. 通解在图 2 中画出. ■

注意，当 $x<0$ 时，例 4 的解变为

$$y=c_1\sqrt{-x}+\frac{c_2}{x^2}.$$

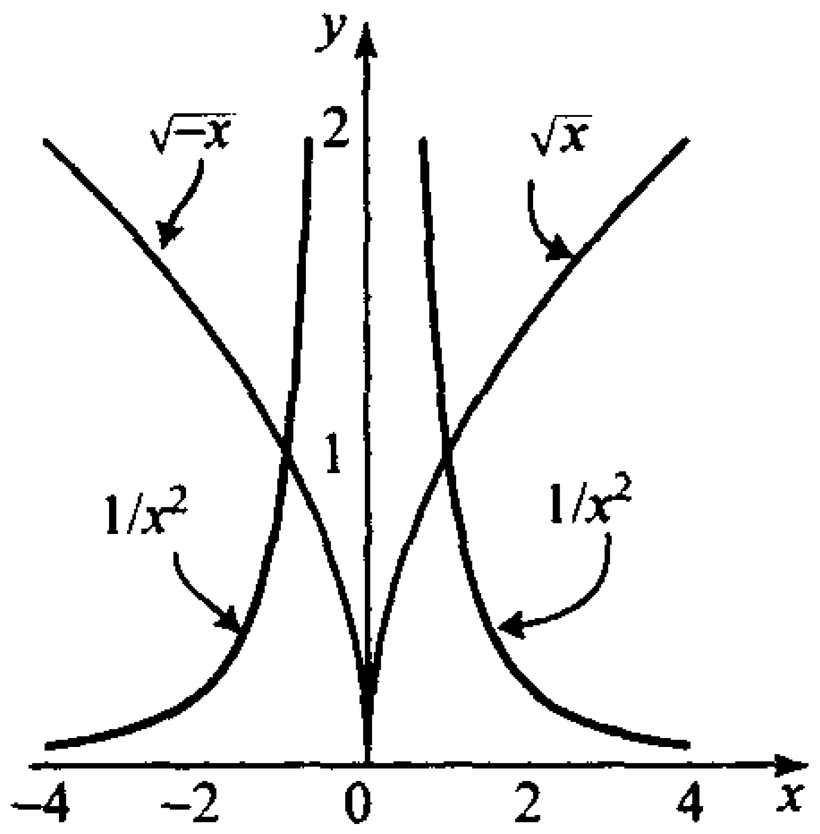


图 2　例 4 的解. 请注意，$\frac{1}{x^2}$在 $x=0$ 处没有定义，而$\sqrt{x}$在 $x=0$ 处不可微. 这些解对微分方程有定义的 $x>0$ 有意义

习题 A. 3

在习题 1～20 中，验证给定函数是给定方程的解，然后利用降阶公式求出通解.

1. $y''+2y'-3y=0$，　$y_1=e^x$.
2. $y''-5y'+6y=0$，　$y_1=e^{3x}$.
3. $xy''-(3+x)y'+3y=0$，　$y_1=e^x$.
4. $xy''-(2-x)y'-2y=0$，　$y_1=e^{-x}$.
5. $y''+4y=0$，　$y_1=\cos 2x$.
6. $y''+9y=0$，　$y_1=\sin 3x$.
7. $y''-y=0$，　$y_1=\cosh x$.
8. $y''+2y'+y=0$，　$y_1=e^{-x}$.
9. $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$，　$y_1=x$.
10. $(1-x^2)y''-2xy'=0$，　$y_1=1$.
11. $x^2y''+xy'-y=0$，　$y_1=x$.
12. $x^2y''-xy'+y=0$，　$y_1=x$.
13. $x^2y''+xy'+y=0$，　$y_1=\cos(\ln x)$.
14. $x^2y''+2xy'+\frac{1}{4}y=0$，　$y_1=1/\sqrt{x}$.
15. $xy''+2y'+4xy=0$，　$y_1=\frac{\sin 2x}{x}$.
16. $xy''+2y'-xy=0$，　$y_1=\frac{e^x}{x}$.
17. $xy''+2(1-x)y'+(x-2)y=0$，　$y_1=e^x$.
18. $(x-1)^2y''-3(x-1)y'+4y=0$，　$y_1=(x-1)^2$.
19. $x^2y''-2xy'+2y=0$，　$y_1=x^2$.
20. $(x^2-2x)y''-(x^2-2)y'+2(x-1)y=0$，　$y_1=e^x$.

A26

在习题 21～30 中，利用参数变易法求出给定方程的通解．取 $x>0$.

21. $y''-4y'+3y=e^{-x}$.
22. $y''-15y'+56y=e^{7x}+12x$.
23. $3y''+13y'+10y=\sin x$.
24. $y''+3y=x$.
25. $y''+y=\sec x$.
26. $y''+y=\sin x+\cos x$.
27. $xy''-(1+x)y'+y=x^3$.
   [提示：$y_1=1+x$，$y_2=e^x$.]
28. $xy''-(1+x)y'+y=x^4e^x$.
   [提示：习题 27.]
29. $x^2y''+3xy'+y=\sqrt{x}$.
30. $x^2y''+xy'+y=x$.

在习题 31～40 中，求解给定的欧拉方程．如无特别说明，取 $x>0$.

31. $x^2y''+4xy'+2y=0$.
32. $x^2y''+xy'-4y=0$.
33. $x^2y''+3xy'+y=0$.
34. $4x^2y''+8xy'+y=0$.
35. $x^2y''+xy'+4y=0$.
36. $4x^2y''+4xy'+y=0$.
37. $x^2y''+7xy'+13y=0$.
38. $x^2y''-xy'+5y=0$.
39. $(x-2)^2y''+3(x-2)y'+y=0\quad(x>2)$.
   [提示：令 $t=x-2$.]
40. $(x+1)^2y''+(x+1)y'+y=0\quad(x>-1)$.
   [提示：令 $t=x+1$.]
41. 对由(3)式给出的 y_2，计算 $W(y_1,\ y_2)$，从而得出结论：降阶公式给出第二个线性无关解.
42. 令 y_1 和 y_2 是欧拉方程在情形Ⅲ时的解，试证：$W(y_1,\ y_2)=x^{2a-1}$，且得出结论：对 $x>0$，y_1 和 y_2 是线性无关的.
43. 试证：变量代换 $t=\ln x(x>0)$将欧拉方程变为常系数方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(\alpha-1)\frac{dy}{dt}+\beta y=0.$$

44. **欧拉方程的另一种求解方法**．利用习题 43 和 A.2 节解(6)，推导出欧拉方程通解的三种情形.
45. **由阿贝尔公式得出降阶公式**．
   (a)利用阿贝尔公式(A.1 节定理 2)，得出结论

$$y_1y_2'-y_1'y_2=Ce^{-\int p(x)dx},$$

   其中 y_1 和 y_2 是(2)的两个解.

   (b)给定 y_1，在(a)中令 $C=1$，求解所得到的关于 y_2 的一阶微分方程，从而推出(3).
46. **非齐次方程的降阶．在本题中，我们将显示：如果给定相伴齐次方程的一个解 y_1，降阶法也可以应用到非齐次方程上．因此，给定 y_1，可以直接求解(1)，而不需要用参数变易法.**

A27

(a)试证：如果我们希望求解(1)，按照(3)的证明过程，我们得到方程

$$v''+\left(\frac{y_1'}{y_1}+p(x)\right)v'=\frac{g(x)}{y_1}.$$

(b)利用 A.1 节定理 1，求解这个方程，从而得出(1)的通解是

$$y=c_1y_1+c_2y_1\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx$$
$$+y_1\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx\left(\int y_1e^{\int p(x)dx}g(x)dx\right)dx,$$

其中最后两次出现的 $\int p(x),dx$ 表示 $p(x)$ 的同一个原函数.

在习题 47～50 中，利用习题 46 的方法，求出给定方程的通解．为更好地理解习题 46，我们建议在下面习题中，至少重复一次它的证明过程.

47. $y''-4y'+3y=e^x$， $y_1=e^x$.

48. $x^2y''+3xy'+y=\sqrt{x}$， $y_1=\frac{1}{x}$.

49. $3y''+13y'+10y=\sin x$， $y_1=e^{-x}$.

50. $xy''-(1+x)y'+y=x^3$， $y_1=e^x$.

A.4 幂级数法，部分 I

幂级数将用来求解常微分方程，包括许多重要的变系数微分方程，如勒让德方程和贝塞尔方程．在本节，我们回顾一下幂级数的基本性质，并介绍下节将需要的一些技巧.

幂级数是形如

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_m(x-a)^m=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots \tag{1}$$

的级数，其中 a，a_0，a_1，a_2，…是常数，x 是变量．这个级数称为以 a 为**中心**的．如果级数以 $a=0$ 为中心，则它的形式更简单：

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots. \tag{2}$$

给定幂级数(1)，我们定义函数 $f(x)$，它的定义域是幂级数收敛的所有 x 的集合，它在每点 x 的值，就是级数在 x 点的和．我们说幂级数表达了函数 $f(x)$.

A28

回顾微积分中某些函数具有以 $x=a$ 为中心的泰勒级数表示：

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)+\cdots. \tag{3}$$

因此，泰勒级数是幂级数的一个例子，它的系数由 $f(x)$ 及其导数唯一确定．事实上，我们有 $a_0=f(a)$ 和 $a_k=f^{(k)}(a)/k!$．下面列出了一些初等函数的泰勒级数表示，以及级数表示成立的范围．所有的级数都是以 0 为中心的.

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{m=0}^{\infty}x^m=1+x+x^2+x^3+\cdots,\qquad |x|<1;$$

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty;$$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \qquad -\infty < x < \infty;$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \qquad -\infty < x < \infty;$$

$$\ln(1+x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} x^m}{m} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \qquad |x| < 1;$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2m+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \qquad |x| < 1;$$

$$\sinh x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty;$$

$$\cosh x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty.$$

如前表所示，幂级数不必对所有的 x 都收敛，我们回顾下列关于幂级数收敛的事实：

- 幂级数(1)总是在其中心 $x=a$ 处收敛.
- 如果级数对异于 a 的 x 值收敛，则这些(x)值构成一个以 a 为中心的区间，称为**收敛区间**. 如果这个区间是有限的，则存在一个数 $R>0$，称为**收敛半径**，使得级数对所有的 $|x-a|<R$ 的 x 收敛，而对所有的 $|x-a|>R$ 的 x 发散(图 1). 如果级数只在 $x=a$ 处收敛，我们令 $R=0$；而如果级数对所有的 x 收敛，我们令 $R=\infty$.

由幂级数定义的函数在其收敛区间上称为**解析的**. A29 (在 12.5 节，我们利用词*解析*来描述在平面的一个开子集上可微的复函数. 复分析的一个基本结果告诉我们这个性质等价于具有幂级数展开. 因此，该节的解析术语与前面 12.5 节的用法是一致的.)

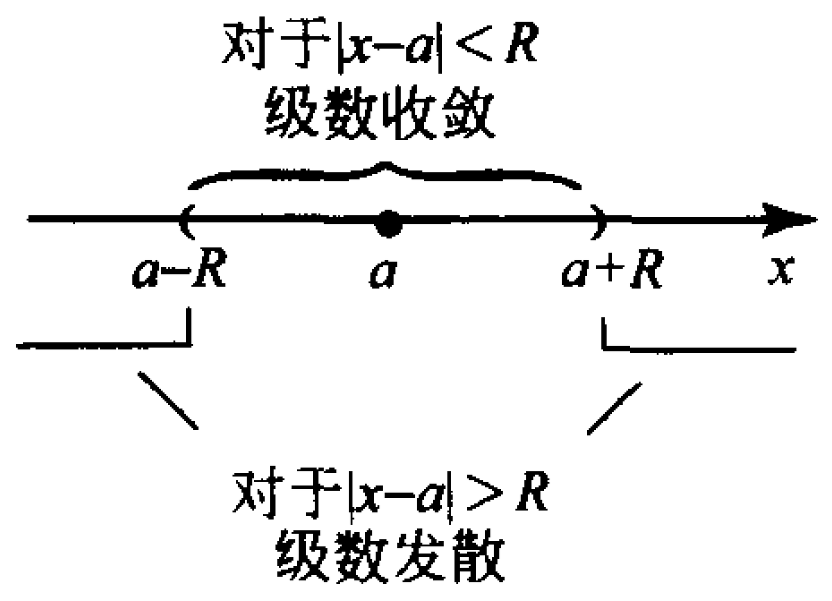


图 1 以 a 为中心幂级数的收敛区间. 在其端点 $x=a\pm R$ 处，级数可能收敛，也可能发散

求幂级数收敛半径的一个有用方法是比值判别法，以下面的例子来说明. (在某些情形，根判别法可能更方便.)

例 1 收敛半径和收敛区间

考虑幂级数

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m}{4^m} x^{2m} = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{64}x^6 + \cdots.$$

利用比值判别法，我们有，只要极限

$$\lim_{m\to\infty} \left| \frac{(m+1)}{4^{m+1}} x^{2(m+1)} \Big/ \frac{m}{4^m} x^{2m} \right| = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{m+1}{4m} \right) x^2 = \frac{x^2}{4}$$

小于 1，级数就收敛. 即，$x^2/4<1$ 或 $x^2<4$. 因此，收敛区间是 $|x|<2$ 或 $(-2, 2)$. 由于

级数是以 0 为中心的，所以收敛半径是 2. 比值判别法没有确定级数在端点 $x=\pm 2$ 处的性态. 在本例中，可以验证级数在 $x=\pm 2$ 处发散. 因此，对$(-2,2)$上所有的 x，我们用幂级数如下定义函数：$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m m}{4^m}x^{2m}$. 对$(-2,2)$中每个 x，级数收敛到一个实数，就是 $f(x)$. ■

例 2　对所有的 x 都收敛的幂级数

求出级数

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2^m(m!)^2}x^m=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{288}-\cdots$$

的收敛半径.

解　计算由比值判别法得到的极限，我们发现

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{x^{m+1}}{2^{m+1}[(m+1)!]^2}\bigg/\frac{x^m}{2^m(m!)^2}\right|=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{|x|}{2(m+1)^2}\right)=0$$

对所有的 x 成立. 因此，级数对所有的 x 都收敛. 它的收敛半径是∞，收敛区间是$(-\infty,\infty)$. ■

例 3　只在其中心收敛的幂级数

对幂级数

$$\sum_{m=1}^{\infty}m^m(x-1)^m=(x-1)+4(x-1)^2+27(x-1)^3+256(x-1)^4+\cdots,$$

A30

应用根判别法，我们得到

$$\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|m^m(x-1)^m|}=\lim_{m\to\infty}m|x-1|=\infty$$

对所有的 $x\neq 1$ 成立. 因此，级数对所有的 $x\neq 1$ 都发散. 级数显然在 $x=1$ 处收敛. 其收敛半径是 0. ■

幂级数的运算

幂级数就像“无限次的”多项式，可以像多项式那样相加、相乘，逐项微分和积分. 现在，我们回顾如何运用这些运算.

线性组合和乘积　考虑幂级数表示

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(x-a)^m \quad 及 \quad g(x)=\sum_{m=0}^{\infty}b_m(x-a)^m,$$

具有共同中心 a，收敛半径分别是 $R_1>0$ 和 $R_2>0$，则不难验证：对任意实数 α 和 β，我们有

$$\alpha f(x)+\beta g(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(\alpha a_m+\beta b_m)(x-a)^m.$$

幂级数的乘法可以像多项式那样做：

$$\begin{aligned}&f(x)\cdot g(x)\\&=(a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots)\cdot(b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\cdots)\end{aligned}$$

$$=a_0+b_0+(a_0b_1+a_1b_0)(x-a)+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)(x-a)^2+\cdots$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(a_0b_m+a_1b_{m-1}+\cdots+a_mb_0)(x-a)^m.$$

线性组合 $\alpha f+\beta g$ 和乘积 $f\cdot g$ 所得到的幂级数的收敛半径，至少与 R_1 和 R_2 较小的一个一样大.

幂级数的微分和积分 幂级数

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(x-a)^m \quad (|x-a|<R,R>0) \tag{4}$$

可以逐项微分得到

A31

$$f'(x)=\sum_{m=1}^{\infty}ma_m(x-a)^{m-1} \quad (|x-a|<R). \tag{5}$$

进一步地，级数(4)和(5)具有相同的收敛区间. 证明的概要在习题中给出，它要用到一致收敛这个概念，以及 2.9 节关于函数级数的结果. 由于微分后的级数(5)本身还是一个幂级数，收敛区间与幂级数(4)的收敛区间一样，我们可以对它再微分，再微分，因而 f 是无限次可微的.

如果我们对幂级数微分 k 次，我们得到

$$f^{(k)}(x)=\sum_{m=k}^{\infty}m(m-1)\cdots(m-k+1)a_m(x-a)^{m-k} \quad (|x-a|<R).$$

令 $x=a$，除了 $m=k$，其他所有的项都消掉，我们得到

$$f^{(k)}(a)=\overbrace{k(k-1)\cdots(k-k+1)}^{=k!}a_k \quad \Rightarrow \quad a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

代回(4)式，我们得到 $f(x)$ 的**泰勒级数展开式**：

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{m!}(x-a)^m \quad (|x-a|<R). \tag{6}$$

这说明每个具有正收敛半径的幂级数都是其表达的函数的泰勒展开式.（一般而言，可能不能像本节开始那样，将 $f(x)$ 用我们熟悉的初等函数表达出来.）

幂级数(4)可以在收敛区间的任意一个有界闭子区间上逐项积分. 令 $[c,d]$ 是收敛区间内的一个闭区间，则

$$\int_b^c f(t)\mathrm{d}t=\sum_{m=0}^{\infty}a_m\int_b^c(t-a)^m$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m}{m+1}[(c-a)^{m+1}-(b-a)^{m+1}].$$

特别地，如果 x 在收敛区间内，则

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m}{m+1}(x-a)^{m+1},$$

因为

$$\int_a^x(t-a)^m\mathrm{d}t=\frac{1}{m+1}(t-a)^{m+1}\Big|_a^x=\frac{1}{m+1}(x-a)^{m+1}.$$

其证明概要也在习题中给出. 让我们从已知的幂级数不进行过多的计算来得到新的幂级数，以说明逐项微分积分的用处. A32

例 4 逐项微分和积分

(a)首先，考虑几何级数

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots=\sum_{m=0}^{\infty}x^m \quad (-1<x<1).$$

对第一个等式两边作微分：

$$\frac{1}{(1-x)^2}=0+1+2x+3x^2+\cdots=\sum_{m=1}^{\infty}mx^{m-1} \quad (-1<x<1).$$

这给出了函数 $1/(1-x)^2$ 的幂级数展开式. 注意下面两个事实：

- 微分后的级数与原来的级数具有相同的收敛半径.
- 微分后的级数指标从 $m=1$ 开始，而原来的级数从 $m=0$ 开始. 这是显然的，因为相应于 $m=0$ 的那项，在微分后的级数中为零.

(b)从(a)中的几何级数开始，对$(-1,1)$中的 x，我们有

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}dt=\int_0^x(1+t+t^2+t^3+\cdots)dt;$$

$$-\ln(1-t)\Big|_0^x=\left(t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{4}+\cdots\right)\Big|_0^x$$

$$-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots.$$

这就给出 $\ln(1-x)$的幂级数表示，它在区间$-1<x<1$ 中成立. 注意，如果以$-x$ 代替 x，可以得到本节开始所列的 $\ln(1+x)$的展开式. ■

在前一个例题中，我们利用各种不同的运算，从已知的级数推导出新的幂级数展开式. 因此，我们断言已经得到了 $1/(1-x)^2$ 和 $\ln(1-x)$的幂级数展开式. 问题是这些函数是否存在其他的幂级数表达.

恒等原理 假设 $f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(x-a)^m$ 和 $g(x)=\sum_{m=0}^{\infty}b_m(x-a)^m$，其中两个级数都具有正的收敛半径. 如果对包含 a 的区间内所有的点 x，$f(x)=g(x)$，则对所有的 m，$a_m=b_m$. 换句话说，幂级数表达是唯一的.

这是幂级数中系数由函数及其导数在 $x=a$ 点的值确定这个事实(泰勒公式)的直接推论. 因此如果在包含 a 的区间内 $f=g$，则对所有的 m，$f^{(m)}(a)=g^{(m)}(a)$，这蕴涵着两个幂级数的系数是相同的. A33

我们经常利用恒等原理来确定方程中幂级数的系数，如下例所示.

例 5 恒等原理

如果对区间$(-1,1)$内的所有 x，我们有

$$\sum_{m=0}^{\infty}(a_m-2m)x^m=0.$$

确定 a_m.

解 由恒等原理，只存在一个幂级数在(−1，1)上恒为零，此幂级数的所有系数都为零. 因此，对所有的 m，$a_m-2m=0$，因而 $a_m=2m$. ■

例 6 **含有幂级数的方程**

如果对区间(−1，1)中的所有 x，我们有

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m+\sum_{m=0}^{\infty}ma_mx^m=\frac{1}{1-x}.$$

确定 a_m.

解 将左边两个级数合并，方程变为

$$\sum_{m=0}^{\infty}(1+m)a_mx^m=\frac{1}{1-x}.$$

为以此为出发点，我们将 $1/(1-x)$表示成以 0 为中心的幂级数，并利用恒等原理，令两边 x^m 的对应系数相等. 因此，

$$\sum_{m=0}^{\infty}(1+m)a_mx^m=\sum_{m=0}^{\infty}x^m \quad\Rightarrow\quad (1+m)a_m=1\text{ 对所有 }m,$$

因为 $1/(1-x)$表达式中所有系数都等于 1. 求解最后的方程，我们得到 $a_m=1/(1+m)$. 因此，$a_0=1$，$a_1=1/2$，$a_2=1/3$ 等. ■

幂级数的复合 由微积分知识，我们知道：如果 $f(x)$在 $x=a$ 处可微，而 $g(x)$在 $f(a)$点处可微，则 $g(f(x))$在 a 点处可微. 如果我们将微分换成解析，这个事实还是对的，即如果 $f(x)$具有一个以 $x=a$ 为中心的幂级数展开式，而 $g(x)$具有一个以 $f(a)$为中心的幂级数展开式，则 $g(f(x))$具有一个以 a 为中心的幂级数展开式.

作为例子，假设 $f(x)=(x-a)^m$，$g(x)$在 $0(=f(a))$处解析，则在 $g(x)$的以 0 为中心的幂级数展开式中，以$(x-a)^m$ 代入，可得 $g(f(x))$的以 a 为中心的幂级数展开式. 例如，在 e^x 的泰勒级数展开式中，以 x^2 代替 x，我们得到 e^{x^2} 的泰勒级数

A34

$$e^{x^2}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{m!}=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots\quad(-\infty<x<\infty).$$

解析函数的比值 假设 f 和 g 在 a 点处解析，$g(a)\neq0$，则比值 f/g 也在 a 点处解析.

为看清这一点，我们将函数 $1/g$ 看成 g 和函数 $1/x$ 的复合. 后者除了 $x=0$ 之外，处处解析(习题 25)，因此如果 $g(a)\neq0$，$1/g$ 在 a 点解析. 现在，$f/g=f\cdot(1/g)$，所证的结论由两个解析函数的乘积仍然是解析这个事实可得.

下面例题说明了一些可以用来计算有理函数的幂级数的有用技巧.

例 7 **有理函数的幂级数**

求解给定函数在 $a=0$ 处的幂级数展开式，确定收敛半径.

(a) $\dfrac{1}{3+2x}$.　　(b) $\dfrac{4x^2+8x-4}{3+2x}$.

解 (a)为求出幂级数展开式，我们试图将函数与几何级数相联系，将后者写成如下形式：

$$\sum_{m=0}^{\infty} u^m = \frac{1}{1-u} \quad (|u|<1).$$

如果对某个 u，我们可以将 $1/(3+2x)$ 写成 $A/(1-u)$，其中 A 是常数，则我们就成功了. 为此，我们如下进行：

$$\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{2x}{3}\right)} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-u},$$

其中 $u=-2x/3$. 因此，

$$\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{3}\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{2x}{3}\right)^m = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{2^m x^m}{3^{m+1}}.$$

进一步地，当且仅当 $|u|<1$ 级数收敛；等价地，$|-2x/3|<1$，或 $|x|<3/2$. 因此，级数的收敛半径等于 3/2.

(b)以分子除以分母，我们得到

$$\frac{4x^2+8x-4}{3+2x} = 2x+1-\frac{7}{3+2x}.$$

利用(a)中所得的幂级数展开式，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{4x^2+8x-4}{3+2x} &= 1+2x-7\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{2^m x^m}{3^{m+1}}\\ &= 1-\frac{7}{3}+x\left(2+\frac{14}{9}\right)-7\left(\frac{4}{27}x^2-\frac{8}{243}x^3+\cdots\right)\\ &= -\frac{4}{3}+\frac{32}{9}x-7\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^m\frac{2^m x^m}{3^{m+1}}.\end{aligned}$$

A35

这个幂级数与(a)中的幂级数具有相同的收敛半径. ■

在幂级数中移动指标　像例 6 那样，在利用幂级数求解微分方程时，我们经常会将几个幂级数合并成一个. 假设希望将表达式

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^{m+1} + \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)x^m$$

合并成一个幂级数. 与例 6 不同的是，这里不能简单地将同一指标所对应的项相加，因为变量 x 在每个级数的通项中具有不同的幂次. 为处理这种情形，我们可以如下将第一个级数写成 x^m 的形式. 令 $m+1=n$，当 m 从 0 变到∞时，n 从 1 变到∞，因而，第一个级数变为

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^{m+1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

现在，将指标 n 写成 m，我们有

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^{m+1} = \sum_{m=1}^{\infty} x^m.$$

因此，我们可以移动各项的指标而不改变幂级数. 一般而言，幂级数中的指标 m 可以如下移动 k 个单位：

$$\sum_{m=s}^{\infty} a_m (x-a)^{m+k} = \sum_{m=s+k}^{\infty} a_{m-k}(x-a)^m.$$

因此，如果在级数通项中，我们将 m 换成 $m-k$，以移动求和指标，则我们必须在求和起始点上增加 k. 同样，我们有

$$\sum_{m=s}^{\infty} a_m (x-a)^m = \sum_{m=s-k}^{\infty} a_{m+k}(x-a)^{m+k}.$$

因此，如果在级数通项中，我们将 m 换成 $m+k$，以移动求和指标，则我们必须在求和起始点上较少 k.

例 8 移动指标

将下面的求和写成一个幂级数

A36

$$\sum_{m=1}^{\infty} m x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} 2x^{m+1}.$$

解 我们将两个级数都写成 x^m 的形式. 这意味着，在第一个级数中，我们必须将 m 换成 $m+1$，这样，x 的指数变成 $(m+1)-1=m$. 在第二个级数中，我们必须将 m 换成 $m-1$. 记住这一点，级数变成

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)x^m + \sum_{m=1}^{\infty} 2x^m.$$

现在，我们可以将两个级数合并为

$$(0+1)x^0 + \sum_{m=1}^{\infty}(m+1)x^m + \sum_{m=1}^{\infty}2x^m = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(m+3)x^m.$$

注意在第一个级数中，我们将 $m=0$ 分了出来，因为第二个级数是从 $m=1$ 开始的. ■

下面两个例题说明了下节幂级数方法中的一些基本步骤.

例 9 合并幂级数及其导数

假设 $y=\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ 是收敛半径为 $R>0$ 的幂级数. 求出表达式

$$(1+x)y' - 2y$$

的幂级数表示.

解 在其收敛半径以内，幂级数可以逐项微分. 因此，对 $|x|<R$，我们有

$$y' = \sum_{m=1}^{\infty} a_m m x^{m-1}.$$

利用 $x\sum_{m=1}^{\infty} a_m m x^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m m x^m$，我们得到

$$(1+x)y' = (1+x)\sum_{m=1}^{\infty} a_m m x^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m m x^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1}(m+1)x^m + \sum_{m=1}^{\infty} a_m m x^m.$$

第二个级数可以从 $m=0$ 开始，因为相应于 $m=0$ 的项为零. 因此，

$$(1+x)y' = \sum_{m=0}^{\infty}[(m+1)a_{m+1} + m a_m]x^m;$$

$$(1+x)y'-2y=\sum_{m=0}^{\infty}[(m+1)a_{m+1}+ma_m]x^m-2\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}[(m+1)a_{m+1}+(m-2)a_m]x^m.$$ ■ A37

例 10 合并幂级数及其导数

继续前面的例题，求出表达式

$$x^2y''+(1+x)y'-2y$$

的幂级数表示.

解 对 y 的幂级数求两次微分，得到

$$y''=\sum_{m=2}^{\infty}a_mm(m-1)x^{m-2}\quad\Rightarrow\quad x^2y''=\sum_{m=2}^{\infty}a_mm(m-1)x^m.$$

现在，利用前一例题的结果，得到

$$x^2y''+(1+x)y'-2y$$
$$=\sum_{m=2}^{\infty}a_mm(m-1)x^m+\sum_{m=0}^{\infty}[(m+1)a_{m+1}+(m-2)a_m]x^m.$$

合并两个级数，在第二个级数中分出 $m=0$ 和 1 的相应项，得到

$$x^2y''+(x+1)y'-2y=(a_1-2a_0)+(2a_2-a_1)x+$$
$$\sum_{m=2}^{\infty}[a_mm(m-1)+(m+1)a_{m+1}+(m-2)a_m]x^m$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}[(m+1)a_{m+1}+a_m(m^2-2)]x^m.$$ ■

习题 A.4

在习题 1～12 中，求出给定级数的收敛半径和区间.

1. $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{5m+1}$.
2. $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{3^mx^m}{m!}$.
3. $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^mx^{m+2}}{2^m}$.
4. $\sum_{m=0}^{\infty}(x-2)^m$.
5. $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^mx^m}{m!}$.
6. $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(m-1)(m+3)x^m}{m}$.
7. $\sum_{m=2}^{\infty}\frac{x^m}{\ln m}$.
8. $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(x+1)^m}{m^2}$.

9. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{[10(x+1)]^{2m}}{(m!)^2}$.

10. $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(9x)^{2m}}{(m!)^2}$.

11. $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m (x-2)^m}{10^m}$.

12. $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!(x-2)^m}{10^m}$.

在习题 13～20 中，利用本节中的泰勒级数，推导出给定函数在 0 点的泰勒展开式．在每题中，请指出收敛半径和区间.

13. $\frac{3-x}{1+x}$.

14. $\frac{x}{(1+x)^2}$.

15. $\frac{x}{(1+x^2)^2}$.

16. $\frac{x+2}{1-x^2}$.

17. e^{3x^2+1}.

18. $x\ln(1+x)$.

19. $x\sin x\cos x$.

A38 20. $x\sin(x+1)$.

在习题 21～24 中，利用几何级数，推导出给定函数在 0 点的泰勒展开式．在每题中，请指出收敛半径和区间.

21. $\frac{1}{2+3x}$.

22. $\frac{1+x}{2-3x}$.

23. $3\frac{x+x^3}{2+3x^2}$.

24. $\frac{1}{x^2-2x+2}$.

25. 令 $a\neq 0$ 是一个任意实数，利用例 7(a)的思想，证明：

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-a)^n}{a^n}$$

具有收敛半径 $R=|a|$．因此，除去 0 之外，$1/x$ 处处解析.

26. 令

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} \quad 和 \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(k+1)!2^{2k+1}}.$$

证明下列论断：

(a)两个级数对所有的 x 都收敛.

(b) $f'(x) = -g(x)$. (c) $\int g(x)\mathrm{d}x = f(x)+C$. (d) $\int xf(x)\mathrm{d}x = xg(x)+C$.

(函数 f 和 g 分别称为 0 阶和 1 阶贝塞尔函数．它们经常记为 $J_0(x)$(对 $f(x)$)和 $J_1(x)$(对 $g(x)$)．贝塞尔

函数在第 4 章详细学习过.）

27. 令 $f(x)$如习题 26 给出.

(a)求出 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$.

(b)更一般地，对 $k=0, 1, 2, \cdots$，求出 $f^{(k)}(0)$.

(c)逐项积分，求出 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，然后利用计算器估计这个积分值.

28. 令 $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$，求出 $f(0)$，$f'(0)$，$f^{(100)}(0)$.

在习题 29～32 中，将给定表达式写成单个幂级数(和一些低幂次的项，如例 8).

29. $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m}-2\sum_{m=0}^{\infty}mx^{m+1}$.

30. $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m+1}}{m!}+\sum_{m=3}^{\infty}(m-1)x^{m-1}$.

31. $2x\sum_{m=2}^{\infty}2\sqrt{m+2}x^m+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{x^{m-1}}{m+6}$.

32. $(x+1)\sum_{m=2}^{\infty}2x^{m-1}$.

在习题 33～40 中，假设 $y=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m$ 是一个具有正收敛半径的幂级数，求出给定表达式的幂级数表达.

33. $y'+y$.

34. $y'+x^2y$.

35. $(1-x^2)y''+2xy'$.

36. $(2+x)y'+x^3y$.

37. $x^2y''+y$.

38. $y''+y'+xy$.

39. $xy'+y-e^x$.

40. $(1-x)y''+\sin x$.

A39

41. **几何级数**. 固定一个实数(或复数)x，使得 $|x|<1$，令 n 是一个正整数.

(a)试证：

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

(b)得出结论：如果 $|x|<1$，几何级数 $\sum_{m=0}^{\infty}x^m$ 收敛到 $1/(1-x)$；否则，发散. [提示：部分和是什么？同时，$x^{n+1}\to 0$ 当且仅当 $|x|<1$.]

42. **几何级数的一致收敛**.

(a)令 ρ 是任意一个满足 $0<\rho<1$ 的数. 利用魏尔斯特拉斯 M-判别法，证明几何级数 $\sum_{m=0}^{\infty}x^m$ 对$[-\rho, \rho]$内的所有 x 一致收敛.

(b)试证：微分后的级数 $\sum_{m=1}^{\infty}mx^{m-1}$ 在$[-\rho,\rho]$上一致收敛.

(c) 验证几何级数的逐项微分.（参见 2.9 节定理 5.）

43. **幂级数的一致收敛**. 假设 $\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m$ 具有收敛半径 $R>0$. 令 r 是任意一个满足 $0<r<R$ 的实数.

(a)试证 $a_m r^m\to 0$. 得出结论：对某个 $M>0$ 和所有的 m，$|a_m r^m|\leqslant M$. [提示：对收敛级数应用通项

准则.]

(b)对满足 $|x|\leqslant r$ 的 x，我们有

$$|a_m x^m|=|a_m|r^m(|x|/r)^m\leqslant M(|x|/r)^m.$$

利用这些不等式和 $|x|/r<1$，以及魏尔斯特拉斯 M-判别法，得出 $\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m$ 在$[-r, r]$上一致收敛这个结论.

44. **幂级数的逐项微分.**

(a)证明：如果 $\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m$ 具有收敛半径 $R>0$，则 $\sum_{m=1}^{\infty}ma_m x^{m-1}$ 具有相同的收敛半径. [提示：给定 $0\leqslant|x|<R$，令 r 使得 $|x|<r<R$，则 $|ma_m x^{m-1}|\leqslant m(|x|/r)^{m-1}|a_m|r^{m-1}$. 利用几何级数可以逐项微分这个事实(所以 $\sum m(|x|/r)^{m-1}$ 收敛)；同样，证明并利用 $|a_m|r^{m-1}\leqslant M$ 对某个 M 成立.]

(b)证明：$\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m$ 的导数是 $\sum_{m=1}^{\infty}ma_m x^{m-1}$.

(c)证明：$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(x-a)^m(|x-a|<R)$ 的导数是 $f'(x)=\sum_{m=1}^{\infty}ma_m(x-a)^{m-1}(|x-a|<R)$. [提示：定义 $g(x)=f(x+a)$.]

A.5　幂级数法，部分 II

许多微分方程的解都具有幂级数展开式. 例如，$y'-y=0$ 的解是 $y=Ce^x$ 或 $y=C\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. 本节所介绍的幂级数法使我们可以直接从微分方程求出幂级数解(如果存在的话). 这个方法在求解一大类重要的变系数二阶线性微分方程时非常有用，这类方程不能运用我们前面介绍的方法求解. 幂级数法解法如下：第一，假设解是一个幂级数. 第二，将微分方程中的每项都写成一个幂级数. 第三，令方程两端得到的级数的系数相等. 第四，求出所设解的级数展开式的未知系数.

A40

下面以推导 $y'-y=0$ 的幂级数解为例，说明这个方法.

例 1　一阶方程

假设已知 $y'-y=0$ 的解在 0 点具有幂级数展开式，求出这个解.

解　记 $y=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m$. 逐项微分，我们有 $y'=\sum_{m=1}^{\infty}ma_m x^{m-1}$. 如果我们将 y 和 y'的幂级数代入方程，合并级数，我们得到

$$\sum_{m=1}^{\infty}ma_m x^{m-1}-\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=0;$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)a_{m+1}x^m-\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=0;$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}[(m+1)a_{m+1}-a_m]x^m=0.$$

[要合并级数，需要 x 的幂相同. 为此，将 m 变成 $m+1$ 重新调整第一个级数. 求和指标的下界为 1，调整后其下界为 0.]

由恒等原理，对所有的 m，$(m+1)a_{m+1}-a_m=0$，因此，

$$a_{m+1}=\frac{a_m}{m+1}. \tag{1}$$

因此，

$$a_1=a_0,\quad a_2=\frac{a_1}{2}=\frac{a_0}{1\cdot 2},\quad a_3=\frac{a_2}{3}=\frac{a_0}{1\cdot 2\cdot 3},\quad a_4=\frac{a_3}{4}=\frac{a_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\cdots,$$

一般而言，$a_m=a_0/m!$. 因此，解是

$$y=a_0\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)=a_0e^x,$$

其中 a_0 代表在一阶线性微分方程通解中我们所希望的任意常数. ■

回顾上节对级数重排指标，就像在积分中作变量代换. 如果 k 是正整数，可以在级数中将 m 换成 $m+k$，则级数起始点必定降低 k 个单位. 如果将 m 换成 $m-k$，则级数起始点必定增加 k 个单位.

像(1)式那样，由前一项系数给出每项系数的表达式称为**递推关系式**. 在例 1 中，递推关系式是一步确定系数的，即由 a_0 得到 a_1，由 a_1 得到 a_2，等等. 在下个例题中，递推关系式是两步确定系数的. A41

例 2 一个熟知的二阶方程

我们知道，微分方程 $y''+y=0$ 的两个线性无关解是 $y_1=\cos x$ 和 $y_2=\sin x$. 我们也知道这两个解在 $x=0$ 处都具有幂级数展开式. 利用幂级数法推导出幂级数解.

解 如果我们假设微分方程具有幂级数解

$$y=\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots,$$

则 y 的导数由逐项微分得到：

$$y'=\sum_{m=1}^{\infty}ma_mx^{m-1}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots,$$

$$y''=\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)a_mx^{m-2}=2a_2+2\cdot 3a_3x+3\cdot 4a_4x^2+\cdots.$$

将 y' 和 y'' 代入方程，我们得到

$$\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)a_mx^{m-2}+\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m=0,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m+\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m=0,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}[(m+2)(m+1)a_{m+2}+a_m]x^m=0.$$

[将第一个级数中的 m 变为 $m+2$，因此新级数求和指标的下界变为 0.]

因此，

$$a_{m+2}=-\frac{1}{(m+2)(m+1)}a_m.$$

由这个关系式，显然 a_0 确定了 a_2，后者依次确定了 a_4 等. 类似地，a_1 确定了 a_3，后者依次确定了 a_5 等. 因此，偶数项系数由 a_0 确定，而奇数项系数由 a_1 确定：

$$a_2 = -\frac{1}{2!}a_0, \qquad a_3 = -\frac{1}{3!}a_1,$$

$$a_4 = -\frac{1}{4\cdot 3}a_2 = \frac{1}{4!}a_0, \qquad a_5 = -\frac{a_3}{5\cdot 4} = \frac{1}{5!}a_1,$$

$$a_6 = -\frac{1}{6\cdot 5}a_4 = -\frac{1}{6!}a_0, \qquad a_7 = -\frac{a_5}{7\cdot 6} = -\frac{1}{7!}a_1.$$

由此，我们得到

$$a_{2k} = (-1)^k\frac{a_0}{(2k)!}, \quad a_{2k+1} = (-1)^k\frac{a_1}{(2k+1)!}.$$

将偶数项和奇数项分开写，得到解

A42

$$y = a_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + a_1\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

可以看出这些级数分别是正弦和余弦的泰勒级数；因此，正如我们已经知道的，$y=a_0\cos x+a_1\sin x$. ■

请注意，a_0 和 a_1 代表我们在二阶微分方程通解中所希望的两个常数.

在例 1 和例 2 中，微分方程的解是熟悉的函数. 但是当我们利用幂级数法去求出不能用初等函数组合表示的解时，其有效性将更加复杂. 为应用这个方法，我们必须知道解何时具有幂级数展开式. 考虑如果我们假设微分方程 $xy'+y=0$ 的解在 0 点具有幂级数展开式，结果会怎样？令 $y=\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m$，则

$$xy'+y = x\sum_{m=0}^{\infty}ma_mx^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m = \sum_{m=0}^{\infty}(1+m)a_mx^m.$$

因此，$xy'+y=0$ 推出 $\sum_{m=0}^{\infty}(1+m)a_mx^m=0$，从而推出对所有 m，$(1+m)a_m=0$. 由于 $1+m\neq 0$，因而 $a_m=0$，这就推出解是 $y=0$. 但是，容易验证 $y=C/x$ 是一个解(可以利用附录 A.1 节定理 1 推出这个解，或简单猜测之). 事实上，$y'=-C/x^2$，所以 $xy'+y=(-C/x)+(C/x)=0$. 因此，幂级数法对这种情形不能用. 这是可以预料的，因为解在 $x=0$ 处甚至都没有定义，它当然不可能具有以 0 为中心的幂级数.

因此，不能总是假设解在给定点处都具有幂级数展开式. 下面的富克斯定理给出了能够应用幂级数法的充分条件.

定理 1(幂级数解) 假设 $p(x)$，$q(x)$和 $g(x)$在 $x=a$ 处具有幂级数展开式，则

$$y''+p(x)y'+q(x)y=g(x) \tag{2}$$

的任意一个解在 $x=a$ 处都具有幂级数展开式，因此，任意一个解 y 都可以表示成以 a 为中心的幂级数

$$y=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(x-a)^m.$$

进一步地，这个幂级数的收敛半径至少与 p，q 和 g 的收敛半径最小的一个一样大.

当 $p(x)$，$q(x)$和 $g(x)$在 $x=a$ 处都具有正收敛半径的幂级数展开式时，点 a 称为方程(2)的寻常点.　A43

由于(2)式解的存在性由附录 A.1 节定理 3 所保证，定理 1 的真正目的是说解的幂级数展开式的存在性. 定理 1 的证明请参考 Garrett Birkhoff and Gian-Carlo Rota，*Ordinary Differential Equations*，2nd ed.，Wiley，1969，第 3 章. 为理解定理 1 的威力，注意到，它断言一个复杂方程，如 $y''+e^x y'+\cos xy=1/(1+x^2)$在 $x=0$ 处具有幂级数解，且其收敛半径至少为 1.

例 3　二阶初值问题

求解初值问题

$$y''+xy'+y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

解　利用定理 1 的记号，我们令 $p(x)=x$ 和$q(x)=1$. 由于这两个函数在 0 点具有幂级数展开式(由函数本身确定)，我们可以假设解具有形式

$$y=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots.$$

刚开始，我们可以利用初始条件求出 a_0 和 a_1. 我们有

$$y(0)=a_0+a_1 0+a_2 0^2+\cdots=a_0,$$
$$y'(0)=a_1+2a_2 0+3a_3 0^2+\cdots=a_1.$$

因此，初始条件蕴涵着 $a_0=0$ 和 $a_1=1$. 将 y 及其导数的级数代入微分方程得到

$$\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)a_m x^{m-2}+\sum_{m=1}^{\infty}ma_m x^m+\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=0.$$

移位第一个级数的求和指标得到

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m+\sum_{m=1}^{\infty}ma_m x^m+\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=0;$$

$$(2a_2+a_0)+\sum_{m=1}^{\infty}[(m+2)(m+1)a_{m+2}+ma_m+a_m]x^m=0.$$

[注意第一个求和指标的下界是如何变为 0 的.]

令常数项为零得到 $a_2=-a_0/2$，而令级数的系数为零得到递推关系式

$$a_{m+2}=\frac{-1}{m+2}a_m.$$

如前面的例题，a_0 确定了偶数项的系数，而 a_1 确定了奇数项系数. 由于 $a_0=0$，我们得到 $a_2=0$，$a_4=0$ 等. 对于奇数项系数，递推关系给出　A44

$$a_1=1,$$

$$a_3=-\frac{1}{3}a_1=-\frac{1}{3},$$

$$a_5=-\frac{1}{5}a_3=\frac{1}{5\cdot 3},$$

$$a_7=-\frac{1}{7}a_5=-\frac{1}{7\cdot 5\cdot 3}.$$

这里出现的模式是

$$a_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}.$$

将这些系数值代入 y，我们得到给定初值问题的解

$$y=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{15}x^5-\frac{1}{105}x^7+\cdots+\frac{(-1)^k}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}x^{2k+1}+\cdots.$$

这个解可以写成更紧凑的形式(参见习题 23). ■

例 3 解的多项式逼近如图 1 所示. 我们包含的项数越多，在更大的区间上逼近的效果就越好. 请注意所有的多项式都满足初始条件.

值得注意的是，利用幂级数法求解如例 3 的初值问题时，我们总是有

$$\boxed{y(0)=a_0 \text{ 及 } y'(0)=a_1.}$$

可以预料，我们并不可能总是找到解中系数的简单模式. 在这种情形中，我们可以确定足够多的级数项，以得到解的一个泰勒多项式逼近.

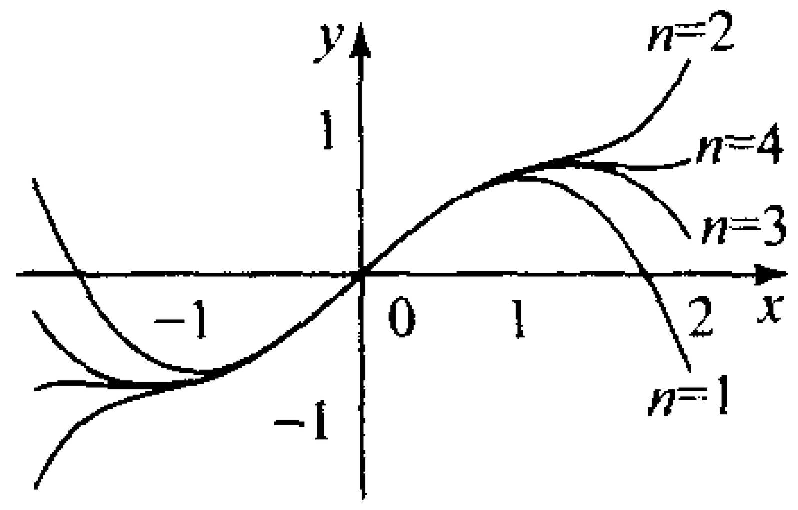


图 1 例 3 解的($2n+1$ 次)多项式逼近

例 4 泰勒多项式逼近

求初值问题

$$y''+e^xy=\cos x,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$$

解的 4 次泰勒多项式逼近.

解 利用定理 1 的记号，我们有 $p(x)=0$，$q(x)=e^x$，以及 $g(x)=\cos x$，每个函数在 0 点都具有对所有 x 成立的幂级数展开式. 因此，我们有幂级数解，其中心在 0 点，具有无穷收敛半径. 我们将这个级数写成泰勒级数形式：

A45

$$y=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{y^{(m)}(0)}{m!}x^m.$$

我们的目标是确定前五个系数 a_0，a_1，…，a_5，以得到泰勒多项式逼近

$$P_4(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4.$$

我们不用幂级数法，而是直接利用微分方程和初始条件. 事实上，初始条件 $y(0)=1$ 和 $y'(0)=0$ 直接给出了泰勒多项式的前两项的系数. 由微分方程，我们有

$$\begin{aligned}
y''&=-e^xy+\cos x,\\
y''(0)&=-e^0y(0)+\cos(0)=(-1)(1)+1=0;\\
y'''&=[-e^xy+\cos x]'=-e^xy-e^xy'-\sin x,\\
y'''(0)&=-e^0y(0)-e^0y'(0)-\sin(0)=-1;\\
y^{(4)}&=[-e^x(y+y')-\sin x]'=-e^x(y+y')-e^x(y'+y'')-\cos x,\\
y^{(4)}(0)&=-1-1=-2.
\end{aligned}$$

因此，$P_4(x)=1-(1/3!)x^3-(2/4!)x^4=1-x^3/6-x^4/12$ 是解的 4 次泰勒多项式逼近.

继续这个过程，我们想得到多少项就可以得到多少项. 7 次泰勒多项式逼近是

$$P_7(x) = 1 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^6 + \frac{19}{5\,040}x^7.$$

在区间[−1，1]上，4 次泰勒多项式逼近的图像和 7 次泰勒多项式逼近的图像已经无法区分了(图 2)．这说明在这个区间上，我们用 4 次多项式就得到了一个很好的逼近．但是，当我们远离中心时，我们需要更多的项以得到好的逼近． ■

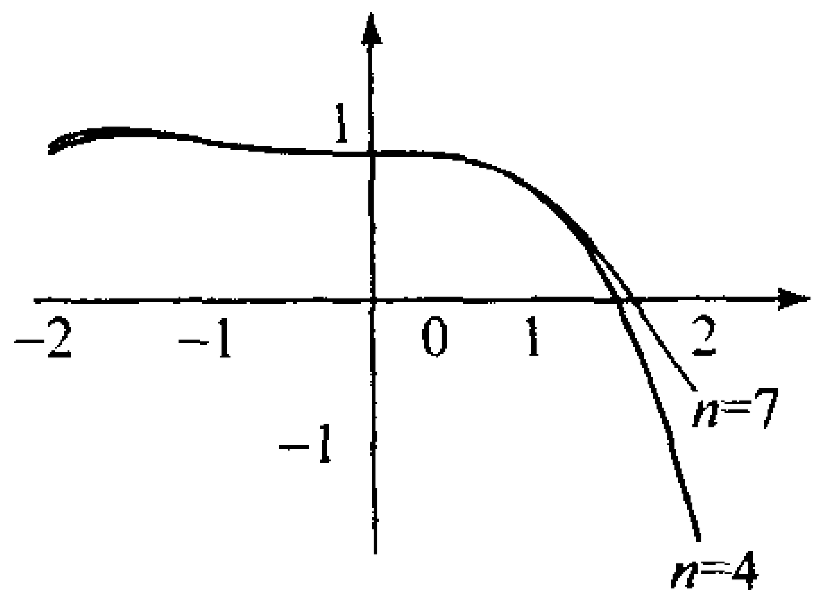


图 2　解的(n 次)多项式逼近

在二阶齐次问题中，指出线性无关解 y_1 和 y_2 是有必要的．如例 2 和例 3 所示，递推关系式使得我们可以利用 a_0 和 a_1 解出系数 a_m，$m\geqslant 2$．我们可以取 $a_0=1$，$a_1=0$ 来定义 y_1，取 $a_0=0$，$a_1=1$ 来定义 y_2，则通解可以写成

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

对初值问题而言，容易验证 y_1 满足初值 $y_1(a)=1$，$y_1'(a)=0$．类似地，y_2 满足 $y_2(a)=0$，$y_2'(a)=1$．

下面例题处理的是勒让德微分方程的特殊形式．对这些方程的详细处理在 5.5 节和 5.6 节介绍过．这个处理是幂级数法在本书中的重要应用之一． A46

例 5　勒让德微分方程

求解初值问题

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$$

解　将方程写成标准形式：

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{12}{1-x^2}y = 0.$$

用定理 1 的记号，我们有 $p(x)=-2x/(1-x^2)$ 和 $q(x)=12/(1-x^2)$．由几何级数 $\sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1/(1-x)$，它对 $|x|<1$ 成立，我们得到

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} x^{2m} \quad 及 \quad \frac{x}{1-x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} x^{2m+1},$$

这两个级数对所有的 $|x^2|<1$ 或 $|x|<1$ 收敛．由此，我们得到 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 0 点具有收敛半径为 1 的幂级数展开式．定理 1 保证解在 0 点具有幂级数展开式，其收敛半径至少等于 1．为求出这个解，将 $y=\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ 及其一阶、二阶导数代入方程，得到

$$(1-x^2)\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - 2x\sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} + 12\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0;$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^m$$
$$- \sum_{m=1}^{\infty} 2m a_m x^m + 12\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0.$$

在第二个方程的第一个级数中，将 m 换成 $m+2$，化简

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2}x^m - \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1)a_m x^m$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}2ma_m x^m + 12\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m = 0;$$

$$2a_2 + 12a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}[(m+2)(m+1)a_{m+2} + a_m(\overbrace{-m(m-1)-2m+12}^{(m-3)(m+4)})]x^m,$$

其中我们将 $m=0$ 从级数中分出来，以使得所有级数都是从 $m=1$ 开始．令级数中的系数为零，化简得到关系式

$$2a_2 + 12a_0 = 0; \quad a_{m+2} = a_m\frac{(m-3)(m+4)}{(m+2)(m+1)} \quad (m \geqslant 1).$$

A47 初始条件确定了 a_0 和 a_1．事实上，$a_0=y(0)=0$ 以及 $a_1=y'(0)=1$．两步递推关系式确定剩下的系数．由 $a_0=0$，我们得到 $a_2=0$，$a_4=0$，更一般地，对所有的 $k\geqslant 0$，$a_{2k}=0$．现在，我们转向奇数指标，在递推关系式中取 $m=1$，我们得到：$a_3=a_1(-10)/6=-5/3$．接着，我们取 $m=3$，得到 $a_5=0$，从而，$a_7=0$，$a_9=0$，更一般地，对所有的 $k\geqslant 1$，$a_{2k+1}=0$．因此，解是一个多项式：

$$y = a_1x + a_3x^3 = x - \frac{5}{3}x^3.$$

可以直接由方程验证：$y'=1-5x^2$，$y''=-10x$，所以

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = (1-x^2)(-10x) - 2x(1-5x^2) + 12\left(x - \frac{5}{3}x^3\right) = 0.$$

初始条件显然满足． ■

回顾定理 1 保证，幂级数解具有至少与系数函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 幂级数展开式，收敛半径最小的一个一样大的收敛半径．但是记住，解可能有更大的收敛半径．在例 5 中，一个解是 3 次多项式，特别地，它的收敛半径是无穷大．

下面，我们推导例 5 中方程的通解．

例 6　勒让德微分方程的通解

求出勒让德方程

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$$

的两个线性无关解．

解　在例 5 中，我们求出一个特解，$y_1=x-(5/3)x^3$．为得到第二个线性无关解，我们回到前面得到的递推关系式，并令 a_0 是任意的．从而得到 $a_2=a_0\dfrac{(-3)(4)}{(2)(1)}=-6a_0$，$a_4=a_2\dfrac{(-1)(6)}{(4)(3)}=3a_0$，$a_6=a_4\dfrac{(1)(8)}{(6)(5)}=\dfrac{4}{5}a_0$ 等．因此，

$$y_2 = a_0\left(1 - 6x^2 + 3x^4 + \frac{4}{5}x^6 + \cdots\right).$$

这个解是 x 的偶次幂的无穷幂级数．与 y_1 不同，y_2 具有无穷多个非零项． ■

例 5 中的勒让德方程具有一个多项式解和一个无穷级数解这个事实不是偶然的．事实上，对非负整数 n，每个可以写成形如 $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$ 的方程都会发生这种情况．

A48 （在例 5 中，我们有 $n=3$．）关于勒让德方程的许多有趣事实，可以在 5.5 节和 5.6 节找到．

习题 A.5

在习题 1～12 中，证明 0 是寻常点，然后求出中心在 0 点的幂级数解．对每种情形，写出系数的递推关系式，对每个幂级数解，至少计算三个非零项．

1. $y'+2xy=0$.
2. $y'+y=0$.
3. $y'+y=x$.
4. $y'+(\cos x)y=0$.
5. $y''-y=0$.
6. $y''-y=x$.
7. $y''-xy'+y=0$.
8. $y''+2y'+2y=0$.
9. $y''+2xy'+y=0$.
10. $y''+xy'+y=0$.
11. $y''-2y'+y=0$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$.
12. $y''-2y'+y=x$，$y(0)=2$，$y'(0)=1$.

在习题 13～16 中，利用幂级数法，求解给定的勒让德微分方程．

13. $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$，$y(0)=0$，$y'(0)=3$.
14. $(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$，$y(0)=1$，$y'(0)=1$.
15. $(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$，$y(0)=1$，$y'(0)=0$.
16. $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$，$y(0)=1$，$y'(0)=0$.
17. 在区间 $-1<x<1$ 上，求出 $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$ 的两个线性无关解．[提示：由幂级数法，一个解是 1 次多项式．你可以利用降阶公式求出第二个线性无关解．]
18. 在区间 $-1<x<1$ 上，求出 $(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$ 的两个线性无关解．

在习题 19～22 中，(a)验证以 0 为中心的幂级数解的存在性，然后求出解的 5 次泰勒多项式逼近．(b)利用计算机，求出解的高次泰勒多项式逼近．在区间[－2，2]上，画出它们的图像，然后确定在区间[－1，1]上要得到解的一个较好逼近所需要的最低次数．

19. $y''-y'+2y=e^x$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$.
20. $y''+(\sin x)y=x$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$.
21. $y''+e^xy=0$，$y(0)=1$，$y'(0)=0$.
22. $y''+xy=\cosh x$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$.
23. 试证：例 3 中解是
$$y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^k k!}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$
24. **爱瑞微分方程**．在本题中，我们解出爱瑞方程
$$y''-xy=0$$
的级数解．

A49

(a)陈述为何这个微分方程具有收敛半径为无穷的幂级数解．

(b)假设 $y=\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m$．试证 $a_2=0$，并推导三步递推关系式

$$(m+2)(m+1)a_{m+2}=a_{m-1},\quad m=1,2,3,\cdots.$$

(c)试证：通解是

$$y=a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)(3n-1)(3n-3)\cdots3\cdot2}\right]$$

$$+a_1\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)(3n)(3n-2)\cdots4\cdot3}\right].$$

(d)记 $y=a_0y_1+a_1y_2$，画出 y_1 和 y_2 的几个多项式逼近的图像．注意到，对负的 x 值，图像看起来像 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的图像，而对正的 x 值，图像看起来像 e^x 的图像．考察方程，给出这个发现的理由．

25. 求解下面关于爱瑞方程的初值问题：

$$y''-xy=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$$

26. **正弦函数和余弦函数**．在本题中，我们说明如何利用微分方程来推导出其解的性质．参考例 2 中的微分方程，它具有两个线性无关解：

$$C(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k}\quad 及\quad S(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

假设没有看出它们是正弦函数和余弦函数，利用微分方程来推导它们的基本性质．

(a)试证：$C'(x)=-S(x)$以及 $S'(x)=C(x)$．

(b)利用朗斯基行列式的阿贝尔公式，证明 $C^2(x)+S^2(x)=1$．

(c)利用微分方程 $y''+y=0$ 的任意解都是 $C(x)$和 $S(x)$的线性组合这个事实，证明 $S(x+a)=S(x)C(a)+C(x)S(a)$．［提示：证明 $S(x+a)$是解，从而得出 $S(x+a)=c_1S(x)+c_2C(x)$．计算 $x=0$ 点的值，确定常数．］

(d)建立恒等式

$$C(x+a)=C(x)C(a)-S(x)S(a).$$

A50 (e)(c)和(d)蕴涵着哪些三角恒等式？

A.6 弗罗贝尼乌斯法

虽然幂级数法在许多时候是有用的，甚至是迄今为止我们所发展的应用面最广的方法，但是仍然有许多重要的微分方程无法完全利用这个方法来理解．例如，考虑贝塞尔方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0.$$

将它写成标准形式，我们发现 $x=0$ 不是一个寻常点．因此，附录 A.5 节定理 1 不能用．在应用中，理解解在 $x=0$ 处的性态具有特别的重要性．为此，我们将发展一个推广的幂级数法，称为**弗罗贝尼乌斯法**．

考虑齐次微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0. \tag{1}$$

回顾一下，a 是微分方程的一个寻常点，如果 p 和 q 在 a 处具有幂级数展开式．否则，a 称为**奇点**．如果 a 是一个寻常点，则由上节的结果，我们知道方程的解在 $x=a$ 点具有幂级数展开式．如果 a 是奇点，则如下例所示，幂级数法失效．

例 1　幂级数法失效的方程

考虑微分方程 $xy''+2y'+xy=0$．

(a)确定 $x=0$ 是寻常点还是奇点．

(b)对微分方程在 $x=0$ 处应用幂级数法.

解 (a)我们有 $p(x)=2/x$ 和 $q(x)=1$. 由于 $p(x)$ 在 $x=0$ 处没有幂级数展开式，点 $x=0$ 是这个方程的奇点.

(b)假设 y 有以 $x=0$ 为中心的幂级数展开式，$y=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m$. 代入微分方程，如有必要，重新标号，得到

$$\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)a_m x^{m-1}+\sum_{m=1}^{\infty}2ma_m x^{m-1}+\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+1}=0;$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}(m+1)ma_{m+1}x^m+\sum_{m=0}^{\infty}2(m+1)a_{m+1}x^m+\sum_{m=1}^{\infty}a_{m-1}x^m=0;$$

$$2a_1+\sum_{m=1}^{\infty}[m(m+1)a_{m+1}+2(m+1)a_{m+1}+a_{m-1}]x^m=0.$$

令系数相等，我们发现 $a_1=0$，以及对所有 m，

$$m(m+1)a_{m+1}+2(m+1)a_{m+1}+a_{m-1}=0,$$

A51

由此我们得到两步递推关系式

$$a_{m+1}=-\frac{1}{(m+2)(m+1)}a_{m-1}.$$

由于 $a_1=0$，得到 $a_3=a_5=a_7=\cdots=0$. 对偶数指标的系数，我们有

$$a_2=-\frac{1}{3\cdot 2}a_0=-\frac{1}{3!}a_0$$

$$a_4=-\frac{1}{5\cdot 4}a_2=\frac{1}{5!}a_0$$

$$a_6=-\frac{1}{7\cdot 6}a_4=-\frac{1}{7!}a_0.$$

这个序列如何继续下去是显然的. 因此，一个解是

$$y=a_0\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots\right)=\frac{a_0}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)=a_0\frac{\sin x}{x}$$

(图 1).（请注意，函数 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 处具有对所有 x 都收敛的幂级数展开式.）由于微分方程是二阶的，我们需要两个线性无关解. 幂级数法只能得到一个解，因而不能给出通解. 为得到第二个线性无关解，我们可以利用降阶法，得到（验证之）：

$$y=\frac{\cos x}{x}.$$

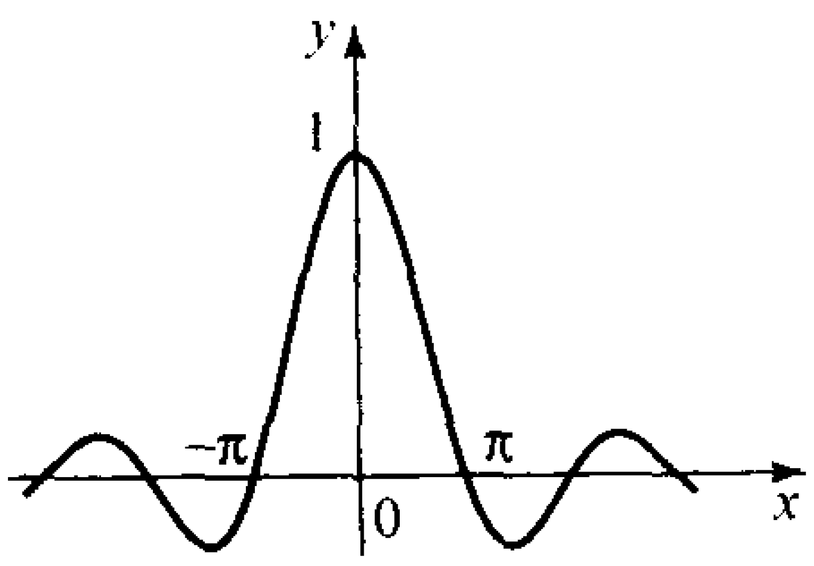


图 1 $y=\frac{\sin x}{x}$ 的图像

（参考习题 29.）■

简单而言，在例 1 中，利用幂级数法不能得到两个线性无关解，从而不能生成通解，是因为其解中的一个不是一个幂级数. 为看清原因，我们记

$$\frac{\cos x}{x}=x^{-1}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right).$$

这不是幂级数，因为它含有 x 的负幂次. 可以证明如果微分方程的奇点不是“非常坏”，则解具有与例 1 解类似的模式，即至少一个解是幂级数乘以 x^r. 本节剩下的部分就是使这个思想更严谨些. 虽然类似方法可以应用于以任意 $x=a$ 为中心的级数展开，但是为简单起见，我们只考虑以 $x=0$ 点为中心的级数展开.

假设 $x=0$ 是方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{2}$$

的一个奇点. 我们称 $x=0$ 是方程的**正则奇点**，如果函数 $xp(x)$ 和 $x^2q(x)$ 在 $x=0$ 点都具有幂级数展开式. (这就是我们所指的奇异性不是“非常坏”的意思.) 我们现在要描述的弗罗贝尼乌斯法可以应用到那些 $x=0$ 是正则奇点的微分方程上. 为清楚起见，我们集中于 $x>0$ 的情形. $x<0$ 情形类似可得(或可以作变量代换 $t=-x$ 化成 $x>0$ 情形). 受例 1 启发，我们尝试形如

A52

$$y=x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)=\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{r+m} \tag{3}$$

的级数解，$a_0\neq0$.. 这种级数称为**弗罗贝尼乌斯级数**. 我们有

$$y'=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(r+m)x^{r+m-1}$$

和

$$y''=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(r+m)(r+m-1)x^{r+m-2}.$$

(注意到，这两个级数求和指标都是从 0 开始，为什么?) 因此，(2)式变为

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_m(r+m)(r+m-1)x^{r+m-2}+p(x)\sum_{m=0}^{\infty}a_m(r+m)x^{r+m-1}+q(x)\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{r+m}=0.$$

我们在第二个级数中提出因子 x，在第三个级数中提出因子 x^2，以使所有的指数都相同，得到

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_m(r+m)(r+m-1)x^{r+m-2}+xp(x)\sum_{m=0}^{\infty}a_m(r+m)x^{r+m-2}+x^2q(x)\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{r+m-2}=0. \tag{4}$$

由于由假设 $x=0$ 是正则奇点，所以函数 $xp(x)$ 和 $x^2q(x)$ 在 $x=0$ 点都具有幂级数展开式，比如说，

$$xp(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots$$

和

A53

$$x^2q(x)=q_0+q_1x+q_2x^2+\cdots,$$

将这些代入(4)，得到

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_m(r+m)(r+m-1)x^{r+m-2}$$

$$+(p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots)\sum_{m=0}^{\infty}a_m(r+m)x^{r+m-2}$$

$$+(q_0+q_1x+q_2x^2+\cdots)\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{r+m-2}=0.$$

方程左边 x 的每个幂次的系数都必须为零，因为右端是零．方程中所出现的 x 最低幂次是 x^{r-2}，其系数是 $a_0r(r-1)+p_0a_0r+q_0a_0=a_0[r(r-1)+p_0r+q_0]=0$．由于 $a_0\neq0$，r 必须是**指标方程**

$$\boxed{r(r-1)+p_0r+q_0=0} \tag{5}$$

的根．这个方程的根称为**指标根**，记为 r_1 和 r_2，只要它们是实数，就约定 $r_1\geqslant r_2$．注意到，p_0 和 q_0 是很容易确定的，因为它们分别是 $xp(x)$ 和 $x^2q(x)$ 在 $x=0$ 点的取值．一旦我们确定了 r_1 和 r_2，将 r_1 代入(4)式，就像我们在应用幂级数法时那样，解出未知系数 a_n．这就得到(2)式的第一个解．总结一下，我们有如下重要的结果．

定理 1(弗罗贝尼乌斯法第一个解)　*如果 $x=0$ 是方程*

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

的正则奇点，则一个解具有形式

$$y_1=|x|^{r_1}(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots),\quad a_0\neq0,$$

其中 r_1 是指标方程(5)的根，并约定当两个根都是实数时，r_1 是两根中较大的一个．

这个定理的证明可以参考 Garrett Birkhoff and Gian-Carlo Rota，*Ordinary Differential Equations*，2nd ed.，Wiley，1969，第 9 章．可以证明：如果 $xp(x)$ 和 $x^2q(x)$ 具有对 $|x|<R$ 收敛的幂级数展开式，则级数解对 $0<|x|<R$ 收敛．

请注意，定理 1 对(2)的第二个解没有任何说法．这个解可能具有下面所描述的三种形式之一，其证明放在本节之后的附录中． A54

定理 2(弗罗贝尼乌斯法)　*假设 $x=0$ 是微分方程*

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

的正则奇点，令 r_1 和 r_2 表示指标根．微分方程具有两个线性无关解 y_1 和 y_2，描述如下．

情形 1：*如果 r_1-r_2 不是整数，则*

$$y_1=|x|^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m,\quad y_2=|x|^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty}b_mx^m,\quad a_0\neq0\text{ 且 }b_0\neq0.$$

情形 2：*如果 $r=r_1=r_2$，则*

$$y_1=|x|^{r}\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m,\quad y_2=y_1\ln|x|+|x|^{r}\sum_{m=1}^{\infty}b_mx^m,\quad a_0\neq0.$$

情形 3：*如果 r_1-r_2 是正整数，$r_1\geqslant r_2$，则*

$$y_1=|x|^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m,\quad y_2=ky_1\ln|x|+|x|^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty}b_mx^m,$$

其中 $a_0\neq0$，$b_0\neq0$(k 可以为零，也可以不为零)．

因此，在情形 1 和 $k=0$ 时的情形 3 中，我们得到两个线性无关的弗罗贝尼乌斯级数解．

在其他情形中，我们只能得到一个弗罗贝尼乌斯级数解，另外一个线性无关解必定含有对数项. 在计算 y_1 和 y_2 时，为方便起见，取 $a_0=1$ 和 $b_0=1$，则在用 y_1 和 y_2 的任意线性组合形式写出通解时，就会出现两个任意常数.

例 2　弗罗贝尼乌斯法：r_1-r_2 不是整数

求解微分方程

$$y''+\frac{1}{2x}y'-\frac{1}{4x}y=0,\quad x>0.$$

解　由于 $xp(x)=\frac{1}{2}$ 和 $x^2q(x)=-\frac{1}{4}x$ 在 $x=0$ 点都具有幂级数展开式，可以应用定理 1. 进一步地，$p_0=\frac{1}{2}$ 和 $q_0=0$，从而指标方程和指标根是

$$r(r-1)+\frac{1}{2}r=0,$$

$$r^2-\frac{1}{2}r=0,$$

$$r_1=\frac{1}{2}\quad 及\quad r_2=0.$$

A55 (按照我们的约定，选 $r_1\geqslant r_2$.)由于 r_1-r_2 不是整数，解由弗罗贝尼乌斯法情形 1 给出. 下一步就是确定级数解中的未知系数. 直接从微分方程开始更方便，两边同时乘以 $4x$，

$$4xy''+2y'-y=0.$$

将 $y=\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r}$ 代入方程，得到

$$\sum_{m=0}^{\infty}4a_m(m+r)(m+r-1)x^{m+r-1}+\sum_{m=0}^{\infty}2a_m(m+r)x^{m+r-1}-\sum_{m=1}^{\infty}a_{m-1}x^{m+r-1}=0.$$

(在第三个级数中我们已经移位了指标，以使 x 的所有指数相符.)将相应于 $m=0$ 的项加起来，再令 x^{0+r-1} 的系数为零，得到指标方程

$$4a_0r(r-1)+2a_0r=0,$$

$$r^2-\frac{1}{2}r=0\quad (因为\ a_0\neq 0).$$

令 x^{m+r-1} 的系数之和为零，得到

$$4a_m(m+r)(m+r-1)+2a_m(m+r)-a_{m-1}=0. \tag{6}$$

此时，我们要分别处理 $r_1=\frac{1}{2}$ 和 $r_2=0$ 情形. 当 $r=\frac{1}{2}$ 时，递推关系式(6)变为

$$4a_m\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}-1\right)+2a_m\left(m+\frac{1}{2}\right)-a_{m-1}=0,$$

$$a_m=\frac{1}{2m(2m+1)}a_{m-1}.$$

由这个递推关系式，我们得到

$$a_1 = \frac{1}{2 \cdot 3}a_0 = \frac{1}{3!}a_0, \quad a_4 = \frac{1}{8 \cdot 9}a_3 = \frac{1}{9!}a_0,$$
$$a_2 = \frac{1}{4 \cdot 5}a_1 = \frac{1}{5!}a_0, \quad a_5 = \frac{1}{10 \cdot 11}a_4 = \frac{1}{11!}a_0,$$
$$a_3 = \frac{1}{6 \cdot 7}a_2 = \frac{1}{7!}a_0, \quad \vdots$$

因此，$a_m = \frac{1}{(2m+1)!}a_0$，因此，对应于 $r=\frac{1}{2}$ 和 $a_0=1$ 的解是

$$y_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} x^{m+\frac{1}{2}}.$$

对 $r=0$，我们得到递推关系式(6)：

$$4a_m m(m-1) + 2a_m m - a_{m-1} = 0,$$
$$a_m = \frac{1}{2m(2m-1)}a_{m-1}.$$

A56

它给出了系数模式：

$$a_1 = \frac{1}{2 \cdot 1}a_0 = \frac{1}{2!}a_0, \quad a_4 = \frac{1}{8 \cdot 7}a_3 = \frac{1}{8!}a_0,$$
$$a_2 = \frac{1}{4 \cdot 3}a_1 = \frac{1}{4!}a_0, \quad a_5 = \frac{1}{10 \cdot 9}a_4 = \frac{1}{10!}a_0,$$
$$a_3 = \frac{1}{6 \cdot 5}a_2 = \frac{1}{6!}a_0,$$

显然，$a_m = \frac{1}{(2m)!}a_0$，因此，对应于 $r=0$ 和 $a_0=1$ 的解是

$$y_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} x^m.$$

因此，微分方程的通解是 $y=c_1 y_1 + c_2 y_2$，其中 c_1 和 c_2 是任意常数. ■

例 2 的解可以简化成

$$y_1 = \sinh\sqrt{x} \quad 及 \quad y_2 = \cosh\sqrt{x}, \quad x > 0.$$

可以看出原因吗？[提示：将 x^m 写成 $(\sqrt{x})^{2m}$.]将它们代入微分方程可以验证它们是解. 在图 2 中，我们将 $\cosh\sqrt{x}$ 的图像与 y_2 部分和的图像作了比较. 观察 y_2 的部分和是如何逼近真实解的. 利用计算机，对 y_1 可以作同样的逼近.

例 3　重根 $r=r_1=r_2$ 情形

求解微分方程

$$x^2 y'' + 3xy' + (1-x)y = 0, \quad x > 0. \tag{7}$$

解　容易验证 $p_0=3$，$q_0=1$，因此，指标方程是 $r^2+2r+1=0$. 我们有重根 $r=-1$，从而是情形 2. 令 $y_1 = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m-1}$，$a_0 \neq 0$. 代入(7)式，类似例 2 的计算后，我们

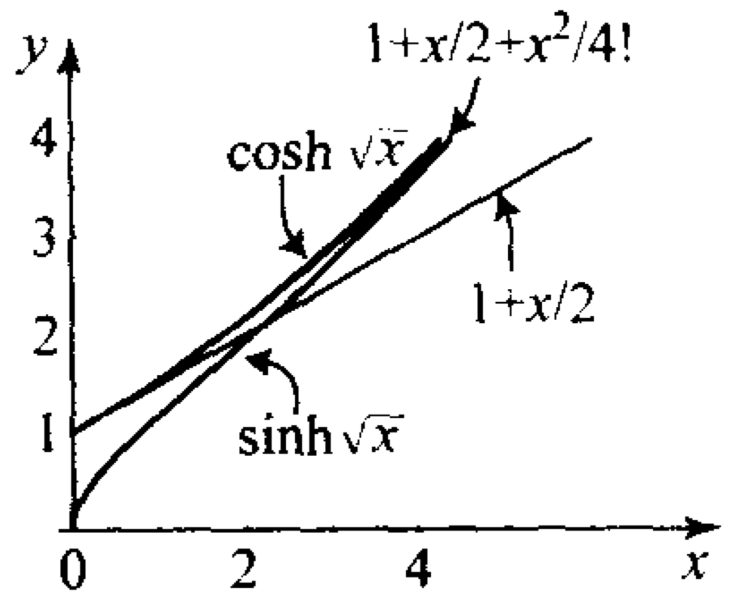


图 2　例 2 的解及其部分和逼近

得到递推关系式

$$a_{m+1}=\frac{a_m}{(m+1)^2}.$$

取 $a_0=1$，我们得到第一个解

$$y_1=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m!)^2}x^{m-1}=\frac{1}{x}\left(1+x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{36}+\frac{x^4}{576}+\cdots\right).$$

(利用无穷级数的部分和，y_1 的一个逼近如图 3 所示. y_1 的详细推导留作习题 30.)按照情形 2，我们尝试第二个解

$$y=y_1\ln x+\sum_{m=1}^{\infty}b_m x^{m-1}.$$

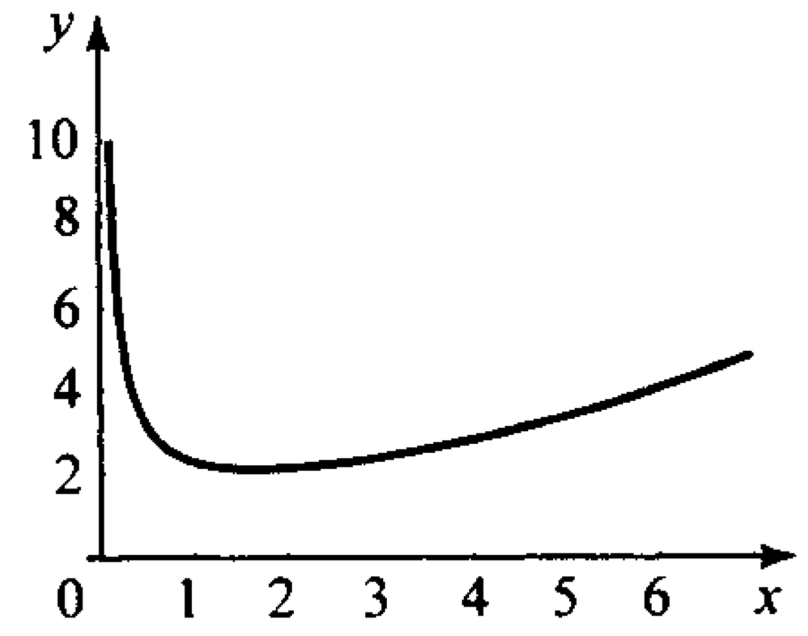


图 3 y_1 在 0 点附近的逼近. 注意到，爆破是由于 $\frac{1}{x}$ 这项

代入(7)式，化简得到

$$\begin{aligned}&\overbrace{[x^2y_1''+3xy_1'+(1-x)y_1]}^{=0}\ln x+(2xy_1'+2y_1)\\&+\sum_{m=1}^{\infty}b_m(m-1)(m-2)x^{m-1}+\sum_{m=1}^{\infty}3b_m(m-1)x^{m-1}\\&+\sum_{m=1}^{\infty}b_m x^{m-1}-\sum_{m=2}^{\infty}b_{m-1}x^{m-1}=0.\end{aligned}\tag{8}$$

A57

(8)式中 $\ln x$ 的系数是零，因为 y_1 是(7)式的解. 由 y_1 的级数表示，我们得到

$$\begin{aligned}2xy_1'+2y_1&=2\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m-1}{(m!)^2}x^{m-1}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m!)^2}x^{m-1}\right]\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2m}{(m!)^2}x^{m-1}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{(m-1)!m!}x^{m-1}.\end{aligned}$$

将这些代入(8)式，再像幂级数一样合并同类项，我们得到方程

$$(2+b_1)+\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{2}{(m-1)!m!}+m^2b_m-b_{m-1}\right)x^{m-1}=0.$$

因此，$b_1=-2$，关于 b_m 的递推关系式是

$$b_m=\frac{1}{m^2}\left(b_{m-1}-\frac{2}{(m-1)!m!}\right).$$

虽然很难用 m 得到 b_m 的一个闭式，但是由这个关系式，我们想计算出多少项系数就可以计算出多少项. 利用前五项系数，我们有

$$y_2=\ln x\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m!)^2}x^{m-1}-\left(2+\frac{3}{4}x+\frac{11}{108}x^2+\frac{25}{3\,456}x^3+\frac{137}{432\,000}x^4+\cdots\right).$$

因此，(7)式的通解是

$$y=c_1y_1+c_2y_2$$

$$= (c_1 + c_2 \ln x) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m!)^2} x^{m-1}$$

$$- c_2 \left(2 + \frac{3}{4}x + \frac{11}{108}x^2 + \frac{25}{3\,456}x^3 + \frac{137}{432\,000}x^4 + \cdots\right).$$

其中 c_1 和 c_2 是任意常数. ■ A58

例 4 $r_1 - r_2$ 是整数情形

求解微分方程

$$x^2 y'' - xy' + (x-3)y = 0, \quad x > 0. \tag{9}$$

解 我们有 $p_0 = -1$，$q_0 = -3$，因此，指标方程是 $r^2 - 2r - 3 = 0$. 指标根是 $r_1 = 3$ 和 $r_2 = -1$. 这是情形 3. 对于第一个解，我们尝试 $y_1 = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+3}$. 代入(9)式，求出系数 a_m，我们得到递推关系式

$$a_m = \frac{-1}{m^2 + 4m} a_{m-1},$$

由此得到

$$y_1 = a_0 x^3 \left(1 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{60}x^2 - \frac{1}{1\,260}x^3 + \frac{1}{40\,320}x^4 - \cdots\right), \tag{10}$$

细节留作习题(习题 31). 第二个解具有形式

$$y = k y_1 \ln x + \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{m-1},$$

其中 k 可能为零，也可能不为零. 将这些代入(9)式，化简，并利用事实 y_1 是解，得到

$$\overbrace{[x^2 y_1'' - x y_1' + (x-3) y_1]}^{=0} \ln x + 2k(x y_1' - y_1)$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} b_m (m-1)(m-2) x^{m-1} - \sum_{m=0}^{\infty} b_m (m-1) x^{m-1}$$

$$- \sum_{m=0}^{\infty} 3 b_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} b_{m-1} x^{m-1} = 0.$$

在 $2k(xy_1' - y_1)$ 中 x 的最低幂次是 x^3，因此，化简得到下面这个方程：

$$(b_0 - 3b_1) + (b_1 - 4b_2)x + (b_2 - 3b_3)x^2 + 2k(xy_1' - y_1)$$

$$+ \sum_{m=4}^{\infty} [b_m (m^2 - 4m) + b_{m-1}] x^{m-1} = 0. \tag{11}$$

取 $b_0 = 1$，令前三项系数为零，求解得到

$$b_1 = \frac{1}{3}, \quad b_2 = \frac{1}{12}, \quad b_3 = \frac{1}{36}.$$

现在，由(10)式得到

A59

$$2k(xy_1'-y_1)=2k\left(2x^3-\frac{3}{5}x^4+\frac{1}{15}x^5-\frac{1}{252}x^6+\cdots\right),$$

因此，在(11)式令 x^3 的系数为零，我们得到

$$4k+b_3=0.$$

因此，$k=-\frac{1}{4}b_3=-\frac{1}{144}$. 现在，利用(11)式，依次令 x^4，x^5，…的系数为零，可以求出任意多项系数 b_4，b_5，…. 略去细节，我们发现 b_4 是任意的(因此，我们取 $b_4=1$)，从而，$b_5=-\frac{121}{600}$. 因此，

$$y_2=-\frac{1}{144}y_1\ln x+x^{-1}\left(1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{36}x^3+x^4-\frac{121}{600}x^5+\cdots\right).$$

从而，(9)式的通解是

$$y=c_1y_1+c_2y_2=x^3\left(c_1-c_2\frac{\ln x}{144}\right)\left(1-\frac{1}{5}x+\frac{1}{60}x^2-\frac{1}{1\,260}x^3+\frac{1}{4\,032}x^4-\cdots\right)$$
$$+c_2x^{-1}\left(1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{36}x^3+x^4-\frac{121}{600}x^5+\cdots\right),$$

其中 c_1 和 c_2 是任意常数. ■

在前面一个例题中，第二个解 y_2 含有对数项，因为常数 k 不为零. 另一方面，例 1 处理的是情形 3，却没有发生这个问题. 事实上，指标方程是 $r(r-1)+2r=0$，根 $r_1=0$ 和 $r_2=-1$ 相差一个正整数，方程的解 $y_1=\frac{\sin x}{x}$和 $y_2=\frac{\cos x}{x}$，不含有对数项.

降阶公式的用处

在弗罗贝尼乌斯法的所有三个情形中，一旦我们已经得到 y_1(利用定理 1)，第二个解就可以通过利用降阶公式

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx \tag{12}$$

得到. 为得到 y_2 的级数，我们将被积函数展开，再逐项积分. 我们以下例说明这个过程，并在本节的附录中证明. 利用计算机可以大大简化展开的工作.

例 5 降阶公式

求出微分方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0,\quad x>0$$

的通解.

A60

解 指标方程是 $r^2-1=0$，指标根 $r_1=1$ 和 $r_2=-1$.（请注意，指标根相差一个正整数，因此，不能假设两个解都具有形式(3).）由定理 1，一个解具有形式 $y_1=x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m$，$r_1=1$. 代入微分方程，如前面例题，求出系数，我们得到

$$y_1=x\left(1-\frac{x^2}{8}+\frac{x^4}{192}-\frac{x^6}{9\,216}+\frac{x^8}{737\,280}-\frac{x^{10}}{88\,473\,600}+\cdots\right)$$

(习题 32). 利用降阶公式，我们求第二个线性无关解. 将 y_1 代入(12)式，我们得到

$$y_2(x)=y_1\int\frac{e^{-\int 1/x\mathrm{d}x}}{y_1^2}\mathrm{d}x\quad\left(e^{-\int 1/x\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\right)$$

$$=y_1\int\frac{1}{x^3\left(1-\frac{x^2}{8}+\frac{x^4}{192}-\frac{x^6}{9\,216}+\frac{x^8}{737\,280}-\frac{x^{10}}{88\,473\,600}+\cdots\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$=y_1\int\frac{1}{x^3\left(1-\frac{x^2}{4}+\frac{5x^4}{192}-\frac{7x^6}{4\,608}+\frac{7x^8}{122\,880}-\frac{11x^{10}}{7\,372\,800}+\cdots\right)}\mathrm{d}x$$

(平方)

$$=y_1\int\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{4x}+\frac{7x}{192}+\frac{19x^3}{4\,608}+\frac{149x^5}{368\,640}+\frac{803x^7}{22\,118\,400}+\cdots\right)\mathrm{d}x$$

(级数展开或长除法)

$$=y_1\left(\frac{-1}{2x^2}+\frac{1}{4}\ln x+\frac{7x^2}{384}+\frac{19x^4}{18\,432}+\frac{149x^6}{2\,211\,840}+\frac{803x^8}{176\,947\,200}+\cdots\right)$$

(逐项积分)

$$=y_1\frac{\ln x}{4}+y_1\left(\frac{-1}{2x^2}+\frac{7x^2}{384}+\frac{19x^4}{18\,432}+\frac{149x^6}{2\,211\,840}+\frac{803x^8}{176\,947\,200}+\cdots\right).$$

这就确定了第二个线性无关解. ■

例 5 说明降阶公式是验证解中出现对数项的一个很好工具.

附录：与弗罗贝尼乌斯法有关的进一步证明

在附录中，假设由定理 1 得到第一个解，利用降阶公式推出弗罗贝尼乌斯问题中的第二个解. 我们集中于 $x>0$ 情形.

回顾，$xp(x)$在 $x=0$ 具有幂级数，因此有

$$xp(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots,$$

$$p(x)=\frac{p_0}{x}+p_1+p_2x+\cdots.$$

记函数 $p_1+p_2x+\cdots$为 $a(x)$(请注意，$a(x)$在 $x=0$ 具有幂级数展开式)，因而，

$$p(x)=\frac{p_0}{x}+a(x).$$

积分，再取指数，我们得到

$$e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=x^{-p_0}G(x),\tag{13}$$

A61

其中 G 是函数 $e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}$,特别地,$G(0)\neq 0$.(请注意,$G(x)$ 在 $x=0$ 具有幂级数展开式.)现在,利用定理 1,我们可以写

$$\frac{1}{y_1^2}=\frac{1}{x^{2r_1}}H(x),\tag{14}$$

其中 $H(x)=1/\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m\right)^2$. 由于 $a_0\neq 0$，函数 $H(x)$ 在 $x=0$ 具有幂级数展开式，且 $H(0)\neq 0$. 合并(12)、(13) 和(14)，我们得到

$$y_2 = y_1\int x^{-p_0-2r_1}K(x)\mathrm{d}x, \tag{15}$$

其中 $K(x)$在 $x=0$ 具有幂级数展开式，且 $K(0)\neq 0$. 我们记

$$K(x)=k_0+k_1x+k_2x^2+\cdots,\quad k_0\neq 0.$$

至此，我们建立了 r_1，r_2，p_0 之间的联系. 由于 r_1 和 r_2 是方程(5)的根，我们有 $r_1+r_2=1-p_0$. 因此，(15)式变为

$$y_2 = y_1\int x^{-(r_1-r_2+1)}(k_0+k_1x+k_2x^2+\cdots)\mathrm{d}x,\quad k_0\neq 0. \tag{16}$$

注意到，在 y_2 中出现对数项当且仅当在被积函数中(在乘以 $x^{-(r_1-r_2+1)}$ 之后)出现 x^{-1}项. 这就是为什么 r_1-r_2 确定了第二个解的形式.

情形 1：如果 r_1-r_2 不是整数，显然没有 x^{-1}这项，因而在 y_2 中没有对数项.

情形 2：如果 $r_1=r_2$，则第一项就使得 y_2 中出现对数项，因为 $k_0\neq 0$.

情形 3：如果 r_1-r_2 是整数，比如说 $r_1-r_2=n$，我们可能有对数项，也可能没有，取决于 k_n 是否为零.

习题 A.6

在习题 1～6 中，判定 $x=0$ 是寻常点，还是奇点. 如果是奇点，判定它是否是正则奇点.

1. $y''+(1-x^2)y'+xy=0$.
2. $xy''+\sin xy'+\frac{1}{x}y=0$.
3. $x^3y''+x^2y'+y=0$.
4. $\sin xy''+y'+\frac{1}{x}y=0$.
5. $x^2y''+(1-e^x)y'+xy=0$.
6. $3xy''+2y'-\frac{1}{3x}y=0$.

在习题 7～22 中，(a)验证 $x=0$ 是正则奇点. (b)确定应用了弗罗贝尼乌斯法的哪种情形。(c)对两个线性无关级数解，至少确定出三个非零项. 取 $x>0$.

7. $4xy''+6y'+y=0$.
8. $4xy''+6y'-y=0$.
9. $4x^2y''-14xy'+(20-x)y=0$.
10. $4xy''+2y'+y=0$.
11. $2xy''+(1+x)y'+y=0$.
12. $y''-\frac{1}{2x}y'+\frac{1}{x}y=0$.
13. $xy''+(1-x)y'+y=0$.
14. $xy''+2y'-xy=0$.

15. $xy''+2(1+x)y'+(x+2)y=0$.

16. $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$.

A62

17. $x^2y''+4xy'+(2-x^2)y=0$.

18. $xy''+(x+2)y'+(x+1)y=0$.

19. $xy''+3y'+\frac{1+x}{x}y=0$.

20. $x^2y''+4xy'+(2+x^2)y=0$.

21. $xy''+y'-\frac{1+x}{x}y=0$.

22. $4xy''+2y'+xy=0$.

在习题 23～28 中，判定弗罗贝尼乌斯法的哪种情形可以应用，再仿照例 5，利用定理 1 和降阶法求解方程. 第二个解中含有对数项吗？

23. $4x^2y''-14xy'+(20+x)y=0,\quad x>0$.

24. $y''-\frac{1+x^2}{2x}y'+\frac{1}{2x^2}y=0,\quad x>0$.

25. $y''+\frac{1}{x}y'+\frac{x-1}{x^2}y=0,\quad x>0$.

26. $y''-\frac{1+x}{2x}y'+\frac{1+2x}{2x^2}y=0,\quad x>0$.

27. $x(1-x)y''+(1-3x)y'-y=0,\quad 0<x<1$.

28. $x(1-x)y''-\frac{1}{4}y=0,\quad 0<x<1$.

29. (a)在例 1 的微分方程中，作变量代换 $u=xy$，验证它变为 $u''+u=0$.

  (b)利用(a)，推导解 $y_1=\frac{\sin x}{x}$ 和 $y_2=\frac{\cos x}{x}$.

30. 推导例 3 中的第一个解.

31. 补充例 4 中求出第一个解的细节.

32. 补充例 5 中求出第一个解的细节.

欧拉方程可以用来说明弗罗贝尼乌斯法的所有三种情形中的解. 在习题 33～36 中，(a)验证 $x=0$ 是正则奇点，并判定弗罗贝尼乌斯法的哪种情形可以应用. (b)利用 A. 3 节的方法，求出两个线性无关解.

33. $y''+\frac{1}{x}y'-\frac{2}{x^2}y=0$.

34. $y''+\frac{2}{x}y'-\frac{3}{x^2}y=0$.

35. $y''+\frac{1}{x}y'+\frac{1}{9x^2}y=0$.

36. $y''+\frac{1}{2x}y'+\frac{1}{2x^2}y=0$.

37. (a)证明 $x=0$ 是微分方程

$$(\sin x)^2y''+\tan xy'+(\cos x)^2y=0$$

  的正则奇点.

  (b)求出指标根，并判定弗罗贝尼乌斯法的哪种情形可以应用.

  (c)验证：对 $0<x<R$，$y_1=\sin(\ln(\sin x))$ 和 $y_2=\cos(\ln(\sin x))$ 是微分方程的解，其中 R 是正数. R 可以

有多大?

(d)作变量代换 $u=\sin x$，将给定的方程变成欧拉方程．然后，推导(c)中给出的解．

A63 (e)画出解的图像．解释在 0 和 π 点附近图像的性态．

38. 考虑方程

$$xy''-(2+x)y'+2y=0,\quad x>0.$$

(a)验证 $x=0$ 是正则奇点．求出指标方程和指标根，得出此时是弗罗贝尼乌斯法的情形 3.

(b)利用弗罗贝尼乌斯法，求出对应于较大根 r_1 的弗罗贝尼乌斯级数解．

(c)指明(b)中的解是 $3!\left(e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}\right)$.

(d)虽然两根的差是整数，但是存在第二个弗罗贝尼乌斯级数解．利用弗罗贝尼乌斯法，证明 e^x 或 $1+x+x^2/2$可以作为第二个解．[提示：讨论系数 b_3 是任意的.]

39. 考虑方程

$$xy''-(n+x)y'+ny=0,\quad x>0,$$

其中 n 是非负整数．

(a)验证 $x=0$ 是正则奇点．求出指标方程和指标根，得出此时是弗罗贝尼乌斯法的情形 3.

(b)利用弗罗贝尼乌斯法，求出对应于较大根 r_1 的弗罗贝尼乌斯级数解．

(c)指明(b)中的解是

$$(n+1)!\left(e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n!}\right).$$

(d)利用弗罗贝尼乌斯法，证明 e^x 或 $1+x+x^2/2+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$可以作为第二个解．[提示：讨论系数 b_{n+1}是任意的.]

A64

附录B 变 换 表

B.1 傅里叶变换表

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\omega}\mathrm{d}\omega$	$\hat{f}(\omega)=\mathcal{F}(f)(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$
1. $\begin{cases}1 & 若\ \lvert x\rvert<a\\ 0 & 若\ \lvert x\rvert>a\end{cases}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin a\omega}{\omega}$
2. $\begin{cases}1 & 若\ a<x<b\\ 0 & 其他\end{cases}$	$\dfrac{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b\omega}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega})}{\sqrt{2\pi}\omega}$
3. $\begin{cases}1-\dfrac{\lvert x\rvert}{a} & 若\ \lvert x\rvert<a\\ 0 & 若\ \lvert x\rvert>a\end{cases}\quad a>0$	$2\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{a\omega}{2}\right)}{a\omega^2}$
4. $\begin{cases}x & 若\ \lvert x\rvert<a\\ 0 & 若\ \lvert x\rvert>a\end{cases}\quad a>0$	$\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{a\omega\cos(a\omega)-\sin(a\omega)}{\omega^2}$
5. $\begin{cases}\sin x & 若\ \lvert x\rvert<\pi\\ 0 & 若\ \lvert x\rvert>\pi\end{cases}$	$\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin(\pi\omega)}{\omega^2-1}$
6. $\begin{cases}\sin(ax) & 若\ \lvert x\rvert<b\\ 0 & 若\ \lvert x\rvert>b\end{cases}\quad a,b>0$	$\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\omega\cos(b\omega)\sin(ab)-a\cos(ab)\sin(b\omega)}{\omega^2-a^2}$
7. $\dfrac{1}{a^2+x^2},\quad a>0$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{e}^{-a\lvert\omega\rvert}}{a}$
8. $\dfrac{x}{a^2+x^2},\quad a>0$	$-\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\mathrm{sgn}\omega\mathrm{e}^{-a\lvert\omega\rvert}$
9. $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{a}{1+a^2x^2},\quad a>0$	$\mathrm{e}^{-\frac{\lvert\omega\rvert}{a}}$
10. $\dfrac{\sin ax}{x},\quad a>0$	$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} & 若\ \lvert\omega\rvert<a\\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} & 若\ \lvert\omega\rvert=a\\ 0 & 若\ \lvert\omega\rvert>a\end{cases}$
11. $\dfrac{4}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{1}{2}ax\right)}{ax^2},\quad a>0$	$\begin{cases}1-\dfrac{\lvert\omega\rvert}{a} & 若\ \lvert\omega\rvert<a\\ 0 & 若\ \lvert\omega\rvert>a\end{cases}$
12. $\dfrac{4}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\sin^2(ax)-\sin^2\left(\dfrac{1}{2}ax\right)}{ax^2},\quad a>0$	$\begin{cases}1 & 若\ \lvert x\rvert<a\\ (-x+2a)/a & 若\ a<x<2a\\ (x+2a)/a & 若\ a<x<2a\\ 0 & 若\ \lvert x\rvert>2a\end{cases}$

（续）

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{ix\omega}d\omega$	$\hat{f}(\omega)=\mathcal{F}(f)(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$
13. $e^{-a\|x\|}$， $a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\omega^2}$
14. $\begin{cases}e^{-ax} & 若 x>0\\ 0 & 若 x<0\end{cases}$， $a>0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a+i\omega}$
15. $\begin{cases}0 & 若 x>0\\ e^{ax} & 若 x<0\end{cases}$， $a>0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a-i\omega}$
A66 16. $\|x\|^n e^{-a\|x\|}$， $a>0$，$n>0$	$\frac{\Gamma(n+1)}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{(a-i\omega)^{1+n}}+\frac{1}{(a+i\omega)^{1+n}}\right)$
17. $e^{-\frac{a}{2}x^2}$， $a>0$	$\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\omega^2}{2a}}$
18. e^{-ax^2}， $a>0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
19. $xe^{-\frac{a}{2}x^2}$， $a>0$	$\frac{-i\omega}{a^{3/2}}e^{-\frac{\omega^2}{2a}}$
20. $x^2e^{-\frac{a}{2}x^2}$， $a>0$	$\frac{a-\omega^2}{a^{5/2}}e^{-\frac{\omega^2}{2a}}$
21. $x^3e^{-\frac{a}{2}x^2}$， $a>0$	$\frac{-i\omega(3a-\omega^2)}{a^{7/2}}e^{-\frac{\omega^2}{2a}}$
22. $e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)$，H_n 为 n 次埃尔米特多项式	$(-1)^n i^n e^{\frac{-\omega^2}{2}}H_n(\omega)$
23. $J_0(x)$，零阶贝塞尔函数	$\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2}} & 若 \|\omega\|<1\\ 0 & 若 \|\omega\|>1\end{cases}$
24. $J_n(x)$，$n\geqslant 0$ 阶贝塞尔函数	$\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(-i)^n}{\sqrt{1-\omega^2}}T_n(\omega) & 若 \|\omega\|<1\\ 0 & 若 \|\omega\|>1\end{cases}$ T_n 为 n 次切比雪夫多项式

特殊变换

25. $\mathcal{F}(\delta_0(x))(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	27. $\mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x}\right)(\omega)=-i\ \mathrm{sgn}\omega$
26. $\mathcal{F}(\delta_0(x-a))(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ia\omega}$	28. $\mathcal{F}(e^{iax})(\omega)=\sqrt{2\pi}\delta_0(\omega-a)$

（续）

运算性质	
29. $\mathcal{F}(af+bg)(\omega)=a\,\mathcal{F}(f)+b\,\mathcal{F}(g)$	36. $\mathcal{F}(fg)(\omega)=\mathcal{F}(f)*\mathcal{F}(g)(\omega)$
30. $\mathcal{F}(f')(\omega)=\mathrm{i}\omega\,\mathcal{F}(f)(\omega)$	37. $\mathcal{F}(f(x-a))(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega}\mathcal{F}(f)(\omega)$
31. $\mathcal{F}(f'')(\omega)=-\omega^2\,\mathcal{F}(f)(\omega)$	38. $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}f(x))(\omega)=\mathcal{F}(f)(\omega-a)$
32. $\mathcal{F}(f^{(n)})(\omega)=(\mathrm{i}\omega)^n\,\mathcal{F}(f)(\omega)$	39. $\mathcal{F}(\cos(ax)f(x))(\omega)=\dfrac{\mathcal{F}(f)(\omega-a)+\mathcal{F}(f)(\omega+a)}{2}$
33. $\mathcal{F}(xf(x))(\omega)=\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathcal{F}(f)(\omega)$	40. $\mathcal{F}(\sin(ax)f(x))(\omega)=\dfrac{\mathcal{F}(f)(\omega-a)-\mathcal{F}(f)(\omega+a)}{2\mathrm{i}}$
34. $\mathcal{F}(x^nf(x))(\omega)=\mathrm{i}^n\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n}\mathcal{F}(f)(\omega)$	41. $\mathcal{F}(f(ax))(\omega)=\dfrac{1}{\lvert a\rvert}\mathcal{F}(f)\left(\dfrac{\omega}{a}\right),\quad a\neq 0$
35. $\mathcal{F}(f*g)(\omega)=\mathcal{F}(f)(\omega)\mathcal{F}(g)(\omega)$	42. $f(x)=\mathcal{F}(\hat{f})(-x),\ \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))=f(-x)$

A67

B.2 傅里叶余弦变换表

$f(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int_0^\infty \mathcal{F}_c(f)(\omega)\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega, 0<x<\infty$	$\mathcal{F}_c(f)(\omega)=\hat{f}_c(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,\mathrm{d}x, 0\leqslant\omega<\infty$
1. $\begin{cases}1 & 若\ 0<x<a\\ 0 & 其他\end{cases}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin a\omega}{\omega}$
2. $\mathrm{e}^{-ax},\quad a>0$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{a}{a^2+\omega^2}$
3. $x\mathrm{e}^{-ax},\quad a>0$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{a^2-\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2}$
4. $\mathrm{e}^{-ax^2/2},\quad a>0$	$\dfrac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{e}^{-\omega^2/2a}$
5. $\cos ax\,\mathrm{e}^{-ax},\quad a>0$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{a\omega^2+2a^3}{4a^4+\omega^4}$
6. $\sin ax\,\mathrm{e}^{-ax},\quad a>0$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{2a^3-a\omega^2}{4a^4+\omega^4}$
7. $\dfrac{a}{a^2+x^2},\quad a>0$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-a\omega}$
8. $x^p,\ 0<p<1$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\Gamma(p)\cos(p\omega/2)}{\omega^p}$
9. $\begin{cases}\cos x & 若\ 0<x<a\\ 0 & 其他\end{cases}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\dfrac{\sin a(1-\omega)}{1-\omega}+\dfrac{\sin a(1+\omega)}{1+\omega}\right]$

（续）

运算性质	
10. $\alpha f(x)+\beta g(x)$	$\alpha \mathcal{F}_c(f)(\omega)+\beta \mathcal{F}_c(g)(\omega)$
11. $f(ax)$，$a>0$	$\frac{1}{a}\hat{f}_c\left(\frac{\omega}{a}\right)$
12. $f'(x)$	$\omega \hat{f}_s(\omega)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)$
13. $f''(x)$	$-\omega^2 \hat{f}_c(\omega)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)$
14. $xf(x)$	$[\hat{f}_s]'(\omega)$
15. $\mathcal{F}_c(\mathcal{F}_c f)$	f

A68

B.3 傅里叶正弦变换表

$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\mathcal{F}_s(f)(\omega)\sin\omega x\,d\omega, 0<x<\infty$	$\mathcal{F}_s(f)(\omega)=\hat{f}_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx, 0<\omega<\infty$
1. $\begin{cases}1 & \text{若 } 0<x<a \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos a\omega}{\omega}$
2. e^{-ax}，$a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$
3. xe^{-ax}，$a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2a\omega}{(a^2+\omega^2)^2}$
4. $\frac{e^{-ax}}{x}$，$a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\tan^{-1}\frac{\omega}{a}$
5. $\frac{1}{2}xe^{-ax^2}$，$a>0$	$\frac{\omega}{a^{3/2}}e^{-\omega^2/2a}$
6. $\cos ax\,e^{-ax}$，$a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega^3}{4a^4+\omega^4}$
7. $\sin ax\,e^{-ax}$，$a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2a^2\omega}{4a^4+\omega^4}$
8. $\frac{x}{a^2+x^2}$，$a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a\omega}$
9. x^{p-1}，$0<p<1$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma(p)\cos(\pi p/2)}{\omega^p}$
10. $\begin{cases}\sin x & \text{若 } 0<x<a \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin a(1-\omega)}{1-\omega}-\frac{\sin a(1+\omega)}{1+\omega}\right]$

（续）

运算性质	
11. $\alpha f(x)+\beta g(x)$	$\alpha \mathcal{F}_s(f)(\omega)+\beta \mathcal{F}_s(g)(\omega)$
12. $f(ax)$， $a>0$	$\frac{1}{a}\hat{f}_s\left(\frac{\omega}{a}\right)$
13. $f'(x)$	$-\omega \hat{f}_c(\omega)$
14. $f''(x)$	$-\omega^2 \hat{f}_s(\omega)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega f(0)$
15. $xf(x)$	$-[\hat{f}_c]'(\omega)$
16. $\mathcal{F}_s(\mathcal{F}_s f)$	f

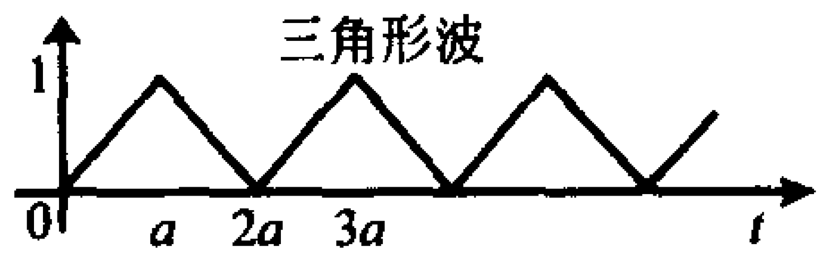
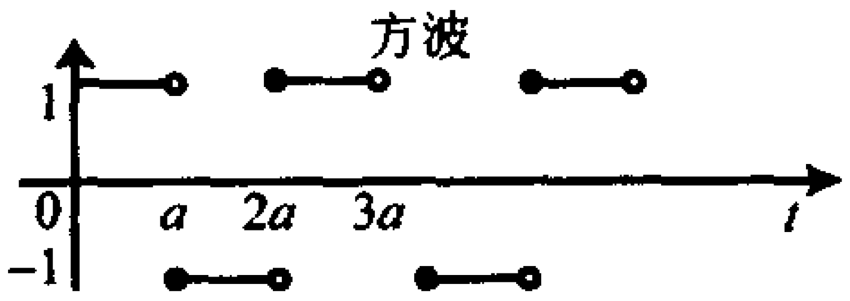
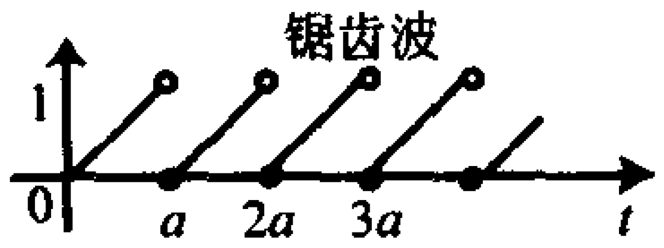
A69

B.4 拉普拉斯变换表

$f(t)$， $t\geqslant 0$	$F(s)=\mathcal{L}(f)(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
1. 1	$\frac{1}{s}$， $s>0$
2. t^n， $n=1, 2, \cdots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$， $s>0$
3. t^a $(a>-1)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$， $s>0$
4. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$， $s>a$
5. $t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$， $s>a$
6. $\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$， $s>\max(a, b)$
7. $\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$， $s>\max(a, b)$
8. $\sin kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$， $s>0$
9. $\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$， $s>0$
10. $e^{at}\sin kt$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$， $s>a$
11. $e^{at}\cos kt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$， $s>a$
12. $t\sin kt$	$\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$， $s>0$
13. $t\cos kt$	$\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$， $s>0$
14. $\frac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at)$	$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$， $s>0$
15. $\sinh kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$， $s>\lvert k\rvert$
16. $\cosh kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$， $s>\lvert k\rvert$

（续）

A70

$f(t),\quad t\geqslant 0$	$F(s)=\mathcal{L}(f)(s)=\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$
17. $\mathrm{e}^{at}\sinh kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2-k^2},\quad s>a+\lvert k\rvert$
18. $\mathrm{e}^{at}\cosh kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2-k^2},\quad s>a+\lvert k\rvert$
19. $t\sinh kt$	$\dfrac{2ks}{(s^2-k^2)^2},\quad s>\lvert k\rvert$
20. $t\cosh kt$	$\dfrac{s^2+k^2}{(s^2-k^2)^2},\quad s>\lvert k\rvert$
21. $\dfrac{1}{2k^3}(kt\cosh kt-\sinh kt)$	$\dfrac{1}{(s^2-k^2)^2},\quad s>\lvert k\rvert$
22. $\delta_0(t-t_0),\quad t_0\geqslant 0$	$\mathrm{e}^{-t_0 s},\quad s>0$
23. $u_0(t-a)=\begin{cases}0 & 若\ t<a\\ 1 & 若\ t\geqslant a\end{cases}\quad (a>0)$	$\dfrac{\mathrm{e}^{-as}}{s},\quad s>0$
24. $f(t+T)=f(t)\quad (T>0)$	$\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-Ts}}\int_0^T \mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t$
25. $f(t+T)=-f(t)\quad (T>0)$	$\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-Ts}}\int_0^T \mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t$
26. 	$\dfrac{1}{as^2}\left[\dfrac{1-\mathrm{e}^{-as}}{1+\mathrm{e}^{-as}}\right]=\dfrac{1}{as^2}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right),\quad s>0$
27. 	$\dfrac{1}{s}\left[\dfrac{1-\mathrm{e}^{-as}}{1+\mathrm{e}^{-as}}\right]=\dfrac{1}{s}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right),\quad s>0$
28. 	$\dfrac{1}{as^2}-\dfrac{\mathrm{e}^{-as}}{s(1-\mathrm{e}^{-as})},\quad s>0$
29. $\dfrac{\sin at}{t}$	$\tan^{-1}\left(\dfrac{a}{s}\right),\quad s>0$
30. $J_0(at)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}},\quad s>0$
31. $J_0(a\sqrt{t})$	$\dfrac{\mathrm{e}^{-a^2/4s}}{s},\quad s>0$
32. $t^pJ_p(at)\quad \left(p>-\dfrac{1}{2}\right)$	$\dfrac{2^pa^p\Gamma\left(p+\dfrac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(s^2+a^2)^{p+\frac{1}{2}}},\quad s>0$
33. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\dfrac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}}J_{k-\frac{1}{2}}(at)\quad (k>0)$	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^k},\quad s>0$
34. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}a\left(\dfrac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}}J_{k-\frac{3}{2}}(at)\quad \left(k>\dfrac{1}{2}\right)$	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^k},\quad s>0$

（续）

$f(t),\quad t\geqslant 0$	$F(s)=\mathcal{L}(f)(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
35. $2\sum_{m=1}^{n}\binom{2n-m-1}{n-1}\frac{t^{m-1}\cos\left(at-\frac{m\pi}{2}\right)}{(2a)^{2n-m}(m-1)!}$ （n 是 $\geqslant 1$ 的整数）	$\frac{1}{(s^2+a^2)^n},\quad s>0$
36. $\frac{1}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{(2n-m-3)!}{(m-1)!(n-m-1)!}\frac{t^m\cos\left(at-\frac{m\pi}{2}\right)}{(2a)^{2n-m-2}}$ （n 是 $\geqslant 2$ 的整数）	$\frac{s}{(s^2+a^2)^n},\quad s>0$
37. $\mathrm{erf}(at)\quad(a>0)$	$\frac{1}{s}e^{s^2/4a^2}\mathrm{erfc}\left(\frac{s}{2a}\right),\quad s>0$
38. $\mathrm{erf}(a\sqrt{t})$	$\frac{a}{s\sqrt{s+a^2}},\quad s>0$
39. $e^{-a^2t^2}\quad(a>0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{s^2/4a^2}\mathrm{erfc}\left(\frac{s}{2a}\right),\quad s>0$
40. $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t}\quad(a\geqslant 0)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}},\quad s>0$
41. $\frac{a}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}e^{-a^2/4t}\quad(a>0)$	$e^{-a\sqrt{s}},\quad s>0$
42. $\mathrm{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\quad(a\geqslant 0)$	$\frac{1}{s}e^{-a\sqrt{s}},\quad s>0$
运算性质	
43. $\alpha f(t)+\beta g(t)$	$\alpha F(s)+\beta G(s)$
44. $f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
45. $f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
46. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$
47. $-tf(t)$	$F'(s)$
48. $t^nf(t)$	$(-1)^nF^{(n)}(s)$
49. $\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}F(s),\quad s>0$
50. $\int_0^t\int_0^\tau f(\rho)d\rho d\tau$	$\frac{1}{s^2}F(s),\quad s>0$
51. $\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(u)du$
52. $\frac{f(t)}{t^2}$	$\int_s^\infty\int_\sigma^\infty F(u)dud\sigma$
53. $\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\quad(a>0)$	$e^{-as}F(s)$
54. $e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
55. $f(ct)\quad(c>0)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$
56. $f*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$

A71

A72

参考文献

1. N. Asmar (with the assistance of Gregory C. Jones), *Applied Complex Analysis with Partial Differential Equations*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 2002.
2. G. Birkhoff and G. C. Rota, *Ordinary Differential Equations* (4th ed.), John Wiley, New York, 1989.
3. W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations* (5th ed.), John Wiley, New York, 1992.
4. R. Bracewell, *The Fourier Transform and its Applications* (2nd ed.), McGraw-Hill, New York, 1978.
5. J. R. Cannon, *The One-Dimensional Heat Equation*, Addison-Wesley, Reading, 1984.
6. G. Carrier and C. Pearson, *Partial Differential Equations* (2nd ed.), Academic Press, New York, 1988.
7. R. Churchill and J. Brown, *Fourier Series and Boundary Value Problems* (4th ed.), McGraw-Hill, New York, 1987.
8. E. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.
9. D. Colton, *Partial Differential Equations: an Introduction*, Random House, New York, 1988.
10. J. W. Cooley and J. W. Tukey, An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, *Mathematics of Computation* **19** (1965), 297–301.
11. R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vols. 1 and 2, Wiley-Interscience, New York, 1953 and 1962.
12. G.B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1976.
13. G.B. Folland, *Fourier Analysis and its Applications*, Wadsworth and Brooks Cole, 1992.
14. P.R. Garabedian, *Partial Differential Equations*, Wiley, New York, 1964.
15. D. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1995.
16. R. Haberman, *Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems* (4th ed.), Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 2004.
17. E. Hewitt and R. Hewitt, The Gibbs-Wilbraham phenomenon: an episode in Fourier analysis, *Archive for the History of the Exact Sciences* **21** (1979), 129–160.

18. H. Hochstadt, *The Functions of Mathematical Physics*, Dover, New York, 1986.

19. F. John, *Partial Differential Equations* (4th ed.), Springer-Verlag, New York, 1991.

20. M. Kac, Can one hear the shape of a drum? *American Mathematical Monthly*, **73** (1966), 1–23.

21. T.W. Körner, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1988.

22. N.N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Dover, New York, 1972.

23. R. McOwen, *Partial Differential Equations*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1995.

24. A. Papoulis, *The Fourier Integral and its Applications*, McGraw-Hill, New York, 1962.

25. M. Pinsky, *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems* (2nd ed.), McGraw Hill, New York, 1991.

26. G. Sansone, *Orthogonal Functions*, Interscience Publishers, New York, 1959.

27. J. Slater and N.H. Frank, *Introduction to Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York, 1933.

28. I.N. Sneddon, *Fourier Transforms*, McGraw-Hill, New York, 1951.

29. E.M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.

30. H. L. Strauss, *Quantum Mechanics: An Introduction*, Prentice Hall, Englewood Cliffs. N.J., 1968.

31. W. A. Strauss, *Partial Differential Equations*, Wiley, New York, 1992.

32. K. Stromberg, *Introduction to Classical Real Analysis*, Wadsworth, Belmont, Calif., 1981.

33. G. Szegö, *Orthogonal Polynomials* (4th ed.), American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.

34. E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Oxford University Press, Oxford, 1939.

35. G. P. Tolstov, *Fourier Series*, Dover, New York, 1976.

36. J. S. Walker, *The Fast Fourier Transform*, CRC Press, Littleton, Mass., 1991.

37. J. S. Walker, *Fourier Analysis*, Oxford University Press, New York, 1988.

38. G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (2nd ed.), Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1944.

39. D. V. Widder, *The Heat Equation*, Academic Press, New York, 1975.

40. N. Wiener, *The Fourier Transform and Certain of Its Applications*, Dover, New York, 1958.

部分习题答案

第 1 章

1.1 节

3. (a)$u(x, t)=t-x$.　(b)$u(0, t)=t$.

5. $u(x, t)=f(x+t)$，变量代换 $\alpha=x+t$，$\beta=x-t$.

7. $u(x, t)=f(x+2t)-x$，变量代换 $\alpha=x+2t$，$\beta=x$.

9. (a)$u(x, t)=1/(1+(x+t)^2)$. (c)当 t 增加时，波向左运动.

11. $u(x, y)=f\left(\frac{1}{3}x^3-y\right)$.

13. $u(x, y)=f(y+\cos x)$.

1.2 节

5. (a)$u(x, t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(x-ct)^2}+\frac{1}{1+(x+ct)^2}\right)$.

7. (a)$u(x, t)=\frac{1}{2c}\left(e^{-(x+a)^2}-e^{-(x-a)^2}\right)$.

9. $u(x, t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(x-ct)^2}+\frac{1}{1+(x+ct)^2}\right)+\frac{1}{2c}\left(e^{-(x+a)^2}-e^{-(x-a)^2}\right)$.

13. 参考解(9)，观察到，第一项和第三项关于 $x=1/2$ 对称，因为将 x 换成 $1-x$ 它们不改变. 另一方面，(9)中第二项关于 $x=1/2$ 是奇的，因为 $\sin(2\pi(1-x))=-\sin 2\pi x$. 第 2、4、6 和 8 幅图的位移关于 $x=1/2$ 对称，因为在相应时刻，因子 $\cos 2\pi t$ 使得中间一项为零.

15. $u(x, t)=\sin\frac{2\pi x}{L}\cos\frac{2\pi ct}{L}$.

17. $u(x, t)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi ct}{L}+\frac{1}{4}\sin\frac{3\pi x}{L}\cos\frac{3\pi ct}{L}+\frac{2}{5}\sin\frac{7\pi x}{L}\cos\frac{7\pi ct}{L}$.

19. $u(x, t)=\frac{L}{12\pi c}\sin\frac{3\pi x}{L}\sin\frac{3\pi ct}{L}-\frac{L}{60\pi c}\sin\frac{6\pi x}{L}\sin\frac{6\pi ct}{L}$.

21. (a)$u(x, t)=\sin 2\pi x\cos 2\pi t$.

(b)这里有许多可能的解，其中之一是 $u(x, t)=\sin 3\pi x\cos 3\pi t$.

23. (a)$u(x, t)=\sin 2\pi x\cos 2\pi t$.

第 2 章

2.1 节

1. (a)$T=2\pi$，(b)$T=2$，(c)$T=3\pi$，(d)$T=2\pi$.

3. (a)$f(x)=\begin{cases}1 & 若\ 0\leqslant x<1/2,\\ 0 & 若\ 1/2\leqslant x<1,\\ f(x+1) & 其他.\end{cases}$

(b)除了 $x=k/2$，$k=0$，±1，±2，…之外，f 连续. f 是分段连续的.

(c)$f'(x)=0$ 对所有 $x\neq k/2$，$k=0$，±1，±2，…. 对 $x=k/2$，$f'(x+)=f'(x-)=0$.

11. $f(x)=|\sin x|$ 对所有 x，$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\sin x|\,dx=2$.

13. $\pi/2$.

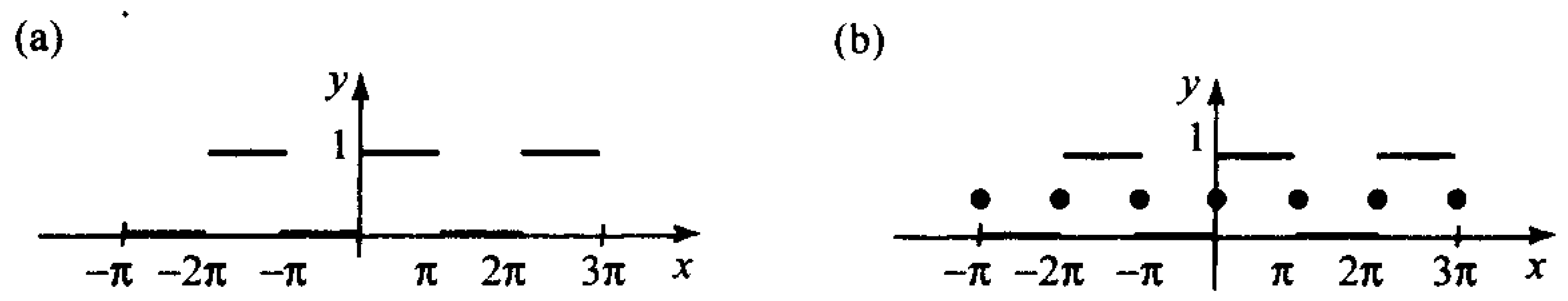
17. (a)F 以 2 为周期，并且对 $0\leqslant x\leqslant 2$，$F(x)=x-\frac{x^2}{2}$.

19. (b)x.

27. (a)不是分段连续. (b)连续，但不是分段光滑. (c)连续，分段光滑. (d)光滑.

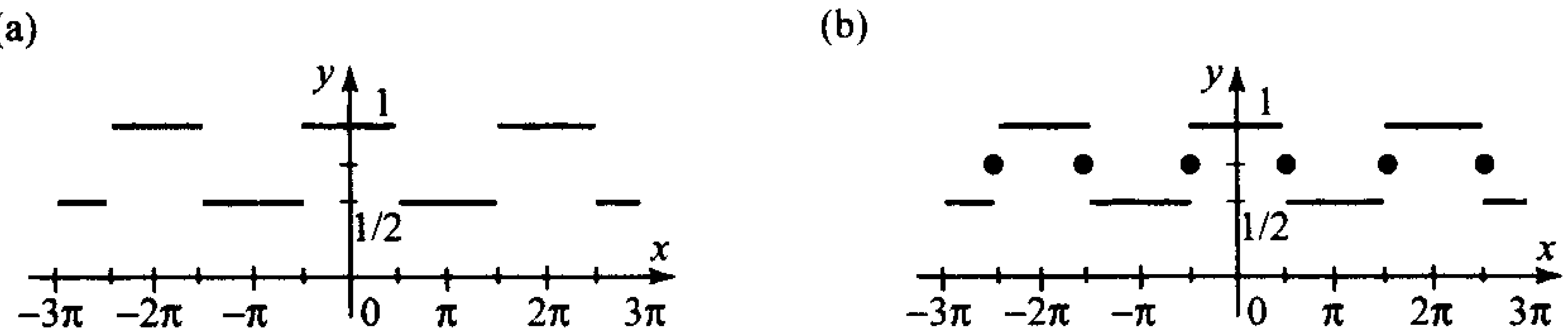
2.2 节

1.



(b)在间断点 $x=k\pi$ 处，傅里叶级数的图像和函数图像不同. 在这些点处，傅里叶级数取值为 1/2.

3.



(b)在点 $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ 处，傅里叶级数取值为 $\frac{3}{4}$. 在其他点处，傅里叶级数与函数取值相同.

19. (a)称函数为 $f(x)$，则 $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)}{2k+1}$.

(b) 称函数为 $g(x)$，则 $g(x)=2f(x)-1$，$g(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)}{2k+1}$.

(c) 称函数为 $h(x)$，则 $h(x)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，$h(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(2k+1)}{2k+1}$.

(d) 称函数为 $k(x)$，则 $k(x)=(h(x)+1)/2$，$h(x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(2k+1)}{2k+1}$.

21. (a) $a_0=1/8$，$a_n=\frac{2}{\pi^2}\left[\frac{-\pi}{2n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-(-1)^n}{n^2}\right]$，$b_n=\frac{2}{\pi^2}\left[\frac{\pi}{2n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}\right]$.

(b)g 和 f 具有相同的 a_0 和 a_n，但是 b_n 相反.

2.3 节

1. (a)奇. **3.** (a)偶. **5.** (a)偶. **7.** (a)奇. **9.** (a)偶.

11. (a)$1-\frac{1}{2}\cos x-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\cos nx$.

13. (a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\pi x$.

20. (b)首先证明既是偶的又是奇的唯一一个函数是零函数．现在假设 $f=f_1+f_2$ 和 $f=f_e+f_o$，其中 f_1 是偶的，而 f_2 是奇的．相减得到 $f_1-f_e=f_2-f_o$．左边是偶的，右边是奇的．因此，$f_1-f_e=0$ 和 $f_2-f_o=0$，即为所证．

21. (a)对 $-1\leqslant x\leqslant 1$，$f_e(x)=|x|$，

$$f_o(x)=\begin{cases}-1 & 若 -1<x<0,\\ 1 & 若 0<x<1.\end{cases}$$

(b)由例 1($p=1$)，

$$f_e(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)\pi x.$$

由习题 1($p=1$)，

$$f_o(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\pi x,$$

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\pi(2k+1)^2}\cos(2k+1)\pi x-\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\pi x\right\}.$$

23. (a)对 $-1\leqslant x\leqslant 1$，$f_e(x)=|x|$，

$$f_o(x)=\begin{cases}-x-1 & 若 -1<x<0,\\ 1-x & 若 0<x<1.\end{cases}$$

(b) 由例 1($p=1$)，$f_e(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)\pi x.$

由习题 7($p=2$)，$f_o(x)=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\sin k\pi x,$

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)\pi x+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\sin k\pi x.$$

29. $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-\cos\frac{dn\pi}{p}\right)\sin\frac{n\pi}{p}x.$

2.4 节

1. (a)余弦级数展开式：1.

正弦级数展开式：$\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\sin(2k+1)\pi x.$

3. (a)余弦级数展开式(利用 2.3 节习题 4，$p=1$)：

$$\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x.$$

正弦级数展开式：$\dfrac{2}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}[2((-1)^n-1)-(-1)^n(n\pi)^2]\sin n\pi x.$

5. (a) 余弦级数展开式：

$$\frac{1}{p}(b-a)+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{n\pi}{p}b-\sin\frac{n\pi}{p}a\right)\cos\frac{n\pi}{p}x.$$

正弦级数展开式：$\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{p}a-\cos\frac{n\pi}{p}b\right)\sin\frac{n\pi}{p}x.$

7. (a) 余弦级数展开式：$\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\cos 2nx.$

正弦级数展开式：$\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin 2nx$.

9. $\frac{8}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin(2k+1)\pi x$.

11. $\sin\pi x$.

13. $\frac{1}{2}\sin 2\pi x$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\pi}{1+n^2\pi^2}((1-(-1)^n e))\sin n\pi x$.

2.5 节

1. $E_1=E_2=0.189, E_3=0.099$.

3. $E_1=0.006\,8, E_2=0.001\,6, E_3=0.000\,61$.

5. $N=41$.

9. 利用傅里叶级数展开式 $x^3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}(6-(n\pi)^2)\sin nx, -\pi<x<\pi$.

13. $\frac{\pi^5}{90}$.

15. $\frac{7}{3}\pi$.

17. $\frac{17}{8}\pi+\frac{\pi^3}{6}$.

2.6 节

1. $\frac{\sinh\pi a}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n a}{a^2+n^2}e^{inx}, \quad -\pi<x<\pi$.

3. $\cos ax=\frac{\sin\pi a}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n a}{a^2-n^2}e^{inx}, \quad -\pi<x<\pi$.

5. $ie^{-3ix}+\frac{1}{2}e^{-2ix}+\frac{1}{2}e^{2ix}-ie^{3ix}$.

7. 对 $-\pi<x<\pi$，$\cos ax=\frac{\sin\pi a}{\pi a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n a\sin\pi a}{\pi(a^2-n^2)}\cos nx$.

21. 0.

23. $\sin t-i\cos t+C$.

25. $2\tan^{-1}t+i\ln(1+t^2)-t+C$.

2.7 节

1. $c_1e^{-t}+c_2te^{-t}-3\cos 2t+4\sin 2t$.

3. $c_1e^{-t/2}\cos 2t+c_2e^{-t/2}\sin 2t+1/17$.

5. (a) $-\frac{\cos t}{8}+\frac{\sin t}{8}+\frac{4}{65}\cos 2t-\frac{1}{130}\sin 2t$.

7. (a) $\frac{\cos t}{5}+\frac{2}{5}\sin t-\frac{1}{10}\cos 2t+\frac{\sin 2t}{5}$.

9. (a) $w_0 = \sqrt{k/\mu} = \sqrt{1\,001}/10 \approx 3.16$.

(b) 第 $2k+1$ 个正规波型具有频率 $2k+1$. 第 3 个正规波型($k=1$)具有频率 3,最接近于 ω_0;因此,第 3 个正规波型将主导稳态解.

11. (a) $w_0 = \sqrt{k/\mu} = 2\pi \approx 6.28$.

(b) 第 n 个正规波型具有频率 $n\pi$. 第 2 个正规波型具有频率 2π,等于 ω_0;因此,第 2 个正规波型将主导稳态解.

13. $\alpha_3 \cos 3t + \beta_3 \sin 3t = -\dfrac{1\,000}{5\,213\pi}\cos 3t + \dfrac{20\,200}{15\,639\pi}\sin 3t$.

15. $y_1(t) = -\dfrac{1\,000}{405\,913\pi}\cos t + \dfrac{180\,200}{405\,913\pi}\sin 3t$, $\quad y_3(t) = -\dfrac{1\,000}{5\,213\pi}\cos 3t + \dfrac{20\,200}{15\,639\pi}\sin 3t$,

$y_5(t) = -\dfrac{1\,000}{1\,123\,813\pi}\cos 5t - \dfrac{59\,960}{1\,123\,813\pi}\sin 5t$. $C_1 \approx 0.141$, $C_3 \approx 0.416$, $C_5 \approx 0.017$.

17. (a) 在 $F(t)$ 中,减去导出稳态解主导项的分量. 因此,在 F 的傅里叶级数中,减去频率等于 3 的那项. 将输入函数修改为 $F(t) - \dfrac{4\sin 3t}{\pi\ 3}$.

(b) 对修改后输入的反馈具有由定理 1 给出的傅里叶级数,其中傅里叶系数 α_n 和 β_n 如下给定:对所有的 n,$\alpha_n = 0$;对所有 k,$\beta_{2k} = 0$,并且 $\beta_3 = 0$. 利用例 2 中 F 的傅里叶系数,β_{2k+1} 由(8)式给出. 除了不含频率为 3 的主导项之外,与例 2 的反馈相同.

21. $y = c_1\cos 3t + c_2 \sin 3t + \dfrac{2}{5}\cos 2t - \dfrac{t}{6}\cos 3t$.

23. $y = c_1\cos 3t + c_2\sin 3t + \sum\limits_{\substack{n=1\\ n\neq 3}}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{9-n^2}\right)\sin nt - \dfrac{t}{54}\cos 3t$.

25. $y = -\dfrac{2}{5}\cos 3t + \dfrac{1}{18}\sin 3t + \dfrac{2}{5}\cos 2t - \dfrac{t}{6}\cos 3t$.

2.9 节

1. $f(x) = 0$,一致收敛.

3. $f(x) = 0$,不是一致收敛.

5. $f(x) = 0$,不是一致收敛.

7. $f(x) = 0$,不是一致收敛.

9. $M_k = \dfrac{1}{k^2}$.

11. $M_k = \dfrac{10^k}{k!}$.

13. $M_k = \left(\dfrac{10}{11}\right)^k$.

15. $M_k = (0.99)^k$.

17. $M_k = \dfrac{1}{k^2}$.

19. 只有习题 4(由定理 3).

21. 是的,由定理 2,因为由魏尔斯特拉斯 M- 判别法,傅里叶级数一致收敛.

23. 令 f 是 2π-周期的,使得对 $0 \leqslant x < \pi$,$f(x) = 1$;而对 $-\pi \leqslant x < 0$,$f(x) = -1$. 由于 f 不连续,其傅里叶级数不一致收敛. 但是 $f^2(x) = 1$ 是其自身的傅里叶级数,它显然一致收敛.

25. 无穷次.

27. $f_n(x) \to 0 = f(x)$,对所有的 x,$f'_n(x) = n\sin nx$ 不收敛到 0($f(x)$ 的导数).

2.10 节

3. 由定理 2(c),对所有 $x \neq 2n\pi$,级数收敛. 对 $x = 2n\pi$, $\cos n\pi = 1$,级数发散.
5. 对所有的 x,级数收敛.
7. 由定理 2,对所有的 x,级数收敛.
17. 对所有的 x,级数收敛.
21. 对所有的 x,级数收敛.
23. 对所有的 x,级数收敛.

第 3 章

3.1 节

1. 线性齐次方程,线性齐次边界条件,二阶.
3. 线性非齐次方程,线性非齐次边界条件,二阶.
5. 非线性方程,线性齐次边界条件,二阶.
9. (b) 任何形如 $u(x,y) = e^{ax}e^{by}$ 的函数, $a + b = -1$. 例如, $u(x,y) = e^{-y}$,或 $u(x,y) = e^{x}e^{-2y}$.
11. (a) 双曲;(c) 抛物;(e) 椭圆;(f) 椭圆;(g) 双曲.
13. $u(x,t) = e^{\frac{x}{t+1}}$.
15. $u(x,t) = \left(\dfrac{-1 + \sqrt{1 - 4t(2t - x)}}{2t}\right)^2$.
17. $u(x,t) = \sqrt{\dfrac{x}{t+1}}$.

3.2 节

1. $u_{tt} = 10^5 u_{xx}$.
3. $u_{tt} = 10^3 u_{xx}$.

3.3 节

1. $u(x,t) = 0.05\sin\pi x\cos t$.
3. $u(x,t) = \sin\pi x\cos\pi t + 3\sin2\pi x\cos2\pi t - \sin5\pi x\cos5\pi t$.
5. $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{8(-1)^k}{\pi^2(2k+1)^2}\sin(2k+1)\pi x\cos4(2k+1)\pi t$.
7. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{8(\sin(n\pi/4) + \sin(3n\pi/4))}{\pi^2 n^2}\sin n\pi x\cos4n\pi t + \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\sin(2k+1)\pi x}{\pi^2(2k+1)^2}\sin4(2k+1)\pi t$.
9. $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{8\sin(2k+1)\pi x}{\pi^3(2k+1)^3}\cos(2k+1)\pi t + \dfrac{1}{\pi}\sin\pi x\sin\pi t$.
13. $u(x,t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\sin x$.
15. (a) $u(x,t) = \dfrac{16\sqrt{5}}{\pi}e^{-1.5t}\sin x\sinh\dfrac{\sqrt{5}}{2}t + \dfrac{40}{\pi}e^{-1.5t} \times \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2k+1)x\sin(\sqrt{(2k+1)^2 - 9/4}t)}{(2k+1)\sqrt{(2k+1)^2 - 9/4}}$.

3.4 节

1. $u(x,t)=\frac{1}{2}[\sin(\pi x-t)+\sin(\pi x+t)]=\sin\pi x\cos t.$

3. $u(x,t)=\frac{1}{2}[\sin\pi(x-t)+\sin\pi(x+t)+3\sin2\pi(x-t)+3\sin2\pi(x+t)]+\frac{1}{2\pi}[\cos\pi(x-t)-\cos\pi(x+t)].$

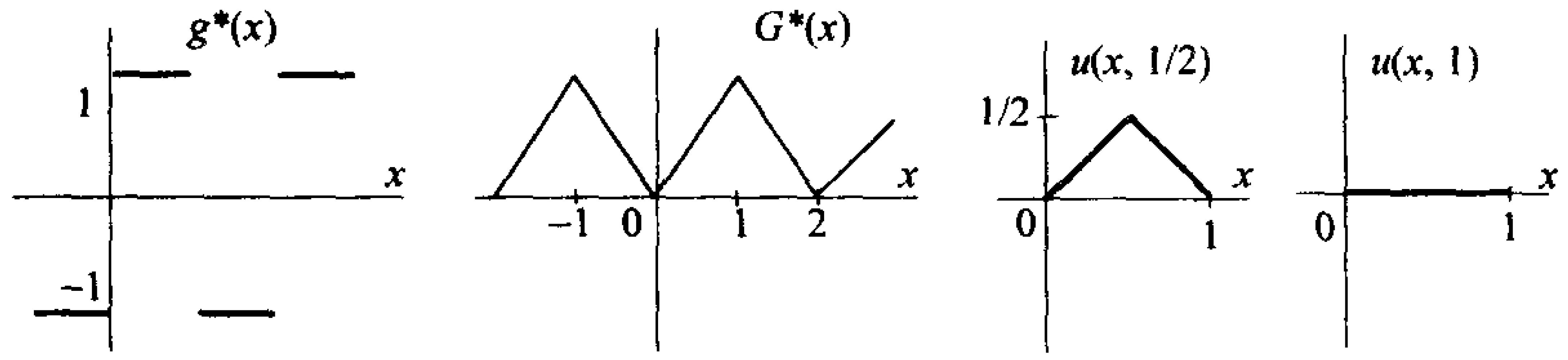
5. $u(x,t)=\frac{1}{2}[f^*(x+t)+f^*(x-t)]+\frac{1}{2}[G(x+t)-G(x-t)]$,其中 f^* 是 f 的 2- 周期奇延拓,G 如例 3 中给出的.

7. $u(x,t)=\frac{1}{2}[G(x+t)-G(x-t)]$,其中 G 是 2- 周期的,且

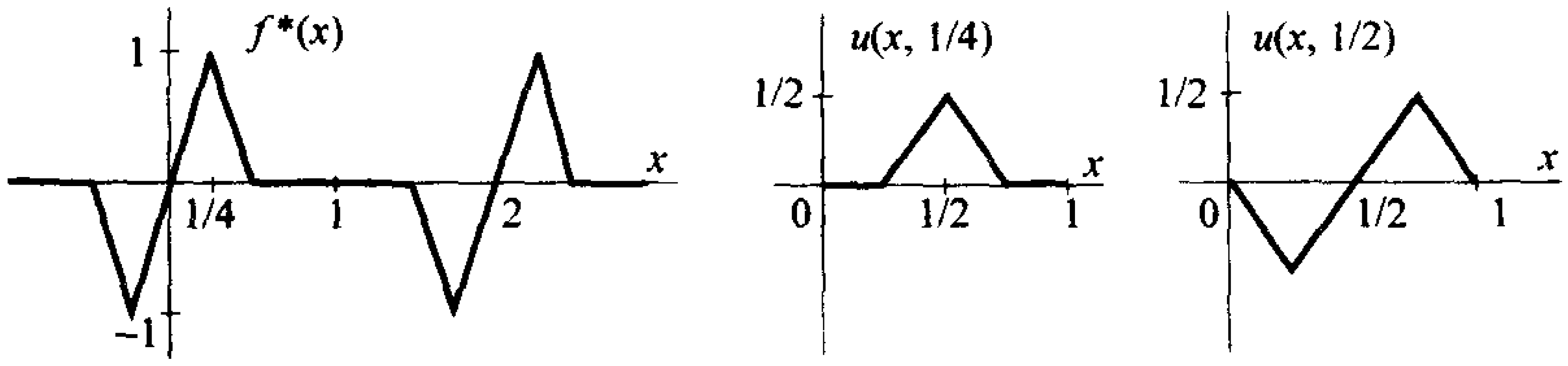
$$G(x)=\begin{cases}-10x & 若\ 0<x<1,\\ 10x-20 & 若\ 1<x<2.\end{cases}$$

9. 2π 和 2.

11.



15. (a)



(b)$3/4<x<1$. (c)$t>x-1/2$. (d)$t>\frac{x-1/2}{c}$.

19. (a) 在 xt 平面中斜率为 ±1 的直线.

(b) 对点(0.5,0.2),区间是(0.3,0.7).对点(0.3,2),区间是(1.7,2.3).

(c) 顶点为(0,0),(1,0)和(1/2,1/2)的三角区域.(0.5,0.2)在区域 Ⅰ 内,但是(0.3,2)不在.(d) 对区域 Ⅰ 内的(x,t),$u(x,t)=xt$.

21. 对区域 Ⅲ 内的 $P_1=(x_0,t_0)$,我们有 $Q_1=\left(\frac{x_0+1-2t_0}{2},\frac{1-x_0+2t_0}{4}\right)$,$Q_2=\left(1,\frac{x_0+2t_0-1}{2}\right)$,$P_2=\left(\frac{3-x_0-2t_0}{2},\frac{-1+x_0+2t_0}{4}\right)$.利用命题 1、例 3 的结果,以及 Q_1 和 P_2 在区域 Ⅰ 内这个事实,对区域 Ⅲ 内的(x,t),$u(x,t)=5-12t-5x+12tx$.

3.5 节

1. $u(x,t)=\frac{312}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-(2k+1)^2t}\sin(2k+1)x}{2k+1}.$

3. $u(x,t)=\frac{132}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{-(2k+1)^2t}\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$

5. $u(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{-n^2\pi^2t}\sin n\pi x}{n}.$

9. (a)$u(x)=100x$. (b)$u(x)=100$.

11. $u(x,t)=100(1-x)+30e^{-\pi^2t}\sin\pi x-\frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2\pi^2t}\sin n\pi x}{n}.$

13. $u(x,t)=100-\frac{50x}{\pi}+\frac{132}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{-(2k+1)^2t}\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2}-\frac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-(-1)^n}{n}e^{-n^2t}\sin nx.$

3.6 节

1. $u(x,t)=100.$

3. $u(x,t)=25\pi-\frac{200}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-4(2m+1)^2t}\cos 2(2m+1)x}{(2m+1)^2}.$

5. $u(x,t)=e^{-\pi^2t}\cos\pi x.$

9. 在习题 1 中,平均温度是 100. 在习题 5 中,平均温度是 0.

11. $u(x,t)=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_n}{\mu_n^2(1+\cos^2\mu_n)}e^{-\mu_n^2t}\sin\mu_n x$,其中 μ_n 是 $\tan\mu=-\mu$ 的第 n 个正根.

13. $u(x,t)=200\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{\mu_n}{2}}{\mu_n(1+\cos^2\mu_n)}e^{-\mu_n^2t}\sin\mu_n x$,其中 μ_n 是 $\tan\mu=-\mu$ 的第 n 个正根.

15. $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}d_n e^{-\mu_n^2c^2t}\cos\mu_n x$,其中 μ_n 是 $\cot\mu L=\frac{\mu}{\kappa}$ 和 $d_n=\frac{\int_0^L f(x)\cos\mu_n x\,dx}{\frac{1}{2}\left(L+\frac{1}{\kappa}\sin^2\mu_n L\right)}$ 的第 n 个正根.

3.7 节

1. $u(x,y,t)=\sin 3\pi x\sin\pi y\cos\sqrt{10}t.$

3. $u(x,y,t)$ 是例 1 答案与 $\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\pi x\sin 2\pi y\sin\sqrt{5}t$ 的和.

5. $u(x,y,t)=\frac{16}{\pi^2}\sum_{n\text{奇数}}\sum_{m\text{奇数}}\frac{\sin m\pi x\sin n\pi y}{mn\sqrt{m^2+n^2}}\sin\sqrt{m^2+n^2}t.$

9. 结点线:$x=\frac{1}{4}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{4}$.

11. $u(x,y,t)=\frac{1\,600}{\pi^2}\sum_{n\text{奇数}}\sum_{m\text{奇数}}\frac{\sin m\pi x\sin n\pi y}{mn}e^{-(m^2+n^2)\pi^2t}.$

13. $u(x,y,t)=\sin\pi x\sin\pi y e^{-2\pi^2t}.$

3.8 节

1. $u(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin n\pi x\sinh n\pi y}{n\sinh 2n\pi}.$

3. $u(x,y)=\frac{400}{\pi}\sum_{m\text{奇数}}\frac{\sin\frac{m\pi x}{2}\sinh\frac{m\pi(1-y)}{2}}{m\sinh\frac{m\pi}{2}}+\frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh n\pi x\sin n\pi y}{n\sinh 2n\pi}.$

5. $u(x,y)=\dfrac{\sin 7\pi x\sinh(7\pi(1-y))}{\sinh 7\pi}+\dfrac{\sin\pi x\sinh\pi y}{\sinh\pi}+\dfrac{\sinh 3\pi(1-x)\sin 3\pi y}{\sinh 3\pi}+\dfrac{\sinh 6\pi x\sin 6\pi y}{\sinh 6\pi}.$

3.9 节

1. $u(x,y)=\dfrac{8}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^m\sin m\pi x\sin(2k+1)\pi y}{[m^2+(2k+1)^2]m(2k+1)}.$

3. $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$，其中

$$u_1(x,y)=\frac{-4\sin\pi x}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\pi y}{(1+(2k+1)^2)(2k+1)},$$

$$u_2(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin n\pi x\sinh n\pi y}{n\sinh n\pi}.$$

5. $u(x,y)=\dfrac{16}{\pi^2}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\sin((2k+1)\pi x)\sin((2l+1)\pi y)}{(2l+1)(2k+1)(3+\pi^2((2l+1)^2+(2k+1)^2))}.$

7. $u(x,y)=\left(c_1e^{2\pi y}+c_2e^{-2\pi y}-\dfrac{1}{4\pi^2}\right)\sin 2\pi x$，其中

$$c_1=\frac{e^{-2\pi}-e^{-4\pi}}{4\pi^2(1-e^{-4\pi})},\quad c_2=\frac{1-e^{-2\pi}}{4\pi^2(1-e^{-4\pi})}.$$

3.10 节

1. $u(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin mx\cosh[m(1-y)]$，其中 $A_m=\dfrac{200(1-(-1)^m)}{m\pi\cosh m}.$

3. $u(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin mx(\cosh my-\tanh m\sinh my)$，其中 $A_m=\dfrac{2}{\pi(1-2m\tanh m)}\int_0^{\pi}\sin mx\,g(x)\mathrm{d}x.$

5. $u(x,y)=A_0+\sum_{m=1}^{\infty}A_m\cos\dfrac{m\pi x}{a}\cosh\dfrac{m\pi(b-y)}{a}$，其中 $A_0=\dfrac{1}{a}\int_0^a g(x)\mathrm{d}x$ 和 $A_m=\dfrac{2}{a\cosh\dfrac{m\pi b}{a}}\int_0^a\cos\dfrac{m\pi x}{a}g(x)\mathrm{d}x$，

$m\geqslant 1.$

7. $u(x,y)=\dfrac{1}{2\cosh 2\pi}\sin 2x\sinh 2y.$

9. $u(x,y)=\dfrac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\sin[(2k+1)x]}{(2k+1)\cosh[(2k+1)\pi]}\left[\dfrac{\sinh[(2k+1)y]}{2k+1}+\cosh[(2k+1)(\pi-y)]\right].$

第 4 章

4.2 节

1. $u(r,t)=4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{J_0\left(\dfrac{\alpha_n r}{2}\right)}{\alpha_n^2J_1(\alpha_n)}\sin\left(\dfrac{\alpha_n}{2}t\right).$

3. $u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{J_1\left(\dfrac{\alpha_n}{2}\right)}{\alpha_n^2J_1(\alpha_n)^2}J_0(\alpha_n r)\sin(\alpha_n t).$

5. $u(r,t)=J_0(\alpha_1 r)\cos(\alpha_1 t).$

7. $u(r,t)=J_0(\alpha_3 r)\cos(\alpha_3 t)+8\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{J_0(\alpha_n r)}{\alpha_n^4J_1(\alpha_n)}\sin(\alpha_n t).$

11. (a) $u(r,t)=200\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\alpha_n r}{a}\right)}{\alpha_n J_1(\alpha_n)}e^{-c^2\alpha_n^2 t/a^2}$. 这表述了具有一致初始温度分布 100° 和边界保持 0° 的圆盘上温度分布随时间的变化.

(b) 最大温度出现在圆盘的中心,因为这点受发生在边界上的热量流失的影响最小.

4.3 节

1. $u(r,\theta,t)=24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_2(\alpha_{2,n}r)}{\alpha_{2,n}^3 J_3(\alpha_{2,n})}\sin2\theta\cos(\alpha_{2,n}t)$.

3. $u(r,\theta,t)=128\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\frac{\alpha_{1,n}r}{2}\right)}{\alpha_{1,n}^3 J_2(\alpha_{1,n})}\sin\theta\cos\left(\frac{\alpha_{1,n}t}{2}\right)+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\alpha_{0,n}r}{2}\right)}{\alpha_{0,n}^2 J_1(\alpha_{0,n})}\sin\left(\frac{\alpha_{0,n}t}{2}\right)$.

5. $u(r,\theta,t)=24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_2(\alpha_{2,n}r)}{\alpha_{2,n}^4 J_3(\alpha_{2,n})}\sin2\theta\sin\alpha_{2,n}t$.

13. $u(r,\theta,t)=r^3\sin3\theta+\sin3\theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{\alpha_{3,n}J_4(\alpha_{3,n})}J_3(\alpha_{3,n}r)e^{-\alpha_{3,n}^2 t}$.

4.4 节

1. $u(r,\theta)=r\cos\theta=x$.

3. $u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\sin n\theta$.

5. $u(r,\theta)=\frac{25}{2}+\frac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\left[\sin\frac{n\pi}{4}\cos n\theta+\left(1-\cos\frac{n\pi}{4}\right)\sin n\theta\right]$.

7. 我们有 $u(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{y}{1-x}\right)$. 对 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的 T,满足 $u(x,t)=T$ 的点集是过点 $(1,0)$、斜率为 $-\tan T$ 的直线.

11. (a) 拉普拉斯方程变为 $\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$ 或 $u_{\theta\theta}=0$. 此时的解是 $u(r,\theta)=a\theta+b$,其中 a 和 b 是任意常数.

(b) $u(r,\theta)=\frac{T_2-T-1}{\alpha}\theta+T_1$, $u(1,\theta)=\frac{T_2-T-1}{\alpha}\theta+T_1$.

13. $u(r,\theta)=\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(4n-1)(4n+1)}r^{4n}\sin4n\theta$.

17. $u(r,\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta]\left(\frac{r}{a}\right)^n$,其中 a_0 是任意的. $a_n=\frac{a}{n\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta\,d\theta$,和 $b_n=\frac{a}{n\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta\,d\theta$. 令 f 等于 $u_r(a,\theta)$,可以发现 $u_r(a,\theta)$ 的傅里叶级数具有零常数项. 因此,f 的零傅里叶系数必为零,等价地,$\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta=0$.

23. (a)
$$u(r,\theta)=\frac{25}{2}+\frac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{-n}}{n}\left[\sin\frac{n\pi}{4}\cos n\theta+\left(1-\cos\frac{n\pi}{4}\right)\sin n\theta\right]$$
$$=\frac{25}{2}+\frac{100}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{r-\cos\theta}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\sin(\theta-\pi/4)}{r-\cos(\theta-\pi/4)}\right)\right].$$

27. (a) $u(r,\theta)=16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha_{1,n}r)\sin\theta}{\alpha_{1,n}^3 J_2(\alpha_{1,n})}e^{-\alpha_{1,n}^2 t}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_2(\alpha_{2,n}r)\sin2\theta}{\alpha_{2,n}J_3(\alpha_{2,n})}(1-e^{-\alpha_{2,n}^2 t})$.

(b) 稳态解 $u_1(r,\theta)=r^2\sin2\theta=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_2(\alpha_{2,n}r)\sin2\theta}{\alpha_{2,n}J_3(\alpha_{2,n})}$.

4.5 节

1. $u(\rho,z)=200\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_{0,n}\rho)}{\alpha_{0,n}J_1(\alpha_{0,n})}\frac{\sinh(\alpha_{0,n}z)}{\sinh(2\alpha_{0,n})}$.

3. $u(\rho,z)=100\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha_{0,n}/2)J_0(\alpha_{0,n}\rho)}{\alpha_{0,n}J_1(\alpha_{0,n})^2}\frac{\sinh(\alpha_{0,n}z)}{\sinh(2\alpha_{0,n})}$.

5. (a) $u(\rho,z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nJ_0\left(\frac{\alpha_{0,n}\rho}{a}\right)\frac{\sinh\left(\frac{\alpha_{0,n}}{a}(h-z)\right)}{\sinh\left(\frac{\alpha_{0,n}}{a}h\right)}$，其中 c_n 是函数 $f(\rho)(0<\rho<a)$ 的零阶贝塞尔系数.

(b) $u(\rho,z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nJ_0\left(\frac{\alpha_{0,n}\rho}{a}\right)\frac{\sinh\left(\frac{\alpha_{0,n}}{a}z\right)}{\sinh\left(\frac{\alpha_{0,n}}{a}h\right)}+\sum_{n=1}^{\infty}c_nJ_0\left(\frac{\alpha_{0,n}\rho}{a}\right)\frac{\sinh\left(\frac{\alpha_{0,n}}{a}(h-z)\right)}{\sinh\left(\frac{\alpha_{0,n}}{a}h\right)}$，其中 a_n 是函数 $f_2(\rho)$ $(0<\rho<a)$ 的零阶贝塞尔系数；而 c_n 是函数 $f_1(\rho)(0<\rho<a)$ 的零阶贝塞尔系数.

9. $u(\rho,z)=\frac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{I_0\left(\frac{n\pi\rho}{2}\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{2}\right)}\sin\frac{n\pi z}{2}$.

11. $$u(\rho,z)=156\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\alpha_{0,n}\rho}{10}\right)}{\alpha_{0,n}J_1(\alpha_{0,n})}\frac{\sinh\left(\frac{\alpha_{0,n}}{10}z\right)}{\sinh\left(\frac{3}{5}\alpha_{0,n}\right)}+112\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\alpha_{0,n}\rho}{10}\right)}{\alpha_{0,n}J_1(\alpha_{0,n})}\frac{\sinh\left(\frac{\alpha_{0,n}}{10}(6-z)\right)}{\sinh\left(\frac{3}{5}\alpha_{0,n}\right)}$$
$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{56+22\cos\frac{2n\pi}{3}-78(-1)^n}{n}\right]\frac{I_0\left(\frac{n\pi\rho}{6}\right)}{I_0\left(\frac{5n\pi}{3}\right)}\sin\frac{n\pi z}{6}.$$

4.6 节

3. $\int_0^{2\pi}\int_0^a\phi_{mn}^2(r,\theta)r\,dr\,d\theta=\pi a^2J_1^2(\alpha_{0n})$，对 $m=0$；$\frac{\pi}{2}a^2J_{m+1}^2(\alpha_{mn})$，对 $m=1,2,\cdots$.

5. $u(r,\theta)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_{0n}r)}{\alpha_{0n}(1-\alpha_{0n}^2)J_1(\alpha_{0n})}$.

7. $u(r,\theta)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2J_0(\alpha_{0n}r)}{\alpha_{0n}^3J_1(\alpha_{0n})}+\frac{J_3(\alpha_{3n}r)}{\alpha_{3n}^3J_4(\alpha_{3n})}\cos3\theta\right\}$.

9. $u(r,\theta)=-\sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_2\left(\frac{\alpha_{1n}}{2}\right)}{2\alpha_{1n}^3J_2^2(\alpha_{1n})}J_1(\alpha_{1n}r)$.

11. $u(r,\theta)=r^2\sin2\theta-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_{0n}r)}{\alpha_{0n}^3J_1(\alpha_{0n})}$.

15. $u(r,\theta,t)=\sum_{n=1}^{\infty}J_0(\alpha_{0n}r)A_{0n}(t)$，其中 $A_{0n}(t)=\frac{2e^{-\alpha_{0n}^2t}}{\alpha_{0n}J_1(\alpha_{0n})}\left[1+\frac{1}{\alpha_{0n}^2-1}(e^{(\alpha_{0n}^2-1)t}-1)\right]$.

4.7 节

1. $p=3$，$J_3(x)=\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3-\frac{1}{4!}\left(\frac{x}{2}\right)^5+\frac{1}{2\cdot5!}\left(\frac{x}{2}\right)^7-\cdots$.

3. $p=\frac{1}{2}, J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)$.

5. $y(x)=c_1J_{3/2}(x)+c_2J_{-3/2}(x)=c_1\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{30}+\cdots\right)+c_2\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\frac{1}{x}-\frac{x}{2}+\cdots\right)$.

7. $y(x)=c_1J_{1/4}(x)+c_2J_{-1/4}(x)=c_1\left(\frac{x}{2}\right)^{1/4}\left(\frac{1}{\Gamma(5/4)}-\frac{x^2}{4\Gamma(9/4)}+\cdots\right)$

$$+c_2\left(\frac{2}{x}\right)^{1/4}\left(\frac{1}{\Gamma(3/4)}-\frac{x^2}{4\Gamma(7/4)}+\cdots\right).$$

9. $-\frac{384}{x^3}-\frac{48}{x}-6x+\cdots+\left(x^3-\frac{x^5}{16}+\cdots\right)\ln x$.

11. $y=c_1xJ_1(x)+c_2xY_1(x)$.

13. $y=c_1x^{3/2}J_{3/2}(x)+c_2x^{3/2}Y_{3/2}(x)$.

17. $y=c_1x^{-p}J_p(x)+c_2x^{-p}Y_p(x)$.

19. $y=c_1J_0(2e^{-\frac{x}{2}})+c_2Y_0(2e^{-\frac{x}{2}})$.

27. $y=0.123J_0(e^{-t})+0.069Y_0(e^{-t})$.

37. $\frac{2}{15}$.

39. $\frac{35\pi}{256}$.

45. (a) 其中 $u=2\theta$. 现在,利用习题 33,

$$L=4\int_0^{\pi/4}\sqrt{\frac{2}{\cos 2\theta}}d\theta=2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\cos^{-1/2}u\sin^0 u\,du.$$

(b) 7.416.

4.8 节

3. $xJ_1(x)+C$.

5. $-J_0(x)+C$.

7. $x^3J_3(x)+C$.

9. $J_0(x)-\frac{4}{x}J_1(x)+C$.

13. $J_5(x)=-\frac{12}{x}\left(\frac{16}{x^2}-1\right)J_0(x)+\left(\frac{384}{x^4}-\frac{72}{x^2}+1\right)J_1(x)$.

21. (a) $\alpha_{mj}=j\pi, j=1,2,\cdots$.

(b) $x^{1/2}=\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\frac{\sin(j\pi x)}{\sqrt{x}}$.

(c) 对(b) 中两边同时乘以 $x^{1/2}$, $x=\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\sin(j\pi x)$, 对 $0<x<1$.

23. $x^2=2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_{2,j}J_3(\alpha_{2,j})}J_2(\alpha_{2,j}x)$.

25. $f(x)=-2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_{1j})-J_0\left(\frac{\alpha_{1j}}{2}\right)}{\alpha_{1j}J_0(\alpha_{1j})^2}J_1(\alpha_{1j}x)$.

27. $f(x)=-2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{J_1(\alpha_{2,j})-2J_1\left(\frac{\alpha_{2,j}}{2}\right)}{\alpha_{2,j}J_1(\alpha_{2,j})^2}J_2(\alpha_{2j}x)$.

31. 对 $j=1,2,\cdots,\lambda=\lambda_j=\alpha_{1j}, y=y_j=c_jJ_1(\alpha_{1j}x)$.

33. 对 $j=1,2,\cdots,\lambda=\lambda_j=j,y=y_j=c_j\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin jx$.

4.9 节

1. $J_0(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(0)\mathrm{d}\theta=1$;对 $n\geqslant 1,J_n(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta=0$.

3. $\sin x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\sin\frac{n\pi}{2}$. 但若 $n=2k+1,\frac{n\pi}{2}=(-1)^k$;若 $n=2k,\frac{n\pi}{2}=0$,所以 $\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}J_n(x)\sin\frac{n\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}J_{-n}(x)\sin\frac{n\pi}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[J_{2k+1}(x)-(-1)^{2k+1}J_{2k+1}(x)]=\sum_{k=0}^{\infty}2(-1)^kJ_{2k+1}(x)$.

5. 由于级数中所有的项都是非负的,级数和大于其中任意一项,所以,$|J_0(x)|\leqslant 1$ 和 $2|J_n(x)|^2\leqslant 1$.

7. $\int_0^\pi f(t)g(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}f(t)g(t)\mathrm{d}t+\int_{\pi/2}^\pi f(t)g(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}f(t)g(t)\mathrm{d}t+\int_0^{\pi/2}f(\pi-u)g(\pi-u)\mathrm{d}u$,其中 $u=t-\pi/2$. 最后一项为零,因为$\int_0^{\pi/2}f(\pi-u)g(\pi-u)\mathrm{d}t=-\int_0^{\pi/2}f(u)g(u)\mathrm{d}u$.

9. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_0(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin(x\sin\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(x\sin\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta$, 因为由习题 8, 最后一项为零. 最后的和是$-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(\theta-x\sin\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=-J_1(x)$.

11. 以 x^2 代替 $x,g(t)=1,f(t)=\cos t$,利用引理 1,则对充分大的 x,积分近似为$\frac{\sqrt{2\pi}}{|x|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2\pi/4}$.

第 5 章

5.1 节

3. $P_0(\cos\theta)=1,P_1(\cos\theta)=\cos\theta,P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$.

5. $u(r,\theta)=r\cos\theta,u_r=\cos\theta,u_{rr}=0,u_\theta=-r\sin\theta,u_{\theta\theta}=-r\cos\theta$.

5.2 节

1. $u(r,\theta)=20+20r\cos\theta$.

3. $u(r,\theta)=60+20\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!(4n+3)}{2^{2n}(n!)^2(n+1)}r^{2n+1}P_{2n+1}(\cos\theta)$.

5. $u(r,\theta)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}r\cos\theta+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n(2n-2)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\left(\frac{4n+1}{n+1}\right)r^{2n}P_{2n}(\cos\theta)$.

9. $u(r,\theta)=65+\frac{15}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(P_{n-1}(-1/3)-P_{n+1}(-1/3))\left(\frac{r}{3}\right)^nP_n(\cos\theta)$.

11. $u(r,\theta)=60r^{-1}+20\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!(4n+3)}{2^{2n}(n!)^2(n+1)}r^{-(2n+2)}P_{2n+1}(\cos\theta)$.

5.3 节

5. (a) 对 $m=0,2\pi^2$;对 $m\geqslant 1,\frac{2\pi\mathrm{i}}{m}$. (c) 对 $n=1,2,\cdots,A_{n,0,0}=0$,因为由勒让德多项式的正交性,$\int_{-1}^1P_n(x)\mathrm{d}x=0$.

9. $u(r,\theta,\phi)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

11. $u(r,\theta,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_{nm}r^nY_{n,m}(\theta,\phi)$，其中 $A_{00}=\frac{100\sqrt{\pi}}{3}, A_{n0}=0$，对 $n>0$；而对 $m>0, A_{nm}=\frac{100}{m}\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\sin\frac{m\pi}{3}I_{nm}$，其中 I_{nm} 如习题 6 中.

5.4 节

5. 对 $0<r<1$， $1=2\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{\sin(j\pi r)}{j\pi r}$.

7. 对 $0<r<1, r^2=2\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}(-6+j^2\pi^2)\frac{\sin(j\pi r)}{j^3\pi^3 r}$.

9. $u(r,\theta,\phi)=2\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\frac{\sin(j\pi r)}{j^2\pi^2 r}$.

15. (a) $u(r,\theta,\phi,t)=60\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{\sin(j\pi r)}{j\pi r}e^{-j^2\pi^2 t}$.

(b) $u(0,\theta,\phi,t)=30(1-\theta_4(0,e^{-\pi^2 t}))$.

(c) $t\approx 0.18$.

17. $u(r,\theta,\phi,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{\infty}B_{j00}(t)j_0(\pi jr)$，其中 $B_{j00}(t)=e^{-\pi^2 t}\left(f_{j00}-\frac{q_{j00}}{\pi^2 j^2}\right)+\frac{q_{j00}}{\pi^2 j^2}, f_{j00}=400\sqrt{\pi}(-1)^{j+1}, q_{j00}=\frac{80(-1)^j(-6+j^2\pi^2)}{j^2\pi^{\frac{3}{2}}}$.

5.5 节

5. 0.

7. 0.

9. 勒让德微分方程，$n=5$，

$$y(x)=c_1P_5(x)+c_2Q_5(x)=c_1\left(\frac{15x}{8}-\frac{35x^3}{4}+\cdots\right)+c_2\left(-\frac{8}{15}+8x^2+\cdots\right).$$

11. 勒让德微分方程，$n=0$，

$$y(x)=c_1P_0(x)+c_2Q_0(x)=c_1+c_2\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots\right).$$

13. 无界.

15. 无界.

17. $1+x-\frac{3x^2}{8}+\frac{5x^3}{24}-\frac{21x^4}{128}+\cdots$.

19. $x-\frac{x^3}{6}+\cdots$.

21. 级数解中相邻两项比值的绝对值是 $|a_{m+2}/a_m|x^2=|[(m(m+1)-\mu)/(m+2)(m+1)]|x^2$. 当 $m\to\infty$ 时，它趋于 x^2. 因此，如果 $x^2<1$ 或 $-1<x<1$，级数收敛. 在端点 $x=\pm 1$ 处，这个判别法不适用. 级数可能收敛(比如，多项式解情形)或发散.

25. (a) 利用不等式 $|a+b|\geqslant|a|-|b|$，记 $|Q_n(x)|\geqslant|P_n(x)\ln[(1+x)/(1-x)]/2-|f_n(x)||$. 当 $x\to\pm 1$ 时，$|P_n(x)|\to 1$，$|\ln[(1+x)/(1-x)]|\to\infty$，而 $f_n(x)$ 仍是有界的. 因此，当 $x\to\pm 1$ 时，$|Q_n(x)|\to\infty$.

(b) 对 $n=0, P_0(x)=1, f_0(x)=0$. 对 $n=1, P_1(x)=x, f_1(x)=-1$.

(c) $u'(x)=1/(1-x^2)$，因此，$[(1-x^2)u'(x)]'=[1]'=0$.

(d) $(1-x^2)v''-2xv'+\alpha_n v=(1-x^2)u''P_n+2(1-x^2)u'P'_n+(1-x^2)uP''-2xu'P_n-2xuP'_n+\alpha_nP_nu=$

$2u'P'_n(1-x^2)=2uP'_n$，因为$(1-x^2)u'=1$.

(e) 如果 $y=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ 是 $n-1$ 次多项式，则$(1-x^2)y''-2xy'=[(1-x^2)y']'$ 也是 $n-1$ 次多项式，因为它是 n 次多项式$(1-x^2)y'$ 的导数. 因此，微分方程两边都是 $n-1$ 次多项式. 令 x 同次幂的系数相等，我们得到关于 y 的 n 个未知系数的 n 个方程. 求解这些方程，我们确定出 y. 讨论这 n 个方程总是有解.

27. $Q_3(x)=P_3(x)\ln[(1+x)/(1-x)]/2+f_3(x)$，其中 $f_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ 是$(1-x^2)y''-2xy'+12y=-(15x^2-3)$ 的一个解. 将 $y=a_0+a_1x+a_2x^2$ 代入，求出系数，我们得到 $a_0=2/3, a_1=0, a_2=-5/2$.

29. (a)

$$\begin{aligned}|\cos\phi+\mathrm{i}\sqrt{1-\cos^2\phi}\cos\theta|^n&=|\cos\phi+\mathrm{i}\,|\sin\phi|\cos\theta|^n\\&=(\cos^2\phi+\sin^2\phi\cos^2\theta)^n\\&\leqslant(\cos^2\phi+\sin^2\phi)^n=1.\end{aligned}$$

5.6 节

3. 0.

5. $\frac{6}{35}$.

7. 0.

13. 0.

15. $\frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

17. $-\frac{1}{3}$.

19. $-\frac{1}{2}$.

21. $I_0=\ln4-2$，$I_n=\frac{-2}{n(n+1)}$，$n>0$.

23. $I_0=-1$，$I_1=\frac{2}{9}(\ln8-4)$，$I_n=\frac{-2}{n^2+n-2}$，$n>1$.

27. $A_0=\frac{1}{2}$，$A_2=\frac{5}{8}$，$A_4=-\frac{3}{16}$，$A_1=A_3=0$.

29. $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n(2n-2)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\left(\frac{4n+1}{n+1}\right)P_{2n}(x)$.

31. $\ln2-1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}P_n(x)$.

39. 在任意区间$[a,b]$上一致收敛，其中 $-1<a<b<1$. 对$[-1,1)$内的所有 x，逐点收敛. 在 $x=1$ 处，发散.

41. $Q_1(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4k+1}{4k^2+2k-2}P_{2k}(x)$.

45. $p(x)=\frac{8}{3}P_0(x)+\frac{4}{3}P_1(x)+\frac{4}{15}P_2(x)$.

47. $p(x)=\frac{16}{15}P_0(x)+\frac{22}{15}P_1(x)+\frac{52}{105}P_2(x)+\frac{8}{35}P_3(x)+\frac{16}{315}P_4(x)$.

5.7 节

1. $-3x\sqrt{1-x^2}$，$\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$.

3. $105x\sqrt{1-x^2}(-1+x^2)$.

5. $n=1$，$m=1$，$P_1^1(x)=-\sqrt{1-x^2}$.

7. $n=2$，$m=1$，$P_2^1(x)=-3x\sqrt{1-x^2}$.

第6章

6.1节

9. $a=-1/3$，$b=0$.

11. $\|1\|=\sqrt{2}$；$\|\sin n\pi x\|=\|\cos n\pi x\|=1$.

13. $\|P_n\|=\sqrt{\frac{2}{2n+1}}$；正交集：$\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)$，$n=0, 1, 2, \cdots$.

15. 利用变量代换 $u=\sqrt{x}$.

17. 在(9)式中，利用

$$A_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)\mathrm{d}x=\frac{2n+1}{2}(f,P_n) \text{ 和 } \|P_n\|=\sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

6.2节

1. $(xy')'+\lambda y=0$，奇异，因为 $p(0)=0$.

3. $(x^2y')'+\lambda xy=0$，正则.

5. $\left(\frac{1}{x}y'\right)'+\frac{\lambda}{x}y=0$，奇异，因为$\frac{1}{x}$在 $x=0$ 处不连续.

7. $(y')'+\lambda xy=0$，奇异，因为 $r(x)=x$ 在$[-1, 1]$内不总是正的.

9. $((1-x^2)y')'+\lambda y=0$，奇异，因为 $p(\pm1)=0$.

11. $\lambda=\frac{n^2}{4}$，$y_n(x)=\sin\left(\frac{n}{2}x\right)$，$n=1, 2, \cdots$.

13. $\lambda=\frac{(2k+1)^2}{4}$，$y_k(x)=\sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right)$，$k=0, 1, 2, \cdots$.

15. $\lambda=\mu^2>0$，$y=\sin\mu x$，其中 μ 是方程 $\mu=-\tan(\pi\mu)$ 的一个正根.

17. 此时，有正的和负的特征值. 对 $\lambda=-1$，$y_{-1}=\cosh x-\sinh x$. 对 $\lambda=(n\pi)^2$，$n=1, 2, 3, \cdots$，$y_n=-n\pi\cos n\pi x+\sin n\pi x$.

19. $\lambda=\alpha_{2,n}^2$，$y_n=J_2(\alpha_{2,n}x)$，其中 $\alpha_{2,n}$ 是贝塞尔函数 $J_2(x)$ 的第 n 个正零点.

23. 对 $0<x<\pi$，$x=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2}{j}(-1)^{j+1}\sin jx$.

31. (a) $[(1-x^2)^{1/2}y']'+\frac{n^2}{(1-x^2)^{1/2}}y=0$.

(b)

$$y_1(x)=1-\frac{n^2}{2!}x^2-\frac{(2^2-n^2)n^2}{4!}x^4-\frac{(4^2-n^2)(2^2-n^2)n^2}{6!}x^6-\cdots$$
$$-\frac{[(2m-2)^2-n^2]\cdots(2^2-n^2)n^2}{(2m)!}x^{2m}-\cdots,$$

$$y_2(x)=x+\frac{(1-n^2)}{3!}x^3+\frac{(3^2-n^2)(1-n^2)}{5!}x^5+\cdots$$
$$+\frac{[(2m-1)^2-n^2]\cdots(1-n^2)}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\cdots.$$

其中一个解到 x^n 就截止，取决于 n 是偶的还是奇的. (c)(4)式中的极限是 0，因为 $p(\pm 1)=0$，而解及其导数在[−1, 1]内有界.

33. (a) 由 4.8 节习题 36(b), $2\lambda^2\int_0^a [y(r)]^2 r\,\mathrm{d}r = [a[y'(a)]^2 + \lambda^2 a^2 [y(a)]^2]$, 其中 $y(r)=J_0(\lambda r)$. 由初值条件, $y'(a) = -\kappa y(a)$, 由(7)式得, $[J_0(\lambda a)]^2 = \left[\frac{\lambda}{\kappa}J_1(a\lambda)\right]^2$.

(b) 在级数展开式两边同时乘以 $J_0(\lambda_k r)r$, 再利用正交性(例 7)和(a).

35. $u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r)e^{-\lambda_n^2 t}$, 其中 $A_n = \frac{200}{\lambda_n}\frac{J_1(\lambda_n)}{[J_0(\lambda_n)]^2 + [J_1(\lambda_n)^2]}$ 且 λ_n 是(7)式的第 n 个根, $\kappa=1$. (也见习题 34.)

6.4 节

1. 特征值由 $\lambda=\alpha^4$ 给出，其中 α 是 $\cos 2\alpha = \frac{1}{\cosh 2\alpha}$ 的正根.

6.5 节

7. (a)特征值由 $\lambda=\alpha^2$ 给出，其中 α 是 $1-\cos\alpha L - \alpha L\sin\alpha L = 0$ 的正根.

(b) $\alpha_1 = \frac{2\pi}{L}$, $\lambda_1 = \frac{4\pi^2}{L^2}$, 临界负荷 $P = EI\,\frac{4\pi^2}{L^2}$.

6.6 节

1. $u=x^4-y^4$, $u_{yyxx}=0$, $u_{xxxx}=4!$, $u_{yyyy}=-4!$, $\nabla^4 u=0$.

3. $v=x^2/(x^2+y^2)=x\cdot u(x, y)$，其中 $u(x, y)=x/(x^2+y^2)$. 由于 u 是调和的，应用例 1.

5. $v=r^2\cos 2\theta(1-r^2)=(x^2-y^2)(1-(x^2+y^2))=u(x, y)(1-(x^2+y^2))$，其中 $u=x^2=y^2$. 由于 u 是调和的，应用例 1.

7. 应用例 1，取 $u=r^n\cos n\theta$，它是调和的.

9. $v=v_1+v_2$，其中 $v_1=ar^2+\ln r+c\ln r$, $v_2=br^2+d$. 如习题 7. v_2 是双调和的. $v_1=\ln r(ar^2+c)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)(a(x^2+y^2)+c)$，由例 1，$v_1$ 是双调和的，因为 $\ln r$ 是调和的. v 是两个双调和函数之和，因而也是双调和的.

11. $(r^2\ln r - 2r^2\ln 2 + 2\ln r + 2\ln 2)/(3-4\ln 2)$.

13. $u(r, \theta)=2r^2\cos 2\theta - r^4\cos 2\theta$.

15. $u(r, \theta)=(1-r^2)\left(-\frac{1}{2}r\cos\theta\right)+1$.

17. $u(r,\theta) = (1-r^2)v(r,\theta)$, 其中 $v(r,\theta) = -\frac{1}{2}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)\right]$, a_0, a_n 和 b_n 是 g 的傅里叶系数.

6.7 节

15. $(u,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin(k_n^2 ct)\phi_n(r)$, 其中 $\beta_n = 1/(k_n^2 c\int_0^1 \phi_n(r)^2 r\mathrm{d}r)\int_0^1 \phi_n^2(r)g(r)r\mathrm{d}r$, k_n 是(17)式的根, 而 ϕ_n 由(18)式给出.

17. 令 $u_1(r, t)$表示例 3 中的解，而 $u_2(r, t)$表示例 2 中的解，则 $u=u_1+u_2$ 就是所需的解.

19. $u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\phi_n(r)$，其中 ϕ_n 由(18)式给出，$a_n(t)=A_n e^{-c^2 k_n^4 t}$，$A_n$ 由例 1 中的公式乘以 100 得到.

第 7 章

7.1 节

1. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega a}{\omega}\cos\omega x\,d\omega,\ |x|\neq a.$

3. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin(\pi\omega/2)}{\omega}-\frac{\cos(\pi\omega/2)}{1-\omega^2}\cos\omega x\right)d\omega.$

5. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\omega^2}\cos\omega x\,d\omega.$

7. $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x+\frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin\omega x\right)d\omega,\ |x|\neq 0,1.$

9. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{w^2}[2\sin w-\sin 2w]\sin wx\,dw.$

11. $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{1+\cos\pi\omega}{1-\omega^2}\cos\omega x+\frac{\sin\pi\omega}{1-\omega^2}\sin\omega x\right)d\omega.$

21. $f(x)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{sgn}(x+1)-\mathrm{sgn}(x-1)).$

25. $\mathrm{Si}(b)-\mathrm{Si}(a).$

27. $\dfrac{1}{a}(1-\cos a-a\mathrm{Si}(a))+\dfrac{1}{b}(-1+\cos b+b\mathrm{Si}(b)).$

33. $\mathrm{Ci}(e)-\mathrm{Ci}(1).$

7.2 节

1. $\hat{f}(\omega)=i\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\cos\omega-1}{\omega}.$

3. $\hat{f}(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}i\dfrac{\sin\pi\omega}{\omega^2-1}.$

5. $\hat{f}(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1-\cos\omega}{\omega^2}.$

7. $\hat{f}(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left[-\dfrac{1}{\omega^2}+\dfrac{\cos 10\omega}{\omega^2}+10\dfrac{\sin 10\omega}{\omega}\right]-i\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left[\dfrac{\sin 10\omega}{\omega^2}-10\dfrac{\cos 10\omega}{\omega}\right].$

9. $2\sqrt{\dfrac{2}{\pi}},\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}.$

11. $g=\mathcal{F}\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}e^{-|x|}\right),\mathcal{F}(g)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}e^{-|\omega|}.$

13. $g=\mathcal{F}(f(x))$，其中

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} & \text{若 } |x|<a,\\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$$

因此，

$$\mathcal{F}(g)(\omega)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} & 若\ |\omega|<a,\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

15. $g=\mathcal{F}(f(x))$，其中

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2\pi}e^{-ax} & 若\ x>0,\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

因此，$\mathcal{F}(g)(\omega)=\sqrt{2\pi}e^{a\omega}$ 若 $\omega<0$，$\mathcal{F}(g)(\omega)=0$ 若 $\omega>0$，和 $\mathcal{F}(g)(0)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

17. (c) 令 $f(x)=e^{-x}$，若 $x>0$；0，若 $x<0$（见例 2），则 $g(x)=f(-x)$.

因此 $\hat{g}(\omega)=\hat{f}(-\omega)=(1+i\omega)/(\sqrt{2\pi}(1+\omega^2))$. 令 $h(x)=e^{-|x|}$，则 $h=f+g$，$\hat{h}(\omega)=\hat{f}(\omega)+\hat{g}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}$.

21. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(e^{-(1-\omega)^2/4}+e^{-(1+\omega)^2/4})$.

23. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(e^{-|\omega-1|}+e^{-|\omega+1|}+e^{-|\omega-2|}+e^{-|\omega+2|})$.

25. $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{\sin(\omega-1)}{\omega-1}+\dfrac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}\right)$.

27. $g(x)$ 是给定函数，如果 $|x|<(b-a)/2$，$f(x)=h$；否则为零. 因此，$g(x)=f(x-(b+a)/2)$，则由例 1，$\hat{f}(\omega)=h\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin[(b-a)\omega/2]}{\omega}$. 从而，$\hat{g}(\omega)=e^{-i(b+a)\omega/2}\hat{f}(\omega)=h\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-i(b+a)\omega/2}\frac{\sin[(b-a)\omega/2]}{\omega}$.

29. 如果 $0<x<a$，令 $f(x)=h$；否则为零. 由习题 27，$\hat{f}(\omega)=h\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-ia\omega/2}\frac{\sin[a\omega/2]}{\omega}$. 令 $g(x)$ 是给定函数，则 $g(x)=xf(x)/a$. 因此，$\hat{g}(\omega)=(i/a)\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega)=(i/a)h\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-ia\omega/2}\left[\frac{-2\sin(a\omega/2)+a\omega e^{-ia\omega/2}}{2\omega^2}\right]$.

31. $g(x)=x^2f(x)$，其中 f 如例 1 所给. 因此 $\hat{g}(\omega)=-\frac{d^2}{d\omega^2}\hat{f}(\omega)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d^2}{d\omega^2}\frac{\sin a\omega}{\omega}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\omega^3}[2a\omega\cos(a\omega)+a^2\omega^2\sin(a\omega)-2\sin(a\omega)]$.

33. $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\sin^2(ax)-\sin^2(ax/2)}{ax^2}$.

35. (a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\omega^2/4}$. (b) $\dfrac{1}{2}e^{-\omega^2/8}$.

37. $\dfrac{-i}{2\sqrt{2}}\omega e^{-\omega^2/4}$.

39. $i\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(\dfrac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^2}\right)$.

41. $-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\omega}$，若 $\omega>0$；$i\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{\omega}$，若 $\omega<0$.

43. $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}(2+\omega^2)e^{-\omega^2/4}$.

45. $(1-i\omega)e^{-\omega^2/2-i\omega}$.

49. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-x^2/4}, g(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|}$.

51. $f(x)=e^{-x^2/2}, g(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x}{x}$.

53. $\hat{f}(\omega)=-i\omega e^{-\omega^2/2}, \hat{g}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\omega^2/4} f*g(x)=\frac{2x}{3\sqrt{3}}e^{-x^2/3}$.

7.3 节

1. $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\omega|}\cos\omega t\, e^{i\omega x}\,d\omega$.

3. $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2(1+t)/4} e^{i\omega x}\,d\omega$.

5. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\cos(ct\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$.

7. $f\left(x-\frac{t}{3}\right)$.

9. $f\left(x+\frac{t^3}{3}\right)$.

11. $f(x+t)$.

13. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{-\frac{t^2}{2}\omega^2} e^{i\omega x}\,d\omega$.

15. $f(x)(e^{-t}+te^{-t})+te^{-t}g(x)$.

17. $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos(\omega^2 t)e^{i\omega x}\,d\omega$.

19. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\hat{f}(\omega)+\frac{\hat{g}(\omega)}{\omega^2}(1-e^{-\omega^2 t})\right)e^{i\omega x}\,d\omega$.

23. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{-c^2\omega^2 t}e^{i\omega(x+kt)}\,d\omega$.

25. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{-i\omega^3 c^2 t}e^{i\omega x}\,d\omega$.

7.4 节

1. $u(x,\ t)=10\left(\operatorname{erf}\left[\frac{x+1}{\sqrt{t}}\right]-\operatorname{erf}\left[\frac{x-1}{\sqrt{t}}\right]\right)$.

3. $u(x,\ t)=\frac{70}{\sqrt{2t+1}}e^{-\frac{x^2}{2(2t+1)}}$.

5. $u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-s)^2 e^{-s^2/(4t)}\,ds=2t+x^2$.

7. $u(x,t)=f*g_t(x)$ 其中 $g_t(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{e^{-\frac{3x^2}{4t^3}}}{t^{3/2}}$.

8. $u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)e^{-(x-s)^2/4t}\,ds$.

9. $u(x,\ t)=f*g_t(x)$，其中 $g_t(x)=\frac{1}{\sqrt{2(1-e^{-t})}}e^{-\frac{x^2}{4(1-e^{-t})}}$.

11. $u(x,t)=f*g_t(x)$，其中

$$g_t(x)=\frac{1}{\sqrt{2\int_0^t a(s)\,ds}}e^{\frac{-x^2}{4A(t)}} \quad 和 \quad A(t)=\int_0^t a(s)\,ds.$$

25. $u(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{4c^2t+1}}e^{-(x-1)^2/(4c^2t+1)}$.

27. $u(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{2c^2t+1}}e^{-(x-2)^2/2(2c^2t+1)}$.

7.5 节

1. $u(x,y)=\dfrac{50}{\pi}\left\{\tan^{-1}\left(\dfrac{1+x}{y}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{1-x}{y}\right)\right\}$.

3. $u(x,y)=\dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\cos s}{(x-s)^2+y^2}ds$.

7. (a) $u(x,y)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}P_{2+y}(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{2+y}{x^2+(2+y)^2}$.

(b) 半径为$\dfrac{1}{4T}$、圆心为$\left(0,\dfrac{1}{4T}-2\right)$的圆.

7.6 节

1. $f_c(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin\omega}{\omega}$.

3. $f_c(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{6}{4+\omega^2}$.

5. $f_c(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\omega\sin(2\pi\omega)}{\omega^2-1}$.

7. $f_s(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1-\cos\omega}{\omega}$.

9. $f_s(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\omega}{4+\omega^2}$.

11. $f_s(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{2\sin(\pi\omega)}{\omega^2-4}$.

13. $f_c(\omega)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}e^{-\omega}$.

15. $f_s(\omega)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}e^{-\omega}$.

17. $f_c(\omega)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}(e^{-|\omega-1|}+e^{-(\omega+1)})$.

7.7 节

1. $u(x,t)=\dfrac{2T_0}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{1-\cos b\omega}{\omega}e^{-\omega^2t}\sin\omega x\,d\omega$.

3. $u(x,t)=\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-\omega^2t-\omega}\sin\omega x\,d\omega$.

11. $u(x,y)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\omega^2}\frac{\sinh\omega x}{\sinh\omega}\cos\omega y\,d\omega$.

13. $u(x,y)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\omega}{1+\omega^2}\frac{\sinh\omega x}{\sinh\omega}\sin\omega y\,d\omega$.

15. $u(x,y)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}e^{-\omega x}\sin\omega y\,d\omega$.

17. $u(x,y)=2+e^y\cos x$.

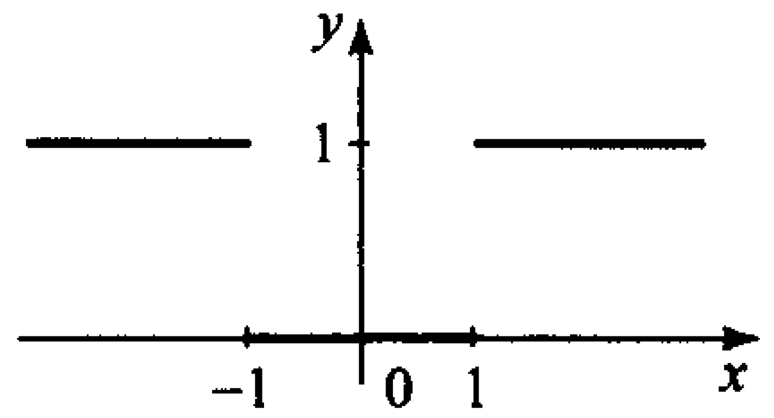
7.8 节

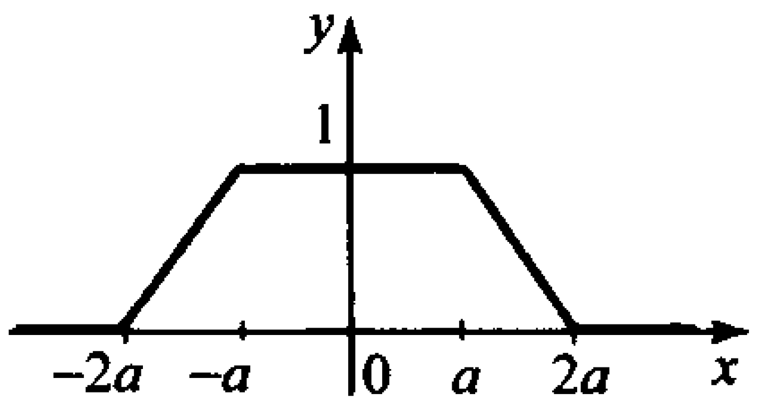
1. $\frac{1}{2}(\delta_{-2}(x)+\delta_{-1}(x)-\delta_1(x)-\delta_2(x))$.

3. $-(\mathcal{U}_{-2}(x)-\mathcal{U}_{-1}(x))+(\mathcal{U}_{-1}(x)-\mathcal{U}_1(x))+\delta_{-1}(x)-2\delta_2(x)$.

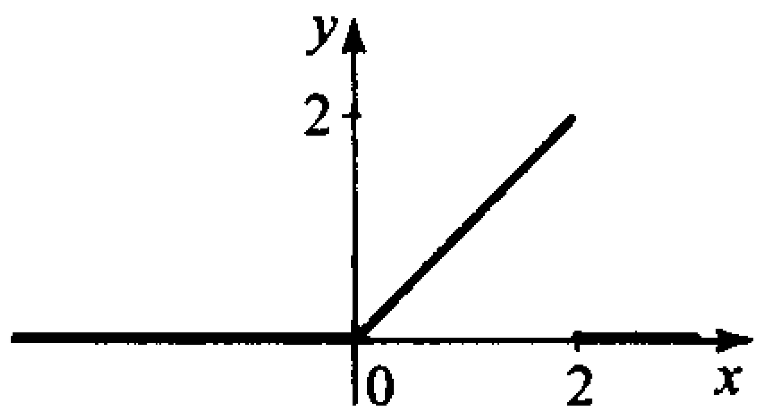
5. $\phi'(x)=-\delta_{-1}(x)+\delta_1(x)$.

7. $\phi'(x)=(1/a)(\mathcal{U}_{-2a}(x)-\mathcal{U}_{-a}(x))-(1/a)(\mathcal{U}_a(x)-\mathcal{U}_{2a}(x))$.

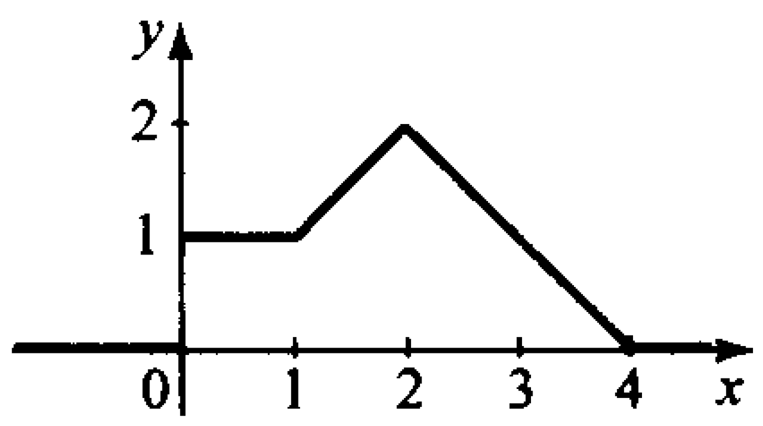




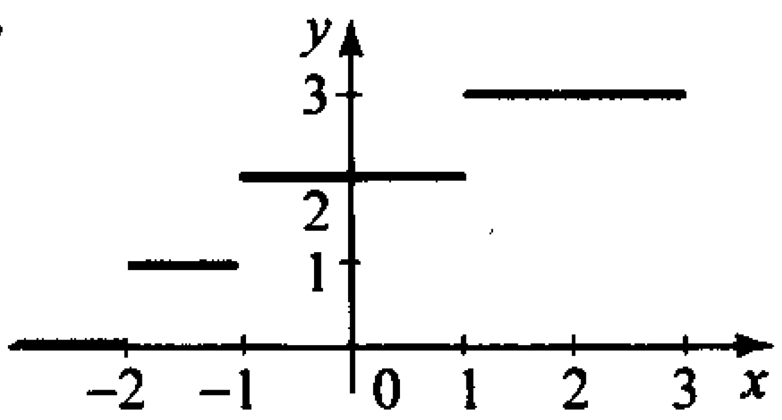
9. $\phi'(x)=\mathcal{U}_0(x)-\mathcal{U}_2(x)-2\delta_2(x)$.



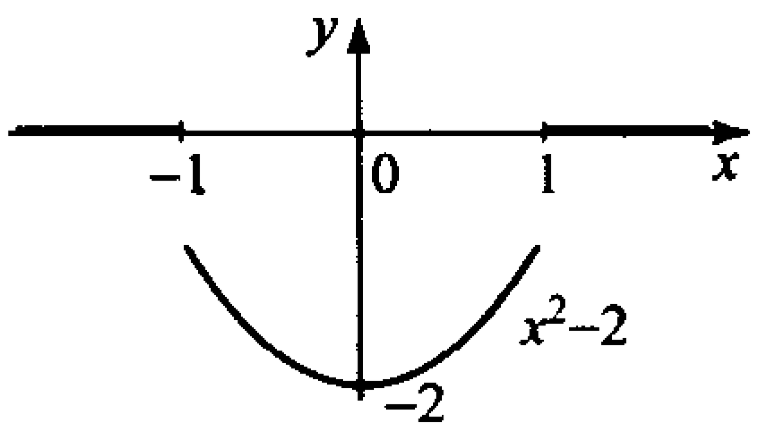
11. $\phi'(x)=\mathcal{U}_1(x)-2\,\mathcal{U}_2(x)+\mathcal{U}_4(x)+\delta_0(x)$.



13.



15.



17. $-f'(0)+f'(1)$.

19. $\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-2a}^{-a}f(x)dx-\frac{1}{a}\int_a^{2a}f(x)dx$.

21. $(1/a)(\delta_{-2a}(x)-\delta_{-a}(x)-\delta_a(x)+\delta_{2a}(x))$.

23. $-\delta_{-2}(x)+2\delta_{-1}(x)-2\delta_1(x)+\delta_2(x)$.

27. (a) $-f'(0)$. (b) $-f'(a)$. (c) $(-1)^n f^{(n)}(a)$.

29. $(3-2e^{2i\omega})/\sqrt{2\pi}$.

31. $-i\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\omega}$.

33. $i\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^2}$.

35. $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{(e^{-i\omega}-1)}{\omega}\displaystyle\sum_{j=1}^{3}j\sin(j\omega)$.

37. $-\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\omega^3}$.

39. $f'(x)=\frac{1}{2}(\delta_{-2}(x)+\delta_{-1}(x)-\delta_1(x)-\delta_2(x))$，$\mathcal{F}(f)=\frac{-\mathrm{i}}{\omega}\mathcal{F}(f')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\omega}[\sin(2\omega)+\sin\omega]$.

41. $\mathcal{F}(f)=\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}\omega}\left[\frac{-2\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}+\frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega}+\frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}-2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega}\right]$.

43. $f'+f=\delta_0$，$\mathcal{F}(f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+\mathrm{i}\omega)}=\frac{1-\mathrm{i}\omega}{\sqrt{2\pi}(1+\omega^2)}$.

45. $f''+f=-\delta_{-\pi}+\delta_\pi$，$\mathcal{F}(f)=\frac{2\cos(\pi\omega)}{\sqrt{2\pi}(1+\omega^2)}$.

51. $\frac{3}{\sqrt{2\pi}}(\delta_1(x)-\delta_0(x))$.

53. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\delta_{-2}(x)+4\delta_1(x)+4\delta_4(x))$.

55. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[(\mathcal{U}_{-2}(x)-\mathcal{U}_0(x))\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)+(\mathcal{U}_0(x)-\mathcal{U}_2(x))\left(-\frac{1}{2}x^2+x\right)\right]$.

57. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\mathcal{U}_{-2}(x)-2\,\mathcal{U}_0(x)+\mathcal{U}_1(x)-\mathcal{U}_3(x)+\mathcal{U}_4(x)]$.

59. $\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}((x+3)(\mathcal{U}_{-3}-\mathcal{U}_{-2})+(2x+5)(\mathcal{U}_{-2}-\mathcal{U}_{-1})+(x+4)(\mathcal{U}_{-1}-\mathcal{U}_0)+(-x+4)(\mathcal{U}_0-\mathcal{U}_1)+$
$(-2x+5)(\mathcal{U}_1-\mathcal{U}_2)+(-x+3)(\mathcal{U}_2-\mathcal{U}_3))$.

7.9 节

1. $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-(x-t)^2/t}$.

3. $u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$，其中 $u_1(x,t)=2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/t}-2\frac{|x|}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{x^2}{t}\right)$ 和 $u_2(x,t)=$
$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\mathrm{e}^{-(x-1)^2/t}-2\frac{|x-1|}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{(x-1)^2}{t}\right)$.

5. $u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$，其中 $u_1(x,t)=2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/t}-2\frac{|x|}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{x^2}{t}\right)$ 和 $u_2(x,t)=$
$\frac{1}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right]$.

9. $u(x,t)=\frac{1}{a^2}\cos(ax)[1-\mathrm{e}^{-a^2t}]$.

11. 令 a_0,a_n,b_n 是 f 的傅里叶系数，则 $u(x,t)=a_0t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-n^2t}}{n^2}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$.

7.10 节

1. $U'(x)=2\mathrm{e}^{-4x^2}-\mathrm{e}^{-x^2}$.

3. $U'(x)=2x\int_0^x f(x,s)\mathrm{d}s+x^2f(x,x)+x^2\int_0^x\frac{\partial}{\partial x}f(x,s)\mathrm{d}s$.

5. $u(x,t)=-2+2t+x^2+(2-x^2)e^{-t}$.

7. $u(x,t)=\cos x-\frac{1}{2}[\cos(x+t)+\cos(x-t)]$.

9. $u(x,t)=\frac{1}{2}\left[t\sin(x+t)+\frac{1}{2}\cos(x+t)-\frac{1}{2}\cos(x-t)\right]$.

11. $u(x,t)=x(1+t-\cos t)$.

13. $u(x,t)=-\tau_0(x)+\frac{1}{2}[\tau_0(x+t)+\tau_0(x-t)]$，$\tau_0$ 如 7.8 节例 2 所给.

第 8 章

8.1 节

1. $a=0$，$M=11$.

3. $a=3$，$M=5$.

5. $a=3$，$M=1$.

7. $\frac{2}{s^2}+\frac{3}{s}$.

9. $\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}+\frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}}$.

11. $\frac{2}{(s-3)^3}$.

13. $\frac{8s}{(16+s^2)^2}$.

15. $\frac{1}{2s}-\frac{s}{2(4+s^2)}$.

17. $\frac{3}{9+(s-2)^2}$.

19. $\frac{2(1+s)}{(1+(1+s^2))^2}$.

21. $\frac{2(-2-s+5s^3+2s^4+2s^5)}{(1+s^2)^3}$.

23. $\frac{\beta}{\beta^2+(s-\alpha)^2}$.

25. t.

27. $\frac{4}{\sqrt{3}}\sin(t/\sqrt{3})$.

29. $\frac{e^{3t}t^4}{24}+e^{3t}\cos t$.

31. $e^{-t}(1-t)$.

33. $e^{-t}+e^{2t}$.

35. $t\cos 2t$.

37. $-e^{-2t}+e^{-t}$.

39. $y(t)=-\frac{11}{5}e^{-t}+\frac{1}{5}\cos 2t+\frac{2}{5}\sin 2t$.

41. $y(t)=\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2}\right)\sin t$.

43. $y(t)=(2+t)e^{-2t}+(-1+3t)e^{-t}$.

45. $y(t)=-\frac{7}{50}e^{-2t}+\frac{7}{25}e^{3t}+\frac{e^{t}}{50}(-7\cos t+\sin t)$.

47. $y''+a^2y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=a$; $Y=a/(s^2+a^2)$.

8.2 节

1. $-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}(1+e^{-s})$.

3. $\frac{e^{2(2-s)}}{s-2}$.

5. $-\frac{e^{-\pi s}}{1+s^2}$.

7. $\frac{1}{s}-\frac{e^{-2s}}{s}$.

9. $\frac{2}{s}(e^{-2s}-e^{-3s})$.

11. $\frac{1}{s^2}(e^{-s}-e^{-2s})-\frac{e^{-2s}}{s}$.

13. $\frac{1}{s^2}(e^{-5s}-e^{-4s})+\frac{e^{-s}}{s}$.

15. $(t-1)\mathcal{U}(t-1)$.

17. $\sin(t-1)\mathcal{U}_0(t-1)$.

19. $e^{3t}\cos t$.

21. $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t-1}\,\mathcal{U}_0(t-1)$.

23. $\frac{t^2}{2}$.

25. $\frac{t^3}{6}$.

27. $-\frac{t\cos t}{2}+\frac{\sin t}{2}$.

29. $1*\sin t=\int_0^t \sin(t-\tau)d\tau=1-\cos t$.

31. $\sin t*\sin t=\int_0^t \sin\tau\sin(t-\tau)d\tau=-\frac{t\cos t}{2}+\frac{\sin t}{2}$.

33. $\sin(t-1)\mathcal{U}_0(t-1)$.

35. $e^{-t}+te^{-t}+\mathcal{U}_0(t-2)(3t-6)e^{2-t}$.

37. $\mathcal{U}_0(t-1)\frac{1}{5}e^{-1+t}-\frac{1}{5}\cos(2(t-1))-\frac{1}{10}\sin 2(t-1)$.

39. $f*(1-\cos t)$.

41. $\frac{\sin 2t}{2}*\cos t=\frac{\cos t}{3}-\frac{\cos 2t}{3}$.

45. $F(s)=\frac{e^{s}-1}{s^2(e^{s}+1)}$.

47. $F(s)=\frac{1+e^{\pi s}}{(s^2+1)(e^{\pi s}-1)}$.

8.3 节

1. $u(x, t)=70\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$.

3. $u(x, t)=0$，若 $0<t<2$；$u(x, t)=100\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-2}}\right)$，若 $t\geqslant 2$.

5. $u(x, t)=\frac{1}{3!}t^3-\frac{1}{3!}\mathcal{U}_0(t-x)(t-x)^3$.

7. $u(x, t)=t-(t-x)\mathcal{U}_0(t-x)-\frac{g}{2}(t^2-(t-x)^2\,\mathcal{U}_0(t-x))$.

9. $u(x, t)=t+\sin(t-x)\mathcal{U}_0(t-x)-(t-x)\mathcal{U}_0(t-x)$.

11. $u(x, t)=\frac{x}{2c\sqrt{\pi}t^{3/2}}e^{-x^2/4c^2t}$.

13. $u(x, t)=30\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)+70$.

第 9 章

9.1 节

10. $u_{i,j+1}=(1-2s+3k)u_{ij}+s(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})$.

11. $u_{i,j+1}=(1-2s)u_{ij}+s(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})+2k$.

12. $u_{i,j+1}=\left(1-\frac{k}{h}-2\frac{k}{h^2}\right)u_{ij}+\frac{k}{h^2}(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})+\frac{k}{h}u_{i+1,j}+k$.

13. $u_{i,j+1}=\left(1-2\frac{k}{h}\right)u_{ij}+2\frac{k}{h}u_{i+1,j}$.

第 12 章

12.1 节

1. 积分等于$-1/2$.
3. 积分等于 $1/2$.
5. 积分等于 $3\pi/4$.
7. 积分等于 0.
9. 积分等于 0.
11. 积分等于$(e-1)(\sin 1+\cos 1-1)$.
13. 证明如例 1 中的证明，利用定理 2，而不是定理 1.
15. 将 u 和 v 互换，利用(9)式：$\nabla^2 u=0$，而在 Γ 上 $v=0$ 蕴涵着$\int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$.
17. $\int_C x\,dy=ab\pi$，其中 $x(t)=a\cos t, y(t)=b\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.
19. 无解，因为相容性条件(例 5)不满足.

12.2 节

1. 对所有(x, y)，$u(x, y)=e^x\cos y$是调和的. 由平均值性质，给定积分等于$2\pi u(0, 0)=2\pi$.
3. $u(x, y)=\cos(x+1)\cosh(2+y)$对所有$(x, y)$是调和的. 由平均值性质，给定积分等于$2\pi u(0, 0)=2\pi\cos 1\cosh 2$.
5. $u_{xx}=2$，$u_{yy}=-2$，对所有(x, y)，u是调和的. 最大值和最小值在边界上得到. 最大值是$u(1, 1/2)=5/4$，最小值是$u(0, -1)=-1$.
7. 对所有$(x, y)\neq(0, 0)$，u是调和的. 最大值和最小值在边界上得到. 最大值是$u(1, 0)=1$，最小值是$u(-1, 0)=-1$.
9. 由推论1，u在Ω上是常数. 由于其边界值为零，因此在Ω上，$u=0$.

12.3 节

1. 积分为零，因为由定理3(ii)，在Γ上，$G=0$.
3. 对$u(x, y)=1$，由定理2，积分是2π.
5. 对$u(x, y)=x$和$(x_0, y_0)=(1/2, 1/3)$，由定理2，积分是π.
7. 对$f(x, y)=1$，由定理4，给定的表达式等于2π.
9. 对$f(x, y)=x^2y^3$，由定理4，给定的表达式等于$2\pi x_0^2y_0^3$.
11. 在定理1中，取Γ为由下列函数参数化的圆周：$x(t)=x_0+r\cos t$，$y(t)=x_0+r\sin t$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，则$ds=r dt$，$v=\ln r$，$\dfrac{\partial v}{\partial n}=\dfrac{1}{r}$.
15. 利用调和函数的相容性条件，推出$\int_\Gamma \dfrac{\partial h}{\partial n}ds=0$.
19. $u(x, y)=\dfrac{1}{4\pi}\ln(x^2+y^2)$.

12.4 节

1. 对$f(\theta)=1$和$R=1$，由定理2，积分为1.
3. $u(r, \theta)=r^n\cos n\theta$是调和的. 其在单位圆上的边界值由$f(\theta)=\cos n\theta$给出. 对$f(\theta)=\cos n\theta$和$R=1$，由定理2，积分等于$r^n\cos n\theta$.
5. $u(r, \theta)=r^n\cos n\theta$是调和的. 其在圆$r=R$上的边界值由$f(\theta)=R^n\cos n\theta$给出. 对$f(\theta)=R^n\cos n\theta$，由定理2，积分等于$r^n\cos n\theta$.
7. 函数$u(r, \theta)=J_0(\alpha_n r)$是$\nabla^2u=-\alpha_n^2u$的解. 由定理1，给定的表达式等于$J_0(\alpha_n r)$.

12.5 节

1. (a)$8+i$.　(b)$7+i$.　(c)i.
3. (a)$0-i$.
   (b)$i^n=1$，若$n=4k$；i，若$n=4k+1$；-1，若$n=4k+2$；$-i$，若$n=4k+3$.
   (c)$(i)^n=(-i)^n=1$，若$n=4k$；$-i$，若$n=4k+1$；-1，若$n=4k+2$；$-i$，若$n=4k+3$.
5. (a)$\mathrm{Arg}(i)=\pi/2$.　(b)$|i|=1$.　(c)$i=1\cdot e^{i\pi/2}$.
7. (a)$\mathrm{Arg}(\pi)=0$.　(b)$|\pi|=\pi$.　(c)$\pi=\pi\cdot e^{i\cdot 0}$.
9. (a)$\mathrm{Arg}(1+i)=\pi/4$.　(b)$|1+i|=\sqrt{2}$.　(c)$1+i=\sqrt{2}\cdot e^{i\pi/4}$.
11. (a)$\mathrm{Arg}(-1+i)=-3\pi/4$.　(b)$|-1+i|=\sqrt{2}$.　(c)$-1+i=\sqrt{2}\cdot e^{-3i\pi/4}$.

13. (a) $\text{Arg}[(1+i)^2]=\pi/2$.　(b) $|(1+i)^2|=2$.　(c) $(1+i)^2=2e^{i\pi/2}$.

15. (a) $\text{Arg}(\cos\alpha+i\sin\alpha)=\alpha+2k\pi$，其中 k 是满足 $-\pi<\alpha+2k\pi\leqslant\pi$ 的唯一整数.

(b) $|\cos\alpha+i\sin\alpha|=1$.　(c) $\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{i\alpha}$.

17. (a) $e^{2i}=\cos2+i\sin2$.　(b) $\sin i=i\sinh1$.　(c) $\cos i=\cosh1$.　(d) $\text{Log}(i)=i\pi/2$.

19. (a) $e^{-\pi i/2}=-i$.　(b) $e^{2-\frac{\pi}{2}i}=-e^2i$.　(c) $\text{Log}(1-i)=\frac{\ln2}{2}-i\frac{\pi}{4}$.　(d) $\text{Log}[(1-i)^2]=\ln2-i\pi/2$.

21. 利用 $1=(-1)\cdot(-1)$，并注意到 $\text{Log}1=0\neq\text{Log}(-1)+\text{Log}(-1)=2i\pi$，因为 $\text{Log}(-1)=i\pi$.

27. (a)对所有的 z，解析. $u(x,y)=\sin x\cosh y$，$v(x,y)=\cos x\sinh y$；$u_x=\cos x\cosh y$，$u_y=\sin x\sinh y$，$v_x=-\sin x\sinh y$，$v_y=\cos x\cosh y$；$u_x=v_y$ 和 $v_y=-v_x$. $\cos z$ 的导数等于 $u_x+iv_x=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y=\cos z$.

(b)对所有的 z，解析. $u(x,y)=\cos x\cosh y$，$v(x,y)=-\sin x\sinh y$；$u_x=-\sin x\cosh y$，$u_y=\cos x\sinh y$，$v_x=-\cos x\sinh y$，$v_y=-\sin x\cosh y$；$u_x=v_y$ 和 $u_y=-v_x$. $\sin z$ 的导数等于 $u_x+iv_x=-\sin x\cosh y-i\cos x\sinh y=-\sin z$.

29. (a)对任意的 z，不解析. $u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$；$v(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$；$u_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$；$v_y=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. 等式 $u_x=v_y$ 在任意开集内都不成立.

(b)对所有的 $z\neq0$，解析. $u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$；$v(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$；$u_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$，$u_y=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$，$v_x=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$，$v_y=-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$；$u_x=v_y$ 和 $u_y=-v_x$. 导数等于 $u_x+iv_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{1}{z^2}$，其中 $z=x+iy$.

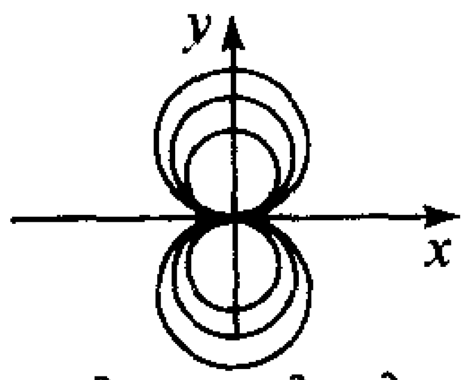
31. $v(x,y)=-\frac{1}{2}(x^2-y^2)+2xy$.

33. $v(x,y)=e^x\sin y$.

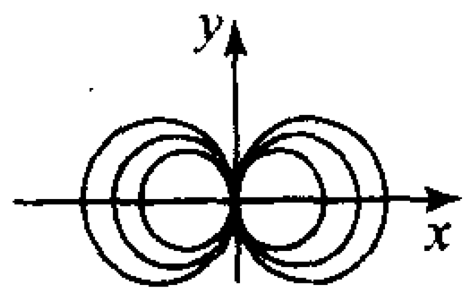
35. $v(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$.

37. (a) $u(x,y)$ 的水平曲线是以 $(0,C)$ 为圆心、$|C|$ 为半径的圆.

(b) $v(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$. $v(x,y)$ 的水平曲线是以 $(0,C)$ 为圆心、$|C|$ 为半径的圆.



$x^2+(y-C)^2=C^2$



$(x-C)^2+y^2=C^2$

39. (a)若 $z=re^{i\theta}$，则 $z^n=r^ne^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta$. 由于对所有的 z，如果 $n\geqslant0$；对所有的 $z\neq0$，如果 $n<0$，z^n 解析. 因此，对所有的 z，如果 $n\geqslant0$；对所有的 $z\neq0$，如果 $n<0$，实部和虚部($r^n\cos n\theta$ 和 $r^n\sin n\theta$)是调和的.

(b)由(a)部分，$r^n\sin n\theta$ 是 $r^n\cos n\theta$ 的调和共轭. 因此，$-r^n\cos n\theta$ 是 $r^n\sin n\theta$ 的调和共轭.

41. 如果 u 只依赖于 x，则 $u_{yy}=0$，以及 $\nabla^2u=u_{xx}=0$，推出 $u=ax+b$.

43. 利用 $u(x,y)=ax+b$，则 $u(x,y)=-15x+25$.

45. 利用 $u=a\text{Arg}z+b$，则 $u(x,y)=\frac{200}{\pi}\text{Arg}z-120=\frac{200}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)-120$.

47. $u(x, y)=T_2+\frac{T_1-T_2}{\pi}\left[\cot^{-1}\left(\frac{x-b}{y}\right)-\cot^{-1}\left(\frac{x-a}{y}\right)\right]$.

49. $u(x, y)=-\frac{80}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{100}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{x-1}{y}\right)-\frac{20}{\pi}\cot^{-1}\left(\frac{x+1}{y}\right)$.

12.6 节

1. (a) $\frac{1}{z}=\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}$. 为证 f 是解析的，利用柯西–黎曼方程或利用它是两个解析函数之比这个事实. 因此，除了 $z=0$ 点之外，它是解析的. $U_{uu}=U_{vv}=0$，所以 U 是调和的.

(b) $\mathrm{Re}(f)=\frac{x}{x^2+y^2}$，$\mathrm{Im}(f)=\frac{-y}{x^2+y^2}$. $U\circ f(z)=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^2}$. 由定理 1，$U\circ f$ 是调和的.

3. (a) 由 12.5 节例 2(c)，e^z 是整的(对所有的 z 解析). $U_{uu}=2$，$U_{vv}=-2$，所以 U 是调和的.

(b) $\mathrm{Re}(f)=\mathrm{e}^x\cos y$，$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{e}^x\sin y$. $U\circ f(z)=\mathrm{e}^{2x}\cos(2y)$. 由定理 1，或注意到它是解析函数 e^{2z} 的实部这个事实，$U\circ f$ 是调和的.

5. 令 $z=a+\mathrm{i}y$ 在 S 内，则 $f(z)=\mathrm{e}^a\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$. 因此，$f(z)$ 属于半径为 e^a 的圆，在角度为 y 的射线上. 当 y 从 b 到 c 时，$f(z)$ 描出了由角度分别为 b 和 c 的射线界定的圆弧.

7. 我们必须验证：$\lim\limits_{y\to 0^+}\phi(x, y)=0$，如果 $0<x<\pi/2$；等于 100，如果 $-\pi/2<x<0$. 同样，我们必须验证：对固定 $y>0$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\phi(x, y)=0$ 和 $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\phi(x, y)=100$. 对 $0<x<\pi/2$，$\tan x>0$. 当 $y\to 0^+$ 时，$\tan x\coth y\to+\infty$，因此，$\phi(x, y)\to\frac{100}{\pi}\cot^{-1}(+\infty)=0$(参见 12.5 节图 10). 这就建立了四个极限之一，其余三个类似可得.

9. 共形映射 $f(z)=z^2$ 将给定问题变成上半平面上的狄利克雷问题，边界值：如果 $0<u<1$，$U(u, 0)=1$；否则 $U(u, 0)=0$. 解是 $U(u, v)=\frac{1}{\pi}\left(\cot^{-1}\left(\frac{u-1}{v}\right)-\cot^{-1}\left(\frac{u}{v}\right)\right)$(参见 12.5 节例 5). 将 $u=x^2-y^2$ 和 $v=2xy$ 代入，我们得到 $\phi(x, y)=\frac{1}{\pi}\left(\cot^{-1}\frac{x^2-y^2-1}{2xy}\right)-\cot^{-1}\left(\frac{x^2-y^2}{2xy}\right)$.

11. 共形映射 $f(z)=z^4$ 将给定问题变成上半平面上的狄利克雷问题，边界值：如果 $-64<u<0$，$U(u, 0)=50$；否则 $U(u, 0)=0$. 解是 $U(u, v)=\frac{50}{\pi}\left(\cot^{-1}\left(\frac{u}{v}\right)-\cot^{-1}\left(\frac{u+64}{v}\right)\right)$(参见 12.5 节例 5). 将 $u=x^4+y^4-6x^2y^2$ 和 $v=4(x^3y-xy^3)$ 代入，我们得到 $\phi(x, y)=\frac{50}{\pi}\left(\cot^{-1}\left(\frac{x^4+y^4-6x^2y^2}{4(x^3y-xy^3)}\right)-\cot^{-1}\left(\frac{x^4+y^4-6x^2y^2+64}{4(x^3y-xy^3)}\right)\right)$.

13. 共形映射 $f(z)=\mathrm{e}^z$ 将给定问题变成上半平面上的狄利克雷问题，边界值：如果 $-1<u<1$，$U(u, 0)=100$；否则 $U(u, 0)=0$. 解是 $U(u, v)=\frac{100}{\pi}\left(\cot^{-1}\left(\frac{u-1}{v}\right)-\cot^{-1}\left(\frac{u+1}{v}\right)\right)$. 将 $u=\mathrm{e}^x\cos y$ 和 $v=\mathrm{e}^x\sin y$ 代入，我们得到 $\phi(x, y)=\frac{100}{\pi}\left(\cot^{-1}\left(\frac{\mathrm{e}^x\cos y-1}{\mathrm{e}^x\sin y}\right)-\cot^{-1}\left(\frac{\mathrm{e}^x\cos y+1}{\mathrm{e}^x\sin y}\right)\right)$.

15. 共形映射 $f(z)=\sin z$ 将给定问题变成上半平面上的狄利克雷问题，边界值：如果 $-1<u<1$，$U(u, 0)=100$；否则 $U(u, 0)=0$. 解是 $U(u, v)=\frac{100}{\pi}\left(\cot^{-1}\left(\frac{u-1}{v}\right)-\cot^{-1}\left(\frac{u+1}{v}\right)\right)$. 将 $u=\sin x\cosh y$ 和 $v=$

$\cos^x \sinh y$ 代入，我们得到 $\phi(x, y)=\frac{100}{\pi}\left(\cot^{-1}\left(\frac{\sin x\cos y-1}{\cos^x \sinh y}\right)-\cot^{-1}\left(\frac{\sin x\cosh y+1}{\cos^x \sinh y}\right)\right)$.

17. 共形映射 $f(z)=z^2$ 将给定问题变成上半平面上的狄利克雷问题，边界值：如果 $0<u<1, U(u,0)=u$；否则 $U(u,0)=0$. 解是 $U(u,v)=\frac{v}{\pi}\int_0^1 \frac{s}{(u-s)^2+v^2}ds=\frac{v}{\pi}\ln\left[\frac{(1-u)^2+v^2}{u^2+v^2}\right]+\frac{u}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1-u}{v}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{u}{v}\right)\right]$. 为从 U 的表达式得出 $\phi(x,y)$，将 $u=x^2-y^2$ 和 $v=2xy$ 代入.

19. 共形映射 $f(z)=e^z$ 将给定问题变成上半平面上的狄利克雷问题，边界值：如果 $0<u<1$，$U(u, 0)=u$；否则 $U(u, 0)=0$. 这与习题 17 中求解的问题一样. 为得到 $\phi(x, y)$，利用习题 17 中 U 的表达式，将 $u=e^x\cos y$ 和 $v=e^x\sin y$ 代入.

21. 共形映射 $f(z)=\mathrm{Log}z$ 将给定问题变成 $1\times\pi$ 矩形 $(0<u<1, 0<v<\pi)$ 上的狄利克雷问题，边界值：如果 $0<u<1, U(u,0)=0$；如果 $0<v<\pi, U(1,v)=100$；如果 $0<u<1, U(u,1)=0$；以及如果 $0<v<\pi$，$U(0,v)=100$. 解是 $U(u,v)=\frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n\sinh n}\sin nv[\sinh nu+\sinh(n(1-u))]$. 为从 U 的表达式得出 $\phi(x,y)$，将 $u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ 和 $v=\cot^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ 代入.

23. 共形映射 $f(z)=\mathrm{Log}z$ 将给定问题变成 $1\times\pi$ 矩形 $(0<u<1, 0<v<\pi)$ 上的狄利克雷问题，边界值：如果 $0<u<1$，$U(u, 0)=0$；如果 $0<v<\pi$，$U(1, v)=\sin v$；如果 $0<u<1$，$U(u, 1)=0$；以及如果 $0<v<\pi$，$U(0, v)=\sin 2v$. 解是 $U(u, v)=\frac{1}{\sinh(1)}\sinh u\sin v+\frac{1}{\sinh(2)}\sinh[2(1-u)]\sin 2v$. 为从 U 的表达式得出 $\phi(x, y)$，将 $u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ 和 $v=\cot^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ 代入.

25. f 将点 (x, y) 映成 $(x+a_0, y+b_0)$. 因此，它是关于向量 (a_0, b_0) 的平移.

27. $f(z)=e^{i\alpha z}$.

29. f 是关于向量 $(1, -1)$ 的平移. S 的像是以 $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, -2)$ 和 $(0, -2)$ 为顶点的正方形.

31. f 是(逆时针)旋转 $\frac{\pi}{2}$. 它不改变 S 的形状.

33. 旋转 $\frac{\pi}{4}$，接着向右平移一个单位. S 的像是以 $(1, \sqrt{2})$, $(1-\sqrt{2}, 0)$, $(1, -\sqrt{2})$ 和 $(1+\sqrt{2}, 0)$ 为顶点的正方形.

35. 旋转角度 α，再放大因子 3，然后向右平移一个单位. S 的像是以 $(3(\cos\alpha+\sin\alpha)+1, 3(-\cos\alpha+\sin\alpha))$, $(3(\cos\alpha-\sin\alpha)+1, 3(\cos\alpha+\sin\alpha))$, $(3(-\cos\alpha-\sin\alpha)+1, 3(\cos\alpha-\sin\alpha))$ 和 $(3(-\cos\alpha+\sin\alpha)+1, 3(-\cos\alpha-\sin\alpha))$ 为顶点的正方形.

37. $\phi+i\psi=(U+iV)\circ f$ 是两个解析函数的复合，是解析的. 因此，ψ 是 ϕ 的调和共轭.

12.7 节

1. 利用 $\phi(z)=z-1$，并应用定理 3：$G(x, y, x_0, y_0)=\frac{1}{2}\ln[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]-\frac{1}{2}\ln[(-y+x_0y+y_0-xy_0)^2+(x+x_0-xx_0-yy_0)^2]$.

3. 利用 $\phi(z)=e^{-i\pi/4}z$，并应用定理 4：$G(x, y, x_0, y_0)=\frac{1}{2}\ln[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]-\frac{1}{2}\ln[(x+y_0)^2+(y-x_0)^2]$.

5. 利用 $\phi(z)=e^z$，并应用定理 4：$G(x, y, x_0, y_0)=\frac{1}{2}\ln[e^{2x}+e^{2x_0}-2e^{x+x_0}\cos(y-y_0)]-\frac{1}{2}\ln[e^{2x}+e^{2x_0}-$

$2e^{x+x_0}\cos(y+y_0)]$.

7. 利用 $\phi(z)=z^4$，并应用定理 4:$G(x,y,x_0,y_0)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z^4-z_0^4}{z^4-\bar{z}_0^4}\right|^2$；$|z^4-z_0^4|^2=(4xy(x^2-y^2)-4x_0y_0(x_0^2-y_0^2))^2+(-4x^2y^2+(x^2-y^2)^2+4x_0^2y_0^2-(x_0^2-y_0^2)^2)^2$；$|z^4-\bar{z}_0^4|^2=(4xy(x^2-y^2)+4x_0y_0(x_0^2-y_0^2))^2+(-4x^2y^2+(x^2-y^2)^2+4x_0^2y_0^2-(x_0^2-y_0^2)^2)^2$.

9. $u(x_0,y_0)=\frac{\sin x_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(x)}{e^{x-x_0}+e^{x_0-x}+2\cos y_0}dx$.

11. $u(x,y)=\frac{y}{\pi}\left[\frac{x}{y}\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{y}\right)+\frac{x}{y}\tan^{-1}\left(\frac{1+x}{y}\right)+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2-2x+1)-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+2x+1)\right]$.

12.8 节

1. 利用 $\phi(z)=i(z-1)$，并应用定理 2：$N(x, y, x_0, y_0)=\frac{1}{2}\ln[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]-\frac{1}{2}\ln[(-y+x_0y+y_0-xy_0)^2+(x+x_0-xx_0-yy_0)^2]$.

3. 利用 $\phi(z)=-iz^2$，并应用定理 2：$N(x, y, x_0, y_0)=\frac{1}{2}\ln[(x^2-y^2-x_0^2+y_0^2)^2+4(xy-x_0y_0)^2]+\frac{1}{2}\ln[(x^2-y^2-x_0^2+y_0^2)^2+4(xy+x_0y_0)^2]$.

5. 利用 $\phi(z)=\sin z$，并应用定理 2：$N(x, y, x_0, y_0)=\frac{1}{2}\ln[(\sin x\cosh y-\sin x_0\cosh y_0)^2+(\cos x\sinh y-\cos x_0\sinh y_0)^2]+\frac{1}{2}\ln[(\sin x\cosh y-\sin x_0\cosh y_0)^2+(\cos x\sinh y+\cos x_0\sinh y_0)^2]$.

9. (a)$u(x, y)=\frac{1}{2\pi}\left[4+2y\left[\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{y}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1+x}{y}\right)\right]+(1-x)\ln((1-x)^2+y^2)+(1+x)\ln((1+x)^2+y^2)\right]$.

附录 A

附录 A. 1

1. $y=1+ce^{-x}$.

3. $y=ce^{-x/2}$.

5. $y=-\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)+ce^x$.

7. $y=\frac{\sin x}{x}+\frac{c}{x}$.

9. $y=x\cos x+c\cos x$.

11. $y=e^x$.

13. $y=1-e^{-x^2/2}$.

15. $y=\frac{1}{2}-\frac{5}{2x^2}$.

17. $y=1$.

19. $y=1+e^{1-e^x}$.

21. (b)$W(e^x, e^{-x})=-2\neq 0$，$W(\cosh x, \sinh x)=1\neq 0$. 因此，由定理 7，$\{e^x, e^{-x}\}$和$\{\cosh x, \sinh x\}$是基本解集. (c)$e^x=\cosh x+\sinh x$. (d)$y_1=ae^x+be^{-x}$，$y_2=ce^x+de^{-x}$，取 $ad-bc\neq 0$.

23. (b)$W(x, x^2)=x^2$. (c)标准形式方程中的系数函数在 $x=0$ 处间断.

25. $y=e^{2x}-4e^{x}+2x+3$.

27. $y=5e^{2(x-1)}-10e^{x-1}+2x+3$.

29. $y=7e^{2(x-2)}-14e^{x-2}+2x+3$.

附录 A.2

1. $y=c_1e^{x}+c_2e^{3x}$.

3. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$.

5. $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$.

7. $y=c_1e^{x/2}+c_2xe^{x/2}$.

9. $y=c_1\cos x+c_2\sin x$.

11. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$.

13. $y=e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$.

15. $y=e^{-3x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$.

17. $y=c_1+e^{x}(c_2+c_3x)$.

19. $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+c_3e^{x}+c_4xe^{x}$.

21. $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+c_3x^2e^{x}$.

23. $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{x}+c_3xe^{x}+c_4x^2e^{x}$.

25. $y=-e^{2x}+c_1e^{x}+c_2e^{3x}$.

27. $y=\frac{5}{36}+\frac{1}{2}e^{x}+\frac{x}{6}+c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$.

29. $y=\frac{3}{32}e^{-x}+\frac{x}{8}e^{-x}+c_1e^{x}+c_2e^{3x}$.

31. $y=\frac{1}{8}-\frac{x}{8}\sin 2x+c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$.

33. $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cos 2x+c_1\cos x+c_2\sin x$.

35. $y=\frac{x^2}{2}e^{-x}+c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$.

37. $y=\frac{5}{4}+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$.

39. $y=-\frac{1}{2}+x-\frac{1}{5}\cos x+\frac{2}{5}\sin x+c_1e^{-2x}$.

41. $y=\frac{1}{3}e^{2x}+c_1e^{x/2}$.

43. $y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x-\frac{x}{18}\cos 3x+\sum_{n\neq 3,n=1}^{6}\frac{\sin nx}{n(9-n^2)}$.

45. $y_h=c_1e^{x}+c_2e^{3x}$，$y_p=Axe^{x}+Bxe^{3x}$.

47. $y_h=e^{-x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$，$y_p=xe^{-x}(A\cos x+B\sin x)+C\cos x+D\sin x+Ex^2+Fx+G$.

49. $y_h=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$，$y_p=(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)e^{x}+(F+Gx)e^{-2x}\cos 3x+(H+Jx)e^{-3x}\sin 3x$.

51. $y_h=c_1\cos 2x+c_2\sin x$，$y_p=e^{2x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$.

53. $y_h=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$，$y_p=Ax+B+Cx^2e^{x}$.

55. $y_h=c_1e^{x}+c_2e^{3x}$，$y_p=Ae^{ax}$，若 $a\neq 1$ 或 3；$y_p=Axe^{x}$，若 $a=1$；$y_p=Axe^{3x}$，若 $a=3$.

57. $y_h=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$，$y_p=A\cos\omega x+B\sin\omega x$，若 $\omega\neq 2$ 或 3；$y_p=x(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$，若 $\omega=2$ 或 3.

59. $y_h=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$，$y_p=A\cos 2x+B\sin 2x$，若 $\omega\neq 2$；$y_p=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$，若 $\omega=2$.

61. $y=\frac{3}{2}\sinh 2x$.

63. $y=-e^{x/2}+\frac{3}{2}xe^{x/2}$.

65. $y=\frac{1}{2}e^{x}-e^{2x}+\frac{1}{2}e^{3x}$.

67. $y=-\frac{1}{8}e^{x}+\frac{1}{32}e^{3x}+\left(\frac{1}{8}x+\frac{3}{32}\right)e^{-x}$.

69. $y=-\cos 2x+\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{x}{4}\right)\sin 2x$.

71. Try$e^{x}(A\cos x+B\sin x)$并且得到 $A=-\frac{1}{2}$，$B=\frac{1}{2}$.

73. Try$e^{ax}(A\cos bx+B\sin bx)$并且得到 $A=-\frac{b}{a^2+b^2}$，$B=\frac{a}{a^2+b^2}$.

75. $V(\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_2-\lambda_1$，因此，$V(\lambda_1,\lambda_2)\neq 0$ 当且仅当 $\lambda_1\neq\lambda_2$.

77. $W(e^{\lambda_1 x},e^{\lambda_2 x},\cdots,e^{\lambda_n x})=e^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}\times V(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 由于指数函数总不为零，$W\neq 0$ 当且仅当 $V\neq 0$，当且仅当所有的 λ 不同.

附录 A.3

1. $y=c_1e^{x}+c_2e^{-3x}$.

3. $y=c_1e^{x}+c_2(6+6x+3x^2+x^3)$.

5. $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$.

7. $y=c_1\cosh x+c_2\sinh x$.

9. $y=c_1x+c_2\left[\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)-1\right]$.

11. $y=c_1x+c_2\frac{1}{x}$.

13. $y=c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)$.

15. $y=c_1\frac{\cos 2x}{x}+c_2\frac{\sin 2x}{x}$.

17. $y=c_1e^{x}+c_2\frac{e^{x}}{x}$.

19. $y=c_1x+c_2x^2$.

21. $y=c_1e^{x}+c_2e^{3x}+\frac{1}{8}e^{-x}$.

23. $y=c_1e^{-\frac{10}{3}x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{218}(-13\cos x+7\sin x)$.

25. $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\cos x\ln|\cos x|+x\sin x$.

27. $y=c_1(1+x)+c_2e^{x}-\frac{x^3}{2}-\frac{3}{2}x^2$.

29. $y=\frac{c_1}{x}+c_2\frac{\ln x}{x}+\frac{4}{9}\sqrt{x}$.

31. $y=c_1x^{-2}+c_2x^{-1}$.

33. $y=c_1x^{-1}+c_2\dfrac{\ln x}{x}$.

35. $y=c_1\cos(2\ln x)+c_2\sin(2\ln x)$.

37. $y=x^{-3}(c_1\cos(2\ln x)+c_2\sin(2\ln x))$.

39. $y=\dfrac{c_1}{x-2}+c_2\dfrac{\ln(x-2)}{x-2}$.

47. $y=c_1e^x+c_2e^{3x}-\dfrac{1}{2}xe^x$.

49. 同习题 23.

附录 A.4

1. $R=1$，$(-1, 1)$.

3. $R=2$，$(-2, 2)$.

5. $R=1/e$，$(-1/e, 1/e)$.

7. $R=1$，$(-1, 1)$.

9. $R=\infty$.

11. $R=5$，$(-3, 7)$.

13. $-1+4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$.

15. $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}mx^{2m-1}$，$|x|<1$.

17. $e\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{3^m}{m!}x^{2m}$，$-\infty<x<\infty$.

19. $\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\dfrac{2^{2m}}{(2m+1)!}x^{2(m+1)}$，$-\infty<x<\infty$.

21. $\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\dfrac{3^m}{2^{m+1}}x^m$，$|x|<2/3$.

23. $x+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\dfrac{3^m}{2^{m+1}}x^{2m+1}\dfrac{3x}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\dfrac{3^m}{2^{m+1}}x^{2m+1}$，$|x|<\sqrt{2/3}$.

25. 利用$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{a-(a-x)}=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{1-(a-x)/a}$.

27. (a) $f(0)=1$，$f'(0)=0$，$f''(0)=1/2$.

(b) $f^{(2k+1)}(0)=0$，$f^{(2k)}(0)=\dfrac{(-1)^k(2k)!}{(k!)^2 2^{2k}}$.

(c) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}(2k+1)}\approx 0.92$.

29. $\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{-2m^2+2m+1}{m}x^m$.

31. $\dfrac{x}{8}+\dfrac{x^2}{9}+\sum_{m=3}^{\infty}\left[4\sqrt{m+1}+\dfrac{1}{m+7}\right]x^m$.

33. $\sum_{m=0}^{\infty}[(m+1)a_{m+1}+a_m]x^m$.

35. $2a_2+2(a_1+3a_3)x+\sum_{m=2}^{\infty}[(m+2)(m+1)a_{m+2}+m(3-m)a_m]x^m$.

37. $\sum_{m=0}^{\infty}(m^2-m+1)a_m x^m$.

39. $\sum_{m=0}^{\infty}\left[(m+1)a_m-\frac{1}{m!}\right]x^m$.

附录 A. 5

1. $a_1=0$，$a_{m+2}=\frac{-2}{m+2}a_m$，$y=a_0\left(1-x^2+\frac{1}{2}x^4-\cdots\right)=a_0e^{-x^2}$.

3. $a_{m+1}=\frac{-1}{m+1}a_m$，$y=a_0-a_0x+\frac{1}{2}(1+a_0)x^2-\cdots)=-1+x+(a_0+1)e^{-x}$.

5. $a_{m+2}=\frac{1}{(m+1)(m+2)}a_m$，$y_1=a_0\cosh x$，$y_2=a_1\sinh x$.

7. $a_{m+2}=\frac{m-1}{(m+1)(m+2)}a_m$，$y_1=a_0\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4!}x^4-\cdots\right)$，$y_2=x$.

9. $a_{m+2}=\frac{-(1+2m)}{(m+1)(m+2)}a_m$，$y_1=a_0\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{4!}x^4-\cdots\right)$，$y_2=a_1\left(x-\frac{1}{2}x^3+\frac{7}{40}x^5-\cdots\right)$.

11. $a_{m+2}=\frac{2(m+1)a_{m+1}-a_m}{(m+1)(m+2)}$，$a_0=0$，$a_1=1$，$y=x+x^2+\frac{1}{2}x^3+\cdots=x\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots\right)=xe^x$.

13. 递推关系 $a_{m+2}=\frac{m-1}{m+1}a_m$；$a_0=0$，$a_1=3$，$a_2=a_4=\cdots=0$，$a_3=a_5=\cdots=0$，$y=3x$.

15. 递推关系 $a_{m+2}=\frac{(m-3)(m+4)}{(m+2)(m+1)}a_m$；$a_0=1$，$a_1=1$，$a_3=-\frac{5}{3}$，$a_5=a_7=\cdots=0$，$a_2=-6$，$a_4=3$，…，

$y=1-6x^2+3x^4+\frac{4}{5}x^6+\cdots$.

17. $y_1=x$，$y_2=x\int e^{\int x/(1-x^2)dx}/x^2dx=-1+\frac{x}{2}\ln((1+x)/(1-x))+C$.

19. (a) $y=\frac{e^x}{2}-\frac{e^{x/2}}{2}\left[\cos\frac{\sqrt{7}x}{2}+\frac{3}{\sqrt{7}}\sin\frac{\sqrt{7}x}{2}\right]$.

21. (a) $y=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{5}{40}x^5+\cdots$.

25. $y=x+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{504}x^7+\cdots$.

附录 A. 6

1. 寻常点.
3. 奇点，不正则.
5. 正则奇点.
7. $r_1=0$，$r_2=-\frac{1}{2}$，$r_1-r_2=\frac{1}{2}$，情形 I，$y_1=1-\frac{1}{3!}x+\frac{1}{5!}x^2-\frac{1}{7!}x^3+\cdots=\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$，$y_2=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{4!}$

$x^{3/2}-\frac{1}{6!}x^{5/2}+\cdots=\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

9. $r_1=\frac{5}{2}$，$r_2=2$，$r_1-r_2=\frac{1}{2}$，情形Ⅰ，$y_1=x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots=x^2\cosh\sqrt{x}$，$y_2=x^{5/2}+\frac{1}{3!}x^{7/2}+\frac{1}{5!}x^{9/2}+\cdots=x^2\sinh\sqrt{x}$.

11. $r_1=\frac{1}{2}$，$r_2=0$，$r_1-r_2=\frac{1}{2}$，情形Ⅰ，$y_1=\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^{3/2}+\frac{1}{8}x^{5/2}-\cdots=\sqrt{x}e^{-x/2}$，$y_2=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(2n)!}n!\ x^n$.

13. $r_1=r_2=0$，情形Ⅱ，$y_1=1-x$，$y_2=(1-x)\ln x+3x-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{36}x^3$.

15. $r_1=0$，$r_2=-1$，$r_1-r_2=1$，情形Ⅲ，$y_1=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\cdots=e^{-x}$，$y_2=\frac{1}{x}-1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3!}x^2+\cdots=\frac{e^{-x}}{x}$.

17. $r_1=-1$，$r_2=-2$，$r_1-r_2=1$，情形Ⅲ，$y_1=\frac{1}{x}+\frac{1}{3!}x+\frac{1}{5!}x^3+\cdots=\frac{\sinh x}{x^2}$，$y_2=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4!}x^2+\frac{1}{6!}x^4+\cdots=\frac{\cosh x}{x^2}$.

19. $r_1=r_2=-1$，情形Ⅱ，$y_1=\frac{1}{x}-1+\frac{1}{4}x-\frac{1}{36}x^2+\cdots$，$y_2=2-\frac{3}{4}x+\frac{11}{108}x^2-\cdots+y_1\ln x$.

21. $r_1=1$，$r_2=-1$，$r_1-r_2=2$，情形Ⅲ，$y_1=x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4!}x^3+\cdots$，$y_2=-\frac{2}{x}+2-\frac{4}{9}x^2-\cdots+y_1\ln x$.

23. $r_1=\frac{5}{2}$，$r_2=2$，$r_1-r_2=\frac{1}{2}$，情形Ⅰ，$y_1=x^{5/2}-\frac{1}{3!}x^{7/2}+\frac{1}{5!}x^{9/2}-\cdots=x^2\sin\sqrt{x}$，$y_2=x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4!}x^4-\cdots=x^2\cos\sqrt{x}$.

25. $r_1=1$，$r_2=-1$，$r_1-r_2=2$，情形Ⅲ，$y_1=x-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4!}x^3-\cdots$，$y_2=-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}+\frac{291}{144}x+\cdots+\frac{1}{4}y_1\ln x$.

27. $r_1=r_2=0$，情形Ⅱ，$y_1=\frac{1}{1-x}$，$y_2=\frac{\ln x}{1-x}$.

33. $y=c_1x^{-\sqrt{2}}+c_2x^{\sqrt{2}}$.

35. $y=c_1\cos\left(\frac{\ln x}{3}\right)+c_2\sin\left(\frac{\ln x}{3}\right)$.

索　引

索引中的页码为英文原书页码，与书中页边标注的页码一致.

C

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

T

U

V

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝偏微分方程教程　　原书第２版
作者＝（美）ＮＡＫＨＬＥ　Ｈ．ＡＳＭＡＲ著；陈祖墀　宣本金译
丛书名＝华章数学译丛
页数＝６９８
ＳＳ号＝１１７６１６０５
出版日期＝２００６．１０
出版社＝北京：机械工业出版社
ＩＳＢＮ号＝７－１１１－１９７４６－１
中图法分类号＝Ｏ１７５．２
原书定价＝８５．００
主题词＝偏微分方程－教材
参考文献格式＝（美）ＮＡＫＨＬＥ　Ｈ．ＡＳＭＡＲ著；陈祖墀　宣本金译．偏微分方程教程　　原书第２版．北京：机械工业出版社，２００６．１０．